

Учебные и контрольные задания по математике

Высшая алгебра



ЭФ СПбГУ
Санкт-Петербург
2010

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

***Учебные и контрольные
задания по математике***

Высшая алгебра



ЭФ СПбГУ
Санкт-Петербург
2010

УДК 519
ББК 22.161 я73
У91

Рецензент проф. *Ю.В. Чуриш* (С.-Петербург. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
экономического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

Малолеткин Г.Н., Семенов А.А., Халин В.Г., Черняев П.К., Бондарко М.В.
У91 Учебные и контрольные задания по математике: Высшая алгебра: Учеб.
пособие – СПб.: ЭФ СПбГУ, 2010. – 96 с.

ISBN 5-356-00081-2

Настоящее издание представляет собой первую часть пособия, которое адресовано прежде всего студентам-экономистам. Кроме задач для аудиторных и самостоятельных занятий, в пособии приведено от 30 до 50-ти вариантов контрольных работ по каждой теме.

Предназначено для студентов социально-экономических специальностей, а также преподавателей университетов.

Без объявл.

ББК 22.161 я73

ISBN 5-356-00081-2

© Г.Н. Малолеткин и др., 2010
© ЭФ СПбГУ, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАНИЯ	4
Глава 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ	4
§ 1. Действия над матрицами	4
Контрольное задание №1	8
§ 2. Определители. Обратная матрица	16
Контрольное задание №2	18
§ 3. Системы линейных уравнений	21
Контрольное задание №3	24
§ 4. Ранг матрицы. Однородные системы	34
Контрольное задание №4	39
§ 5. Собственные значения и столбцы матриц	52
Контрольное задание №5	57
§ 6. Некоторые приложения (модель Леонтьева)	63
Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ	67
§ 1. Примеры векторных пространств, подпространства	67
§ 2. Линейные зависимости	73
§ 3. Базис и размерность	75
Контрольное задание №6	78
ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ	84
Глава 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ	84
Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ	93

ЗАДАНИЯ

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 1. Действия над матрицами

1. Выполнить следующие действия над матрицами:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } (1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -1); \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{j) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{k) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \text{l) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad \text{m) } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n;$$

$$\text{n) } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n; \quad \text{o) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{20}; \quad \text{p) } \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{24};$$

$$q) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^2.$$

2. Найти матрицу X , если:

a) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $X = AB - BA$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

f) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

g) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

h) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

i) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

ж) $X = AB + BA$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$$k) X=AB+BA, \text{ где } A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$l) X=AB+BA, \text{ где } A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$m) X=AB+BA, \text{ где } A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$n) X=AB+BA, \text{ где } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить матрицу $f(A)$ для заданного многочлена

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ (значение многочлена $f(x)$ в "матричной точке" A — это матрица $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$:

$$a) f(x) = x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b) f(x) = x^2 - 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$c) f(x) = x^3 - x - 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d) f(x) = -x^3 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$e) f(x) = x^3 - 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f) f(x) = x^3 - 2x^2 - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$g) f(x) = x^2 - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$h) f(x) = x^2 + x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$i) f(x) = x^2 + x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$j) f(x) = -x^2 + x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$k) f(x) = -x^2 + x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$l) f(x) = x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Найти все матрицы X , для которых:

$$a) AX = B, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b) XA = B, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$c) AX = O, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d) AX = B, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e) AX - XA = O, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

- f) $AX - XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- g) $AX - XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- h) $AX + XA = O$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;
- i) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$;
- j) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$;
- k) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- l) $AX + XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольное задание №1.

В пункте а) — найти все матрицы, коммутирующие с данной,
 в пункте б) — найти все матрицы X , для которых $AX + XA = B$,
 в пункте с) — вычислить $f(A)$.

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

с) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

с) $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$3. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = -2x^3 + 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. \quad a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \quad a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 2x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$16. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = -2x^3 + 2x + 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 3x + 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$18. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^2 - 2x + 1, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^2 + 4x - 5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$21. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 2x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$23. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$24. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$25. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$26. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = -2x^3 + 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$27. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$28. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$29. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$30. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$31. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$32. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 2x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$33. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$34. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$35. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$36. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = -2x^3 + 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$37. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$38. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$39. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$40. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -9 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$41. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$42. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = 2x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$43. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 + 3x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$44. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$45. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^4 + 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$46. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = -2x^3 + 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$47. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$48. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$49. a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$50. a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$c) f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Определители. Обратная матрица

1. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 300 & 301 \\ 200 & 201 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad f) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad g) \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$h) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \quad i) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad j) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$k) \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix}; \quad l) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -5 & -3 & -6 \end{vmatrix}; \quad m) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$n) \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix}; \quad o) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -9 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad p) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$q) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad r) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$s) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}; \quad t) \begin{vmatrix} 0 & -a & -a & -a \\ a & 0 & -a & -a \\ a & a & 0 & -a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}; \quad u) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Для следующих матриц найти обратные или убедиться в их отсутствии:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -6 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -7 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad h) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad i) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$j) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad k) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad l) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad n) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad o) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$p) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad q) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$r) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad s) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$t) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad u) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$v) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad w) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Контрольное задание №2.

