

## Отчет по проекту РФФИ 19-01-00657-а (итоговый)

### Исследование динамики квантовых систем, систем теории упругости и электродинамики современными методами функционального анализа

(Investigation of the dynamics of quantum systems, systems of elasticity theory and electrodynamics by modern methods of functional analysis)

Руководитель проекта: доц. Фаддеев Михаил Михайлович (СПбГУ)

Область знания: математика

Научная дисциплина: 01-109 Вещественный и функциональный анализ

Научная дисциплина (дополнительные коды):

01-113 Математическая физика

01-111 Дифференциальные уравнения с частными производными

01-108 Комплексный анализ

Ключевые слова: теория операторов, спектральная теория, композиты, тонкие сети, метаматериалы, модели с временной и пространственной дисперсией, квантовые графы, операторы Шредингера, матрицы Якоби, функциональные модели, несамосопряжённые операторы

#### Аннотация

Проект направлен на изучение различных моделей самосопряженных и несамосопряженных операторов с целью строгого математического моделирования и исследования высоконтрастных сред, «умных», или функциональных, материалов, материалов с пространственной и временной дисперсией и проблем квантовой физики, обладающих необычными спектральными структурами.

За отчетный период проведены следующие основные исследования.

В области изучения функциональных моделей и теории рассеяния осуществлено полностью конструктивное построение транзитивной формы самосопряженной дилатации произвольного максимального диссипативного оператора в терминах теории узлов, удобной при исследовании интегральных операторов и дифференциальных операторов в частных производных. Далее, в данной задаче осуществлено полностью конструктивное построение спектральной формы самосопряженной дилатации.

Проведено построение функциональной модели максимального диссипативного оператора, возникающего при изучении композитов. В соответствующем модельном представлении получены формулы для резольвент «близких» операторов, в том числе самосопряженного, отвечающего стандартному условию связи на интерфейсе раздела различных материалов. На этой базе изучена задача рассеяния, получены явные выражения для матриц рассеяния в терминах подходящих отображений типа Дирихле-к-Нейману.

*В области исследования метаматериалов и сред с временной дисперсией предложена и обоснована новая теоретико-операторная схема в задаче гомогенизации периодического композита в случае высокого контраста, основанная на исследовании асимптотики отображения Дирихле-к-Нейману, отвечающего границе между компонентами композита. Данная схема применена к детальному изучению ряда важных моделей дифференциальных операторов. Введено понятие асимптотических режимов в плоскости частота-контраст, приводящих к мультипольным моделям эффективного материала.*

*В области изучения тонких структур и квантовых графов продолжено изучение поведения первых собственных значений при склеивании двух эрмитовых квантовых графов. Изучена сходимость дифференциальных операторов в частных производных, заданных на тонких структурах, к операторам на метрических графах в топологии нормы разности резольвент в случае оператора Лапласа. Изучена резольвентная сходимость операторов Лапласа на тонких структурах в резонансном случае к соответствующим операторам на метрических графах при условии, что вершинные области обладают нетривиальной внутренней структурой (включения, малые отверстия). Изучено поведение первых собственных значений при склеивании двух эрмитовых квантовых графов.*

*В области исследования матриц Якоби и спектральных фазовых переходов получены оценки «матричных элементов» матриц Грина для эрмитовых неограниченных блочных матриц Якоби в случае наличия разрыва в существенном спектре; получены новые формулы для спектральной плотности матриц Якоби в трудном критическом случае; найдены новые методы доказательства оценок матричных элементов резольвент эрмитовых неограниченных блочных матриц Якоби, позволяющие улучшить существующие результаты; обнаружено далеко идущее обобщение и уточнение условий дискретности спектра и принадлежности идеалам компактных операторов для матриц Якоби с растущими весами.*

*В области исследования вероятностных моделей исследовались вероятностные представления решений задач Коши для ряда эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами. В рамках методов теории отражающихся процессов рассматривались одномерные марковские процессы специального вида. С использованием методов теории операторов исследовались аппроксимации локального времени случайных процессов. Также соответствующие методы использовались для анализа случайных процессов с переключениями. В рамках исследований методами гармонического анализа вопросов существования локального времени у комплексного одномерного винеровского процесса предложена схема регуляризации возникающих в связи с данной постановкой расходящихся интегралов.*

