

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

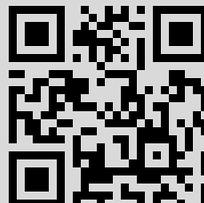
А. П. Гринин, Ф. М. Куни, А. К. Щекин, Кинетика установления стационарного процесса гомогенной конденсации пересыщенного пара, *ТМФ*, 1982, том 52, номер 1, 127–137

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.66.159.156

4 декабря 2021 г., 22:24:13



## КИНЕТИКА УСТАНОВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ГОМОГЕННОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПЕРЕСЫЩЕННОГО ПАРА

Гринин А. П., Куни Ф. М., Щекин А. К.

На основе уравнения для спектра размеров зародышей новой фазы, справедливое как при больших, так и при малых пересыщениях, исследуется кинетика формирования стационарного процесса гомогенной конденсации. В каждой единице объема системы предполагаются наличие источника конденсирующегося вещества постоянной мощности и отвод зародышей новой фазы, достигших определенного размера. Сформулированы условия, при которых стационарный процесс будет устойчивым финальным состоянием системы. Показано, что микроскопическая поправка в выражении для работы образования зародыша, связанная с зависимостью поверхностного натяжения от кривизны поверхности зародыша, играет существенную роль в определении значений параметров системы, допускающих установление стационарного процесса. Определены характерные времена формирования стационарного процесса.

### ВВЕДЕНИЕ

Предметом настоящего рассмотрения является исследование закономерностей установления в неравновесной системе зародышей новой фазы стационарного распределения зародышей по размерам. Изучение условий формирования универсальных распределений представляет большой интерес в кинетике фазовых переходов первого рода. В работе Лифшица и Слезова [1] было найдено распределение зародышей, возникающее на заключительной стадии эволюции ансамбля зародышей, названной авторами стадией коалесценции. При определенных условиях, сформулированных в данной работе, стационарный процесс роста зародышей может быть устойчивым финальным состоянием системы и, таким образом, альтернативой процессу коалесценции.

Для определенности в качестве физической системы будем рассматривать капли жидкости, образующиеся из пересыщенного пара в атмосфере пассивного газа. В каждой единице объема системы предполагается наличие источника пара постоянной мощности и отвод капель, достигших определенного размера. Считается, что длина свободного пробега молекул пара значительно превышает размеры образующихся в нем капель. Поскольку для практической реализации гомогенного механизма конденсации необходимо высокое пересыщение пара в системе, то в основу работы положено микроскопически обоснованное уравнение для функции распределения капель по размерам, справедливое как при малом, так и при большом пересыщении. Температура системы газ — пар — капли в процессе конденсации считается постоянной.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПЕЛЬ ПО РАЗМЕРАМ

Рассмотрим пересыщенный однокомпонентный пар. Степень пересыщения пара  $\xi$  определим по формуле  $\xi = (n_1 - n_{1,\infty})/n_{1,\infty}$ , где  $n_1$  — плотность пара (число молекул в единице объема),  $n_{1,\infty}$  — плотность насыщенного пара над плоской поверхностью жидкой фазы. В качестве независимой переменной при описании спектра размеров капель примем число молекул в капле  $v$ .

Пусть  $n_v(t)$  есть искомое число капель из  $v$  молекул в единице объема системы в момент времени  $t$ . Важным вспомогательным объектом теории является равновесное распределение  $n_v^0$  капель по размерам. Оно выступает как граничное условие к уравнению для  $n_v(t)$  в области малых размеров (см. [2]) и играет решающую роль при нахождении потока молекул, испаряющихся с поверхности капли. Явное выражение для  $n_v^0$ , как ясно из общих термодинамических соображений, имеет вид

$$(1.1) \quad n_v^{(0)} = n_1 \exp(-F_v),$$

здесь  $F_v$  — работа образования капли из  $v$  молекул, выраженная в единицах  $kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. Величину  $F_v$  при указанном выше соотношении между длиной свободного пробега молекул пара и размерами капель определим по формуле

$$(1.2) \quad F_v = av^{2/3} - a\gamma v^{1/3} - bv,$$

в которой

$$(1.3) \quad a = \frac{4\pi\sigma}{kT} \left( \frac{3v}{4\pi} \right)^{2/3},$$

$$(1.4) \quad b = \ln(\xi + 1),$$

$\gamma$  — положительный коэффициент порядка единицы,  $\sigma$  — удельное поверхностное натяжение,  $v$  — объем, приходящийся в жидкости на одну молекулу. Второе слагаемое в правой части (1.2) представляет собой главную микроскопическую поправку к работе образования поверхности капли, связанную с зависимостью поверхностного натяжения от кривизны поверхности.

