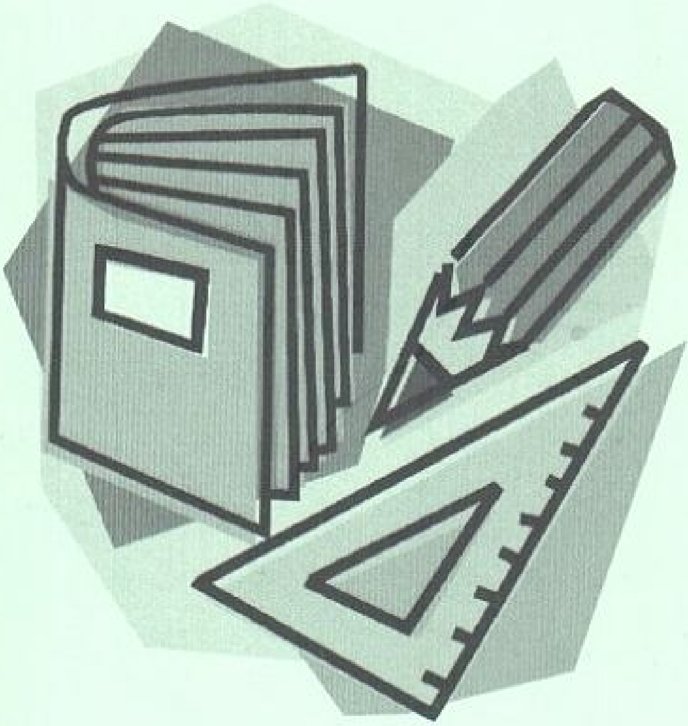
Учебные и контрольные задания по математике

Высшая алгебра



ЭФ СПбГУ
Санкт-Петербург
2017

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Учебные и контрольные задания по математике

Высшая алгебра

ЭФ СПбГУ
Санкт-Петербург
2017

УДК 519
ББК 22.161 я73
У91

Рецензент проф. *Ю.В. Чурин* (С.-Петерб. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
экономического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

Малолеткин Г.Н., Семенов А.А., Халин В.Г., Черняев П.К., Бондарко М.В.
У91 Учебные и контрольные задания по математике: Высшая алгебра: Учеб. пособие – СПб.: ЭФ СПбГУ, 2017 – 96 с.

ISBN 5-356-00081-2

Настоящее издание представляет собой первую часть пособия, которое адресовано прежде всего студентам-экономистам. Кроме задач для аудиторных и самостоятельных занятий, в пособии приведено от 30 до 50-ти вариантов контрольных работ по каждой теме.

Предназначено для студентов социально-экономических специальностей, а также преподавателей университетов.

Без объявл. ББК 22.161 я73

ISBN 5-356-00081-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАНИЯ

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 1. Действия над матрицами

1. Выполнить следующие действия над матрицами:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; m) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;

n) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$; o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{20}$; p) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{24}$;

q) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^2.$

2. Найти матрицу X, если:

a) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $X=AB-BA$, где $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $X=AB-BA$, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

f) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

h) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

i) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

j) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

k) $X=AB+BA$, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

l) $X=AB+BA$, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $X=AB+BA$, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

n) $X=AB+BA$, где $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить матрицу $f(A)$ для заданного многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ (значение многочлена $f(x)$ в "матричной точке" A — это матрица $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $f(x) = x^3 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $f(x) = -x^3 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $f(x) = x^3 - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $f(x) = x^2 - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

h) $f(x) = x^2 + x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$

i) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$

j) $f(x) = -x^2 + x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$

k) $f(x) = -x^2 + x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix};$

l) $f(x) = x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. Найти все матрицы X, для которых:

a) $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $AX = O$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $AX - XA = O$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $AX - XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $AX - XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

h) $AX + XA = O$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

i) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$;

j) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$;

k) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

l) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольное задание №1.

В пункте a) — найти все матрицы, коммутирующие с данной, в пункте b) — найти все матрицы X, для которых $AX + XA = B$, в пункте c) — вычислить $f(A)$.

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + 3x - 3,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^2 + 3x - 1,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^4 + 3x - 2,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = -2x^3 + 2x + 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

9. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

10. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

11. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 2x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

15. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = -2x^3 + 2x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

17. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

19. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 2x^2 + x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

23. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + 3x - 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

24. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^2 + 3x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

25. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^4 + 3x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

26. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = -2x^3 + 2x + 2, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

27. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

28. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

29. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

32. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

33. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + 3x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

34. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

35. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

36. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = -2x^3 + 2x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

37. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

38. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

39. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

40. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

41. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

42. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

43. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 + 3x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

44. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

45. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^4 + 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

46. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = -2x^3 + 2x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

47. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

48. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$,

c) $f(x)=x^3+x^2-x-1, A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

49. a) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&0\\0&4\end{pmatrix}$,

c) $f(x)=3x^2-2x+1,\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

50. a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5\\4&7\end{pmatrix}$,

c) $f(x)=3x^2+4x-5,\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

§ 2. Определители. Обратная матрица

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}-5&10\\4&-9\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}300&301\\200&201\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}a&-b\\b&a\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix}0&-1&0\\-3&-3&-1\\0&1&1\end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix}3&1&0\\6&3&-1\\-6&-2&1\end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix}5&-1&3\\7&-2&6\\-1&1&1\end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&0\\1&3&0\end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix}2&1&0\\2&2&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-4&-2&-1\\2&2&1\end{vmatrix}$;

k) $\begin{vmatrix}-3&1&-3\\-5&1&-3\\7&-1&7\end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix}1&1&1\\4&2&5\\-5&-3&-6\end{vmatrix}$; m) $\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\-2&-1&-1\end{vmatrix}$;

n) $\begin{vmatrix}-3&-3&2\\-4&-3&-1\\6&6&-3\end{vmatrix}$; o) $\begin{vmatrix}4&1&4\\-9&1&-8\\0&-1&0\end{vmatrix}$; p) $\begin{vmatrix}3&1&2\\-1&1&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}$;

q) $\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\1&1&-1&-1\\0&1&2&1\\2&2&-1&-1\end{vmatrix}$; r) $\begin{vmatrix}-1&-2&-2&-1\\1&2&0&-1\\1&1&2&1\\3&4&1&-1\end{vmatrix}$;

s) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; t) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -a & -a \\ a & 0 & -a & -a \\ a & a & 0 & -a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}$; u) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix}$.

2. Для следующих матриц найти обратные или убедиться в их отсутствии:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -7 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

p) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; q) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

r) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; s) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

t) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; w) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Контрольное задание №2.

Вычислить определитель и найти обратную матрицу:

1. a) $\begin{vmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -3 & -1 & -9 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. a) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 3 & -7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -6 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. a) $\begin{vmatrix} -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -7 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

11. a) $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 3 & -9 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

12. a) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 8 & -8 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 8 & -6 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -7 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

16. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

17. a) $\begin{vmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1 & -7 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 9 & -5 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. a) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

20. a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

21. a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

22. a) $\begin{vmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -1 & -6 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

23. a) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -6 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

24. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

25. a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -8 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

26. a) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

27. a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 7 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

28. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

29. a) $\begin{vmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -3 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

30. a) $\begin{vmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 3. Системы линейных уравнений

1. Используя формулы Крамера, решить следующие системы:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 5x_1 + 9x_2 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 200x_1 - 101x_2 = 95 \\ 401x_1 - 199x_2 = 208 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 22 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -8 \\ 7x_2 + x_3 = 24 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 4x_1 + 9x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 7x_1 - 8x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} \quad\; - 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 22 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$;

l) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$;

m) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2a \\ x_1 + x_2 = 2b \end{cases}$;

n) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 9a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9b \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9c \end{cases}$;

o) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4a \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4b \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4c \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4d \end{cases}$.

2. Решить следующие системы линейных уравнений:

a) $\begin{cases} \quad\; - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ 9x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 17x_4 = -6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \\ - x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 23 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 + 5x_3 - x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 43 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 - x_4 = 12 \\ 8x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 26 \\ 8x_1 + 9x_3 - 3x_4 = 20 \\ 12x_1 + x_2 + 13x_3 - 3x_4 = 34 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$;

l) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -5 \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$;

m) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \\ -2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$;

n) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Контрольное задание №3.

Решить следующие системы линейных уравнений:

1. a) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 22 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 23 \\ 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 14x_4 = 55 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 35 \end{cases}$;

2. a) $\begin{cases} -5x_2 + 3x_3 = -12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 5x_1 - 16x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 19 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - 16x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases}$;

3. a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 22 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ 5x_1 - 10x_2 + 14x_3 + 12x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 4 \\ 6x_1 - 12x_2 + 20x_3 + 16x_4 = 14 \end{cases}$;

4. a) $\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 13x_4 = 61 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 45 \end{cases}$;

5. a) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 21 \end{cases}$;

6. a) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -7 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 13 \end{cases}$;

7. a) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_3 = 19 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -11 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -12 \end{cases}$;

8. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ - x_2 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$;

9. a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 7x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_3 - 4x_4 = 6 \\ 6x_1 + 3x_2 - 18x_3 - 15x_4 = 9 \end{cases}$;

10. a) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -15 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -19 \\ 12x_1 + 6x_2 - 13x_3 - 12x_4 = -44 \\ 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 7x_4 = -26 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$;

11. a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -15 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -32 \\ 5x_1 + 10x_2 - 14x_3 - 16x_4 = -74 \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 - 12x_4 = -57 \end{cases}$;

12. a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$;

13. a) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 23 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 = 15 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$;

14. a) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 - 3x_3 + 9x_4 = -11 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$;

15. a) $\begin{cases} -2x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -10 \\ 12x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 6x_4 = -15 \\ 8x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 7x_4 = -25 \\ 8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

16. a) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -20 \\ 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -14 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -9 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$;

17. a) $\begin{cases} 5x_1 \phantom{{}-x_2} - 3x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ 2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases};$

18. a) $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases};$

19. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 11x_4 = 34 \\ -2x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 26 \\ x_4 = -2 \end{cases};$

20. a) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 29 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 17 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 14 \end{cases};$