### **Аннотация (на английском языке)**

*The project is directed at the study of various models of self-adjoint and non-self-adjoint operators with the aim of rigorous mathematical modelling and investigation of high-contrast media, "smart" or functional materials, materials with spatial and time dispersion, and of problems of quantum physics possessing unusual spectral structures.*

*In the course of the project, the following major investigations were carried out.*

*In the area of functional models and scattering theory, we have carried out a completely explicit construction of a transitive form of the self-adjoint dilation of an arbi-*

trary maximal dissipative operator in terms of the operator knots theory. This form of the functional model is particularly suitable in the study of integral and partial differential operators. Furthermore, in this area we have carried out a completely explicit construction of the spectral form of the self-adjoint dilation.

We have also constructed a functional model of a maximal dissipative operator appearing in the study of composites. In the corresponding model representation we have obtained new formulae for the resolvents of "close" operators, including the self-adjoint one corresponding to the standard matching condition on the interface between different materials of the composite. On this basis, the scattering problem was studied and explicit expressions for scattering matrices were obtained in terms of suitable Dirichlet-to-Neumann type maps.

In the area of study of metamaterials and of time-dispersive media, we have introduced and justified a novel operator-theoretical framework in the homogenisation problem of a periodic critical-contrast composite, which is based on the asymptotic analysis of Dirichlet-to-Neumann maps pertaining to the interface between the components of the composite. This framework was applied in a detailed study of a number of important models of differential operators. The notion of asymptotic regimes in the frequency-contrast plane has been introduced, leading in particular to multipole models of the effective material.

In the study of thin structures and quantum graphs, we have continued the investigation of the lower eigenvalues under the procedure of gluing two Hermitian quantum graphs together. We have also investigated the convergence of partial differential operators defined on thin structures to operators on metric graphs in the norm resolvent topology in the case of the Laplace operator. We have also investigated the convergence of partial differential operators defined on thin structures to operators on metric graphs in the norm resolvent topology in the case of the Laplace operator and when in addition the vertex-type subsets possess internal structure (such as inclusions or voids). An investigation of the lower eigenvalues under the procedure of gluing two Hermitian quantum graphs together was carried out.

In the study of Jacobi matrices and spectral phase transitions, we have obtained estimates for the "matrix elements" of Green's matrices for unbounded Hermitian block Jacobi matrices in the case where there exists a gap in the essential spectrum; obtained new formulae for the spectral density of Jacobi matrices in the complicated critical case; we have obtained new methods to prove estimates for matrix elements of resolvents of Hermitian unbounded block Jacobi matrices, which allowed us to enhance some existing results; we also uncovered a far-reaching generalisation of the spectral discreteness condition as well as of the condition for Jacobi matrices with growing weights to belong to ideals of compact operators.

In the area of probabilistic models we studied probabilistic representations of Cauchy problem solutions for a number of evolution equations with pseudodifferential operators. Within the framework of reflecting processes theory, we considered one-dimensional Markov processes of a special form. Approximations of local time for random processes were investigated using methods of the operator theory. The corresponding methods were also applied in the analysis of random switching processes. Within the framework of investigation of the local time existence problem using methods of harmonic analysis, in the case of one-dimensional Wiener process a regularisation procedure was suggested for divergent integrals which appear in connection to this setup.

### ***Цель и задачи проекта.***

Изучение различных моделей самосопряженных и несамосопряженных операторов с целью детального исследования высококонтрастных сред, «умных» материалов, материалов с пространственной и временной дисперсией, фотонных волноводов и проблем квантовой физики, обладающих необычными спектральными структурами. В частности, исследование задачи математического моделирования эффектов, связанных с присутствием метаматериалов.