Согласно (1.1), (1.2) функция  $n_v^{(0)}$  при  $b > 0$  имеет минимум в точке  $v = v_c$ , где  $v_c$  есть критическое число молекул в капле, равное

$$v_c = v_{c,0} \left[ 1 - \frac{3}{2} \gamma v_{c,0}^{-1/3} + O(v_{c,0}^{-2/3}) \right],$$

где

$$(1.5) \quad v_{c,0} = (2a/3b)^3.$$

Ввиду относительной малости поправочных членов в выражении для  $v_c$  мы будем пренебрегать далее различием между  $v_c$  и  $v_{c,0}$  всюду, кроме тех случаев, когда требуется вычислить показательную функцию от работы образования критической капли:  $\exp(F_v) = \exp(1/3 av_{c,0}^{2/3} - a\gamma v_{c,0}^{1/3})$ . Введем в рассмотрение полуширину минимума  $\Delta v_c$ , определив ее как величину отклонения  $|v - v_c|$  от точки  $v_c$ , при котором значение функции

$n_v^{(0)}$  в  $e$  раз больше минимального. Непосредственно из (1.4), (1.2) находим

$$(1.6) \quad \Delta v_c = 3a^{-1/2} v_c^{3/2}.$$

Можно показать, что при условиях

$$(1.7) \quad \Delta v_c \gg 1,$$

$$(1.8) \quad \Delta v_c / v_c \ll 1,$$

выполнение которых в дальнейшем предполагается, в области  $v \geq v_1$ , где  $v_1 \sim v_c - \Delta v_c$ , справедливо следующее уравнение эволюции для функции распределения капель по размерам:

$$(1.9) \quad \frac{\partial n_v(t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v} \left\{ A_v n_v(t) - B_v \frac{\partial n_v(t)}{\partial v} \right\}$$

где

$$(1.10) \quad A_v = 3t_0^{-1} v^{2/3} [\zeta + 1 - \exp(2/3 av^{-1/3})],$$

$$(1.11) \quad B_v = 3/2 t_0^{-1} v^{2/3} [\zeta + 1 + \exp(2/3 av^{-1/3})],$$

$$(1.12) \quad t_0^{-1} = \frac{\alpha u}{12} n_{1,\infty} (4\pi)^{1/2} (3\theta)^{3/2},$$

$u$  — средняя тепловая скорость,  $\alpha$  — коэффициент конденсации. Заметим, что характерное время  $t_0$ , определяемое формулой (1.12), по порядку величины совпадает со временем свободного пробега молекул насыщенного пара.

Уравнение (1.9) есть локальный закон сохранения числа капель в системе с потоком капель  $j_v(t)$  вдоль оси размеров, равным

$$(1.13) \quad j_v(t) = A_v n_v(t) - B_v \partial n_v(t) / \partial v.$$

Это уравнение без указания границ применимости было введено в работе [3]. При  $|v - v_c| < \Delta v_c$  или  $b \ll 1$  оно переходит в известное уравнение Зельдовича — Френкеля [2].

Сформулируем граничные условия к уравнению (1.9). Можно утверждать, что при  $v \ll v_c$  в системе быстро устанавливается равновесное распределение капель по размерам, соответствующее текущему пересыщению. Заметное отклонение от равновесного спектра, как видно из анализа стационарного распределения, появляется лишь при  $v > v_c - \Delta v_c$ , когда становится существенным отвод капель потоком  $j_v$  в область больших размеров. На этом основании в качестве граничного условия в области малых размеров примем

$$(1.14) \quad n_v(t) |_{v=v_1} = n_{v_1}^{(0)}.$$

Предполагая далее, что в рассматриваемых системах капли по достижении некоторого характерного размера при  $v = v_2$ , где

$$(1.15) \quad v_2 \gg v_c,$$

покидают объем, занятый пересыщенным паром, запишем граничное условие в области больших размеров в виде

$$(1.16) \quad n_v(t) |_{v=v_2} = 0.$$

Важным частным решением уравнения (1.9) является стационарная функция распределения  $n_v^{(s)}$ , отвечающая стационарному потоку  $j^{(s)}$  капель вдоль оси размеров. Для  $n_v^{(s)}$  в соответствии с (1.13), (1.14), (1.16) имеем

$$(1.17) \quad n_v^{(s)} = j^{(s)} \int_v^{v_2} \frac{dv'}{B_{v'}} \exp \left\{ - \int_v^{v'} dv'' \frac{A_{v''}}{B_{v''}} \right\}.$$

