

УДК 551.465

© В. Г. Гневнышев<sup>1</sup>, Т. В. Белоненко<sup>2\*</sup>, 2021

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Нахимовский пр., д. 36, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Университетская наб., 7–9, г. Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: btvlisab@yandex.ru

## ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЛОВУШКИ ВОЛН РОССБИ В ОКЕАНЕ

Статья поступила в редакцию 24.04.2021, после доработки 29.06.2021

Анализ динамики волн Россби показывает, что при взаимодействии их со сдвиговыми течениями возможны режимы, когда из-за неоднородности фонового течения волны Россби захватываются течением, при этом происходит вертикальная фокусировка — сжатие моды на некотором вертикальном горизонте. Для вертикальной моды вместо классического тригонометрического косинуса появляются сильно локализованные решения в виде экспоненциально модулированных полиномов Эрмита. Качественно ситуацию можно описать следующим образом: неоднородное фоновое течение действует как некая параболическая антенна. Волна, попадая в эту параболическую ловушку, начинает отражаться от сужающихся стенок параболоида, при этом вертикальная зона прозрачности сужается, а продвижение волны к центру параболоида все более и более замедляется. В линейной постановке этот процесс длится бесконечно долго, при этом расстояние между соседними точками отражения от зеркала параболоида постепенно сокращается. Для внутренних волн такое уравнение в окрестности фокуса существует. Поскольку в окрестности фокуса нет принципиальных отличий внутренних волн от Россби, то математическую часть работы для внутренних волн можно трансформировать и для волн Россби.

В терминах интеграла Фурье построено двумерное аналитическое решение эталонного уравнения для вертикальной фокусировки монохроматической волны в окрестности фокуса. Показана идентичность этого решения с решением эталонного уравнения в терминах вырожденной гипергеометрической функции от комплексного переменного, полученного в предыдущих исследованиях. Методом стационарной фазы найдена асимптотика решения в дальней зоне. Показано, что корректная двумерная сшивка полученного решения в виде вырожденной гипергеометрической функции от комплексного переменного происходит с ВКБ-решением в дальней зоне в терминах экспоненциально мажорированных полиномов Эрмита. Показано, что вопрос о поглощении в фокальной зоне не носит однозначный характер, и поэтому возможны обе ситуации: как прохождение, так и отражение от особенности.

**Ключевые слова:** волны Россби, параболическая антенна, ловушка, ВКБ-приближение, сшивка, асимптотика, фокальная зона, области прозрачности и тени.

© V. G. Gnevyshev<sup>1</sup>, T. V. Belonenko<sup>2\*</sup>, 2021

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology RAS, 117997, Nahimovsky Pr., 36, Moscow, Russia

<sup>2</sup>St. Petersburg State University, 199034, 7–9, Universitetskaya Nab., St. Petersburg, Russia

\*E-mail: btvlisab@yandex.ru

## PARABOLIC TRAPS OF ROSSBY WAVES IN THE OCEAN

Received 24.04.2021, in final form 29.06.2021

Analysis of the Rossby wave dynamics shows when waves interact with shear currents vertical focusing of the modes occurs. Due to the inhomogeneity of the background flow, Rossby waves are captured by the current, and there is a compression of the modes on vertical horizons. For the vertical mode, instead of the classical trigonometric cosine, strongly localized solutions appear in the form of exponentially modulated Hermite polynomials. Qualitatively, the situation can be described as follows: an inhomogeneous background current acts like a kind of parabolic antenna. The wave, falling into this parabolic trap, begins to reflect off the narrowing walls of the paraboloid, while the vertical transparency zone narrows and the wave's progress towards the center of the paraboloid slows down more and more. In the linear formulation, this process lasts infinitely long, while the distance between adjacent reflection points from the paraboloid mirror gradually decreases. There is a mathematical description of this phenomenon for internal waves. Since there are no fundamental differences between internal waves and Rossby in the vicinity of the focus, the mathematical part of the work for internal waves can also be transformed for Rossby waves.

In this paper, in terms of the Fourier integral, we construct a two-dimensional analytical solution of the reference equation for the vertical focusing of a monochromatic wave in the vicinity of the focus. Using the degenerate hypergeometric function of the

Ссылка для цитирования: Гневнышев В.Г., Белоненко Т.В. Параболические ловушки волн Россби в океане // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 4. С. 14–24. doi: 10.7868/S207366732104002X

For citation: Gnevyshev V.G., Belonenko T.V. Parabolic Traps of Rossby Waves in the Ocean. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2021, 14, 4, 14–24. doi: 10.7868/S207366732104002X

complex variable, we show the identity of this solution with the solution of the reference equation obtained in previous studies. We find the asymptotic behavior of the solution in the far zone by the stationary phase method. Using exponentially majored Hermite polynomials, we show the correct two-dimensional crosslinking of the obtained solution, which has in the form of a degenerate hypergeometric function of a complex variable, happens with the WKB solution in the far zone. We show the question of absorption in the focal zone is not unambiguous, and therefore both situations are possible: both the passage and the reflection from the feature.

**Key words:** Rossby waves, parabolic antenna, trap, WKB approximation, crosslinking, asymptotics, focal zone, transparency and shadow regions.