Целью проекта является проведение математических исследований, мотивированных необходимостью изучения неклассических материалов и связанных задач с необычными спектральными структурами, в следующих взаимосвязанных областях:

А. Метаматериалы и среды с временной дисперсией: обоснование нового абстрактного теоретико-операторного подхода к задачам гомогенизации в случае критического контраста, свободного от искусственных ограничений и проясняющего связь между эффективными операторами и отвечающими им постановками с временной и/или пространственной дисперсией.

Б. Функциональные модели и теория рассеяния: развитие методов функциональных моделей несамосопряженных операторов, изучение на их базе задачи рассеяния на метаматериалах, а также модифицированных формулировок принципа предельного поглощения, применимых к последним.

В. Тонкие структуры и квантовые графы: изучение сходимости дифференциальных операторов различных классов, заданных на тонких структурах, к предельным операторам на метрических графах, а также связанных вопросов спектрального анализа квантовых графов.

Г. Матрицы Якоби и спектральные фазовые переходы: детальное изучение классических и блочных матриц Якоби и, в частности, различных моделей спектральных фазовых переходов в них.

Д. Вероятностные модели: изучение стохастических моделей гомогенизации в случае критического контраста, а также связанных моделей случайных операторов.

### ***Важнейшие результаты, полученные при реализации проекта.***

#### **А. Метаматериалы и среды с временной дисперсией:**

Предложена и обоснована новая теоретико-операторная схема в задаче гомогенизации периодического композита в случае высокого контраста, основанная на исследовании асимптотики отображения Дирихле-к-Нейману, отвечающего границе между компонентами композита. Данная схема применена к детальному изучению следующих моделей: во-первых, к модели периодического вдоль одной оси графа, и во-вторых, к оператору, отвечающему модели двойной пористости (double porosity model). В последней ситуации разобран не только классический случай «мягких» включений на жесткой «матрице» (в предположении, что жесткая компонента материала глобально связна), но и случай «жестких» включений на мягкой матрице, к которому неприменимы ранее разработанные в данной области методы исследования. Во всех исследованных случаях получено полное описание эффективной среды (а также оптимальные оценки для нормы разности резольвент исходного и эффективного операторов, что позволяет явно контролировать невязку эффективной модели), а также получено явное описание метаматериальных свойств (или, что в данных случаях то же самое, свойств памяти, или временной дисперсии) последней.

Полученные явные формулы, выражающие временную дисперсию эффективной среды в терминах характеристик включений, позволят далее решить обратную задачу построения метаматериала с наперед заданными свойствами для всех разобранных моделей.

Начато изучение случая не скалярных дифференциальных операторов, в том числе операторов теории упругости. В данной области подробно разобрана модель высококонтрастной “ламинированной” среды, а также (аналогичными методами) ситуация бесконечной жесткой тонкой плиты на полупространстве сравнительно более мягкого материала.

Начат анализ модели мелкопористой среды в ситуации, когда размер пор мал по сравнению с периодом среды, а на их границах наложено краевое условие Дирихле или третьего типа, а также изучение модели композитной струны в случае высокого контраста.

В моделях гомогенизации критического контраста, введено понятие так называемых асимптотических режимов в плоскости безразмерных параметров контраст (отношение материальных параметров компонент композита) — приведенная длина волны (отношение длины волны в жесткой компоненте композита к характерному размеру последней). Асимптотика подразумевается по одновременному стремлению контраста к бесконечности и приведенной длины волны к нулю, что приводит математически к своего рода переходным режимам между классической моделью двойной пористости и так называемой высокочастотной гомогенизацией критического контраста (в первом случае спектральный параметр оказывается лежащим в компакте, а во втором растет пропорционально контрасту). Показано, что указанные переходные режимы отвечают квадрупольной, октупольной и в общем случае мультипольной моделям эффективной среды (для классической модели двойной пористости нами ранее установлен дипольный характер эффективной модели). В квадрупольном режиме данный анализ позволил полностью описать возникновение электромагнитного метаматериала с отрицательным коэффициентом преломления на базе ламинированного композита и тем самым впервые дать исчерпывающее теоретическое обоснование известным недавним экспериментальным результатам, касающимся построения практической суперлинзы на базе ламината из немагнитных диэлектриков. Проведено также численное моделирование для ситуации круглых включений в модели двойной пористости методами, восходящими к работам Мовчана и др., позволяющее отследить возникновение квадрупольной системы лакун на зонном спектре эффективной модели. Начато подробное описание этого эффекта нашим теоретико-операторным методом, позволяющим получить существенно более полную информацию (метод Мовчана в данной ситуации дает исключительно численные результаты, и лишь касательно левых краев квадрупольных лакун). Ожидается, что продолжение данного исследования позволит получить явные выражения для коэффициентов преломления, как функции от частоты. Интересно отметить, что возникновение метаматериала в моделях, основанных на ламинате, происходит по механизму, существенным образом отличному от предложенного Веселаго (т.е. одновременного обращения знаков диэлектрической и магнитной проницаемости эффективной среды). Именно, обращение направлений фазовой и групповой скоростей происходит лишь в направлении, ортогональном слоям ламината.