21. a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -5 \\ 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -15 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$;

22. a) $\begin{cases} - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 3 \\ 8x_1 - 4x_2 - 4x_4 = 4 \\ 12x_1 - 7x_2 - x_3 - 5x_4 = 6 \\ 10x_1 - 6x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$;

23. a) $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -25 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$;

24. a) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 4 \end{cases};$

25. a) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 24 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 6 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases};$

26. a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 38 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 38 \end{cases};$

27. a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -5 \\ 3x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 14x_4 = -7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases};$

28. a) $\begin{cases} \quad\;\; 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \quad\;\; - 3x_3 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - 9x_3 - x_4 = 18 \\ \quad\quad - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 \quad = 8 \\ 10x_1 - 10x_2 - 12x_3 - 3x_4 = 25 \end{cases}$;

29. a) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -8 \\ 6x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 13x_4 = -25 \\ \quad\quad x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 16x_4 = -34 \end{cases}$;

30. a) $\begin{cases} \quad - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -23 \end{cases}$;

31. a) $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 5x_1 + 16x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 49 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 - 3x_4 = 24 \\ 4x_1 + 10x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 32 \end{cases}$;

32. a) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$;

33. a) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 = -23 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 13 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -13 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -8 \\ - 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -26 \end{cases}$;

34. a) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_2 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$;

35. a) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$;

$$
\text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 - 7x_4 = -14 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 11x_4 = -16 \\ - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -20 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 18 \end{cases};
$$

36. $$
\text{a)} \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 19 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases};
$$

$$
\text{b)} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14x_3 - 10x_4 = -37 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -27 \\ 2x_1 - 4x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases}.
$$

§ 4. Ранг матрицы. Однородные системы

1. Найти ранг следующих матриц:

$$
\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -9 & -4 & 6 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{e)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{g)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \\ 7 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix};
$$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; p) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

q) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; r) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

s) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; t) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

u) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; v) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

w) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; x) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

y) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;   z) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти фундаментальное множество решений следующих однородных систем:

a) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

$$\text{h)}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{i)}\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{j)}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{k)}\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{l)}\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{m)}\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\text{n)}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\text{o)}\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\text{p)}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$
\text{q)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 0 \\
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{r)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{s)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\
 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\
 & & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{t)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\
5x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\
6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & - & 3x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{u)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{v)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
6x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\
2x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & 3x_2 & & & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{w)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
 & & 4x_2 & + & 7x_3 & & & + & 4x_5 & = & 0 \\
3x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{x)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$
\text{y)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \\
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\
5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 5x_5 & = & 0
\end{array}\right. ;
$$

$$z)\ \begin{cases} \quad - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Контрольное задание №4.

В пункте a) — найти ранг матриц, в пункте b) — найти фундаментальное множество решений однородной системы.

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$b)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases};$$

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$$b)\ \begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

3. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$b)\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases};$$

4. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$;

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

6. a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

7. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

8. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$;

9. a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 9 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \end{array}\right.$;

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & - & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$;

11. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

12. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

13. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$;

15. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$;

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

17. a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

18. a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 1 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 0 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$;

19. a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 0 \end{cases}$;

20. a) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$;

21. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ - x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

22. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\text{b)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

23. a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{cases} -x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

24. a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases};$$

25. a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

26. a) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$;

27. a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

28. a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

29. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$;

30. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases};
$$

31. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases};
$$

32. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b) } \begin{cases} 2x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases};
$$

33. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases};
$$

34. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$;

35. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$;

36. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$;

37. a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 9x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 8x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$;

38. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} & -\ 2x_2 & +\ 2x_3 & -\ x_4 & +\ x_5 & = & 0 \\ x_1 & -\ 2x_2 & +\ 2x_3 & -\ x_4 & +\ x_5 & = & 0 \\ x_1 & -\ 8x_2 & +\ 8x_3 & -\ 4x_4 & +\ 4x_5 & = & 0 \\ & 6x_2 & -\ 6x_3 & +\ 3x_4 & -\ 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

39. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & -\ 3x_2 & +\ 5x_3 & -\ x_4 & -\ x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -\ 5x_2 & +\ 8x_3 & -\ x_4 & -\ 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & +\ 2x_2 & -\ 4x_3 & +\ 2x_4 & & = & 0 \\ & -\ x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & & = & 0 \end{array}\right.$;

40. a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & -7 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & & +\ x_4 & = & 0 \\ x_1 & & +\ x_3 & +\ 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & -\ x_2 & +\ x_3 & +\ 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$;

41. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$,

b) $\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & -\ x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & & +\ 2x_3 & +\ 4x_4 & -\ 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +\ x_3 & +\ x_4 & -\ x_5 & = & 0 \end{array}\right.$;

42. a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$;

43. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

44. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & -7 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 4x_5 = 0 \\ - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$;

45. a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

46. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases};
$$

47. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases};
$$

48. a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b)} \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases};
$$

49. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$
\text{b)} \begin{cases} - x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases};
$$

50. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$.

§ 5. Собственные значения и столбцы матриц

1. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц второго порядка:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц третьего порядка:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -5 & -14 & 4 \\ 6 & 14 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -7 \\ 4 & -3 & -4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -15 & 1 & -17 \\ -8 & 3 & -8 \\ 14 & -1 & 16 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 9 & -8 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 8 & -8 & -5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$; p) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

q) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; r) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$;

s) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -12 & 10 & -12 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$; t) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$;

u) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; v) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

w) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 7 & -9 & 6 \\ 8 & -8 & 5 \end{pmatrix}$; x) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -5 \\ 6 & -7 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

y) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; z) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \\ 6 & 9 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц четвертого порядка:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Для каждой из перечисленных ниже матриц A найти такую обратимую матрицу S и диагональную матрицу D, что $A = SDS^{-1}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$.

m) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; p) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

q) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; r) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

s) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; t) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

u) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 14 & -3 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; v) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & -5 & 6 \\ 7 & -11 & -7 & 8 \end{pmatrix}$;

w) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & 12 & -5 & -13 \\ 2 & 6 & -3 & -6 \\ 4 & 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$; x) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -10 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

y) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; z) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & -2 & 4 \\ 10 & -5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Используя разложение $A = SDS^{-1}$ (смотри предыдущую задачу), вычислить указанные функции от матриц:

a) $f(A) = A^{11}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $f(A) = A^{-10}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sum\limits_{k=100}^{199} A^k$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $f(A) = \prod\limits_{k=-100}^{100} A^k$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $f(A) = \sqrt{A}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$;

f) $f(A) = \sqrt{A}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$;

g) $f(A) = \sqrt[3]{A}$, $A = \begin{pmatrix} 22 & -14 \\ 21 & -13 \end{pmatrix}$;

h) $f(A) = \sqrt[4]{A}$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{pmatrix}$;

i) $f(A) = \sin \frac{\pi}{4} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

j) $f(A) = \cos \frac{\pi}{2} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

k) $f(A) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$;

l) $f(A) = \arcsin \frac{1}{2} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$;

m) $f(A) = \arccos \frac{1}{2} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

n) $f(A) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$;

o) $f(A) = 3^A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

p) $f(A) = 2^A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

q) $f(A) = \log_2 A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

r) $f(A) = \log_3 A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.

s) $f(A) = \sqrt{A}$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -6 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

t) $f(A) = \sqrt{A}$, $\qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ -6 & 10 & -3 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

u) $f(A) = \sqrt{A}$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ -5 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

v) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -8 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

w) $f(A) = \cos\frac{\pi}{3}A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix};$

x) $f(A) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}A, \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -8 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix};$

y) $f(A) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}A, \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix};$

z) $f(A) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}A, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Контрольное задание №5.

Для матрицы из пункта a) найти ее собственные значения и столбцы, в пункте b) — найти такую матрицу S, что матрица $S^{-1}AS$ диагональна, и эту диагональную матрицу, в пункте c) — вычислить значение указанной функции.

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}; \qquad$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix};$

   c) $f(A) = \sin\frac{\pi}{6}A, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

   c) $f(A) = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}A, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix};$

c) $f(A)=\cos\frac{\pi}{3}A,\qquad A=\begin{pmatrix}7&-4&-8\\4&-3&-4\\4&-2&-5\end{pmatrix}.$

4. a) $\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&-1&-3\\2&-2&-2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\4&1&-2\\6&3&-4\end{pmatrix}$;

c) $f(A)=\log_2 A,\qquad A=\begin{pmatrix}6&1&-5\\2&2&-2\\2&1&-1\end{pmatrix}.$

5. a) $\begin{pmatrix}3&-1&1\\5&-2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}6&-4&-6\\1&-1&-3\\2&-2&-2\end{pmatrix}$;

c) $f(A)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}A,\qquad A=\begin{pmatrix}7&-8&2\\8&-9&2\\8&-8&1\end{pmatrix}.$

6. a) $\begin{pmatrix}3&-1&1\\5&-2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-2&1\\2&2&-5\end{pmatrix}$;

c) $f(A)=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}A,\qquad A=\begin{pmatrix}-5&2&4\\-4&1&4\\-4&2&3\end{pmatrix}.$

7. a) $\begin{pmatrix}3&1&-1\\8&-9&7\\4&-8&6\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}5&-6&-2\\3&-4&-1\\6&-6&-3\end{pmatrix}$;

c) $f(A)=\sin\frac{\pi}{6}A,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}.$

8. a) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-4&-1\\2&-2&-3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3&1&-2\\2&4&-4\\2&-1&-1\end{pmatrix}$;

c) $f(A)=3^A,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&-2&2\\1&-2&2\end{pmatrix}.$

9. a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \log_2 A,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 7 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.

10. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \log_2 A,$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

11. a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = 3^A,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

13. a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A,$ $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ -6 & 3 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

14. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -6 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

15. a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \log_3 A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

17. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \cos \frac{\pi}{3} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

18. a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = 3^A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

19. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \log_3 A$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -8 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

20. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & -9 & 7 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} A,$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

21. a) $\begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = 2^A,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

22. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sqrt{A},$ $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

23. a) $\begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$

24. a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

25. a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = 3^A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

26. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \cos \frac{\pi}{3} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

27. a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

29. a) $\begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

30. a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $f(A) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A$, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -6 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

§ 6. Некоторые приложения (модель Леонтьева)

1. Для следующих данных исполнения баланса в текущем году двумя отраслями I и II определить выпуск ими валовой продукции в плановом периоде (все данные в условных единицах).

a)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	264	198	198	660	320
II	78	39	273	390	420

b)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	336	252	252	840	190
II	111	37	222	370	180

c)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	92	184	184	460	130
II	68	34	238	340	180

d)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	188	141	141	470	190
II	219	73	438	730	520

e)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	180	180	90	450	90
II	75	50	125	250	200

f)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	410	246	164	820	160
II	115	230	805	1150	1290

g)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	120	120	60	300	60
II	388	194	388	970	390

h)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	78	78	234	390	180
II	104	208	728	1040	550

i)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	303	303	404	1010	590
II	141	141	188	470	230

j)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	90	90	120	300	100
II	376	282	282	940	380

k)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	192	144	144	480	140
II	186	93	651	930	760

l)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	450	360	90	900	120
II	142	71	497	710	610

m)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	48	32	80	160	130
II	356	89	445	890	640

n)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	80	160	160	400	260
II	186	62	372	620	580

o)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	136	272	272	680	340
II	78	39	273	390	400

p)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	200	150	150	500	180
II	141	141	188	470	160

q)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	92	138	230	460	190
II	309	206	515	1030	870

r)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	306	306	408	1020	430
II	148	222	370	740	440

s)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	111	148	111	370	160
II	354	118	708	1180	1120

t)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	245	49	196	490	150
II	280	140	280	700	350

u)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	116	87	87	290	70
II	208	312	520	1040	440

v)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	420	168	252	840	370
II	102	51	357	510	560

w)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	320	160	320	800	250
II	80	0	720	800	1120

x)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	190	285	475	950	570
II	41	41	328	410	490

y)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	156	234	390	780	400
II	148	148	444	740	520

z)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	99	99	132	330	220
II	77	154	539	770	770

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Примеры векторных пространств, подпространства

Здесь и далее, как впрочем и раньше, малые греческие буквы $\alpha, \beta, \ldots, \xi, \ldots, \omega$, с индексами или без них, обозначают произвольные вещественные числа.
Очевидное исключение — это число π.

1. Какие из указанных ниже множеств числовых строк[1] являются векторными пространствами относительно естественных операций сложения их элементов и умножения на скаляр:
   a) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ из n чисел;[2]
   b) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ из n чисел,

[1] Синонимы: последовательности, кортежи etc.

[2] В дальнейшем это множество — так называемое *арифметическое пространство* — будет обозначаться $\mathbb{R}_n$.

среди которых есть хоть одно, равное нулю;

c) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, среди которых первое равно последнему;

d) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, среди которых первое равно какому-нибудь другому;

e) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, среди которых есть хотя бы два одинаковых;

f) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых равна единице;

g) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых равна нулю;

h) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, сумма кубов которых равна нулю;

i) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, сумма модулей которых равна единице;

j) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых неотрицательна;

k) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = 0$;

l) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^n = 0$;

m) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \dots \pm n\alpha_n = 1$;

n) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых первое равно сумме остальных, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$;

o) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых хотя бы одно равно сумме остальных;

p) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_6 = \dots = 0$;

q) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_6 = \dots = 0$;

r) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = \alpha_5^2 - \alpha_6^2 = \dots = 0$;

s) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^3 - \alpha_2^3 = \alpha_3^3 - \alpha_4^3 = \alpha_5^3 - \alpha_6^3 = \dots = 0$;

t) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^{2002} - \alpha_2^{2002} = \alpha_3^{2002} - \alpha_4^{2002} = \dots = 0$;

u) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^{2003} - \alpha_2^{2003} = \alpha_3^{2003} - \alpha_4^{2003} = \dots = 0$;

v) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 = \alpha_n$, $\alpha_2 = \alpha_{n-1}$, $\alpha_3 = \alpha_{n-2} \dots$, $\alpha_n = \alpha_1$;

w) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых сумма любых двух одна и та же, точнее: $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k + \alpha_l$, причем все индексы различны;

x) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых разность любых двух одна и та же, точнее: $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_k - \alpha_l$, причем индексы различны;

y) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых сумма модулей любых двух одна и та же, точнее: $|\alpha_i| + |\alpha_j| = |\alpha_k| + |\alpha_l|$, причем индексы различны;

z) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ из n чисел, для которых модули сумм любых двух одинаковы, точнее: $|\alpha_i + \alpha_j| = |\alpha_k + \alpha_l|$, причем индексы различны.

2. Какие из указанных ниже множеств являются векторными пространствами относительно естественных операций сложения их элементов и умножения на скаляр:

a) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)^{\mathsf{T}}$ из n чисел;[3]

b) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)^{\mathsf{T}}$ из n чисел, для которых $AX = O$, где A — некоторая $m \times n$ матрица (вообще говоря, $m \neq n$);

c) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)^{\mathsf{T}}$ из n чисел, для которых $AX = B$, где A и $B \neq O$ — некоторые матрицы подходящего типа;

d) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)^{\mathsf{T}}$ из n чисел, для которых $AX = X$, где A — некоторая квадратная $n \times n$ матрица;

e) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)^{\mathsf{T}}$ из n чисел, для которых $AX = BX$,

[3] Эта другая модель арифметического пространства будет обозначаться $\mathbb{R}^n$. Ясно, что несущественно, как записывать числа — в строчку или в столбец. На ученом языке говорят, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_n$ *изоморфны*.

где A и B — некоторые матрицы одинакового типа;

f) множество всех $m \times n$ матриц (вообще говоря, $m \neq n$) $A = (\alpha_{ij})$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

g) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$, для которых $\sum_{10 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} = 0$;

h) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$, для которых $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{|i+j|} \alpha_{ij} = 0$;

i) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$, для которых $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_{ij}| = 0$;

j) множество всех $m \times n$ матриц A, таких, что $AB = O$, где B — фиксированная $n \times p$ матрица;

k) множество всех $m \times n$ матриц A, таких, что $BA = O$, где B — фиксированная $p \times m$ матрица;

l) множество всех $m \times n$ матриц A, таких, что $BAC = O$, где B — фиксированная $p \times m$ матрица, а C — фиксированная $n \times q$ матрица ;

m) множество всех квадратных $n \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$;

n) множество всех квадратных $n \times n$ матриц A, таких, что $BA = AB$, где B — фиксированная $n \times n$ матрица;

o) множество всех симметрических[4] $n \times n$ матриц;

p) множество всех кососимметрических[5] $n \times n$ матриц;

q) множество всех треугольных[6] $n \times n$ матриц;

r) множество всех унитреугольных[7] $n \times n$ матриц;

s) множество всех нильтреугольных[8] $n \times n$ матриц;

---

[4] Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется *симметрической*, если $A^{\mathsf{T}} = A$, то есть $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

[5] Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется *кососимметрической*, если $A^{\mathsf{T}} = -A$, то есть $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

[6] Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij}$ называется *верхней треугольной*, если ее элементы, расположенные ниже диагонали, равны нулю, то есть $\alpha_{ij} = 0$ при $1 \leqslant j < i \leqslant n$, аналогично определяется *нижняя треугольная матрица*. По умолчанию треугольная матрица — это верхняя треугольная матрица.

[7] Треугольная матрица называется *унитреугольной*, если ее элементы, расположенные на диагонали, равны единице.

[8] Треугольная матрица называется *нильтреугольной*, если ее элементы, расположенные на диагонали, равны нулю.

t) множество всех квадратных $n \times n$ матриц A,
таких, что матрица AB симметрична,
где B — фиксированная $n \times n$ матрица;

u) множество всех квадратных матриц одинакового порядка с нулевым следом;[9]

v) множество всех квадратных матриц одинакового порядка со следом, равным единице;

w) множество всех квадратных матриц одинакового порядка след которых равен сумме недиагональных элементов;

x) множество всех матриц A одинакового порядка,
для которых след матрицы AB равен нулю,
где B — фиксированная матрица того же порядка;

y) множество всех матриц A одинакового порядка,
для которых след матрицы AB равен следу матрицы A,
где B — фиксированная матрица того же порядка;

z) множество всех матриц A одинакового порядка,
для которых след матрицы AB равен следу матрицы B,
где B — фиксированная матрица того же порядка.

3. Какие из указанных ниже множеств функций, определенных на интервале $(-1; 1)$, являются векторными пространствами относительно естественных операций их сложения и умножения на скаляр:

a) множество всех ограниченных функций;

b) множество всех непрерывных функций;

c) множество всех функций, модуль которых непрерывен;

d) множество всех функций, которые непрерывны
или имеют разрывы только 1-го рода;

e) множество всех функций, обращающихся в нуль
по крайней мере в одной точке;

f) множество всех функций, обращающихся в нуль
в фиксированной точке;

g) множество всех дифференцируемых функций;

h) множество всех дифференцируемых функций,
производная которых также дифференцируема;

[9] *Следом* квадратной матрицы A называется сумма ее диагональных элементов, обозначается $Sp\,A$, или $Tr\,A$, или $tr\,A$.

i) множество всех четных функций;

j) множество таких функций $f(x)$,
что функция $g(x) = e^x f(x)$ нечетна;

k) множество таких дифференцируемых функций $y = f(x)$,
что $y' = x^3 y - 2x^2 + 3x - 4$;

l) множество таких дифференцируемых функций $y = f(x)$,
что $y' = y^2$;

4. Убедившись, что подмножества $W_1, W_2, \ldots$ являются подпространствами пространства V, нарисовать диаграмму включений их друг в друга:

a) $V = \mathbb{R}_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R} \}$,
$W_1 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \}$,
$W_2 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \}$,
$W_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + 2\xi_2 = 2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \}$,
$W_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_3 = 0 \}$;

b) $V = \mathbb{R}_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R} \}$,
$W_1 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0 \}$,
$W_2 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \}$,
$W_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = 0 \}$,
$W_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 - 4\xi_4 = 0 \}$,
$W_5 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_3 = \xi_2 - \xi_4 = \xi_2 + \xi_3 = 0 \}$;

c) V — пространство всех квадратных матриц
фиксированного порядка,
W_1 — подмножество верхних треугольных матриц,
W_2 — подмножество нижних треугольных матриц,
W_3 — подмножество верхних нильтреугольных матриц,
W_4 — подмножество нижних нильтреугольных матриц,
W_5 — подмножество диагональных матриц ,
W_6 — подмножество симметрических матриц.