## 1. Введение

Одним из методов изучения динамики волн в океане является метод «вертикальные моды — горизонтальные лучи» [1]. Поскольку горизонтальные масштабы волн Россби от десятков до сотен километров, данное приближение хорошо работает в открытом океане. Если принять стратификацию постоянной и не учитывать топографию и бароклинные фоновые течения, тогда вертикальная мода волн Россби определяется одной стратификацией и не зависит от  $\beta$ -параметра. В этом плане волна Россби становится похожей на обычную внутреннюю волну, и ее вертикальная мода — это обычная тригонометрическая функция с классическим квантованием собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. В такой постановке определяющим фактором является горизонтальная неоднородность крупномасштабного потока. Горизонтальные изменения течения являются лидерами в задаче. Сначала прорисовывается геометрический костяк, и только потом в каждой точке пространства строится вертикальная мода. При этом вертикальная мода является своего рода последователем, строго следующим за горизонтальным распространением луча [2]. Однако, наряду со схожестью постановки задач, для внутренних волн и волн Россби имеются как качественные, так и количественные различия. Первое отличие волн Россби от внутренних волн состоит в том, что для волн Россби есть два качественно различных сценария эволюции лучей волн Россби, что по сути является следствием наличия в задаче  $\beta$ -параметра, как в случае зонального фонового течения [3], так и для незонального течения [4]. Для незонального случая появляется качественно новый сценарий, связанный с таким явлением, как «овершутинг», т.е. подныривание волны Россби под критический слой [5]. Вторым и наиболее существенным отличием внутренних волн от волн Россби состоит в следующем. Для внутренних волн добавление бароклинности фонового потока качественно не меняет сценарий эволюции волнового пакета. Бесконечный счетный спектр краевой задачи Штурма — Лиувилля с тригонометрическим набором собственных функций плавно переходит в новый бесконечный счетный спектр, но уже с собственными функциями в виде экспоненциально-мажорированных полиномов Эрмита. При этом, конечно, появляются такие новые явления, как вертикальная фокусировка и «недисперсионная» фокусировка [6]. Но для внутренних волн фокальная точка все равно остается некой «черной дырой», при этом лучи — это «лидеры», а вертикальные моды — это «ярые последователи» с некой второстепенной ролью.

Для волн Россби ситуация качественно другая, при этом разные авторы, используя различные подходы, приходят к следующему качественному выводу. Учет бароклинности фонового течения очень сильно воздействует на спектр вертикальной задачи. В работах [7, 8] наблюдались ситуации при численных расчетах, когда в зависимости от направления волны существует только несколько первых мод или даже вертикальной моды может и не быть совсем.

Авторы статьи [9] в рамках двухслойной модели убедительно доказали, что длинные бароклинные волны Россби нестабильны. В работе [10] это показано на основе лабораторного эксперимента и приведено обобщение этих результатов на случай различных сред. Важно отметить, что при этом опять возникает расщепление результатов на два случая: зональный и незональный. Если для зонального потока имеются некие ограничения сверху на инкременты роста неустойчивости [11, 12], то для незонального случая, в силу неэрмитовости оператора для линейных волн Россби на незональном потоке, никакие теоремы не работают [13]. Следовательно, нужно крайне осторожно переносить обобщение идеи фокальной особенности для случая волн Россби. Все это происходит из-за того, что вертикальная мода волн Россби крайне капризна и уже не является слепым последователем за лучом в горизонтальной плоскости. Вертикальная мода волн Россби может сама определять области прозрачности и качественно изменять пространственную картину распространения волн.

Анализ динамики волн Россби при наличии сдвиговых течений показывает, что возможны режимы, когда из-за неоднородности фонового течения волны Россби захватываются течением, при этом происходит вертикальная фокусировка — сжатие моды на некотором вертикальном горизонте. Для вертикальной

моды вместо классического тригонометрического косинуса появляются сильно локализованные решения в виде экспоненциально модулированных полиномов Эрмита. Такие решения хорошо известны для внутренних волн [14], и также были построены для волн Россби [15].

Качественно ситуацию можно описать следующим образом. Неоднородное фоновое течение действует как некая параболическая антенна. Волна, попадая в эту параболическую ловушку, начинает отражаться от сужающихся стенок параболоида, при этом вертикальная зона прозрачности сужается, а продвижение волны к центру параболоида все более и более замедляется. Расстояние между соседними точками отражения от зеркала параболоида постепенно сокращается. Этот процесс в линейной постановке длится бесконечно долго. Поскольку данный результат получается в ВКБ-приближении, то дополнительно строится эталонное двумерное уравнение. Для внутренних волн такое уравнение в окрестности фокуса и его анализ выполнены в работе [16]. Поскольку нет принципиальных отличий волн Россби от внутренних волн в окрестности фокуса, а единственное отличие только в оценке безразмерных параметров, то есть смысл математическую часть работы изложить для уже известного эталонного уравнения для внутренних волн.

## 2. Постановка задачи. Двухмерное эталонное уравнение. Бароклиный случай

Рассмотрим двумерное эталонное уравнение в окрестности фокуса [16, уравнение 2.5]:

$$\Psi_{zz} + \left( \frac{y}{L_y} + \frac{z^2}{L_z^2} \right) \Psi_{yy} + \frac{2}{L_y} \Psi_y = 0, \quad (1)$$