## **Б. Функциональные модели и теория рассеяния:**

Осуществлено полностью конструктивное построение транзитивной формы самосопряженной дилатации произвольного максимального диссипативного оператора в терминах теории узлов (Одесская школа теории операторов), крайне удобной (в отличие от стандартного абстрактного подхода) при исследовании интегральных операторов и дифференциальных операторов в частных производных. Данная модель позволяет получать результаты не в полностью абстрактных терминах, а в терминах коэффициентов (параметров) исследуемого максимального диссипативного оператора. Получены новые результаты, касающиеся упрощенного варианта минимальной самосопряженной дилатации в специальных случаях, гораздо более общих, чем случай отделения мнимой части оператора. В частности, исследован случай максимального диссипативного оператора из теории расширений симметричных операторов, включающий ранее не изученную ситуацию разных индексов дефекта.

Проведено построение функциональной модели максимального диссипативного оператора, возникающего при изучении композитов. В соответствующем модельном представлении получены формулы для резольвент «близких» операторов, в том числе самосопряженного, отвечающего стандартному условию связи на интерфейсе раздела различных материалов. Изучены вопросы модельного и немодельного описания абсолютно непрерывных подпространств. Получена асимптотика (чисто дискретного) спектра для оператора, описывающего жесткое включение в относительно мягкой компактной матрице, возникающего в классических задачах типа ультразвуковой диагностики. Здесь же начато изучение асимптотики матрицы рассеяния. Для этой задачи установлено представление оператора, отвечающего краевой задаче на компактной части (компактная мягкая матрица, содержащая жесткое включение) в виде треугольного возмущения оператора Теплица в пространстве с воспроизводящим ядром.

На базе построенной в рамках проекта функциональной модели максимального диссипативного оператора, возникающего при изучении композитов, методами функциональной модели изучена задача рассеяния, получены явные выражения для матриц рассеяния в терминах подходящих отображений типа Дирихле-к-Нейману. Отметим здесь, что в этой части исследования мы имеем в виду консервативную постановку, в которой материалы, составляющие композит, предполагаются непоглощающими (в отличие от более общей постановки вопроса, изложенной абзацем выше). Тем не менее, метод построения теории рассеяния, приводящий к явному выражению для матрицы рассеяния, основан здесь на функциональной модели специальным образом выбранного диссипативного оператора и тем самым является существенно несамосопряженным. Данный метод был впервые предложен в 1980х годах С.Н. Набоко.

## **В. Тонкие структуры и квантовые графы:**

Изучено поведение первых собственных значений при склеивании двух эрмитовых квантовых графов. С использованием обобщенных отображений Дирихле-к-Нейману найдены новые необходимые и достаточные условия «монотонности» поведения первых собственных значений при произвольном склеивании графов.