§ 2. Линейные зависимости

1. Определить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов:

в пространстве $\mathbb{R}_3$ —

a) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$;

b) $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(1,1,-2)$;

c) $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$;

d) $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}=(1,1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,1)$, $\mathbf{k}=(1,0,1)$;

в пространстве $\mathbb{R}_4$ —

e) $(1,1,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$;

f) $(1,1,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,-1)$;

g) $(-1,-1,1,1)$, $(1,1,1,1)$, $(1,3,-1,1)$, $(-1,-5,-1,-5)$;

h) $(-3,1,1,1)$, $(3,-1,1,1)$, $(0,0,2,2)$, $(-1,1,1,-1)$;

i) $(2,-1,-1,-1)$, $(0,1,-1,-1)$, $(2,-2,0,0)$, $(4,0,-4,-4)$;

j) $(1,-1,1,-1)$, $(-1,1,-3,-1)$, $(2,-2,4,0)$, $(-2,2,-4,0)$;

k) $(-1,1,3,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(1,1,1,1)$, $(1,1,3,-1)$;

l) $(-3,1,1,1)$, $(-1,-1,1,1)$, $(-1,1,-1,1)$, $(3,1,-3,-1)$;

m) $(-1,1,0,1)$, $(1,-1,2,1)$, $(-3,3,-4,-1)$, $(-1,1,2,3)$;

n) $(-1,1,2,1)$, $(1,-1,0,1)$, $(1,-1,-4,-3)$, $(1,1,2,-1)$;

в пространстве квадратных матриц второго порядка —

o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

p) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в пространстве многочленов от одной переменной —

q) $x-1$, x^2-x, x^3-x^2, x^4-x^3;

r) $x-1$, x^2-x, x^3-x^2, x^3-1;

s) x^2-1, x^3-x, x^4-x^2, x^4-1;

в пространстве линейных форм[10] от $x_1, x_2, \ldots$ —

t) $2x_1+2x_2+7x_3-x_4$, $3x_1-x_2+2x_3+4x_4$, $x_1+x_2+3x_3+x_4$;

---

[10] Форма — это многочлен от нескольких переменных, все одночлены которого имеют одну и ту же степень.

u) $3x_1+2x_2-5x_3+4x_4$, $3x_1-x_2+3x_3-3x_4$, $3x_2-8x_3+7x_4$;

в пространстве квадратичных форм от двух переменных —

v) $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, x^2+y^2;

w) $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, x^2-y^2;

в пространстве функций —

x) 1, $\cos x$, $\cos 2x$;

y) 1, $\cos x$, $\cos^2 x$;

z) 1, $\cos^2 x$, $\cos 2x$.

2. Найти линейные зависимости между следующими векторами или установить, что они независимы:

в пространстве квадратных матриц второго порядка —

a) $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) E, A, A^2, где $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

в пространстве функций —

c) $f_1=1$, $f_2=\sin^2 x$, $f_3=\sin 2x$;

d) $f_1=\sin x$, $f_2=\sin^3 x$, $f_3=\sin 3x$.

3. Найти все значения параметра λ, для которых следующие системы векторов линейно зависимы:

в пространстве $\mathbb{R}_3$ —

a) $(3,1,-\lambda)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$;

b) $(\lambda+1,\lambda+1,\lambda)$, $(1,\lambda,1)$, $(1,1,0)$;

в пространстве $\mathbb{R}_4$ —

c) $(\lambda,1,2,3)$, $(-1,\lambda,3,2)$, $(-2,-1,4,1)$;

d) $(0,\lambda,2,7)$, $(-1,0,\lambda,4)$, $(-2,-1,0,\lambda)$;

e) $(0,\lambda,2,3)$, $(-1,\lambda,\lambda,2)$, $(-2,\lambda,0,\lambda)$;

f) $(-2,\lambda,2,3)$, $(-1,0,\lambda,2)$, $(0,-1,0,\lambda)$;

g) $(0,1,0,3)$, $(-1,0,1,\lambda)$, $(-2,-1,\lambda,1)$;

h) $(0,\lambda,4,3)$, $(-1,0,\lambda,2)$, $(-2,-1,-2,\lambda)$;

i) $(1,1,2,3)$, $(-1,0,1,2)$, $(\lambda,-1,0,1)$;

j) $(0,1,4,\lambda)$, $(-1,0,1,2)$, $(-2,-1,-2,1)$;
k) $(-2,1,2,\lambda)$, $(-2,0,1,2)$, $(-2,-1,0,1)$;
l) $(0,\lambda,2,\lambda)$, $(-1,0,\lambda,\lambda)$, $(-2,-1,0,\lambda)$;
m) $(0,1,2,5)$, $(\lambda,0,1,3)$, $(-2,\lambda,0,1)$;
n) $(0,1,3,3)$, $(\lambda,0,1,2)$, $(-2,\lambda,\lambda,1)$;
o) $(0,1,2,3)$, $(-1,-1,1,2)$, $(\lambda,-3,0,1)$, $(-1,0,3,5)$;
p) $(3,\lambda,2,3)$, $(\lambda,0,\lambda,2)$, $(-1,-1,0,\lambda)$, $(-4,-2,-2,-2)$;
q) $(3,1,2,3)$, $(1,0,1,2)$, $(\lambda,\lambda,0,1)$, $(1,1,0,\lambda)$;
r) $(0,\lambda,2,4)$, $(-1,0,\lambda,2)$, $(-2,-1,0,0)$, $(-1,-2,-3,-6)$;
s) $(0,\lambda,2,\lambda)$, $(-1,0,\lambda,\lambda)$, $(-2,-1,0,\lambda)$, $(2,\lambda,0,-1)$;
t) $(0,\lambda,2,3)$, $(-1,2,\lambda,2)$, $(-2,3,0,\lambda)$, $(-2,6,6,10)$;
u) $(0,4,2,3)$, $(-1,2,1,2)$, $(\lambda,0,0,1)$, $(-1,\lambda,-1,-1)$;
v) $(-3,1,2,\lambda)$, $(-3,0,1,2)$, $(-3,-1,0,1)$, $(-3,2,\lambda,4)$;
w) $(0,1,2,\lambda)$, $(\lambda,0,1,0)$, $(-2,\lambda,0,1)$, $(\lambda,-2,-3,2)$;
x) $(0,1,2,3)$, $(-1,0,0,2)$, $(\lambda,-1,\lambda,1)$, $(2,2,4,2)$;
y) $(0,1,2,2)$, $(\lambda,0,1,2)$, $(-2,\lambda,0,2)$, $(2,-1,-4,-6)$;
z) $(0,1,2,\lambda)$, $(-1,-1,1,2)$, $(-2,-3,0,1)$, $(2,0,-6,-10)$.

§ 3. Базис и размерность

1. Найти размерности следующих пространств, указав какой-либо их базис:
   a) всех $m \times n$ матриц;
   b) всех симметрических матриц n-го порядка;
   c) всех кососимметрических матриц n-го порядка;
   d) всех треугольных матриц n-го порядка;
   e) всех нильтреугольных матриц n-го порядка;
   f) всех матриц n-го порядка с нулевым следом;

2. Из заданной системы векторов выделить какой-либо базис ее линейной оболочки и векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису, то есть представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

   в пространстве $\mathbb{R}_2$ —

   a) $X_1 = (1,-2)$, $X_2 = (-2,4)$, $X_3 = (10,11)$, $X_4 = (-1,3)$;
   b) $X_1 = (2,1)$, $X_2 = (3,2)$, $X_3 = (1,1)$, $X_4 = (2,3)$;

в пространстве $\mathbb{R}_3$ —

c) $X_1=(2,1,-3)$, $X_2=(3,1,-5)$, $X_3=(4,2,-1)$, $X_4=(1,0,-7)$;

d) $X_1=(2,3,3)$, $X_2=(-1,4,-2)$, $X_3=(1,7,1)$, $X_4=(-1,-2,4)$, $X_5=(4,11,11)$;

e) $X_1=(1,2,4)$, $X_2=(1,-1,1)$, $X_3=(2,2,4)$, $X_4=(1,4,2)$;

f) $X_1=(3,2,2)$, $X_2=(2,3,1)$, $X_3=(1,1,3)$, $X_4=(5,1,11)$;

в пространстве $\mathbb{R}_4$ —

g) $X_1=(-1,1,3,1)$, $X_2=(1,-1,-1,1)$, $X_3=(1,1,-3,1)$, $X_4=(1,1,-1,-1)$, $X_5=(1,3,1,3)$;

h) $X_1=(1,-1,-1,1)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$, $X_3=(-1,-1,1,-3)$, $X_4=(4,0,-2,6)$, $X_5=(1,3,1,3)$;

i) $X_1=(-1,-1,1,1)$, $X_2=(1,1,1,1)$, $X_3=(0,0,-4,-4)$, $X_4=(1,3,1,-1)$, $X_5=(1,3,3,1)$;

j) $X_1=(-1,1,-1,1)$, $X_2=(1,-1,3,1)$, $X_3=(2,-2,4,0)$, $X_4=(4,-4,8,0)$, $X_5=(0,0,2,2)$;

k) $X_1=(-1,1,3,1)$, $X_2=(1,-1,3,1)$, $X_3=(-1,1,9,3)$, $X_4=(-2,2,0,0)$, $X_5=(4,-4,0,0)$;

l) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,2)$, $X_3=(1,1,-1,0)$, $X_4=(1,1,1,0)$, $X_5=(-3,-3,-3,-4)$;

m) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,0)$, $X_3=(1,1,-1,2)$, $X_4=(3,-1,-1,0)$, $X_5=(0,2,2,6)$;

n) $X_1=(1,-1,-1,-2)$, $X_2=(-1,1,-1,-2)$, $X_3=(-3,3,1,2)$, $X_4=(0,0,-2,-4)$, $X_5=(-2,2,0,0)$;

o) $X_1=(-3,1,1,1)$, $X_2=(3,-1,1,1)$, $X_3=(-3,1,3,3)$, $X_4=(-1,1,1,-1)$, $X_5=(-4,0,-2,2)$;

в пространстве матриц второго порядка —

p) $X_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

q) $X_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

r) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

s) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

t) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

u) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

v) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

w) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

x) $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в пространстве функций —

y) $f_1 = 1$, $f_2 = \cos x$, $f_3 = \cos 2x$, $f_4 = \cos^2 x$,
$f_5 = \cos 3x$, $f_6 = \cos^3 x$;

z) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin 2x$, $f_3 = \sin^2 x$, $f_4 = \sin 3x$, $f_5 = \sin^3 x$.