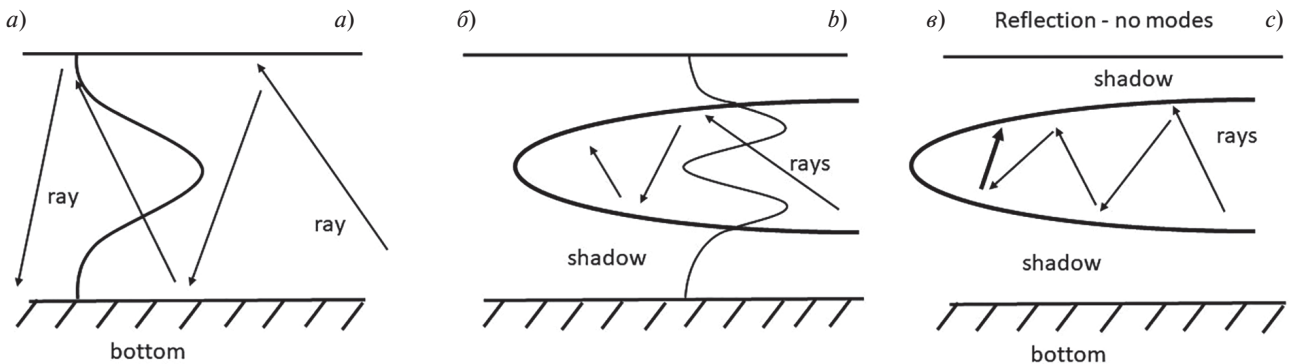
где  $(x, y, z)$  — прямоугольная система координат,  $\Psi$  — функция тока  $L_y$  и  $L_z$  — длины неоднородностей по  $y$  и  $z$ . Следуя стандартной схеме, будем искать решения, локализованные в малой окрестности некоторого уровня по вертикальной координате и экспоненциально затухающие вне этого уровня, где для случая внутренних волн введены следующие обозначения:

$$\frac{1}{L_y} = 2\nabla_y \ln \Omega, \quad \frac{1}{L_z^2} = \frac{\nabla_z^2 \Omega}{\Omega} - \frac{\nabla_z^2 N}{N}, \quad (2)$$

где  $\Omega = \omega - kU$ ,  $\omega$  — частота,  $k$  — зональное волновое число,  $U(z, y)$  — неоднородное горизонтальное фоновое течение со сдвигом,  $N^2(z) = -g \frac{d}{dz} \ln \rho_0(z)$ ,  $\rho_0(z)$  — плотность. Значение всех производных берется в фокусной точке.

Качественно захват волн Россби параболической ловушкой, создаваемой течением в стратифицированной жидкости, можно представить следующим образом (рис. 1).

В литературе часто встречается высказывание, что Фурье-анализ не работает в неоднородных средах, однако это не совсем так. Покажем, что Фурье-анализ может работать, например, на линейных сдвиговых течениях.



**Рис. 1.** Параболическая антенна: *a* — свободная мода волн при отсутствии течения; *b* — мода при  $L_z < 4L_y$  (взаимодействие с течением); *c* — отражение волн от течения при  $L_z > 4L_y$  — отсутствие мод (на основе [16], а также уравнения (13) данной работы).

**Fig. 1.** Parabolic antenna: *a* — free wave mode in the absence of flow; *b* — mode at  $L_z < 4L_y$  (interaction with the flow); *c* — reflection of waves from the flow at absence of modes (based on [16], as well as equation (13) of this work).

Итак, решение уравнения (1) ищем в виде интеграла Фурье, при этом ограничиваемся для начала верхней частью интеграла

$$\Psi(k, y, z, \omega) = \int_0^{\infty} G(k, l, z, \omega) \exp(i l y) dl, \quad (3)$$

где  $l$  — меридиональное волновое число,  $G(k, l, z, \omega)$  — Фурье-образ. Брать весь интеграл или только верхнюю (нижнюю) часть интеграла — это на самом деле очень важный вопрос, обсуждение которого мы отложим до заключительной части работы. Используем свойства преобразования Фурье:

$$\Psi \rightarrow G, \quad \Psi_y \rightarrow i l G, \quad \Psi_{yy} \rightarrow -l^2 G, \quad y \Psi_{yy} \rightarrow -i(l^2 G)_l. \quad (4)$$

Подставим разложение (3) в уравнение (1) и, принимая во внимание (4), для Фурье-образа  $G$  получаем следующее уравнение:

$$G_{zz} - \frac{l^2 z^2}{L_z^2} G - i \frac{l^2}{L_y} G_l = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) не является уравнением с разделяющимися переменными. Чтобы оно стало таковым, выполним следующую замену переменных  $(z, l) \rightarrow (\eta, \varphi)$ , где

$$\eta = \frac{z l^{1/2}}{L_z^{1/2}}, \quad \varphi = l. \quad (6)$$

Якобиан замены:

$$\frac{\partial(\eta, \varphi)}{\partial(z, l)} = l^{1/2}. \quad (7)$$

Заметим, что в уравнениях (6) и (7) фигурирует  $l^{1/2}$ . Технически именно этот факт и требует рассматривать только одну из частей интеграла Фурье. Для простоты мы выбрали сначала верхнюю, положительную часть интегрирования, чтобы снять вопрос с квадратным корнем.

Возникает вопрос: почему следует выбрать именно такую замену переменных? Ответ содержится в работе [14], где построено решение в ВКБ-приближении. Фактически не нужны никакие рассуждения об автомодельности, так как в определенном смысле вся «автомодельность» сводится к простой замене переменных вида (6).