Изучена сходимость дифференциальных операторов в частных производных, заданных на тонких структурах, к операторам на метрических графах в топологии

нормы разности резольвент в случае оператора Лапласа. Полученные здесь результаты являются глубоким обобщением известных о спектральной сходимости (Кучмент, Зенг, Экснер, Пост). В частности, из наших результатов немедленно вытекает точная скорость спектральной сходимости и тем самым выявлена резонансная природа специального случая, обнаруженного цитируемыми выше авторами. Более того, прослежено ухудшение спектральной сходимости в ситуации, когда объемы «вершинных» областей тонкой структуры убывают медленно, что позволяет связать указанные выше результаты с результатами Павлова для вершинных областей фиксированного объема. Получено явное описание свойств временной и пространственной дисперсии, возникающих в тонких структурах при исключении «ребер» из наблюдаемой части системы. Далее, в данной области изучена задача, в которой области типа вершин рассматриваемой тонкой структуры находятся в резонансном случае, выявленном ранее Кучментом, Зенгом, Экснером, Постом, а также обладают некоторой внутренней структурой (например, снабжены малыми выколотыми отверстиями с краевыми условиями Дирихле или Робена). В обсуждаемом случае нами описано дополнительное резонансное условие (накладываемое на скорость уменьшения отверстия относительно скорости уменьшения всей области типа вершины, а также, в случае условия Робена, на соответствующую константу в граничном условии), при соблюдении которого условие связи в вершине у предельного дифференциального оператора на метрическом графе существенным образом изменяется (в частности, на данном пути оказывается возможным получить условие дельта-типа, по сравнению с условием дельта-штрих-типа, возникающим в ситуации отсутствия внутренней структуры).

### Г. Матрицы Якоби и спектральные фазовые переходы:

Получены оценки «матричных элементов» (которые сами являются матрицами) матриц Грина для эрмитовых неограниченных блочных матриц Якоби в случае наличия разрыва в существенном спектре. Рассмотрены многочисленные примеры (некоторые — частично эвристически), иллюстрирующие ситуацию.

Для эрмитовых матриц Якоби с внедиагональными элементами вида  $a_n = n^a$  и диагональными элементами вида  $b_n = bn^a$  с  $0 < a < 1$  получены новые формулы для спектральной плотности (т.е. производной спектральной функции) в трудном критическом случае  $b = \pm 2$  в терминах пределов некоторых выражений от ортогональных полиномов. Предложенная техника позволяет также более просто получать и результаты в некритическом случае  $-2 < b < 2$ , ранее рассмотренном Аптекаревым и Джеронимо. Указанные результаты можно рассматривать как еще один шаг в исследовании трудной задачи исследования спектрального фазового перехода от дискретного спектра к абсолютно непрерывному и наоборот. В нашей модели такой спектральный фазовый переход имеет место при прохождении параметром  $b$  через значения 2 и -2.

Найдены новые методы доказательства оценок матричных элементов резольвент эрмитовых неограниченных блочных матриц Якоби, позволяющие улучшить существующие результаты. Методы применимы независимо от наличия конечной или полубесконечной лакуны в существенном спектре оператора и дают оценку для всех не вещественных значений спектрального параметра. При этом, как и в предшествующих работах по данному вопросу (Janas-Naboko (2013), Janas-Naboko-Silva (2018, 2020)), в случае лакуны в существенном спектре результат распространяется на ве-

ществленные значения спектрального параметра, лежащие в лакуне, причем для точек дискретного спектра, которые могут там быть, вместо оценки резольвенты получается оценка компонент собственного вектора. Точность оценок подтверждается специально подобранными примерами, для анализа которых доказан асимптотический результат в духе теоремы Левинсона, обобщающий один из результатов Янаса и Мошинского (2003).

Обнаружено далеко идущее обобщение и уточнение условий дискретности спектра и принадлежности идеалам компактных операторов для матриц Якоби с растущими весами. Это обобщение состоит в окончательном критерии дискретности спектра и принадлежности резольвенты сингулярной канонической системы широкому классу симметрично нормированных идеалов. Указанный класс включает в себя все идеалы, удовлетворяющие свойству Мацаева, в частности, идеалы Шаттена-фон Неймана  $S^p$ ,  $1 < p$ , а также более общие идеалы типа Орлича, идеалы типа Лоренца, и многие другие. Удалось также указать критерий принадлежности резольвенты произвольным идеалам типа Орлича или Лоренца. Полученные результаты могут рассматриваться как точные оценки на функцию Грина оператора.