Контрольное задание №6.

В пункте a) — найти все значения параметра λ,
для которых указанная система векторов-строк
будет линейно зависимой;
в пункте b) — из заданной системы векторов
выделить базис их линейной оболочки
и вектора, не вошедшие в базис,
разложить по базису.

1. a) $(-5,-2,11,4)$, $(-1,\lambda,3,2)$, $(-2,-1,4,1)$;
   b) $X_1=(1,-1,1,-1)$, $X_2=(-1,1,-3,-1)$,
   $X_3=(3,-3,5,-1)$, $X_4=(3,-3,7,1)$, $X_5=(3,-3,7,1)$;
2. a) $(\lambda,-1,-2,-3)$, $(-5,0,1,2)$, $(-4,-1,0,1)$;
   b) $X_1=(-1,1,0,1)$, $X_2=(1,-1,2,1)$,
   $X_3=(1,1,0,1)$, $X_4=(-1,-1,2,1)$, $X_5=(4,-2,2,0)$;
3. a) $(-4,4,\lambda,5)$, $(-1,\lambda,1,\lambda)$, $(-2,0,0,1)$;
   b) $X_1=(0,1,1,1)$, $X_2=(2,-1,1,1)$,
   $X_3=(2,1,-1,1)$, $X_4=(0,1,1,-1)$, $X_5=(6,-1,-3,3)$;
4. a) $(5,6,-1,-4)$, $(-1,\lambda,1,2)$, $(\lambda,\lambda,0,1)$;
   b) $X_1=(-1,1,1,-1)$, $X_2=(1,-1,1,3)$,
   $X_3=(1,1,-1,-1)$, $X_4=(1,1,1,-3)$, $X_5=(2,-2,-2,6)$;
5. a) $(3,2,1,1)$, $(\lambda,0,1,3)$, $(-2,\lambda,0,1)$;
   b) $X_1=(-1,0,1,1)$, $X_2=(1,0,1,1)$,
   $X_3=(2,0,0,0)$, $X_4=(1,2,1,-1)$, $X_5=(2,2,4,2)$;
6. a) $(3,2,\lambda,0)$, $(-1,0,1,2)$, $(-2,-1,2,1)$;
   b) $X_1=(1,-1,-1,1)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$,
   $X_3=(-3,3,-1,1)$, $X_4=(0,0,-2,2)$, $X_5=(0,0,4,-4)$;
7. a) $(\lambda,\lambda,6,\lambda)$, $(-1,0,-1,\lambda)$, $(-2,-1,-4,1)$;
   b) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,2)$,
   $X_3=(-3,3,-1,-2)$, $X_4=(1,1,1,0)$, $X_5=(-3,5,1,0)$;

8. a) $(-1,-2,1,4)$, $(1,\lambda,1,2)$, $(-1,-1,\lambda,1)$;

   b) $X_1=(-1,3,1,1)$, $X_2=(1,1,1,1)$,
   $X_3=(1,3,-1,1)$, $X_4=(3,1,-1,1)$, $X_5=(5,1,-3,1)$;

9. a) $(-5,-2,1,\lambda)$, $(\lambda,0,1,1)$, $(-2,\lambda,0,\lambda)$;

   b) $X_1=(1,1,1,1)$, $X_2=(3,-1,1,1)$,
   $X_3=(3,1,-1,1)$, $X_4=(-1,1,1,-1)$, $X_5=(-4,0,-6,-2)$;

10. a) $(-3,-1,\lambda,3)$, $(-1,0,-3,2)$, $(-2,-1,-2,1)$;

    b) $X_1=(-3,1,1,1)$, $X_2=(-1,-1,1,1)$,
    $X_3=(-1,1,-1,1)$, $X_4=(3,1,1,-1)$, $X_5=(0,2,4,-2)$;

11. a) $(2,1,1,1)$, $(-1,\lambda,1,2)$, $(-3,-1,\lambda,1)$;

    b) $X_1=(0,1,1,1)$, $X_2=(2,-1,1,1)$,
    $X_3=(0,1,-1,1)$, $X_4=(2,1,1,-1)$, $X_5=(6,5,3,3)$;

12. a) $(0,\lambda,-2,-3)$, $(\lambda,0,1,1)$, $(-2,\lambda,0,\lambda)$;

    b) $X_1=(-1,-1,1,1)$, $X_2=(1,1,1,1)$,
    $X_3=(1,3,-1,1)$, $X_4=(1,3,1,-1)$, $X_5=(0,0,4,0)$;

13. a) $(-5,-2,5,4)$, $(-1,0,\lambda,2)$, $(-2,-1,1,1)$;

    b) $X_1=(1,-1,-1,-3)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$,
    $X_3=(-1,-1,1,1)$, $X_4=(-4,2,2,8)$, $X_5=(1,-3,1,-3)$;

14. a) $(3,2,\lambda,0)$, $(-1,0,3,2)$, $(-2,-1,\lambda,\lambda)$;

    b) $X_1=(0,1,1,1)$, $X_2=(2,-1,1,1)$,
    $X_3=(-2,3,1,1)$, $X_4=(2,1,1,-1)$, $X_5=(-8,-1,-5,-1)$;

15. a) $(4,1,6,-5)$, $(\lambda,0,\lambda,2)$, $(-2,\lambda,-4,1)$;

    b) $X_1=(-1,1,0,1)$, $X_2=(1,-1,2,1)$,
    $X_3=(3,-3,4,1)$, $X_4=(1,-1,4,3)$, $X_5=(3,-3,4,1)$;

16. a) $(3,2,\lambda,-3)$, $(-1,0,\lambda,3)$, $(-2,-1,0,3)$;

    b) $X_1=(1,-1,-1,1)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$,
    $X_3=(0,0,2,-2)$, $X_4=(-1,1,3,-3)$, $X_5=(-1,1,-3,3)$;

17. a) $(\lambda,1,1,1)$, $(-1,0,1,\lambda)$, $(-3,-1,0,1)$;

    b) $X_1=(-1,0,1,1)$, $X_2=(1,0,1,1)$,
    $X_3=(1,2,-1,1)$, $X_4=(-2,2,-2,0)$, $X_5=(0,2,2,4)$;

18. a) $(0,1,\lambda,1)$, $(-1,0,1,1)$, $(-2,-1,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,-1,1)$, $X_2=(1,-1,-1,1)$,
$X_3=(1,1,-3,1)$, $X_4=(-4,2,4,-2)$, $X_5=(1,-5,7,-3)$;

19. a) $(3,2,\lambda,6)$, $(-1,0,\lambda,0)$, $(-2,-1,0,-3)$;

b) $X_1=(-1,1,-1,1)$, $X_2=(1,-1,3,1)$,
$X_3=(1,1,-3,1)$, $X_4=(1,1,-1,-1)$, $X_5=(2,2,-6,-2)$;

20. a) $(-3,\lambda,1,0)$, $(\lambda,0,1,1)$, $(-2,\lambda,0,\lambda)$;

b) $X_1=(1,1,-1,-1)$, $X_2=(-1,3,-1,-1)$,
$X_3=(0,-4,2,2)$, $X_4=(3,-5,1,1)$, $X_5=(-3,5,-1,-1)$;

21. a) $(-1,-1,-1,\lambda)$, $(-1,\lambda,1,1)$, $(-2,-1,\lambda,1)$;

b) $X_1=(2,-1,-1,-1)$, $X_2=(0,1,-1,-1)$,
$X_3=(4,-1,-3,-3)$, $X_4=(-4,3,1,1)$, $X_5=(-4,0,4,4)$;

22. a) $(-6,2,-2,-6)$, $(\lambda,0,1,2)$, $(0,-1,0,1)$;

b) $X_1=(-1,0,1,1)$, $X_2=(1,-2,1,1)$,
$X_3=(-1,-2,3,3)$, $X_4=(-2,2,0,0)$, $X_5=(-3,2,1,1)$;

23. a) $(1,1,1,2)$, $(\lambda,0,1,2)$, $(-2,\lambda,0,0)$;

b) $X_1=(1,-1,-1,0)$, $X_2=(-1,1,-1,-2)$,
$X_3=(1,-1,-3,-2)$, $X_4=(3,-3,1,4)$, $X_5=(2,-2,0,2)$;

24. a) $(-4,7,2,5)$, $(-1,2,1,2)$, $(\lambda,3,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,2)$,
$X_3=(-3,3,-1,-2)$, $X_4=(1,1,1,0)$, $X_5=(-2,-2,0,4)$;

25. a) $(\lambda,-1,-2,5)$, $(-1,0,0,2)$, $(-2,-1,-2,1)$;

b) $X_1=(-1,1,3,1)$, $X_2=(1,-1,-1,1)$,
$X_3=(1,1,1,1)$, $X_4=(1,1,3,-1)$, $X_5=(-1,5,11,1)$;

26. a) $(-6,-1,-2,\lambda)$, $(3,0,1,2)$, $(0,-1,0,1)$;

b) $X_1=(1,-1,-1,0)$, $X_2=(-1,1,-1,-2)$,
$X_3=(3,-3,1,4)$, $X_4=(-3,3,1,-2)$, $X_5=(2,-2,0,2)$;