Согласно (1.14), (1.17) величина стационарного потока  $j^{(s)}$  при данном пересыщении равна

$$(1.18) \quad j^{(s)} = n_{v_1}^{(0)} \left[ \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv'}{B_{v'}} \exp \left\{ - \int_{v_1}^{v'} dv'' \frac{A_{v''}}{B_{v''}} \right\} \right]^{-1}.$$

Интеграл в (1.18) в силу условия (1.8) допускает вычисление по методу перевала. После несложных преобразований при учете формул (1.10), (1.11) и (1.2) – (1.6) получим

$$(1.19) \quad j^{(s)} = (a/\pi)^{1/2} n_{1,\infty} t_0^{-1} (\zeta + 1)^2 \exp(-F_{v_c}).$$

Если известно число молекул пара  $J_0$ , поступающих в единицу времени в единицу объема системы, то поток  $j^{(s)}$  определяется из условия стационарности

$$(1.20) \quad J_0 = j^{(s)} v_2.$$

В этом случае формулы (1.19), (1.20) следует рассматривать как уравнения для нахождения стационарного значения степени пересыщения  $\zeta^{(s)}$  и соответствующего критического числа молекул в капле  $v_c^{(s)}$ . Воспользовавшись (1.2) – (1.8), в нулевом приближении по малому параметру  $v_c^{-1}$  получим

$$(1.21) \quad v_c^{(s)} \simeq \left[ \frac{3}{a} \ln \left[ (a/\pi)^{1/2} n_{1,\infty} v_2 / t_0 J_0 \right] \right]^{1/2}.$$

Во всей области изменения  $v$ , исходя из (1.17), можем получить более простые приближенные выражения для  $n_v^{(s)}$ . Так, в интервале

$$(1.22) \quad v_s \leq v < v_2,$$

где  $v_s$  есть некоторое значение переменной  $v$ , удовлетворяющее условию  $v_s \gg v_c$ , находим

$$(1.23) \quad n_v^{(s)} \simeq j^{(s)} t_0 / 3 v^{3/2} \zeta.$$

Асимптотика (1.23) пригодна практически вплоть до  $v \simeq v_2$ , т. к. влияние граничного условия (1.16) сказывается лишь в малой окрестности  $(v_2 - v \leq (\zeta + 2)/2\zeta)$  точки  $v_2$ .

Исследуя уравнение (1.9), нетрудно выявить основные закономерности установления стационарного распределения (1.17) в условиях, когда пере-  
 насыщение пара поддерживается постоянным. Оказывается, что стационар-  
 ное распределение  $n_v^{(s)}$  и, следовательно, стационарный поток  $j^{(s)}$  форми-  
 руются последовательно, начиная с малых значений  $v$ , причем в интер-  
 вале  $1 < v \leq v_s$  этот процесс завершается за время  $t_s$  порядка

$$(1.24) \quad t_s \sim v_s \Delta v_c / B_{v_c}.$$

Далее граница  $v(t)$ , определяющая область  $v < v(t)$ , в которой к моменту  
 времени  $t$  установилось стационарное распределение, движется с постоян-  
 ной скоростью [4]  $dv(t)/dt = 2j^{(s)}/n_{v(t)}^{(s)} - A_{v(t)}$ . Последняя в соответствии  
 с (1.10), (1.23) при  $v \geq v_s$  выходит на асимптотику

$$(1.25) \quad dv(t)/dt \approx 3v^{2/3}\zeta/t_0.$$

С помощью (1.25) оценим время  $t_{v_2}$ , за которое стационарное распределе-  
 ние установится в интервале (1.22):

$$(1.26) \quad t_{v_2} = t_0 v_2^{1/3} / \zeta.$$

Важный результат, позволяющий упростить последующие выкладки, за-  
 ключается также в том, что при  $t \geq t_s$  в области  $v \geq v_s$  в уравнении (1.9)  
 можно пренебречь диффузионным членом.