#### **Д. Вероятностные модели:**

Исследовались вероятностные представления решений задач Коши для ряда эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами. Использовался способ аппроксимации точного решения задачи Коши регуляризованными математическими ожиданиями функционалов от сумм независимых случайных величин. Получены оценки скорости сходимости аппроксимации к точному решению в метрике пространств Соболева.

В рамках методов теории отражающихся процессов рассматривались одномерные марковские процессы специального вида, которые являются несимметричными скачкообразными процессами Леви, принимающими значения на конечном интервале и отражающимися от граничных точек. Исследовались свойства полугрупп операторов, порожденных указанными процессами.

В рамках исследований методами гармонического анализа вопросов существования локального времени у комплексного одномерного винеровского процесса предложена схема регуляризации возникающих в связи с данной постановкой расходящихся интегралов. Показано, что средние значения функционалов от построенных объектов имеют свойства, аналогичные свойствам средних значений функционалов от локального времени вещественного винеровского процесса. Построен аналог локального времени процесса комплексного броуновского движения.

Получен ряд новых результатов, относящихся к исследованию локального времени случайных процессов — получена аппроксимация локального времени винеровского процесса обобщенным локальным временем последовательности сложных пуассоновских процессов. В рамках данных исследований рассмотрено вероятностное представление оператора Шредингера на оси с дельтаобразным потенциалом и аппроксимация данного оператора последовательностью интегро-дифференциальных (первого порядка) операторов в смысле сильной сходимости полугрупп экспонент, порожденных исследуемыми операторами. Рассмотрена задача о локальном отражении винеровского процесса.



### *Сопоставление результатов, полученных при реализации с мировым уровнем*

Получены результаты мирового уровня. По результатам проекта опубликованы статьи в ведущих международных научных журналах, в том числе 7 статей в журналах, относящихся к первому квартилю по WoS/Scopus.

### *Методы и подходы, использованные при реализации проекта*

В задачах высококонтрастной гомогенизации, а также в связанных с нею задачах моделирования метаматериалов и материалов с временной и пространственной дисперсией, методы спектральной теории и теории операторов ранее применялись лишь эпизодически. Проведенные нами исследования в указанных областях выявили перспективность применения здесь хорошо разработанных методик спектрального анализа.

Отметим, что в исследовании задач, которым посвящен настоящий проект, весьма перспективным оказывается также применение целого ряда методик и подходов несамосопряженного спектрального анализа в самосопряженной теории операторов. Вытекающее отсюда взаимовлияние и взаимообогащение самосопряженного и несамосопряженного подходов является характерной чертой исследований, которые проводятся в рамках настоящего проекта.

В частности, нами использовались следующие основные методы исследований и подходы.

**1.** Современные методы математической теории рассеяния, такие, как теория резонансного рассеяния, теория Лакса-Филипса и ее модификации для операторов с различной структурой спектра. Основным функциональным параметром здесь является оператор (матрица) рассеяния; активно развивающиеся в последнее время методы исследования, основанные на изучении отображения Дирихле-Неймана, а также абстрактных операторных  $M$ -функций.

**2.** Методы исследования разрешимости обратных задач восстановления оператора по информации о граничном поведении решений уравнения (отображение Дирихле-Неймана).

**3.** Одним из подходов к несамосопряженным спектральным задачам является использование функциональных моделей. Функциональные модели использовались при получении многих результатов в математической физике и спектральном анализе, в столь разных областях, как изучение операторов Шредингера с комплексными потенциалами и несамосопряженными граничными данными, исследование оператора Больцмана и стохастическая квантовая динамика.

**4.** Методы спектральной теории несамосопряженных операторов, использующие, в частности, функциональную модель оператора, где основным функциональным параметром является характеристическая функция, в комбинации с асимптотическими методами; математический аппарат теории граничных значений аналитических функций.

**5.** Современные асимптотические методы и методы комплексного анализа при решении задач, связанных с дифференциальными и разностными операторами, в частности, быстро развивающаяся техника ВКБ для матриц Якоби (исследование асимптотик обобщенных собственных векторов матриц Якоби ВКБ-методами).