Вычислить определитель и найти обратную матрицу:

$$1. \quad a) \begin{vmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad a) \begin{vmatrix} -2 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -3 & -1 & -9 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad a) \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad a) \begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -4 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad a) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad a) \begin{vmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 3 & -7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad a) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -6 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. a) $\begin{vmatrix} -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -7 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$
10. a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$
11. a) $\begin{vmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 3 & -9 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$
12. a) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 8 & -8 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$
13. a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
14. a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 8 & -6 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$
15. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -7 & -1 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$
16. a) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 4 & 6 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$
17. a) $\begin{vmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1 & -7 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$
18. a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 9 & -5 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{array}{ll}
19. & \text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \\
20. & \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \\
21. & \text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \\
22. & \text{a) } \begin{vmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -1 & -6 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \\
23. & \text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -6 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \\
24. & \text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \\
25. & \text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -8 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \\
26. & \text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \\
27. & \text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 7 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -6 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \\
28. & \text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, & \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

$$29. \quad \text{a) } \begin{vmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -3 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$30. \quad \text{a) } \begin{vmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Системы линейных уравнений

1. Используя формулы Крамера, решить следующие системы:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3; \\ 5x_1 + 9x_2 = 4; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 200x_1 - 101x_2 = 95; \\ 401x_1 - 199x_2 = 208; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 22; \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -3; \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -8; \\ 7x_2 + x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 4x_1 + 9x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ 7x_1 - 8x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} -3x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 22 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

$$\text{l) } \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{m) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 2a; \\ x_1 + x_2 = 2b; \end{cases}$$

$$\text{n) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 9a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9b; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9c \end{cases}$$

$$\text{o) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4a \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4b \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4c \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4d \end{cases}$$

2. Решить следующие системы линейных уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} -x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ 9x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 17x_4 = -6 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 23 \end{cases};$$

$$f) \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases};$$

$$g) \begin{cases} -x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \end{cases};$$

$$h) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 + 5x_3 - x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 43 \end{cases};$$

$$i) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases};$$

$$j) \begin{cases} 4x_1 + 5x_3 - x_4 = 12 \\ 8x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 26 \\ 8x_1 + 9x_3 - 3x_4 = 20 \\ 12x_1 + x_2 + 13x_3 - 3x_4 = 34 \end{cases};$$

$$k) \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8; \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3; \\ 4x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -5; \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7; \\ -2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Контрольное задание №3.

Решить следующие системы линейных уравнений:

$$1. \ a) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 22; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 23 \\ 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 14x_4 = 55; \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 35 \end{cases}$$

$$2. \ a) \begin{cases} -5x_2 + 3x_3 = -12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x_1 - 16x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 19 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - 16x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases};$$

$$3. \quad a) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 22 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ 5x_1 - 10x_2 + 14x_3 + 12x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 4 \\ 6x_1 - 12x_2 + 20x_3 + 16x_4 = 14 \end{cases};$$

$$4. \quad a) \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 13x_4 = 61 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 45 \end{cases};$$

$$5. \quad a) \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 21 \end{cases};$$

$$6. \quad a) \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -7; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ + 2x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 6; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 13 \end{cases}$$

$$7. \quad a) \begin{cases} 8x_1 + 3x_3 = 19 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 16; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -11 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7; \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -6; \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -12 \end{cases}$$

$$8. \quad a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ - x_2 = -1; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$9. \quad a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 7x_4 = 6; \\ 2x_1 - 4x_3 - 4x_4 = 6; \\ 6x_1 + 3x_2 - 18x_3 - 15x_4 = 9 \end{cases}$$

$$10. \quad a) \quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -15; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -19 \\ 12x_1 + 6x_2 - 13x_3 - 12x_4 = -44 \\ 8x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 7x_4 = -26; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$11. \quad a) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -15 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -32 \\ 5x_1 + 10x_2 - 14x_3 - 16x_4 = -74; \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 - 12x_4 = -57 \end{cases}$$

$$12. \quad a) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$13. \quad a) \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 23 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 4x_2 = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases};$$

$$14. \quad a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 - 3x_3 + 9x_4 = -11 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases};$$

$$15. \quad a) \begin{cases} -2x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -10 \\ 12x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 6x_4 = -15 \\ 8x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 7x_4 = -25 \\ 8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$16. \quad a) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -20 \\ 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -14 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -9 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases};$$

$$17. \quad a) \quad \begin{cases} 5x_1 & - 3x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 13; \\ 2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 21; \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$18. \quad a) \quad \begin{cases} & - x_2 & = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 & - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 & - 2x_3 + 4x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

$$19. \quad a) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 & - x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 - 11x_4 = 34 \\ & - 2x_3 + 2x_4 = -6; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 8x_4 = 26; \\ & & x_4 = -2 \end{cases}$$

$$20. \quad a) \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 29 \\ & - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 17; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 13; \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 14 \end{cases}$$

$$21. \quad a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -5 \\ 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -15; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -15; \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$$