Описанный процесс установления стационарного распределения реали-  
 зуется, как уже указывалось, если в объеме системы поддерживается  
 стационарное перенасыщение пара. Воспользуемся изложенным выше и  
 исследуем более общий случай, когда формирование стационарного рас-  
 пределения происходит одновременно с установлением стационарного  
 перенасыщения.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО РАДИУСА

Дополним уравнение эволюции для функции распределения капель по  
 размерам законом сохранения вещества в виде

$$(2.1) \quad J_0 = n_{1,\infty} \frac{d\zeta(t)}{dt} + \frac{dN(t)}{dt} + J_2(t),$$

где  $N(t)$  — полное число молекул в каплях в момент времени  $t$ , определяе-  
 мое по формуле

$$(2.2) \quad N(t) \approx \int_0^{v_2} dv v n_v(t),$$

$J_2(t)$  — число молекул, покидающих единицу объема системы за единицу  
 времени в каплях из  $v_2$  молекул. Предположим, что отвечающее данным  
 $J_0$  и  $v_2$  стационарное значение  $v_c^{(s)}$  удовлетворяет условию (1.15). Рассмот-  
 рение начнем с некоторого момента времени, при котором текущее значе-  
 ние  $v_c(t)$  также удовлетворяет условию (1.15), а основная масса жидкой  
 фазы находится в каплях с  $v \gg v_c(t)$ . Следовательно, при изучении наибо-

лее существенной для интеграла (2.2) области размеров, в уравнении эволюции (1.9) можно пренебречь диффузионным членом и упростить коэффициент в потоковом члене.

Перейдем в упрощенном уравнении к безразмерному радиусу  $\rho$ , определяемому формулой

$$(2.3) \quad \rho = v^{1/2}$$

и к новой искомой функции  $g(\rho, t)$ , связанной с  $n_v(t)$  соотношением

$$(2.4) \quad g(\rho, t) = 3v^{3/2}n_v(t).$$

Из (1.9)–(1.11), (2.3), (2.4) получим

$$(2.5) \quad \frac{\partial g(\rho, t)}{\partial t} = -\zeta(t)t_0^{-1} \frac{\partial g(\rho, t)}{\partial \rho}.$$

Обозначим через  $\rho_c$ ,  $\rho_c^{(s)}$ ,  $\rho(t)$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_2$  значения радиуса  $\rho$ , отвечающие значениям  $v_c$ ,  $v_c^{(s)}$ ,  $v(t)$ ,  $v_s$ ,  $v_2$  переменной  $v$ . Уравнение (2.5) справедливо в интервале

$$(2.6) \quad \rho_s \leq \rho < \rho_2,$$

отвечающем интервалу (1.22) изменения переменной  $v$ . Если в рассматриваемой системе относительное изменение критического радиуса  $\rho_c$  за время  $t_s$  мало, что мы пока и предположим, то значение искомой функции  $g(\rho, t)$  в точке  $\rho_s$  всегда можно считать равным ее стационарному значению при текущем пересыщении. Таким образом, приходим к граничному условию

$$(2.7) \quad g(\rho, t) |_{\rho=\rho_s} = g^{(s)}(t),$$

где временной аргумент  $t$  у функции  $g^{(s)}(t)$  указывает на то, что стационарное распределение берется при текущем пересыщении. Решая уравнение (2.5) с граничным условием (2.7), находим

$$(2.8) \quad g(\rho, t) = g^{(s)}(\tilde{t}),$$

где  $\tilde{t} = \tilde{t}(\rho, t)$  есть зависящее от  $\rho$  и  $t$  время запаздывания, определяемое из уравнения

$$(2.9) \quad \int_{\tilde{t}}^t dt' t_0^{-1} \zeta(t') = \rho.$$

Для функции  $g^{(s)}(t)$  из (1.23) при учете (1.19) и (2.4) имеем

$$(2.10) \quad g^{(s)}(t) = (a/\pi)^{1/2} n_1 \infty \zeta^{-1}(t) [\zeta(t) + 1]^2 \exp(-F_{\rho_c(t)}).$$

Продифференцируем выражение (2.2) по времени и преобразуем производную от его правой части, воспользовавшись уравнением эволюции (1.9). С учетом (1.13) получим

$$(2.11) \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\rho_2^3 j_{\rho_2}(t) + 3 \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 j_\rho(t).$$