*Апробация результатов реализации Проекта на научных мероприятиях.*

1. Набоко С.Н. (приглашенный доклад) On the detectable subspaces of the Friedrichs model, октябрь 2019, Bordeaux University, Франция.
2. Набоко С.Н. (приглашенный доклад) On the dissipative quantum graphs I, ноябрь 2019, Quantum Graphs Seminar, Stockholm University, Швеция.
3. Набоко С.Н. (приглашенный доклад) On the dissipative quantum graphs II, декабрь 2019, Quantum Graphs Seminar, Stockholm University, Швеция.
4. Романов Р.В. (приглашенный доклад) Canonical systems in ideals of compact operators, конференция One-Dimensional Complex Analysis and Operator Theory, May 13-17, 2019, St Petersburg.
5. Романов Р.В. (приглашенный доклад) A characterization of canonical systems in classes of compact operators, Intensive research program SAFAIS2019, “Spaces of analytic functions: Approximation, Interpolation, Sampling”, Barcelona (Испания), October 21 – December 15, 2019.
6. Романов Р.В. Характеризация функций Эрмита–Билера в терминах канонических систем. Семинар по комплексному анализу, МИАН, Москва, сентябрь 2019 г.
7. Романов Р.В. (пленарный доклад) Canonical systems in ideals of compact operators. Конференция Operator Theory and Krein Spaces (dedicated to the memory of Hagen Neidhardt), Vienna (Австрия), December 19-22, 2019
8. Николаев А.К. Невероятностные аналоги процесса Коши. Третья Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, декабрь 2019.
9. Цыкин С.В. Об одной предельной теореме, связанной с решением задачи Коши для уравнения Шредингера с оператором дробного дифференцирования высокого порядка. Третья Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, декабрь 2019.
10. Ершова Ю.Ю., международная конференция Operator theory, analysis and mathematical physics 2020 (Мехико, январь 2020), устный доклад
11. Киселев А.В., семинар Asymptotics, Operators, and Functionals (Университет Бата, Великобритания, 10 февраля 2020), доклад Non-selfadjoint operators, their spectra, and functional models.
12. Киселев А.В., воркшоп BUC-XVIII (Мерида, Юкатан, Мексика, январь 2020), доклад Scattering on a penetrable composite obstacle in conservative and non-conservative setups.
13. Николаев А.К., международная конференция St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics, декабрь 2021, секционный доклад.
14. Киселев А.В. (приглашенный доклад) EUROMECH-626 “Mechanics of high-contrast elastic composites”, Keele, UK (Sep 2021) доклад: “Norm-resolvent convergence to zero-range models with internal structure in models with strong inhomogeneities”
15. Киселев А.В. (приглашенный доклад) IWOTA-2021, Lancaster, UK (Aug 2021) доклад: “Zero-range model with an internal structure as a norm-resolvent asymptotics in a strongly inhomogeneous medium”
16. Киселев А.В. (устный доклад) Beijing-Saint Petersburg math colloquium (7 октября 2021), доклад: Norm-resolvent convergence to zero-range models with internal

structure in models with strong inhomogeneities

17. Киселев А.В. (устный доклад) Семинар Asymptotics, Operators, and Functionals (Университет Бата, Великобритания, 29 ноября 2021), доклад: Norm-resolvent convergence to zero-range models with internal structure in models with strong inhomogeneities.

18. Киселев А.В. (устный доклад) Семинар ПОМИ РАН по дифракции и распространению волн (Санкт-Петербург, 16 марта 2021), доклад: “О спектральной асимптотике краевой задачи в области с включением высокого контраста”