$$22. \quad a) \begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = -3; \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 3 \\ 8x_1 - 4x_2 - 4x_4 = 4; \\ 12x_1 - 7x_2 - x_3 - 5x_4 = 6; \\ 10x_1 - 6x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$23. \quad a) \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -18; \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -25; \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$$

$$24. \quad a) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 \quad \quad + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \quad = -1; \\ 2x_1 + 2x_2 \quad \quad + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$25. \quad a) \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 24 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 \quad \quad + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 \quad \quad + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1; \\ 4x_1 - 8x_2 \quad \quad + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$26. \quad a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 \quad \quad \quad = 3; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 38; \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 38 \end{cases}$$

$$27. \quad a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -5 \\ 3x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 14x_4 = -7; \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$28. \quad a) \quad \begin{cases} 2x_2 - 5x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 7x_1 - 7x_2 - 9x_3 - x_4 = 18 \\ -x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 8; \\ 10x_1 - 10x_2 - 12x_3 - 3x_4 = 25 \end{cases}$$

$$29. \quad a) \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -8 \\ 6x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 13x_4 = -25; \\ x_3 + x_4 = 1; \\ 8x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 16x_4 = -34 \end{cases}$$

$$30. \quad a) \quad \begin{cases} -2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18; \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9; \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -9; \\ 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -23 \end{cases}$$

$$31. \quad a) \quad \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 5x_1 + 16x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 49 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7; \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 - 3x_4 = 24; \\ 4x_1 + 10x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 32 \end{cases}$$

$$32. \quad a) \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = -1; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13; \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$33. \quad a) \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 = -23 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 11; \\ 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 13 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -13 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -8; \\ -2x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ 2x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -26 \end{cases}$$

$$34. \quad a) \quad \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_2 = 2; \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5; \\ x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$35. \quad a) \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 & - x_3 - 7x_4 = -14 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 11x_4 = -16; \\ & - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = -20; \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$36. a) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 19 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14x_3 - 10x_4 = -37 \\ x_1 - x_2 & - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -27 \\ 2x_1 & - 4x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases}$$

§ 4. Ранг матрицы. Однородные системы

1. Найти ранг следующих матриц:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -9 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; f) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; h) \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \\ 7 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{j)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{k)} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{l)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \\
\text{m)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}; & \text{n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \\
\text{o)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}; & \text{p)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{q)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{r)} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{s)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; & \text{t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \\
\text{u)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{v)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\
\text{w)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{x)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix};
\end{array}$$

$$y) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}; \quad z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти фундаментальное множество решений следующих однородных систем:

$$a) \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$f) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$g) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{array}{l}
\text{h)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{j)} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{k)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{l)} \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{m)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{n)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{o)} \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{p)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{array} \right. ;
\end{array}$$

$$q) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$r) \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$s) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases};$$

$$t) \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases};$$

$$u) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

$$v) \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$w) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_2 + 7x_3 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$x) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$y) \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases};$$

$$z) \begin{cases} -x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Контрольное задание №4.

В пункте а) — найти ранг матриц, в пункте б) — найти фундаментальное множество решений однородной системы.

$$1. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$2. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

$$3. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases};$$

$$4. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 & & & + & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 ; \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 ; \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 ; \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 0 ; \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 9 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$13. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$14. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases};$$

$$15. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 ; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 ; \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$17. a) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 ; \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$18. a) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 6 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 1 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 0 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 ; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 0; \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$21. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 ; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$23. a) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} -x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 ; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$24. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 ; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$25. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 ; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$26. a) \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 & = 0 \end{cases};$$

$$27. a) \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$28. a) \left(\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$29. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & -2 \\ 4 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases};$$

$$30. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$31. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases};$$

$$32. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

$$33. a) \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases};$$

$$34. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$35. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$36. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$37. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0; \\ 9x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 8x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$38. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases};$$

$$39. a) \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$40. a) \left(\begin{array}{cccc} 7 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & -7 & 4 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$41. a) \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

$$42. a) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$43. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases};$$

$$44. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & -7 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 5 & -3 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases};$$

$$45. a) \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & -5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$46. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0 ; \\ \quad 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$47. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 = 0 ; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$48. a) \left(\begin{array}{cccc} 3 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 ; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$49. a) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 ; \\ \quad x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$50. a) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$b) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

§ 5. Собственные значения и столбцы матриц

1. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц второго порядка:

$$\begin{array}{lll} a) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}; & b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; & c) \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}; \\ d) \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}; & e) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; & f) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \\ g) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & h) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; & i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \\ j) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; & k) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}; & l) \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц третьего порядка:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; & b) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}; \\ c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; & d) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \\ e) \begin{pmatrix} -5 & -14 & 4 \\ 6 & 14 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}; & f) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \\ g) \begin{pmatrix} 6 & -4 & -7 \\ 4 & -3 & -4 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}; & h) \begin{pmatrix} -15 & 1 & -17 \\ -8 & 3 & -8 \\ 14 & -1 & 16 \end{pmatrix}; \\ i) \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ 9 & -8 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}; & j) \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{k)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; & \text{l)} \begin{pmatrix} 8 & -8 & -5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \\
\text{m)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}; & \text{n)} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{o)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}; & \text{p)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \\
\text{q)} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}; & \text{r)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}; \\
\text{s)} \begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -12 & 10 & -12 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}; & \text{t)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}; \\
\text{u)} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}; & \text{v)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \\
\text{w)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 7 & -9 & 6 \\ 8 & -8 & 5 \end{pmatrix}; & \text{x)} \begin{pmatrix} 6 & -5 & -5 \\ 6 & -7 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \\
\text{y)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}; & \text{z)} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & -6 \\ 6 & 9 & -8 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