27. a) $(4,-7,-2,-5)$, $(-1,2,1,2)$, $(-2,3,\lambda,1)$;

b) $X_1=(1,-1,-1,1)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$,
$X_3=(-1,1,-3,3)$, $X_4=(1,-1,-3,3)$, $X_5=(3,-3,1,-1)$;

28. a) $(-3, 2, \lambda, 3)$, $(-1, 2, \lambda, 2)$, $(-2, 0, 0, \lambda)$;

b) $X_1 = (2, -1, -1, -1)$, $X_2 = (0, 1, -1, -1)$,
$X_3 = (0, -1, 1, -1)$, $X_4 = (-4, 1, 3, 5)$, $X_5 = (2, -1, -1, 3)$;

29. a) $(-3, 0, \lambda, 3)$, $(-1, \lambda, \lambda, 2)$, $(-2, -1, 0, \lambda)$;

b) $X_1 = (0, 1, 1, 1)$, $X_2 = (2, -1, 1, 1)$,
$X_3 = (-4, 4, 0, 0)$, $X_4 = (4, -3, 1, 1)$, $X_5 = (2, 1, 3, 3)$;

30. a) $(3, 1, 2, -3)$, $(\lambda, 0, 0, 2)$, $(-2, \lambda, -2, 1)$;

b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2)$, $X_2 = (1, -1, 1, 0)$,
$X_3 = (3, -3, 1, -2)$, $X_4 = (1, 1, 1, 0)$, $X_5 = (1, -3, -1, -2)$;

31. a) $(-3, -3, \lambda, 0)$, $(\lambda, 1, 1, 2)$, $(-2, \lambda, 0, 1)$;

b) $X_1 = (1, 0, -1, -1)$, $X_2 = (-1, 2, -1, -1)$,
$X_3 = (0, -4, 4, 4)$, $X_4 = (-1, -2, 3, 3)$, $X_5 = (-1, -2, 3, 3)$;

32. a) $(-3, 5, 1, 3)$, $(-1, 2, 1, 2)$, $(\lambda, 3, 0, 1)$;

b) $X_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $X_2 = (1, -1, 2, 1)$,
$X_3 = (-3, 3, -4, -1)$, $X_4 = (1, 1, 2, -1)$, $X_5 = (2, 0, 6, 2)$;

33. a) $(4, 1, -1, \lambda)$, $(-1, 0, 1, 2)$, $(-2, -1, -1, 1)$;

b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2)$, $X_2 = (1, -1, 1, 0)$,
$X_3 = (1, 1, -1, 0)$, $X_4 = (1, 1, 1, -2)$, $X_5 = (1, -3, 3, -4)$;

34. a) $(-5, 2, 1, \lambda)$, $(-1, 2, 1, 2)$, $(-2, 0, 0, 1)$;

b) $X_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $X_2 = (1, 1, 1, 1)$,
$X_3 = (-2, -2, 0, 0)$, $X_4 = (1, 3, 1, -1)$, $X_5 = (5, 9, 1, -3)$;

35. a) $(0, -1, \lambda, 3)$, $(\lambda, 0, \lambda, 2)$, $(-1, -1, 0, \lambda)$;

b) $X_1 = (1, 0, -1, -1)$, $X_2 = (-1, 0, -1, -1)$,
$X_3 = (-2, 0, 0, 0)$, $X_4 = (0, 0, 2, 2)$, $X_5 = (-3, 0, -1, -1)$;

36. a) $(3, 2, \lambda, 0)$, $(-1, 0, 3, 2)$, $(-2, -1, \lambda, \lambda)$;

b) $X_1 = (1, -1, -1, 1)$, $X_2 = (-1, 1, -1, 1)$,
$X_3 = (-1, 1, 3, -3)$, $X_4 = (0, 0, -2, 2)$, $X_5 = (-2, 2, 0, 0)$;

37. a) $(\lambda, -8, 2, 6)$, $(-1, -1, 1, 2)$, $(-2, -3, 0, 1)$;

b) $X_1 = (-1, 1, 1, 0)$, $X_2 = (1, -1, 1, 2)$,
$X_3 = (1, -1, 3, 4)$, $X_4 = (1, 1, 1, 0)$, $X_5 = (-2, -2, 0, 2)$;

38. a) $(\lambda,\lambda,0,\lambda)$, $(\lambda,0,\lambda,2)$, $(-2,\lambda,\lambda,1)$;

b) $X_1=(2,-1,-1,-1)$, $X_2=(0,1,-1,-1)$,
$X_3=(-2,-1,3,3)$, $X_4=(-2,-1,-1,1)$, $X_5=(0,2,6,2)$;

39. a) $(-3,-4,1,3)$, $(\lambda,\lambda,1,2)$, $(-2,-3,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,0,1)$, $X_2=(1,-1,2,1)$,
$X_3=(1,-1,4,3)$, $X_4=(2,-2,2,0)$, $X_5=(-3,3,-4,-1)$;

40. a) $(-5,-2,1,2)$, $(-1,\lambda,1,2)$, $(-2,-1,\lambda,\lambda)$;

b) $X_1=(1,-1,-3,-1)$, $X_2=(-1,1,1,-1)$,
$X_3=(-3,3,7,1)$, $X_4=(1,-1,1,3)$, $X_5=(4,-4,-8,0)$;

41. a) $(\lambda,-4,\lambda,\lambda)$, $(-1,1,1,2)$, $(\lambda,-1,0,1)$;

b) $X_1=(1,-1,-1,1)$, $X_2=(-1,1,-1,1)$,
$X_3=(-1,-1,1,-3)$, $X_4=(-5,3,1,-3)$, $X_5=(4,-2,0,2)$;

42. a) $(-2,-2,-2,-4)$, $(-1,0,\lambda,\lambda)$, $(-2,-1,0,-1)$;

b) $X_1=(0,-1,-1,-1)$, $X_2=(0,1,-1,-1)$,
$X_3=(0,0,-2,-2)$, $X_4=(0,-1,3,3)$, $X_5=(0,1,-3,-3)$;

43. a) $(-5,-4,\lambda,4)$, $(-1,-2,\lambda,2)$, $(-2,-1,0,\lambda)$;

b) $X_1=(-1,2,1,1)$, $X_2=(1,0,1,1)$,
$X_3=(0,-2,-2,-2)$, $X_4=(0,2,2,2)$, $X_5=(0,2,2,2)$;

44. a) $(-3,-1,1,4)$, $(-1,\lambda,1,3)$, $(-2,-1,\lambda,1)$;

b) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,2)$,
$X_3=(1,1,-1,0)$, $X_4=(1,1,1,0)$, $X_5=(-2,0,0,6)$;

45. a) $(-6,\lambda,1,4)$, $(\lambda,0,1,2)$, $(\lambda,-1,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,2,1)$, $X_2=(1,-1,0,1)$,
$X_3=(1,1,0,1)$, $X_4=(1,1,2,-1)$, $X_5=(3,-5,-2,-3)$;

46. a) $(-3,\lambda,1,3)$, $(-1,-1,1,2)$, $(\lambda,-1,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,2,1)$, $X_2=(1,-1,2,1)$,
$X_3=(1,1,0,1)$, $X_4=(1,1,0,-1)$, $X_5=(-3,3,-2,-3)$;

47. a) $(-1,-1,-3,-1)$, $(-1,0,5,2)$, $(\lambda,-1,2,1)$;

b) $X_1=(0,-1,-1,-1)$, $X_2=(-2,1,-1,-1)$,
$X_3=(-4,1,-3,-3)$, $X_4=(4,0,4,4)$, $X_5=(4,-3,1,1)$;

48. a) $(-3,-1,7,3)$, $(-1,0,3,2)$, $(-2,-1,\lambda,1)$;

b) $X_1=(1,-2,-1,-1)$, $X_2=(-1,0,-1,-1)$,
$X_3=(0,2,2,2)$, $X_4=(4,-4,0,0)$, $X_5=(2,-2,0,0)$;

49. a) $(1,\lambda,-1,-4)$, $(1,0,1,\lambda)$, $(-1,-1,0,1)$;

b) $X_1=(-1,1,1,3)$, $X_2=(1,-1,1,-1)$,
$X_3=(1,1,-1,-1)$, $X_4=(1,1,1,-3)$, $X_5=(1,1,-1,3)$;

50. a) $(0,-2,2,6)$, $(\lambda,0,\lambda,2)$, $(-1,-1,0,\lambda)$;

b) $X_1=(-1,1,1,2)$, $X_2=(1,-1,1,0)$,
$X_3=(-1,1,3,4)$, $X_4=(1,1,1,0)$, $X_5=(-2,4,0,2)$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 1. Действия над матрицами

1. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -1 \\ 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; d) (-2);

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 1 & n^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} -1024 & 0 \\ 0 & -1024 \end{pmatrix}$;

p) $\begin{pmatrix} 2^{36} & 0 \\ 0 & 2^{36} \end{pmatrix}$; q) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

l) $\begin{pmatrix} -6 & 10 & 6 \\ 10 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; m) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 12 & 20 \\ 4 & 16 & 28 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -16 & -6 \end{pmatrix}$; c)[11] $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \beta+1 & \alpha \\ \beta & \alpha+1 \end{pmatrix}$; e) $\alpha\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}+\beta E$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\alpha A+\beta E$;

g) решений нет; h) $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

k) решений нет; l) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 2. Определители. Обратная матрица

1. a) -4; b) 5; c) 100; d) a^2+b^2; e) -3; f) 3; g) -12; h) 0; i) 2; j) -2; k) 8; l) 0; m) 1; n) -3; o) 4; p) -2; q) 1; r) 2; s) 0; t) a^4; u) $(af-be+cd)^2$.

2. a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ -9 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -9 & -7 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 5 \\ 4 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

[11] Здесь и далее буквы α, β и γ обозначают произвольные числа.

j) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} -9 & 8 & 5 \\ 6 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ -9 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

p) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; q) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

r) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; s) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

t) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; u) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; w) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

§ 3. Системы линейных уравнений

1. a) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$; b) $x_1 = 3,\ x_2 = 5$;
c) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2$; d) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$;
e) $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3$; f) $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$;
g) $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$; h) $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$;
i) $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$; j) $x_1 = 3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2$;
k) $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$; l) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2$;
m) $x_1 = a + b,\ x_2 = -a + b$;
n) $x_1 = 2a + 2b + c,\ x_2 = -2a + b + 2c,\ x_3 = -a + 2b - 2c$;
o) $x_1 = a + b + c + d,\ x_2 = a + b - c - d,\ x_3 = a - b + c - d,$
$x_4 = a - b - c + d$.