## Публикации по результатам Проекта

- [1] Kirill Cherednichenko, Yulia Ershova, and Alexander V. Kiselev. *Time-Dispersive Behavior as a Feature of Critical-Contrast Media* // SIAM J. Appl. Math., 79(2), 690–715. <https://doi.org/10.1137/18M1187167>
- [2] K.D. Cherednichenko, Yu.Yu. Ershova, A.V. Kiselev, S.N. Naboko. *Unified approach to critical-contrast homogenisation with explicit links to time-dispersive media* // Тр. ММО, 80, no. 2, МЦНМО, М., 2019, 295–342. MathNet.ru
- [3] Brown B. M., Marletta M., Naboko S., Wood I. G. *The Detectable Subspace for the Friedrichs Model* // Integral Equations and Operator Theory, vol. 91 (5), 2019. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00020-019-2548-9>
- [4] Romanov Roman, Woracek Harald. *Canonical systems with discrete spectrum* // Journal of Functional Analysis vol. 278 (4), pp. 108318, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108318>
- [5] А.К. Николаев, М.В. Платонова. *Предельные теоремы о сходимости к обобщенным процессам типа Коши* // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, т. 486, с. 214-228. <http://www.pdmi.ras.ru/zns1/2019/v486/abs214.html>
- [6] С. Н. Набоко, С. А. Симонов, *Формула Вейля–Титчмарша для спектральной плотности класса матриц Якоби в критическом случае*, Функц. анализ и его прил., 55:2 (2021), 21–43; Funct. Anal. Appl., 55:2 (2021), 94–112. <https://doi.org/10.4213/faa3857>
- [7] Jan Janas, Sergey Naboko, Luis O. Silva. *Green matrix estimates of block Jacobi matrices II: Bounded gap in the essential spectrum* // Integral Equations and Operator Theory, 92 (2020), no. 3, Paper No. 21, 30 pp. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00020-020-02576-7>
- [8] Kirill D. Cherednichenko, Yulia Yu. Ershova, Alexander V. Kiselev. *Effective behaviour of critical-contrast PDEs: micro-resonances, frequency conversion, and time dispersive properties. I.* // Communications in Mathematical Physics 375 (2020), no. 3, 1833–1884. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00220-020-03696-2>

- [9] Brown, Malcolm; Marletta, Marco; Naboko, Serguei; Wood, Ian. *The functional model for maximal dissipative operators (translation form): an approach in the spirit of operator knots.* // Transactions of American Math. Soc. 373 (2020), no. 6, 4145–4187. <https://www.ams.org/journals/tran/2020-373-06/S0002-9947-2020-08029-5/>
- [10] Смородина Н.В., Фаддеев М.М. *Предельная теорема для диффузионных процессов с переключениями* // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, т. 495, с. 267–276. <ftp://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns1/v495/p267.pdf>
- [11] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об аппроксимации локального времени винеровского процесса функциоалами от случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен., 66:1 (2021), 73–93. <http://mi.mathnet.ru/tvp5410>
- [12] Cherednichenko, K.D., Kiselev, A.V. and Silva, L.O. (2021), *Functional Model For Boundary-Value Problems.* *Mathematika*, 67: 596-626. <https://doi.org/10.1112/mtk.12092>
- [13] Kurasov, Pavel; Naboko, Sergei. *Gluing graphs and the spectral gap: a Titchmarsh-Weyl matrix-valued function approach.* // *Studia Math.* 255 (2020), no. 3, 303–326. <https://doi.org/10.4064/sm190322-4-11>
- [14] Николаев А.К., *Аналог локального времени для комплекснозначного винеровского процесса.* Записки научн. сем. ПОМИ РАН, т. 505 (2021), с. 172–184. <http://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns1/v505/p172.pdf>
- [15] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М. *Об Одном Семействе Комплексных Стохастических Процессов.* Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. т. 501 (2021), вып. 1, с. 38–41. <http://elibrary.ru/item.asp?doi=10.31857/S2686954321060072>
- [16] Ibragimov I.A., Smorodina N.V., Faddeev M.M. (2021) *Local Time and Local Reflection of the Wiener Process.* In: Karapetyants A.N., Pavlov I.V., Shiryaev A.N. (eds) *Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2020.* Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 358. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-76829-4\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76829-4_12)
- [17] М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрического пространства с мерой и ее приложение*, Матем. сб., 211:4 (2020), 44–62; M. I. Belishev, S. A. Simonov, *The wave model of a metric space with measure and an application*, Sb. Math., 211:4 (2020), 521–538. <http://mi.mathnet.ru/sm9242>