3. Найти собственные значения и собственные столбцы следующих матриц четвертого порядка:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \\
\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix};
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\
\text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; & \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \\
\text{i)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{j)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \\
\text{k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; & \text{l)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

4. Для каждой из перечисленных ниже матриц A найти такую обратимую матрицу S и диагональную матрицу D , что $A = SDS^{-1}$:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{c)} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}; \\
\text{d)} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}; & \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; & \text{f)} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}; \\
\text{g)} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}; & \text{h)} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}; & \text{i)} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}; \\
\text{j)} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}; & \text{k)} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}; & \text{l)} \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}. \\
\text{m)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; & \text{n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{o)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \text{p)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{q)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; & \text{r)} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \\
\text{s)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}; & \text{t)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \\
\text{u)} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 14 & -3 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \text{v)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & -5 & 6 \\ 7 & -11 & -7 & 8 \end{pmatrix}; \\
\text{w)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & 12 & -5 & -13 \\ 2 & 6 & -3 & -6 \\ 4 & 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}; \text{x)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -10 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{y)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -9 & 4 \end{pmatrix}; & \text{z)} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & -2 & 4 \\ 10 & -5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

5. Используя разложение $A = SDS^{-1}$ (смотри предыдущую задачу), вычислить указанные функции от матриц:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} f(A) = A^{11}, & A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}; \\
\text{b)} f(A) = A^{-10}, & A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}; \\
\text{c)} f(A) = \sum_{k=100}^{199} A^k, & A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; \\
\text{d)} f(A) = \prod_{k=-100}^{100} A^k, & A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}; \\
\text{e)} f(A) = \sqrt{A}, & A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}; \\
\text{f)} f(A) = \sqrt{A}, & A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}; \\
\text{g)} f(A) = \sqrt[3]{A}, & A = \begin{pmatrix} 22 & -14 \\ 21 & -13 \end{pmatrix};
\end{array}$$

- h) $f(A) = \sqrt[4]{A}$, $A = \begin{pmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{pmatrix}$;
- i) $f(A) = \sin \frac{\pi}{4} A$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
- j) $f(A) = \cos \frac{\pi}{2} A$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;
- k) $f(A) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} A$, $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$;
- l) $f(A) = \arcsin \frac{1}{2} A$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$;
- m) $f(A) = \arccos \frac{1}{2} A$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;
- n) $f(A) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} A$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$;
- o) $f(A) = 3^A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;
- p) $f(A) = 2^A$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;
- q) $f(A) = \log_2 A$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;
- r) $f(A) = \log_3 A$, $A = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.
- s) $f(A) = \sqrt{A}$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -6 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;
- t) $f(A) = \sqrt{A}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ -6 & 10 & -3 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;
- u) $f(A) = \sqrt{A}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ -5 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;
- v) $f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -8 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} \text{w) } f(A) &= \cos \frac{\pi}{3} A, & A &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \\ \text{x) } f(A) &= \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A, & A &= \begin{pmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -8 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \\ \text{y) } f(A) &= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A, & A &= \begin{pmatrix} 7 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}; \\ \text{z) } f(A) &= \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} A, & A &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Контрольное задание №5.

Для матрицы из пункта а) найти ее собственные значения и столбцы, в пункте б) — найти такую матрицу S , что матрица $S^{-1}AS$ диагональна, и эту диагональную матрицу, в пункте с) — вычислить значение указанной функции.

$$\begin{aligned} 1. \text{ а) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}; & \text{ б) } & \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \\ \text{ с) } f(A) &= \sin \frac{\pi}{6} A, & A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{ б) } & \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{ с) } f(A) &= \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} A, & A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ а) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \cos \frac{\pi}{3} A, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -8 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ a) } \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \log_2 A, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 \\ 8 & -9 & 2 \\ 8 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \text{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} A, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & -9 & 7 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = 3^A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \log_2 A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 7 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$10. \text{ a) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \log_2 A, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$11. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = 3^A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$13. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A, \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ -6 & 3 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -6 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$15. \text{ a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$16. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \log_3 A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$17. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & -5 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \cos \frac{\pi}{3} A, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$18. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = 3^A, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$19. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \log_3 A, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -8 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$20. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & -9 & 7 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$21. \text{ a) } \begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = 2^A, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$22. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 7 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sqrt{A}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$23. \text{ a) } \begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$24. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$25. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = 3^A, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$26. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \cos \frac{\pi}{3} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$27. \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$28. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$29. \text{ a) } \begin{pmatrix} 7 & -7 & -9 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \sin \frac{\pi}{6} A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$30. \text{ a) } \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } f(A) = \text{ctg} \frac{\pi}{4} A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -6 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Некоторые приложения (модель Леонтьева)