В новых переменных  $(\eta, \varphi)$  уравнение (5) принимает вид уравнения с разделяющимися переменными:

$$G_{\eta\eta} - \eta^2 G - i \frac{\eta L_z}{2 L_y} G_{\eta} - i \frac{\varphi L_z}{L_y} G_{\varphi} = 0. \quad (8)$$

Далее, ищем решение с разделяющимися переменными в следующем виде:

$$G(\eta, \varphi) = H(\eta)F(\varphi). \quad (9)$$

Для  $H(\eta)$  получаем следующее уравнение:

$$H_{\eta\eta} - i \frac{\eta L_z}{2 L_y} H_{\eta} - (\eta^2 + \mu_0) H = 0, \quad (10)$$

где  $\mu_0$  — постоянная разделения. Далее слагаемое с первой производной в уравнении (10) убираем следующей заменой:

$$H(\eta) = P(\eta) \exp\left(i \frac{L_z}{8 L_y} \eta^2\right). \quad (11)$$

Для функции  $P(\eta)$  получаем следующее уравнение

$$P_{\eta\eta} + \left[ -\eta^2 \left( 1 - \frac{L_z^2}{16 L_y^2} \right) - \mu_0 + i \frac{L_z}{4 L_y} \right] P = 0. \quad (12)$$

Напомним, что мы ищем решения, локализованные в окрестности уровня ( $z = 0$ ). Из уравнения (12) видно, что коэффициент при  $\eta^2$  должен быть положительным, следовательно, мы получаем следующее условие существования локализованных решений

$$\left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < |L_z| < 4|L_y|. \quad (13)$$

Условие (13) говорит о том, что ветви параболы, которая ограничивает внутреннюю область прозрачности от внешней области тени, должны быть практически параллельны друг другу (рис. 2). В противном случае, вертикальная мода не сформируется, и волна не будет приближаться к критической точке бесконечно долго. Заметим, что если условие (13) не выполняется, то формально возможны и другие режимы трансформации решения.

Оценка параметров для внутренних волн показывает, что если принять масштабы, которые используют в работе [16], то получается очень хороший разнос данных величин ( $L_z < 4L_y$ ), и это говорит об оправданности концепции параболической ловушки с точки зрения физики.

Определим квантовые значения переменной разделения  $\mu_0$  (см. [6, 17]):

$$-(2m+1) = \left(\mu_0 - i \frac{L_z}{4L_y}\right) / \left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

откуда находим собственные значения:

$$\mu_0 = \frac{L_z}{L_y} \left[ \frac{1}{4}i - \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2}\right) \right]; \quad \delta \equiv \left( \frac{16L_y^2}{L_z^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

и собственные функции:

$$P(\eta) = \left[ \sum_{m=0}^{\infty} H_m \left( \eta \left[ 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right]^{1/4} \right) \right] \exp \left[ -\frac{\eta^2}{2} \left( 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right)^{1/2} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где  $H_m$  — полиномы Эрмита.

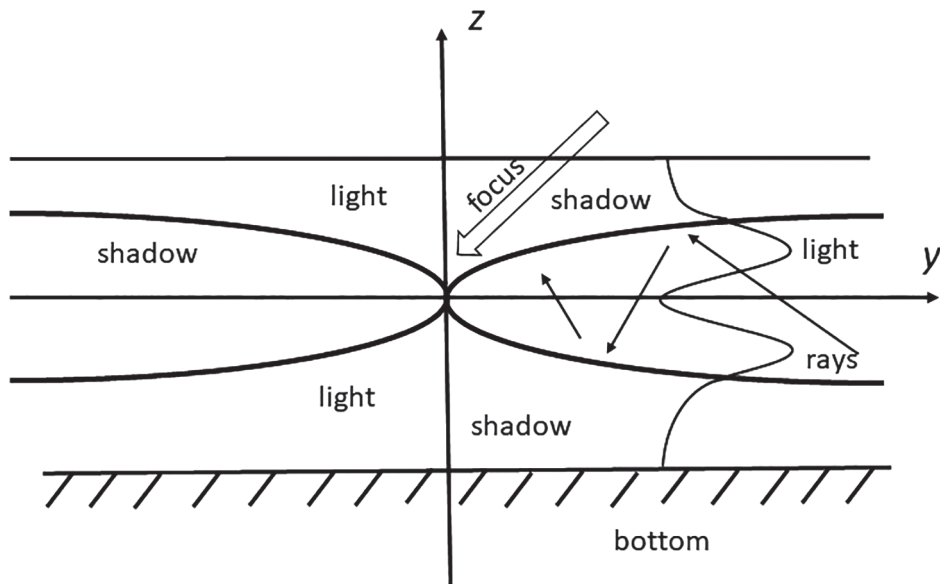


Рис. 2. Параболическая ловушка: антисимметрия областей прозрачности и тени при  $L_z < 4L_y$ .

Fig. 2. Parabolic trap: antisymmetry of transparency and shadow areas at  $L_z < 4L_y$ .

Перейдем теперь к определению второго множителя  $F(\varphi)$  в решении (9). Из формулы (8) получаем следующее уравнение:

$$-i \frac{\varphi L_z}{L_y} F_\varphi + \mu_0 F = 0. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет следующий вид:

$$F(\varphi) = \varphi^\mu, \quad \mu \equiv -i\mu_0 \frac{L_y}{L_z}. \quad (18)$$

Окончательно получаем следующие собственные значения:

$$\mu = \frac{1}{4} + i \frac{\delta}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

Подставляя все найденные составные решения в исходный интеграл (3), находим собственные функции:

$$\begin{aligned} \Psi(k, y, z, \omega) = A(k, \omega) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} l^\mu & \left[ H_m \left( \frac{z l^{1/2}}{L_z^{1/2}} - \left[ 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right]^{1/4} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{z^2 l}{2L_z} \left( 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right)^{1/2} \right] \cdot \exp \left[ i l \left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right) \right] dl, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $A(k, \omega)$  — некоторая константа, определяющая спектральную плотность начального состояния. Далее полученные собственные функции (20) можно с помощью несложных преобразований свести к вырожденной гипергеометрической функции от некоторого комплексного аргумента (см. Приложение). Отметим, что именно интегральная запись (20) является предпочтительной для нахождения асимптотик собственных функций. Несмотря на то что построенные собственные функции (20) являются функциями от двух физических переменных ( $z$  и  $y$ ), интеграл для собственных функций является одномерным, что позволяет воспользоваться методом стационарной фазы [6].