Первое слагаемое в правой части (2.11) имеет смысл потока вещества из единицы объема системы за единицу времени, т. е.  $\rho_2^3 j_{\rho_2}(t) = J_2(t)$ . Рассмотрим интеграл в правой части (2.11). Поскольку его значение определяется в основном поведением подынтегральной функции на интервале (2.6), то вследствие (2.5) и (2.8) можно записать

$$(2.12) \quad 3 \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 j_{\rho}(t) \simeq 3\zeta(t) t_0^{-1} \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 g^{(s)}(\tilde{t}).$$

Привлекая далее формулы (1.20), (1.19) и (2.3), представим поток  $J_0$  в виде

$$(2.13) \quad J_0 = (a/\pi)^{1/2} n_{1,\infty} t_0^{-1} (\zeta^{(s)} + 1)^2 \exp(-F_{\rho_c^{(s)}}) 3 \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2.$$

Выразим, наконец, производную  $d\zeta(t)/dt$  через соответствующую производную от критического радиуса  $\rho_c(t)$  согласно (1.4), (1.5), (2.3):

$$(2.14) \quad \frac{d\zeta(t)}{dt} = -\frac{2}{3} a [\zeta(t) + 1] \rho_c^{-2}(t) \frac{d\rho_c(t)}{dt}.$$

При учете (2.10)–(2.14) из (2.1) следует искомое уравнение для критического радиуса

$$(2.15) \quad \frac{d\rho_c(t)}{dt} = \frac{9}{2} (a\pi)^{-1/2} t_0^{-1} \rho_c^2(t) \frac{(\zeta^{(s)} + 1)^2}{\zeta(t) + 1} \exp(-F_{\rho_c^{(s)}}) \times \\ \times \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 \left\{ \frac{\zeta(t) [\zeta(\tilde{t}) + 1]^2}{\zeta(\tilde{t}) [\zeta^{(s)} + 1]^2} \exp(F_{\rho_c^{(s)}} - F_{\rho_c(\tilde{t})}) - 1 \right\}.$$

### 3. РЕЛАКСАЦИЯ К СТАЦИОНАРНОМУ СОСТОЯНИЮ

Рассмотрим такие времена эволюции системы капель, при которых становится малой разность  $\rho_c(t) - \rho_c^{(s)} \equiv \delta\rho_c(t)$ , и, следовательно, в уравнении (2.15) можно перейти к линейному по  $\delta\rho_c$  приближению. Отбрасывая при линейаризации по  $\delta\rho_c$  также и члены, малые в силу условий (1.7), (1.8), из (2.15), (2.9) получим

$$(3.1) \quad \frac{d\delta\rho_c(t)}{dt} = -c \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 [\delta\rho_c(t - t_p) + p\delta\rho_c(t)],$$

где

$$(3.2) \quad c = (a/\pi)^{1/2} 3t_0^{-1} (\zeta^{(s)} + 1) (\rho_c^{(s)})^3 \exp(-F_{\rho_c^{(s)}}),$$

$$(3.3) \quad p = (\zeta^{(s)} + 1) / \zeta^{(s)} (\rho_c^{(s)})^3$$

и  $t_p = t_0 \rho / \zeta^{(s)}$  есть время роста капли до размера  $\rho$  при постоянном значении степени пересыщения  $\zeta^{(s)}$ .

Исследуем спектр времен релаксации уравнения (3.1). Решение (3.1) имеет вид суперпозиции выражений

$$(3.4) \quad \delta\rho_c(t) = \text{const } e^{-qt},$$

где  $q$  — неизвестные, вообще говоря, комплексные числа. Вещественная часть  $q$  имеет смысл обратного времени релаксации  $\tau^{-1}$  к исследуемому стационарному состоянию, мнимая — частоты  $\omega$  возможных осцилляций критического радиуса вблизи  $\rho_c^{(s)}$ . Подстановка решения (3.4) в уравнение (3.1) приводит к дисперсионному уравнению для определения значений  $q$