2. a) $x_1 = 3 - 2\alpha - 2\beta$, $x_2 = 1 - 2\alpha - \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$;

b) нет решений

c) $x_1 = 2 + 2\alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -3 - 2\alpha - \beta$, $x_4 = \beta$;

d) $x_1 = 20 - 6\alpha$, $x_2 = 2\alpha - 5$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 4 - \alpha$;

e) $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha - 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$;

f) $x_1 = 2\alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1 - \beta$, $x_4 = \beta$;

g) нет решений

h) $x_1 = 20 - 6\alpha$, $x_2 = 7 - 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 2 - \alpha$;

i) $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha - 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$;

j) $x_1 = 4 - 3\alpha$, $x_2 = 4\alpha - 2$, $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = 4 - 2\alpha$;

k) $x_1 = 2 - \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$;

l) $x_1 = 3 + \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$;

m) $x_1 = 2 + 2\alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1 + \beta$, $x_4 = \beta$;

n) $x_1 = 2 + \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

§ 4. Ранг матрицы. Однородные системы

1. a) 4; b) 2; c) 3; d) 3; e) 3; f) 4; g) 3; h) 2; i) 2; j) 2; k) 4; l) 3; m) 2; n) 2; o) 3; p) 4; q) 2; r) 3; s) 3; t) 2; u) 4; v) 4; w) 4; x) 3; y) 3; z) 3.

2.[12] a) $X_1 = (-1, 0, 0, 1, 1)$, $X_2 = (0, 0, -3, 1, 2)$;

b) $X_1 = (1, 0, 0, 1, 0)$, $X_2 = (-1, 1, 0, 0, 1)$;

c) $X_1 = (-1, 0, 0, 2)$;

d) $X_1 = (0, -2, 1, -1)$, $X_2 = (1, 2, -1, 2)$;

e) $X_1 = (-1, 2, 0, 0)$, $X_2 = (-1, 0, 1, 1)$;

f) $X_1 = (-2, 0, 0, 1)$;

g) $X_1 = (0, -1, 0, 2)$;

h) $X_1 = (0, 0, 0, 1, -2)$, $X_2 = (-1, 0, -1, 2, -1)$, $X_3 = (-1, -1, 0, 2, 0)$;

i) $X_1 = (-2, 0, 0, 1, 1)$;

j) $X_1 = (2, -5, 0, -2, 2)$;

k) $X_1 = (1, 2, 0, 0, 2)$;

l) $X_1 = (-1, -2, 1, 0, 1)$, $X_2 = (1, 1, -1, 1, 1)$;

[12] Разумеется, здесь приведены лишь отдельные возможные решения, возможно, не самые изящные. Убедитесь, однако, что они правильные.

m) $X_1 = (0, 1, -1, 1)$;
n) $X_1 = (-1, 0, 0, 1, 1)$, $X_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
o) $X_1 = (-1, -2, -3, -1, 4)$;
p) $X_1 = (1, -1, 0, 0, 1)$;
q) $X_1 = (0, 1, 0, 3, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $X_3 = (0, 0, 0, 2, 1)$;
r) $X_1 = (1, 0, 0, 1)$;
s) $X_1 = (1, -1, -1, 2)$;
t) $X_1 = (0, -3, 0, 1, -1)$, $X_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
u) $X_1 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $X_2 = (0, 1, -1, 1, 2)$;
v) $X_1 = (1, 0, -3, 2, 1)$, $X_2 = (0, 0, -1, 1, 1)$, $X_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
w) $X_1 = (-2, -2, 0, 1, 2)$;
x) $X_1 = (-1, 1, -1, 0)$;
y) $X_1 = (2, 0, -2, 1, 1)$, $X_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$;
z) $X_1 = (0, 0, 1, 0, 1)$;

§ 5. Собственные значения и столбцы матриц

1. a) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^{\mathsf T}$, $D_2 = -3$, $X_2 = \alpha_2(1, 4)^{\mathsf T}$;
b) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 3)^{\mathsf T}$, $D_2 = 1$, $X_2 = \alpha_2(1, 1)^{\mathsf T}$;
c) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(3, 4)^{\mathsf T}$;
d) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(4, 3)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(2, 1)^{\mathsf T}$;
e) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, 1)^{\mathsf T}$;
f) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^{\mathsf T}$;
g) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(2, 1)^{\mathsf T}$;
h) $D_1 = -2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^{\mathsf T}$, $D_2 = -1$, $X_2 = \alpha_2(4, 3)^{\mathsf T}$;
i) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, -1)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, -2)^{\mathsf T}$;
j) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, 2)^{\mathsf T}$;
k) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 3)^{\mathsf T}$, $D_2 = 2$, $X_2 = \alpha_2(1, 2)^{\mathsf T}$;
l) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(2, 1)^{\mathsf T}$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(4, 1)^{\mathsf T}$.

2. a) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2, 2)^{\mathsf T}$,
$D_2 = 2$, $X_2 = \alpha_{21}(1, -1, 0)^{\mathsf T} + \alpha_{22}(1, 0, 1)^{\mathsf T}$;
b) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 1, 3)^{\mathsf T}$,
$D_2 = -2$, $X_2 = \alpha_2(-7, 2, -9)^{\mathsf T}$,
$D_3 = 4$, $X_3 = \alpha_3(2, 2, 3)^{\mathsf T}$;
c) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(-3, 1, 1)^{\mathsf T}$,
$D_2 = -2$, $X_2 = \alpha_2(3, -5, 4)^{\mathsf T}$,

$D_3 = 4, \quad X_3 = \alpha_3(0, 1, 1)^{\mathsf{T}};$

d) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(0, 2, 3)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 2, \quad X_2 = \alpha_2(3, 1, 3)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 5, \quad X_3 = \alpha_3(3, 2, 0)^{\mathsf{T}};$

e) $D_1 = 2, \quad X_1 = \alpha_1(2, -1, 0)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 3, \quad X_2 = \alpha_2(1, 0, 2)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 5, \quad X_3 = \alpha_3(1, -1, -1)^{\mathsf{T}};$

f) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(2, 1, 1)^{\mathsf{T}};$

g) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 1)^{\mathsf{T}};$

h) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(5, 2, -4)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 2, \quad X_2 = \alpha_2(1, 0, -1)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 3, \quad X_3 = \alpha_3(1, 1, -1)^{\mathsf{T}};$

i) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(1, 1, 0)^{\mathsf{T}};$

j) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, -1)^{\mathsf{T}},$

$D_{23} = -2, X_2 = \alpha_{21}(1, 0, 1)^{\mathsf{T}} + \alpha_{22}(0, 2, -3)^{\mathsf{T}};$

k) $D_1 = -2, X_1 = \alpha_1(1, 1, -1)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 1, \quad X_2 = \alpha_2(4, 1, 2)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = -5, X_3 = \alpha_3(1, 4, 2)^{\mathsf{T}};$

l) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(1, -1, 3)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(7, 5, 6)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 4, \quad X_3 = \alpha_3(2, 1, 0)^{\mathsf{T}};$

m) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 0)^{\mathsf{T}};$

n) $D_{12} = 1, X_1 = \alpha_{11}(1, 1, 0)^{\mathsf{T}} + \alpha_{12}(1, 0, 1)^{\mathsf{T}};$

$D_3 = -2, X_2 = \alpha_3(2, 1, 0)^{\mathsf{T}};$

o) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(-2, 3, 4)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 2, \quad X_2 = \alpha_2(2, 3, 5)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 5, \quad X_3 = \alpha_3(1, 0, -2)^{\mathsf{T}};$

p) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(1, 1, 1)^{\mathsf{T}};$

q) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_{11}(0, 1, 3)^{\mathsf{T}} + \alpha_{12}(2, 1, 0)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = 0, \quad X_2 = \alpha_2(1, 1, 1)^{\mathsf{T}};$

r) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 2)^{\mathsf{T}};$

s) $D_1 = 2, \quad X_1 = \alpha_1(1, 3, 1)^{\mathsf{T}},$

$D_{23} = -2, X_2 = \alpha_{21}(1, 1, 0)^{\mathsf{T}} + \alpha_{22}(-1, 0, 1)^{\mathsf{T}};$

t) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(4, 2, 1)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(1, -1, 1)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = -5, X_3 = \alpha_3(1, 2, 4)^{\mathsf{T}};$

u) $D_1 = 1, \quad X_1 = \alpha_1(-3, 3, 1)^{\mathsf{T}},$

$D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(0, 3, 5)^{\mathsf{T}},$

$D_3 = 4, \quad X_3 = \alpha_3(3, 0, 1)^{\mathsf{T}};$

v) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 3, 0)^{\mathsf{T}};$

w) $D_1 = -1,\ X_1 = \alpha_1(0, 3, -4)^T$;

x) $D_1 = -4,\ X_1 = \alpha_1(6, 5, 3)^T$,

$D_2 = -1,\ X_2 = \alpha_2(3, 1, 0)^T$,

$D_3 = 2,\ X_3 = \alpha_3(1, 1, -1)^T$;

y) $D_1 = -1,\ X_1 = \alpha_1(0, 1, -1)^T$;

z) $D_1 = 4,\ X_1 = \alpha_1(5, -2, -5)^T$,

$D_2 = 1,\ X_2 = \alpha_2(2, 1, 1)^T$,

$D_3 = -2,\ X_3 = \alpha_3(2, 2, 1)^T$.