Выпишем мнимую часть интеграла (20) в следующем виде:

$$\exp \left[ i l \left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right) + i \frac{\delta}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \ln l \right]. \quad (21)$$

Дифференцируя (21) по переменной  $l$  и приравнявая к нулю выражение в квадратных скобках, получаем уравнение для точки  $l_c$ .

$$y + \frac{z^2}{8L_y} = -\frac{\delta}{2l_c} \left( m + \frac{1}{2} \right). \quad (22)$$

Далее перепишем соотношение (22) в следующем виде:

$$l_c = -\frac{\delta \left( m + \frac{1}{2} \right)}{2 \left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right)}. \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что полученное соотношение (23) — это некое обобщение коротковолновой ВКБ-асимптотики дисперсионного соотношения  $l_c = y^{-1}$ . Тогда вторая производная фазы по волновому числу пропорциональна  $l_c^{-2}$ , следовательно, корень в минус первой степени из второй производной пропорционален  $l_c^1$ . Окончательно асимптотика собственных функций в окрестности критической точки будет иметь следующий вид:

$$\Psi_1(k, y, z, \omega) = A(k, \omega) \sum_{m=0}^{\infty} l_c^{\mu+1} \left[ H_m \left( \frac{z l_c^{1/2}}{L_z^{1/2}} \left[ 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right]^{1/4} \right) \right] \cdot \exp \left[ -\frac{z^2 l_c}{2L_z} \left( 1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2} \right)^{1/2} \right] \cdot \exp \left[ i \frac{\delta}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (24)$$

Анализируя асимптотики (24), можно сказать следующее: асимптотика решения эталонного уравнения в точности совпадает с ВКБ-решением с вертикальной модой в виде полиномов Эрмита, мажорированных Гауссовской функцией [14], и дает классическую степень  $5/4$  для амплитуды вертикальной скорости. Если в [16] говорят о некоей моде, то мы утверждаем, что это не их вертикальная мода в виде ВКБ-решения по вертикальной координате, а совсем другая мода, которая построена в работе [14]. Построенные решения являются функциями не от переменных  $(z, y)$ , а от некоторых криволинейных переменных, которые имеют следующий вид:

$$(y, z) \rightarrow \left( \left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right), \frac{z}{\left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right)^{1/2}} \right). \quad (25)$$

Таким образом, в некотором смысле происходит искривление пространства в окрестности фокальной точки. Заметим, что эта «криволинейность» просматривалась и при решении задачи в ВКБ-приближении, где формально происходила следующая замена переменных:  $(y, z) \rightarrow \left( y, \frac{z}{\sqrt{y}} \right)$ . Поэтому, по большому счету, асимптотики одномерных интегралов не дают никаких качественно новых результатов, отличных от ВКБ-решений, кроме условия (13), которое выполняется с большим запасом.

### 3. Обсуждение и выводы

Итак, первым результатом в данной работе является математически корректная сшивка асимптотики эталонного решения в дальней зоне с ВКБ-решением в терминах полиномов Эрмита по вертикальной координате. Решение эталонного уравнения в терминах вырожденной гипергеометрической функции от некоей комплексной переменной [16] сшивается не с асимптотикой в дальней зоне в терминах ВКБ-решения по вертикальной координате, а с асимптотикой из другой работы [14]. Этот результат хоть и носит академический характер, но может быть полезен и в других областях теоретической физики где используются такие эталонные решения.

Показано, что вопрос о двойственности интегралов Фурье не может быть обоснованием однозначного характера строго поглощения волны в критической точке. Математически не запрещено и другое решение — нижняя часть интеграла. Следовательно, поиск решения в форме (3), как половина интеграла Фурье, скорее относится к частной постановке задачи. Можно строить решение и как нижнюю половину интеграла, а можно сложить обе части, что математически также правильно. По нашему мнению, эта двойственность сводится лишь к вопросу: какую часть интеграла Фурье следует брать. Все определяется только конкретной постановкой задачи, а именно граничными условиями, без которых конкретное решение получить нельзя. Поэтому формулируется так: может ли волна падать на критическую точку бесконечно долго без отражения? — Ответ: да. Именно такое решение и было построено в работе [16], которое мы получили в работе альтернативным способом. Но более привычным было бы написать знак  $\text{Re}$  перед интегралом (3), т.е. выделить действительную часть решения. То есть все сводится к сложению найденного в [16] решения от комплексной переменной с решением с комплексно-сопряженным аргументом. Однако такое действие приведет к решению в виде суммы двух решений, которое уже не будет бесконечно долго падающей на фокус волной. Следовательно, возможны иные постановки задачи, которые приведут к другому ответу, так как математически запрета на другие постановки задачи нет.

Мы показали, что первичное квантование эталонной функции — это классическое квантование вертикальной задачи Штурма — Лиувилля. А вторичное квантование — это классическая точка стационарной фазы. Отметим, что из хода решений видно, как складывается степень  $5/4$ . Вторичное квантование дает степень 1, это степень баротропной задачи. Учет бароклинности приводит к новому параметру, определяемому формулой (19), откуда видно, что бароклинность дает дополнительный вклад  $1/4$ . Это и есть вклад в усиление амплитудного фактора за счет сжатия волны по вертикали. Таким образом, общее суммарное усиление колебаний амплитуды складывается из двух факторов: горизонтального дробления волны, которое дает степень 1, и дополнительного вертикального сжатия волны, которое дает степень  $1/4$ , а суммарно получается  $5/4$ . Именно такая же зависимость получается и из классического ВКБ-инварианта, что еще раз доказывает, что в постановке задачи, когда есть только одна падающая на фокус волна, ВКБ-подход и эталонное уравнение дают в точности одинаковый результат.