$$(3.5) \quad q - c \int_0^{\rho_2} d\rho \rho^2 (e^{q\rho} + p) = 0.$$

Введем удобные вспомогательные переменные  $z$  и  $z'$ , определив их формулами

$$(3.6) \quad z = qt_{\rho_2}, \quad z' = qt_{\rho}.$$

В новых переменных уравнение (3.5) приобретает вид

$$(3.7) \quad \Phi(z) + p/3z = l,$$

где

$$(3.8) \quad \Phi(z) = z^{-4} \int_0^z dz' z'^2 e^{z'},$$

$$(3.9) \quad l = \xi^{(s)}/t_0 c \rho_2^4.$$

Будем предполагать, что для всех значений  $z$  и  $\Phi(z)$  выполнено условие

$$(3.10) \quad |3z\Phi(z)| \gg p,$$

справедливость которого мы докажем в дальнейшем. В этом случае из выражения (3.7) имеем

$$(3.11) \quad \Phi(z) = l.$$

Уравнение (3.11) представим в виде системы уравнений для действительной и мнимой частей функции:

$$(3.12) \quad \text{Re } \Phi(z) = l,$$

$$(3.13) \quad \text{Im } \Phi(z) = 0.$$

Для того чтобы была справедлива осуществленная линеаризация уравнения (2.15), необходимо выполнение условия  $\text{Re } z > 0$ . В силу этого условия и очевидного равенства  $\Phi^*(z) = \Phi(z^*)$  достаточно исследовать решения системы уравнений (3.12) и (3.13) в области  $0 \leq \arg z < \pi/2$ .

Каждое из уравнений (3.12), (3.13) определяет семейство кривых на комплексной плоскости. Причем кривые, отвечающие уравнению (3.12), параметрически зависят от  $l$ ; среди семейства кривых, описываемых уравнением (3.13), присутствует положительная полуось  $\arg z = 0$ . Точки пересечения двух семейств и дают искомые решения уравнения (3.11).

Если уравнение (3.11) имеет несколько корней, то главный вклад в суперпозиции решений (3.4) будет даваться членом с наименьшим затуханием, отвечающим корню с наименьшей вещественной частью. Только такие корни и будут нас интересовать в дальнейшем.

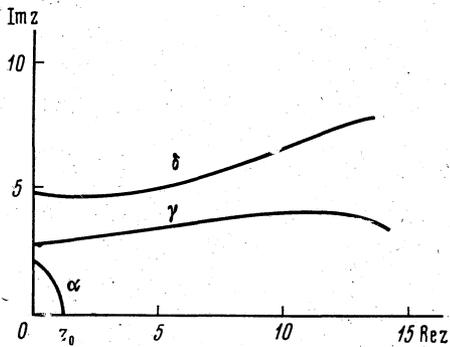


Рис. 1

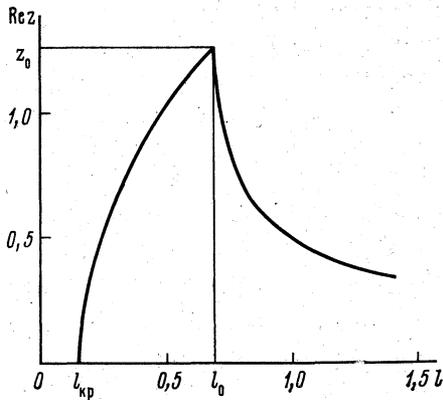


Рис. 2

Общие свойства вещественных корней уравнения (3.11) можно установить непосредственно из вида функции  $\Phi(z)$ . Будучи положительной на всей вещественной оси, функция  $\Phi(z)$  неограниченно возрастает при  $z \rightarrow +0$  и  $z \rightarrow \infty$ . В области  $z > 0$  график функции вогнут. В точке  $z = z_0 \approx 1,26$  она достигает своего минимального при  $z > 0$  значения  $\Phi(z_0) = l_0 \approx 0,7$ . Следовательно, при  $l > l_0$  в области  $z > 0$  уравнение (3.11) имеет два вещественных корня  $z_1, z_2$  таких, что  $z_1 \leq z_0 \leq z_2$ . С уменьшением  $l$  корни  $z_1$  и  $z_2$  сначала сближаются, сливаясь в точке  $z_0$ , когда  $l = l_0$ , и расходятся затем по комплексной плоскости при дальнейшем уменьшении  $l$ . На рис. 1 в качестве примера изображены отрезки четырех (включая вещественную ось) кривых в комплексной плоскости, на которых  $\text{Im } \Phi(z) = 0$ . Описанное движение корней  $z_1, z_2$  происходит сначала по вещественной оси до точки  $z = z_0$ ; далее корни движутся симметрично вверх и вниз по кривой, отмеченной индексом  $\alpha$ . Наряду с корнями  $z_1, z_2$  существуют также комплексные корни на кривых  $\gamma, \delta$  и т. д. Эти корни, однако, во всех случаях, когда стационарное состояние достижимо, имеют большую вещественную часть, чем соответствующие корни на кривой  $\alpha$ .