1. Для следующих данных исполнения баланса в текущем году двумя отраслями I и II определить выпуск ими валовой продукции в плановом периоде (все данные в условных единицах).

a)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	264	198	198	660	320
II	78	39	273	390	420

b)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	336	252	252	840	190
II	111	37	222	370	180

c)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	92	184	184	460	130
II	68	34	238	340	180

d)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	188	141	141	470	190
II	219	73	438	730	520

e)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	180	180	90	450	90
II	75	50	125	250	200

f)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	410	246	164	820	160
II	115	230	805	1150	1290

g)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	120	120	60	300	60
II	388	194	388	970	390

h)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	78	78	234	390	180
II	104	208	728	1040	550

i)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	303	303	404	1010	590
II	141	141	188	470	230

j)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	90	90	120	300	100
II	376	282	282	940	380

k)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	192	144	144	480	140
II	186	93	651	930	760

l)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	450	360	90	900	120
II	142	71	497	710	610

m)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	48	32	80	160	130
II	356	89	445	890	640

n)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	80	160	160	400	260
II	186	62	372	620	580

o)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	136	272	272	680	340
II	78	39	273	390	400

p)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	200	150	150	500	180
II	141	141	188	470	160

q)

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	92	138	230	460	190
II	309	206	515	1030	870

г)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	306	306	408	1020	430
	II	148	222	370	740	440

с)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	111	148	111	370	160
	II	354	118	708	1180	1120

т)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	245	49	196	490	150
	II	280	140	280	700	350

у)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	116	87	87	290	70
	II	208	312	520	1040	440

в)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	420	168	252	840	370
	II	102	51	357	510	560

w)	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
		I	II			
	I	320	160	320	800	250
	II	80	0	720	800	1120

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	190	285	475	950	570
II	41	41	328	410	490

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	156	234	390	780	400
II	148	148	444	740	520

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск	План
	I	II			
I	99	99	132	330	220
II	77	154	539	770	770

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Примеры векторных пространств, подпространства

Здесь и далее, как впрочем и раньше, малые греческие буквы $\alpha, \beta, \dots, \xi, \dots, \omega$, с индексами или без них, обозначают произвольные вещественные числа.

Очевидное исключение — это число π .

1. Какие из указанных ниже множеств числовых строк¹ являются векторными пространствами относительно естественных операций сложения их элементов и умножения на скаляр:

а) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел;²

б) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел,

¹ Синонимы: последовательности, кортежи etc.

² В дальнейшем это множество — так называемое арифметическое пространство — будет обозначаться R_n .

- среди которых есть хоть одно, равное нулю;
- с) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, среди которых первое равно последнему;
- д) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, среди которых первое равно какому-нибудь другому;
- е) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, среди которых есть хотя бы два одинаковых;
- ф) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых равна единице;
- г) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых равна нулю;
- h) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, сумма кубов которых равна нулю;
- и) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, сумма модулей которых равна единице;
- j) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, сумма которых неотрицательна;
- к) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = 0$;
- l) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^n = 0$;
- m) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \dots \pm n\alpha_n = 1$;
- п) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых первое равно сумме остальных, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$;
- о) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых хотя бы одно равно сумме остальных;
- р) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_6 = \dots = 0$;
- q) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_5 - \alpha_6 = \dots = 0$;
- г) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = \alpha_5^2 - \alpha_6^2 = \dots = 0$;
- с) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^3 - \alpha_2^3 = \alpha_3^3 - \alpha_4^3 = \alpha_5^3 - \alpha_6^3 = \dots = 0$;

- t) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^{2002} - \alpha_2^{2002} = \alpha_3^{2002} - \alpha_4^{2002} = \dots = 0$;
- u) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1^{2003} - \alpha_2^{2003} = \alpha_3^{2003} - \alpha_4^{2003} = \dots = 0$;
- v) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых $\alpha_1 = \alpha_n, \alpha_2 = \alpha_{n-1}, \alpha_3 = \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_n = \alpha_1$;
- w) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых сумма любых двух одна и та же, точнее: $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k + \alpha_l$, причем все индексы различны;
- x) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых разность любых двух одна и та же, точнее: $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_k - \alpha_l$, причем индексы различны;
- y) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых сумма модулей любых двух одна и та же, точнее: $|\alpha_i| + |\alpha_j| = |\alpha_k| + |\alpha_l|$, причем индексы различны;
- z) множество всех строк $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из n чисел, для которых модули сумм любых двух одинаковы, точнее: $|\alpha_i + \alpha_j| = |\alpha_k + \alpha_l|$, причем индексы различны.