Заметим, что в данной работе при вторичном квантовании можно ограничиться только методом стационарной фазы, и это связано с тем, что волна квазимонохроматическая. Однако для более полного анализа полученное решение нужно еще свернуть по двум компонентам — частоте и продольной компоненте волнового числа, а при этом уже понадобится метод перевала. Данный анализ будет представлен в отдельной работе.

Еще один результат — это вопрос о коэффициенте прохождения. Для одномерной функции у эталонного решения имеет место классическая логарифмическая точка ветвления, которая дает экспоненциальный коэффициент прохождения, и здесь мы можем согласиться с [16]. Однако в действительности для полноценной двумерной функции вопрос о прохождении полюса гораздо сложнее. Если посмотреть на рис. 2, то становится ясным, что в двумерном случае, в отличие от одномерного, есть зеркальная симметрия областей прозрачности и тени до фокуса и за фокусом. Поэтому требуется качественно новый анализ для изучения вопроса о прохождении, принципиальным образом отличающийся от одномерного подхода. Если в данной работе нам удалось сшить двумерные функции в дальней зоне со стороны падения волны на фокус, то сшивка двумерных функций за областью тени — это вопрос, который в двумерной постановке, насколько нам известно, никем еще не ставился, и он требует разработки совершенно новых подходов. Физически из рис. 2 видно, что если сшивать решение как одномерную функцию, то за фокусом будет экспоненциально затухающий хвост, и коэффициент прохождения будет экспоненциально мал. Однако можно заметить, что для двумерного решения мода может перейти не только в область тени, но и в имеющиеся за фокусом области прозрачности. Поэтому на качественном уровне понятно, что одномерный результат об экспоненциально малом прохождении сильно преувеличен. Волна может преодолеть фокус перестройкой своей моды по вертикали, и, таким образом, вопрос о коэффициенте прохождения является скорее открытым.

В силу больших горизонтальных масштабов, анализ волн Россби в окрестности фокальной точки требует рассмотрения вопроса: насколько устойчивым является результат о бесконечном падении на фокус при учете дополнительных параметров, таких как, например, топография и стратификация. Анализ задачи в линейной постановке о возможном совместном влиянии топографии и баротропного переменного сдвигового течения говорит, что, скорее, эти факторы сильно разнесены в масштабах, и их совместное влияние пренебрежимо мало [17–19]. Однако, на наш взгляд, учет стратификации в таких работах как [7, 8] сильно занижен.

Основной результат данной работы состоит в том, что в линейной постановке зеркало параболоида должно изменяться довольно плавно, чтобы волна не вышла из процесса бесконечно долгого падения на фокус. Однако в областях сильных струйных течений ВКБ-приближение и линейная постановка заведомо не работают, и тогда требуется рассмотрение нелинейной постановки. Нелинейный критический слой волн Россби является скорее отражателем, чем поглотителем, при этом нелинейность может привести к эффекту волновода [19, 20] Все эти факты говорят о необходимости крайне осторожного подхода при анализе волн Россби.

**4. Приложение. Приведение интеграла Фурье к гипергеометрической функции от комплексного переменного**

Для сравнения с решением [16] перепишем собственные функции (20) в следующем виде:

$$\Psi_m(k, y, z, \omega) = \int_0^\infty l^\mu H_m \left( \frac{z l^{1/2}}{2L_y^{1/2}} \delta^{1/2} \right) \exp \left[ -\frac{z^2 l}{8L_y} \delta \right] \cdot \exp \left[ i l \left( y + \frac{z^2}{8L_y} \right) \right] dl. \tag{26}$$

Сделаем замену переменных ( $l \rightarrow x$ ) Аргумент  $\left( \frac{z l^{1/2}}{2L_y^{1/2}} \delta^{1/2} \right)$  полинома Эрмита примем за новую переменную

$$x = \frac{z l^{1/2} \delta^{1/2}}{2L_y^{1/2}}. \tag{27}$$

Следовательно,

$$\Psi_m \sim \int_0^\infty \exp \left[ -2ax^2 \right] \frac{x^{2\mu+1}}{z^{2\mu+2}} H_m(x) dx. \tag{28}$$



Обратим внимание: в формуле (28) появилась комплексная переменная ( $2a$ ), зависящая от двух пространственных физических переменных ( $z, y$ ).

$$2a = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2\delta z^2} (z^2 + 8yL_y). \quad (29)$$

По факту двумерную задачу решили через одномерный интеграл, но только от комплексного аргумента. Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2a} = \frac{2\delta z^2}{\delta z^2 - i(z^2 + 8yL_y)} \equiv \tau^*, \quad (30)$$

где  $\tau$  — комплексная переменная [16], \* — комплексное сопряжение. Интегральное представление гипергеометрической функции через полиномы Эрмита имеет вид (см. [21], разделы 7.37–7.38)

– формула 7.376.2, с. 852:

$$F\left(-n; \frac{\nu+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2a}\right) \sim \int_0^\infty \exp[-2ax^2] x^\nu H_{2n}(x) dx, \quad (31)$$

где  $\text{Re} a > 0, \text{Re} \nu > -1$ ;

– формула 7.376.3, с. 852:

$$F\left(-n; \frac{\nu}{2} + 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2a}\right) \sim \int_0^\infty \exp[-2ax^2] x^\nu H_{2n+1}(x) dx, \quad (32)$$

где  $\text{Re} a > 0, \text{Re} \nu > -2$ .