Сопоставляя каждой точке отрезка  $[0, z_0]$  и каждой точке дуги кривой  $\alpha$  при  $\text{Re } z \geq 0$  значение  $\text{Re } \Phi(z) = l$ , установим соответствие между значениями  $l$  и отвечающими им значениями наименьших вещественных частей  $\text{Re } z(l)$  корней уравнения (3.11). График зависимости  $\text{Re } z(l)$  приведен на рис. 2. Область  $l \geq l_0$  соответствует отрезку вещественной оси  $[0, z_0]$ , интервал  $l_0 > l > l_{\text{кр}} \approx 0,15$  — дуге кривой  $\alpha$ . Область значений  $\text{Re } z(l)$  есть отрезок  $0 \leq \text{Re } z(l) \leq z_0 \approx 1,26$ .

Возвратимся теперь к неравенству (3.10). Согласно (1.7), (1.8) и (3.3) коэффициент  $p$  по величине много меньше единицы. Для указанных на рис. 1, 2 областей изменения  $|z|$  и  $|\Phi(z)|$  при комплексных значениях  $z$  имеем  $|3z\Phi(z)| \sim 1$ . В области действительных значений  $z$ , воспользовавшись оценкой снизу  $\Phi(z) \geq (3z)^{-1}$ , получим  $|3z\Phi(z)| \geq 1$ . Таким образом, соотношение (3.10) действительно выполнено.

Из рис. 2 следует, что неравенство

$$(3.14) \quad l > l_{\text{кр}} \approx 0,15$$

является условием достижимости стационарного состояния. Придадим этому условию более наглядный вид. С этой целью введем в рассмотрение некоторый предельный радиус  $\rho_m$ , определенный из соотношения

$$\zeta^{(s)} n_{1,\infty} = \int_0^{\rho_m} d\rho \rho^3 g^{(s)}. \quad \text{Очевидно, что капли, зародившиеся при данной сте-}$$

пени пересыщения  $\zeta^{(s)}$ , слабо истощают пар до тех пор, пока они не достигнут размеров порядка  $\rho_m$ . Для величины  $\rho_m$  в силу (2.10) имеем  $\rho_m^4 = 4(a/\pi)^{-1/2} (\zeta^{(s)})^2 (\zeta^{(s)} + 1)^{-2} \exp(F_{\rho_c^{(s)}})$ . Последняя формула позволяет записать неравенство (3.11) в виде  $(\rho_2/\rho_m)^4 \ll 1$ . Таким образом, в случае, когда стационарное состояние достижимо, масса избыточного пара значительно превышает массу жидкой фазы в системе. В этом смысле условия формирования стационарного процесса конденсации противоположны условиям выхода на стадию коалесценции [1].

Время релаксации к стационарному состоянию согласно сказанному выше и соотношению (3.6) равно  $\tau = t_{\rho_2}/\text{Re } z(l)$ . Наряду со временем релаксации изменение пересыщения в системе при значениях параметра  $l$  в интервале  $l_{\text{кр}} < l < l_0$  может быть охарактеризовано периодом осцилляций  $\tau_0 = 2\pi t_{\rho_2}/\text{Im } z(l)$ . Развиваемая теория справедлива, если для всех значений величин  $\tau$  и  $\tau_0$  выполнено условие квазистационарности, т. е. малости относительного изменения  $\delta\rho_c(t)$  за время корреляции  $t_s$ . Это условие можно записать в виде двух неравенств  $t_s/\tau \ll 1$ ,  $t_s/\tau_0 \ll 1$ . Из (1.24), выражений для  $\tau$ ,  $\tau_0$ ,  $t_{\rho_2}$  и из рис. 2 получим, что данные неравенства налагают ограничение на возможные значения  $\rho_2$  снизу, а именно

$$(3.15) \quad \rho_2 \gg \rho_c^3 \zeta^{(s)} / (\zeta^{(s)} + 1).$$

Условие (3.15) согласуется, очевидно, с ранее поставленным условием (1.15), но является более сильным.