2. Какие из указанных ниже множеств являются векторными пространствами относительно естественных операций сложения их элементов и умножения на скаляр:

- a) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ из n чисел;³
- b) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ из n чисел, для которых $AX = O$, где A — некоторая $m \times n$ матрица (вообще говоря, $m \neq n$);
- c) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ из n чисел, для которых $AX = B$, где A и $B \neq O$ — некоторые матрицы подходящего типа;
- d) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ из n чисел, для которых $AX = X$, где A — некоторая квадратная $n \times n$ матрица;
- e) множество всех столбцов $X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ из n чисел, для которых $AX = BX$,

³ Эта другая модель арифметического пространства будет обозначаться \mathbb{R}^n . Ясно, что несущественно, как записывать числа — в строчку или в столбец. На ученом языке говорят, что \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_n изоморфны.

- где A и B — некоторые матрицы одинакового типа;
- f) множество всех $m \times n$ матриц (вообще говоря, $m \neq n$)
 $A = (\alpha_{ij})$, где $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$;
- g) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$,
для которых $\sum_{10 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} = 0$;
- h) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$,
для которых $\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{|i+j|} \alpha_{ij} = 0$;
- i) множество всех $m \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$,
для которых $\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} |\alpha_{ij}| = 0$;
- j) множество всех $m \times n$ матриц A , таких, что $AB = O$,
где B — фиксированная $n \times p$ матрица;
- к) множество всех $m \times n$ матриц A , таких, что $BA = O$,
где B — фиксированная $p \times m$ матрица;
- l) множество всех $m \times n$ матриц A , таких, что $BAC = O$,
где B — фиксированная $p \times m$ матрица,
а C — фиксированная $n \times q$ матрица ;
- m) множество всех квадратных $n \times n$ матриц $A = (\alpha_{ij})$;
- п) множество всех квадратных $n \times n$ матриц A ,
таких, что $BA = AB$,
где B — фиксированная $n \times n$ матрица;
- o) множество всех симметрических⁴ $n \times n$ матриц;
- р) множество всех кососимметрических⁵ $n \times n$ матриц;
- q) множество всех треугольных⁶ $n \times n$ матриц;
- г) множество всех унитреугольных⁷ $n \times n$ матриц;
- с) множество всех нильтреугольных⁸ $n \times n$ матриц;

⁴ Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется симметрической, если $A^T = A$, то есть $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для $1 \leq i, j \leq n$.

⁵ Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется кососимметрической, если $A^T = -A$, то есть $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ для $1 \leq i, j \leq n$.

⁶ Квадратная $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется верхней треугольной, если ее элементы, расположенные ниже диагонали, равны нулю, то есть $\alpha_{ij} = 0$ при $1 \leq j < i \leq n$, аналогично определяется нижняя треугольная матрица. По умолчанию треугольная матрица — это верхняя треугольная матрица.

⁷ Треугольная матрица называется унитреугольной, если ее элементы, расположенные на диагонали, равны единице.

⁸ Треугольная матрица называется нильтреугольной, если ее элементы, расположенные на диагонали, равны нулю.

- t) множество всех квадратных $n \times n$ матриц A , таких, что матрица AB симметрична, где B — фиксированная $n \times n$ матрица;
- u) множество всех квадратных матриц одинакового порядка с нулевым следом;⁹
- v) множество всех квадратных матриц одинакового порядка со следом, равным единице;
- w) множество всех квадратных матриц одинакового порядка след которых равен сумме недиагональных элементов;
- x) множество всех матриц A одинакового порядка, для которых след матрицы AB равен нулю, где B — фиксированная матрица того же порядка;
- y) множество всех матриц A одинакового порядка, для которых след матрицы AB равен следу матрицы A , где B — фиксированная матрица того же порядка;
- z) множество всех матриц A одинакового порядка, для которых след матрицы AB равен следу матрицы B , где B — фиксированная матрица того же порядка.

3. Какие из указанных ниже множеств функций, определенных на интервале $(-1; 1)$, являются векторными пространствами относительно естественных операций их сложения и умножения на скаляр:

- a) множество всех ограниченных функций;
- b) множество всех непрерывных функций;
- c) множество всех функций, модуль которых непрерывен;
- d) множество всех функций, которые непрерывны или имеют разрывы только 1-го рода;
- e) множество всех функций, обращающихся в нуль по крайней мере в одной точке;
- f) множество всех функций, обращающихся в нуль в фиксированной точке;
- g) множество всех дифференцируемых функций;
- h) множество всех дифференцируемых функций, производная которых также дифференцируема;

⁹ Следом квадратной матрицы A называется сумма ее диагональных элементов, обозначается $Sp A$, или $Tr A$, или $tr A$.