С учетом (15) находим:

$$\nu = 2\mu + 1 = \frac{3}{2} + i\delta\left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (33)$$

Следовательно, построенные решения регулярны, интегралы сходятся. Сходство с решением [16] достигнуто по трем из четырех параметров. Определяем последний параметр гипергеометрической функции:

$$\frac{\nu}{2} + 1 = \frac{7}{4} + i\frac{\delta}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \equiv \gamma^*, \quad (34)$$

где  $\gamma$  — это квантовый параметр из работы [16] (формула (2.7)). Аналогично находим второй параметр:

$$\frac{\nu+1}{2} = \frac{5}{4} + i\frac{\delta}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right). \quad (35)$$

Таким образом мы получили полное соответствие с работой [16]. Если учесть вторую часть интеграла Фурье для отрицательных волновых чисел, то заменой переменной его можно свести к интегралу по положительным волновым числам, при этом в исследуемом интеграле произойдет замена  $y$  мнимой единицы ( $i \rightarrow -i$ ), и это приведет к тому, что появится вторая часть решения в которой вместо  $\tau$  и  $\gamma$  будет  $\tau^*$  и  $\gamma^*$ . Тем самым, общее решение задачи — это сумма решений от  $\tau$  и  $\tau^*$ , что физически равносильно сумме падающей и отраженной волне. Следовательно, математически нет запрета на отражение, и версия о бесконечной фокусировке сильно преувеличена. Когда волна все более и более замедляется при движении к фокусу, физически трудно понять, это падающая волна или стоячая мода, поэтому, в прикладном плане, нет большой разницы между половиной интеграла Фурье–решением (3) или целым интегралом Фурье, когда пределы интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что равносильно написать знак  $\text{Re}$  перед интегралом (3).

## 5. Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–05–0006. Работа В.Г. Гневыхева выполнялась также в рамках госзадания ИО РАН № 0128–2021–0003.

## Литература

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 2. С. 55–70.

2. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях / Джеймс Лайтхилл; Пер. с англ. под ред. П.П. Корявова, П.И. Чушкина. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. *Гневышев В.Г., Шрира В.И.* Динамика пакетов волн Россби в окрестности зонального критического слоя с учетом вязкости // Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана. 1989а. Т. 25, № 10.
4. *Гневышев В.Г., Шрира В.И.* Кинематика волн Россби на неоднородном меридиональном течении // Океанология. 1989. Т. 29, № 4. С. 543–548. 5. *Gnevyshev V.G., Badulin S.I., Belonenko T.V.* Rossby waves on non-zonal currents: structural stability of critical layer effects // Pure Appl. Geophys. 2020. V. 177, N 11. P. 5585–5598. doi: 10.1007/s00024–020–02567–0
6. *Badulin S.I., Shrira V.I.* On the irreversibility of internal wave dynamics owing to trapping by large-scale flow nonuniformity // J. Fluid Mech. 1993. V. 251. P. 21–53. doi: 10.1017/S0022112093003325
7. *Killworth P.D., Blundell J.R.* Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. Part I: The local problem // J. Phys. Oceanogr. 2003. V. 33, N 4. P. 784–801. doi: 10.1175/1520–0485(2003)33<784: LEPWPI>2.0.CO;2
8. *Killworth P.D., Blundell J.R.* The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. Part II: Two-dimensional examples and global results // J. Phys. Oceanogr. 2005. V. 35. P. 2110–2133. doi: 10.1175/jpo2817.1
9. *LaCasce J.H., Pedlosky J.* The instability of Rossby Basin modes and the oceanic eddy field // J. Phys. Oceanogr. 2004. V. 34, N9. P. 2027–2041. doi: 10.1175/1520–0485(2004)034<2027: TIORBM>2.0.CO;2
10. *Zonal Jets — Phenomenology, Genesis, and Physics / Edited by Galperin B., Read P.L.* University Printing House, Cambridge. 2019. 524 p.
11. *Гневышев В.Г., Шрира В.И.* Об оценке параметров баротропно-бароклинной неустойчивости зональных течений на бета-плоскости // Доклады Академии наук СССР. 1989с. 306(2). С. 305–309.
12. *Gnevyshev V.G., Shrira V.I.* On the evaluation of barotropic-baroclinic instability parameters of zonal flows on a beta-plane // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 161–181. doi: 10.1017/S0022112090003524
13. *Kobayashi S., Sakai S.* Barotropic unstable modes in zonal and meridional channel on the beta-plane // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1993. V. 71. P. 73–103. doi: 10.1080/03091929308203598
14. *Badulin S.I., Shrira V.I., Tsimring L.S.* The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 199–218. doi: 10.1017/s0022112085002610
15. *Гневышев В.Г., Шрира В.И.* Трансформация монохроматических волн Россби в критическом слое на зональном течении // Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана. 1989d. Т. 25, № 8.
16. *Ерохин Н.С., Сагдеев П.З.* К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. Часть I. Стационарная задача // Морской гидрофизический журнал. 1985. № 2. С. 15–27.
17. *Гневышев В.Г., Белоненко Т.В.* Парадокс Россби и его решение // Гидрометеорология и экология (Ученые записки РГГМУ). 2020. № 61. С. 480–493. doi: 10.33933/2074–2762–2020–61–480–493.
18. *Gnevyshev V.G., Badulin S.I., Koldunov A.V., Belonenko T.V.* Rossby Waves on Non-zonal Flows: Vertical Focusing and Effect of the Current Stratification // Pure Appl. Geophys. 2021. doi: 10.1007/s00024–021–02799–8
19. *Гневышев В.Г., Фролова А.В., Колдунов А.В., Белоненко Т.В.* Топографический эффект для волн Россби на зональном сдвиговом потоке // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 1. С. 4–14. doi: 10.7868/S2073667321010019
20. *Гневышев В.Г., Фролова А.В., Кубряков А.А., Собко Ю.В., Белоненко Т.В.* Взаимодействие волн Россби со струйным потоком: основные уравнения и их верификация для Антарктического циркумполярного течения // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55, № 5. С. 39–50.
21. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1963. 1100 с.