Рассмотрим совместно с  $\tau$  и  $t_{\rho_2}$  еще одно характерное время  $\tau_\zeta$ , которое мы положим равным  $\tau_\zeta = (\zeta^{(s)} + 1) n_{1,\infty} / J_0$ . Это время необходимо, очевидно, для того, чтобы в отсутствие процессов конденсации поднять величину степени пересыщения пара в системе до значения  $\zeta = \zeta^{(s)}$ . В условиях, когда стационарное состояние достижимо, между временами  $t_{\rho_2}$  и  $\tau_\zeta$ ,  $\tau$  и  $\tau_\zeta$  должны выполняться вполне определенные соотношения. Действительно, из (3.14), определения величины  $l$  и из формулы (3.2) следует  $(\rho_c^{(s)})^3 \tau_\zeta / t_{\rho_2} > 0,15$ . Отсюда ввиду (1.7), (1.8) имеем  $\tau_\zeta / t_{\rho_2} \gg 1$ . Таким образом, пересыщение пара должно идти значительно медленнее, чем процесс роста капель. Точно также можно показать, что  $\tau_\zeta \gg \tau$  при  $l > l_{\text{кр}}$  и  $\tau_\zeta \sim \tau$  при  $l \sim l_{\text{кр}}$ . Следовательно, при  $l > l_{\text{кр}}$  полное время эволюции системы от момента начала притока пара до установления стационарного состояния, складывающееся в общем случае из времен  $\tau_\zeta$  и  $\tau$ , по порядку величины равно  $\tau_\zeta$ .

В заключение обсудим совместность неравенств (3.14) и (3.15). Выбирая в качестве независимых переменных величины  $\rho_2$  и  $\rho_c^{(s)}$ , запишем оба неравенства в виде условия на  $\rho_2$ :

$$(3.16) \quad (\rho_c^{(s)})^3 [1 - \exp(-2/3 a / \rho_c^{(s)})] \ll \rho_2 < [(\pi/a)^{1/2} / 0,45]^{1/4} \times$$

$$\times [1 - \exp(-2/3 a / \rho_c^{(s)})]^{1/4} \exp[1/12 a (\rho_c^{(s)})^2 - 1/4 a \gamma \rho_c^{(s)}] / (\rho_c^{(s)})^{3/4},$$

где использовано выражение (1.2). Условие (3.16) необходимо дополнить неравенством  $\rho_c^{(s)} \geq \rho_c^{(\min)}$ , где  $\rho_c^{(\min)}$  — минимальный радиус капель, при котором еще выполнены условия применимости макроскопической теории (1.7), (1.8). Из (3.16) видим, что наличие главной микроскопической поправки для работы образования поверхности капли приводит при больших пересыщениях к существенному ограничению возможных значений  $\rho_2$ , при которых в системе возникает стационарное состояние. В целом же при макроскопических значениях  $\rho_2$  неравенство (3.16) остается непротиворечивым вплоть до значений критического радиуса  $\rho_c \sim \rho_c^{(\min)}$ . Таким образом, рассмотренный стационарный процесс гомогенной конденсации может быть установлен практически при всех допустимых в макроскопической теории значениях степени пересыщения.

#### Литература

- [1] Лифшиц И. М., Слезов В. В. — ЖЭТФ, 1958, 35, № 2(8), 479—494.
- [2] Лифшиц Е. М., Пугаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [3] Goodrich F. C. — Proc. Roy. Soc., 1964, A277, 167—183.
- [4] Михайлова Ю. В., Максимов Л. А. — ЖЭТФ, 1970, 59, № 4(10), 1368—1377.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
10.III.1981 г.

#### KINETICS OF FORMATION OF THE STEADY PROCESS OF HOMOGENEOUS CONDENSATION FROM SUPERSATURATED VAPOUR

Grinin A. P., Kuni F. M., Shehekin A. K.

An analysis of the formation of the steady process of homogeneous condensation is developed on the basis of evolution equation for nuclei of a new phase at low or high supersaturations of the parent phase. The assumption is made that there is a steady influx of condensing substance and escape of large nuclei with a certain radius per unit volume. The conditions are formulated for the steady process to be the stable final state of the system. It is pointed out that the microscopic correction in the formula for the formation work of a nucleus connected with the influence of curvature of the nucleus surface is important for determining the values of the parameters of the system controlling its approach to the steady process. Characteristic times of the formation of the steady process are obtained.