- i) множество всех четных функций;
- j) множество таких функций $f(x)$,
что функция $g(x) = e^x f(x)$ нечетна;
- k) множество таких дифференцируемых функций $y = f(x)$,
что $y' = x^3 y - 2x^2 + 3x - 4$;
- l) множество таких дифференцируемых функций $y = f(x)$,
что $y' = y^2$;
4. Убедившись, что подмножества W_1, W_2, \dots являются подпространствами пространства V , нарисовать диаграмму включений их друг в друга:
- a) $V = \mathbb{R}_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R} \}$,
 $W_1 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \}$,
 $W_2 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \}$,
 $W_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 + 2\xi_2 = 2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \}$,
 $W_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_3 = 0 \}$;
- b) $V = \mathbb{R}_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R} \}$,
 $W_1 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0 \}$,
 $W_2 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \}$,
 $W_3 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = 0 \}$,
 $W_4 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 - 4\xi_4 = 0 \}$,
 $W_5 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_3 = \xi_2 - \xi_4 = \xi_2 + \xi_3 = 0 \}$;
- c) V — пространство всех квадратных матриц фиксированного порядка,
 W_1 — подмножество верхних треугольных матриц,
 W_2 — подмножество нижних треугольных матриц,
 W_3 — подмножество верхних нильтреугольных матриц,
 W_4 — подмножество нижних нильтреугольных матриц,
 W_5 — подмножество диагональных матриц,
 W_6 — подмножество симметрических матриц.

§ 2. Линейные зависимости

1. Определить, являются ли линейно независимыми следующие системы векторов:

в пространстве \mathbb{R}_3 —

- a) $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$;
- b) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, -2)$;
- c) $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, -1)$;
- d) $\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k}$, где $\mathbf{i} = (1, 1, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 1), \mathbf{k} = (1, 0, 1)$;

в пространстве \mathbb{R}_4 —

- e) $(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1)$;
- f) $(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1)$;
- g) $(-1, -1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 3, -1, 1), (-1, -5, -1, -5)$;
- h) $(-3, 1, 1, 1), (3, -1, 1, 1), (0, 0, 2, 2), (-1, 1, 1, -1)$;
- i) $(2, -1, -1, -1), (0, 1, -1, -1), (2, -2, 0, 0), (4, 0, -4, -4)$;
- j) $(1, -1, 1, -1), (-1, 1, -3, -1), (2, -2, 4, 0), (-2, 2, -4, 0)$;
- k) $(-1, 1, 3, 1), (1, -1, -1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 3, -1)$;
- l) $(-3, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1), (3, 1, -3, -1)$;
- m) $(-1, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 1), (-3, 3, -4, -1), (-1, 1, 2, 3)$;
- n) $(-1, 1, 2, 1), (1, -1, 0, 1), (1, -1, -4, -3), (1, 1, 2, -1)$;

в пространстве квадратных матриц второго порядка —

- o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- p) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в пространстве многочленов от одной переменной —

- q) $x - 1, x^2 - x, x^3 - x^2, x^4 - x^3$;
- г) $x - 1, x^2 - x, x^3 - x^2, x^3 - 1$;
- с) $x^2 - 1, x^3 - x, x^4 - x^2, x^4 - 1$;

в пространстве линейных форм¹⁰ от x_1, x_2, \dots —

- t) $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$;

¹⁰ Форма — это многочлен от нескольких переменных, все одночлены которого имеют одну и ту же степень.

u) $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4, 3x_2 - 8x_3 + 7x_4;$

в пространстве квадратичных форм от двух переменных —

v) $(x + y)^2, (x - y)^2, x^2 + y^2;$

w) $(x + y)^2, (x - y)^2, x^2 - y^2;$

в пространстве функций —

x) $1, \cos x, \cos 2x;$

y) $1, \cos x, \cos^2 x;$

z) $1, \cos^2 x, \cos 2x.$

2. Найти линейные зависимости между следующими векторами или установить, что они независимы:

в пространстве квадратных матриц второго порядка —

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

b) $E, A, A^2,$ где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$

в пространстве функций —

c) $f_1 = 1, f_2 = \sin^2 x, f_3 = \sin 2x;$

d) $f_1 = \sin x, f_2 = \sin^3 x, f_3 = \sin 3x.$

3. Найти все значения параметра $\lambda,$ для которых следующие системы векторов линейно зависимы:

в пространстве \mathbb{R}_3 —

a) $(3, 1, -\lambda), (1, 0, 1), (1, 1, 0);$

b) $(\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda), (1, \lambda, 1), (1, 1, 0);$