## References

1. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Far fields of internal gravitational waves in inhomogeneous and nonstationary stratified media. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.* 2013, 6(2), 55–70 (in Russian).
2. *Lighthill J.* Waves in liquids / James Lighthill; Translated from English, edited by P.P. Koryavov, P.I. Chushkin. *Moscow, Mir*, 1981. 598 p. (in Russian).
3. *Gnevyshev V.G., Shrira V.I.* Dynamics of Rossby wave packets in the vicinity of the zonal critical layer taking into account viscosity. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Fizika Atmosfery i Okeana*. 1989а, 25(10), 1064–1074.
4. *Gnevyshev V.G., Shrira V.I.* Kinematics of Rossby waves on non-uniform meridional current. *Oceanology*. 1989, 29(4), 543–548.

5. Gnevyshev V.G., Badulin S.I., Belonenko T.V. Rossby waves on non-zonal currents: structural stability of critical layer effects. *Pure Appl. Geophys.* 2020, 177, 5585–5598. doi: 10.1007/s00024–020–02567–0
6. Badulin S.I., Shrira V.I. On the irreversibility of internal wave dynamics owing to trapping by large-scale flow nonuniformity. *J. Fluid Mech.* 1993, 251, 21–53. doi: 10.1017/S0022112093003325
7. Killworth P.D., Blundell J.R. Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. Part I: The local problem. *J. Phys. Oceanogr.* 2003, 33(4), 784–801. doi: 10.1175/1520–0485(2003)33<784: LEPWPI>2.0.CO;2
8. Killworth P.D., Blundell J.R. The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. Part II: Two-dimensional examples and global results. *J. Phys. Oceanogr.* 2005, 35, 2110–2133. doi: 10.1175/jpo2817.1
9. LaCasce J.H., Pedlosky J. The Instability of Rossby Basin Modes and the Oceanic Eddy Field\*. *J. Phys. Oceanogr.* 2004, 34(9), 2027–2041. doi: 10.1175/1520–0485(2004)034<2027: TIORBM>2.0.CO;2
10. *Zonal Jets — Phenomenology, Genesis, and Physics* / Edited by Galperin B., Read P.L. *University Printing House, Cambridge*, 2019. 524 p.
11. Gnevyshev V.G., Shrira V.I. On the evaluation of barotropic-baroclinic instability parameters of the zonal flows in beta-plane. *Doklady Akademii Nauk SSSR.* 1989c, 306(2), 305–309.
12. Gnevyshev V.G., Shrira V.I. On the evaluation of barotropic-baroclinic instability parameters of zonal flows on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* 1990, 221, 161–181. doi: 10.1017/S0022112090003524
13. Kobayashi S., Sakai S. Barotropic unstable modes in zonal and meridional channel on the beta-plane. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics.* 1993, 71(1–4), 73–103. doi: 10.1080/03091929308203598
14. Badulin S.I., Shrira V.I., Tsimring L.S. The trapping and vertical focusing of internal waves in a pycnocline due to the horizontal inhomogeneities of density and currents. *J. Fluid Mech.* 1985, 158, 199–218. doi: 10.1017/s0022112085002610
15. Gnevyshev V.G., Shrira V.I. Transformation of monochromatic Rossby waves in the critical layer of the zonal current. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Fizika Atmosfery i Okeana.* 1989d, 25(8), 852–862.
16. Erokhin N.S., Sagdeev R.Z. On the theory of anomalous focusing of internal waves in a two-dimensional inhomogeneous fluid. Part 1. Stationary problem. *Mor. Gidrofiz. Journal.* 1985, 2, 15–27 (in Russian).
17. Gnevyshev V.G., Belonenko T.V. The Rossby paradox and its solution. *Gidrometeorologiya i Ekologiya. Hydrometeorology and Ecology (Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University).* 2020, 61, 480–493 (in Russian). doi: 10.33933/2074–2762–2020–61–480–493
18. Gnevyshev V.G., Badulin S.I., Koldunov A.V., Belonenko T.V. Rossby Waves on Non-zonal Flows: Vertical Focusing and Effect of the Current Stratification. *Pure Appl. Geophys.* 2021. doi: 10.1007/s00024–021–02799–8
19. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Koldunov A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby waves on a zonal shear flow. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.* 2021, 14, 1, 4–14. doi: 10.7868/S2073667321010019
20. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Kubryakov A.A., Sobko Y.V., Belonenko T.V. Interaction of Rossby waves with a jet stream: basic equations and their verification for the antarctic circumpolar current. *Izv. Atmos. Ocean Phys.* 2019, 55(5), 412–422. doi: 10.1134/S0001433819050074
21. *Gradshstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products.* 1963, 1100 p. (in Russian).