3. a) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_{11}(1, 0, 0, 1)^T + \alpha_{12}(1, -1, -4, 1)^T$;

b) $D_1 = -1,\ X_1 = \alpha_1(1, -2, 2, 2)^T$,

$D_2 = 0,\ X_2 = \alpha_2(1, -3, 2, 2)^T$,

$D_3 = 1,\ X_3 = \alpha_3(0, -2, 1, 1)^T$;

$D_4 = 2,\ X_4 = \alpha_4(0, 1, 0, -1)^T$;

c) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_1(1, 1, 1, 0)^T$,

$D_2 = 0,\ X_2 = \alpha_2(2, -1, -2, 0)^T$,

$D_3 = -1,\ X_3 = \alpha_{31}(0, 1, 1, 0)^T + \alpha_{32}(1, 2, 2, 1)^T$;

d) $D_1 = 2,\ X_1 = \alpha_1(1, 1, 0, 1)^T$,

$D_2 = 1,\ X_2 = \alpha_2(0, 1, 0, 1)^T$,

$D_3 = -1,\ X_3 = \alpha_3(0, 1, -1, 1)^T$,

$D_4 = -2,\ X_4 = \alpha_4(0, 1, -1, 2)^T$;

e) $D_1 = -1,\ X_1 = \alpha_1(0, 1, 0, 0)^T$;

f) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 0)^T$;

g) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 0)^T$,

$D_2 = 0,\ X_2 = \alpha_2(1, 3, 1, 1)^T$,

$D_3 = -1,\ X_3 = \alpha_{31}(1, 2, 1, 1)^T + \alpha_{32}(0, 1, 0, 1)^T$;

h) $D_1 = -1,\ X_1 = \alpha_1(1, 0, 1, 0)^T$;

i) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_1(1, 1, 1, 1)^T$;

j) $D_1 = 2,\ X_1 = \alpha_1(1, 0, 1, 1)^T$,

$D_2 = 1,\ X_2 = \alpha_2(1, 1, 0, 0)^T$,

$D_3 = -1,\ X_3 = \alpha_3(1, 1, -1, 0)^T$,

$D_4 = -2,\ X_4 = \alpha_4(1, 1, 0, 1)^T$;

k) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_{11}(1, 0, 0, 0)^T + \alpha_{12}(0, 1, 1, 1)^T$;

l) $D_1 = 1,\ X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 1)^T$.

4. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

p) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

q) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

r) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

s) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

t) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

u) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

w) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

x) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

y) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

z) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix} -6140 & 4094 \\ -12282 & 8189 \end{pmatrix}$; b) $\dfrac{1}{1024}\begin{pmatrix} 3070 & -1023 \\ 6138 & -2045 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 200 & 200 \\ -100 & -100 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; l) $\dfrac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$;

m) $\dfrac{\pi}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; n) $\dfrac{\pi}{6}\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; p) $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$;

q) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; r) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

s) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; t) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

u) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; v) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -8 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

w) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; x) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -8 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

y) $\frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 7 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; z) $\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 6. Некоторые приложения (модель Леонтьева)

1. a) $(862, 658)$; b) $(500, 366)$; c) $(295, 265)$; d) $(726, 820)$; e) $(422, 408)$; f) $(1391, 1786)$; g) $(637, 806)$; h) $(409, 738)$; i) $(1205, 845)$; j) $(497, 827)$; k) $(737, 1008)$; l) $(951, 889)$; m) $(445, 909)$; n) $(776, 903)$; o) $(728, 606)$; p) $(527, 454)$; q) $(750, 1369)$; r) $(1006, 916)$; s) $(1160, 1631)$; t) $(430, 652)$; u) $(502, 772)$; v) $(1085, 863)$; w) $(817, 1201)$; x) $(956, 650)$; y) $(820, 855)$; z) $(767, 1058)$.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Примеры векторных пространств, подпространства

1. a) да; b) нет; c) да; d) нет; e) нет; f) нет; g) да; h) нет; i) нет; j) нет; k) да; l) нет; m) нет; n) да; o) нет; p) да; q) да; r) нет; s) да; t) нет; u) да; v) да; w) да; x) да; y) нет; z) нет.

2. a) да; b) да; c) нет; d) да; e) да; f) да; g) да; h) да; i) нет; j) да; k) да; l) да; m) да; n) да; o) да; p) да;

q) да; r) нет; s) да; t) да; u) да; v) нет; w) да; x) да; y) да; z) нет.

3. a) нет; b) да; c) нет; d) да; e) нет; f) да; g) да; h) да; i) да; j) да; l) нет;

4. a) $\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r] \arrow[dr] & W_3 \\ W_2 \arrow[r] & W_4 \end{tikzcd}$; b) $\begin{tikzcd} W_1 \arrow[dr] & & W_4 \arrow[d] \\ & W_3 \arrow[r] & W_5 \\ W_2 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$; c) $\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[r] & W_3 \arrow[dl] \\ W_6 \arrow[r] & W_5 & \\ & W_2 \arrow[u] \arrow[r] & W_4 \end{tikzcd}$;

§ 2. Линейные зависимости

1. a) да; b) нет; c) нет; d) да; e) да; f) нет; g) нет; h) нет; i) нет; j) нет; k) да; l) нет; m) нет; n) нет; o) нет; p) да; q) да; r) нет; s) нет; t) да; u) да; v) нет; w) да; x) да; y) да; z) нет.

2. a) $2A_2 = A_3 - A_1$; b) $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$;
   c) функции независимы; d) $f_3 = 3f_1 - 4f_2$.

3. a)[13] -2, b) 1, c)[14] 0, d) 1, e) 1, f) 1, g) 2, h) 1, i) -3, j) 3, k) 3, l) 1, m) -1, n) -1, o) -2, p) 1,

---

[13] Решение. Векторы $X_1 = (3,1,-\lambda)$, $X_2 = (1,0,1)$ и $X_3 = (1,1,0)$ образуют линейно зависимую систему тогда и только тогда, если равенство $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ имеет место при $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$, что равносильно тому, что однородная система с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет нетривиальное решение. Последнее же равносильно тому, что ранг этой матрицы меньше трех, то есть ее единственный минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda - 2$ равен нулю, откуда $\lambda = -2$.

[14] Решение. Аналогично предудущему, надо выяснить, когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 \\ -1 & \lambda & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ меньше трех, то есть когда все ее четыре минора третьего порядка $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ -1 & \lambda & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ равны нулю. Последний из этих миноров обращается в нуль только при $\lambda = 0$, и легко видеть, что в этом случае и остальные три минора также равны нулю.

q) -1, r) 1, s) 1, t) 1, u) -2, v) 3, w) -1, x) -2, y) -1, z) 3.

§ 3. Базис и размерность

1. a) размерность равна mn,
   базис[15] состоит из матричных единичек[16] $e_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$;
   b) размерность равна $n(n+1)/2$,
   базис: $\{e_{ii} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{e_{ij} + e_{ji} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$;
   c) размерность равна $n(n-1)/2$,
   базис: $\{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$;
   d) размерность равна $n(n+1)/2$,
   базис: $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$;
   e) размерность равна $n(n-1)/2$,
   базис: $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$;
   f) размерность равна $n^2 - 1$,
   базис состоит из всех матричных единичек, кроме e_{nn};

2. a) базис: $\{X_1, X_4\}$, $X_2 = -2X_1$, $X_3 = 41X_1 + 31X_4$;
   b) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -X_1 + X_2$, $X_4 = -5X_1 + 4X_2$;
   c) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = X_1 + X_2 - X_3$;
   d) базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = X_1 + X_2$; $X_5 = 3X_1 + X_2 + X_4$;
   e) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = -X_1 - 2X_2 + 2X_3$;
   f) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = 2X_1 - 2X_2 + 3X_3$;
   g) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $X_5 = 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4$;
   h) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = X_1 - X_2 - 2X_3$, $X_5 = -2X_1 - X_2 - 2X_3$;
   i)[17] базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = -2X_1 - 2X_2$, $X_5 = X_1 + X_2 + X_4$;

---

[15] Разумеется, базис определен неоднозначно. Приводится наиболее естественный — с точки зрения составителей – вариант.

[16] Матричная единичка e_{ij} — это матрица, у которой элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен единице, а все остальные элементы равны нулю.

[17] Решение. Ясно, что векторы X_1 и X_2 независимы, так что могут быть включены в конструируемый базис. Попытка представить вектор X_3 в виде комбинации X_1 и X_2, то есть в виде $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, приводит к системе $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -4$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -4$, которая имеет (разумеется, единственное) решение $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$; следовательно, вектор X_3 не может быть включен в базис. Аналогичная попытка с заменой X_3 на X_4 приводит к несовместной системе $-\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $-\alpha_1 + \alpha_2 = 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$, так что этот вектор X_4 должен быть включен в базис. Наконец, вектор X_5 представим в виде комбинации X_1, X_2 и X_4. Этот метод построения базиса может быть назван *методом вычеркивания* — из системы образующих последовательно вычеркиваются все векторы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих.

j) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -X_1 + X_2$, $X_4 = -2X_1 + 2X_2$, $X_5 = X_1 + X_2$;

k) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = X_1 - X_2$, $X_5 = -2X_1 + 2X_2$;

l) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $X_5 = -X_1 - X_2 - X_3 - 2X_4$;

m) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = -X_1 + X_2 + X_3$, $X_5 = 2X_1 + X_2 + X_3$;

n) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -2X_1 + X_2$, $X_4 = X_1 + X_2$, $X_5 = -X_1 + X_2$;

o) базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_5 = X_1 - X_2 - 2X_4$;

p) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

q) базис: $\{X_1, X_2, X_4, X_5\}$, $X_3 = -X_1 - X_2 - X_4 + 2X_5$;

r) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

s) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

t) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

u) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

v) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

w) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

x) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;

y) базис: $\{f_1, f_2, f_4, f_6\}$, $f_3 = -f_1 + 2f_4$, $f_5 = -3f_2 + 4f_6$;

z) базис: $\{f_1, f_2, f_3, f_5\}$, $f_4 = 3f_1 - 4f_5$.

Учебное издание

Учебные и контрольные задания по математике

Высшая алгебра

Михаил Владимирович Бондарко
Геннадий Николаевич Малолеткин
Андрей Алексеевич Семенов
Владимир Георгиевич Халин
Петр Константинович Черняев

Учебное пособие

Подписано в печать с оригинал-макета 27.09.2017. Формат 60x84$^1/_8$.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 50 экз.
Заказ № 409.

Типография Издательства СПбГУ.
199034, С.-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.