в пространстве \mathbb{R}_4 —

c) $(\lambda, 1, 2, 3), (-1, \lambda, 3, 2), (-2, -1, 4, 1);$

d) $(0, \lambda, 2, 7), (-1, 0, \lambda, 4), (-2, -1, 0, \lambda);$

e) $(0, \lambda, 2, 3), (-1, \lambda, \lambda, 2), (-2, \lambda, 0, \lambda);$

f) $(-2, \lambda, 2, 3), (-1, 0, \lambda, 2), (0, -1, 0, \lambda);$

g) $(0, 1, 0, 3), (-1, 0, 1, \lambda), (-2, -1, \lambda, 1);$

h) $(0, \lambda, 4, 3), (-1, 0, \lambda, 2), (-2, -1, -2, \lambda);$

i) $(1, 1, 2, 3), (-1, 0, 1, 2), (\lambda, -1, 0, 1);$

- j) $(0, 1, 4, \lambda), (-1, 0, 1, 2), (-2, -1, -2, 1)$;
- k) $(-2, 1, 2, \lambda), (-2, 0, 1, 2), (-2, -1, 0, 1)$;
- l) $(0, \lambda, 2, \lambda), (-1, 0, \lambda, \lambda), (-2, -1, 0, \lambda)$;
- m) $(0, 1, 2, 5), (\lambda, 0, 1, 3), (-2, \lambda, 0, 1)$;
- n) $(0, 1, 3, 3), (\lambda, 0, 1, 2), (-2, \lambda, \lambda, 1)$;
- o) $(0, 1, 2, 3), (-1, -1, 1, 2), (\lambda, -3, 0, 1), (-1, 0, 3, 5)$;
- p) $(3, \lambda, 2, 3), (\lambda, 0, \lambda, 2), (-1, -1, 0, \lambda), (-4, -2, -2, -2)$;
- q) $(3, 1, 2, 3), (1, 0, 1, 2), (\lambda, \lambda, 0, 1), (1, 1, 0, \lambda)$;
- r) $(0, \lambda, 2, 4), (-1, 0, \lambda, 2), (-2, -1, 0, 0), (-1, -2, -3, -6)$;
- s) $(0, \lambda, 2, \lambda), (-1, 0, \lambda, \lambda), (-2, -1, 0, \lambda), (2, \lambda, 0, -1)$;
- t) $(0, \lambda, 2, 3), (-1, 2, \lambda, 2), (-2, 3, 0, \lambda), (-2, 6, 6, 10)$;
- u) $(0, 4, 2, 3), (-1, 2, 1, 2), (\lambda, 0, 0, 1), (-1, \lambda, -1, -1)$;
- v) $(-3, 1, 2, \lambda), (-3, 0, 1, 2), (-3, -1, 0, 1), (-3, 2, \lambda, 4)$;
- w) $(0, 1, 2, \lambda), (\lambda, 0, 1, 0), (-2, \lambda, 0, 1), (\lambda, -2, -3, 2)$;
- x) $(0, 1, 2, 3), (-1, 0, 0, 2), (\lambda, -1, \lambda, 1), (2, 2, 4, 2)$;
- y) $(0, 1, 2, 2), (\lambda, 0, 1, 2), (-2, \lambda, 0, 2), (2, -1, -4, -6)$;
- z) $(0, 1, 2, \lambda), (-1, -1, 1, 2), (-2, -3, 0, 1), (2, 0, -6, -10)$.

§ 3. Базис и размерность

1. Найти размерности следующих пространств, указав какой-либо их базис:

- a) всех $m \times n$ матриц;
- b) всех симметрических матриц n -го порядка;
- c) всех кососимметрических матриц n -го порядка;
- d) всех треугольных матриц n -го порядка;
- e) всех нильтреугольных матриц n -го порядка;
- f) всех матриц n -го порядка с нулевым следом;

2. Из заданной системы векторов выделить какой-либо базис ее линейной оболочки и векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису, то есть представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

в пространстве \mathbb{R}_2 —

- a) $X_1 = (1, -2), X_2 = (-2, 4), X_3 = (10, 11), X_4 = (-1, 3)$;
- b) $X_1 = (2, 1), X_2 = (3, 2), X_3 = (1, 1), X_4 = (2, 3)$;

в пространстве \mathbb{R}_3 —

c) $X_1 = (2, 1, -3), X_2 = (3, 1, -5), X_3 = (4, 2, -1), X_4 = (1, 0, -7);$

d) $X_1 = (2, 3, 3), X_2 = (-1, 4, -2), X_3 = (1, 7, 1),$

$X_4 = (-1, -2, 4), X_5 = (4, 11, 11);$

e) $X_1 = (1, 2, 4), X_2 = (1, -1, 1), X_3 = (2, 2, 4), X_4 = (1, 4, 2);$

f) $X_1 = (3, 2, 2), X_2 = (2, 3, 1), X_3 = (1, 1, 3), X_4 = (5, 1, 11);$

в пространстве \mathbb{R}_4 —

g) $X_1 = (-1, 1, 3, 1), X_2 = (1, -1, -1, 1), X_3 = (1, 1, -3, 1),$

$X_4 = (1, 1, -1, -1), X_5 = (1, 3, 1, 3);$

h) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1), X_3 = (-1, -1, 1, -3),$

$X_4 = (4, 0, -2, 6), X_5 = (1, 3, 1, 3);$

i) $X_1 = (-1, -1, 1, 1), X_2 = (1, 1, 1, 1), X_3 = (0, 0, -4, -4),$

$X_4 = (1, 3, 1, -1), X_5 = (1, 3, 3, 1);$

j) $X_1 = (-1, 1, -1, 1), X_2 = (1, -1, 3, 1), X_3 = (2, -2, 4, 0),$

$X_4 = (4, -4, 8, 0), X_5 = (0, 0, 2, 2);$

k) $X_1 = (-1, 1, 3, 1), X_2 = (1, -1, 3, 1), X_3 = (-1, 1, 9, 3),$

$X_4 = (-2, 2, 0, 0), X_5 = (4, -4, 0, 0);$

l) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 2), X_3 = (1, 1, -1, 0),$

$X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-3, -3, -3, -4);$

m) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 0), X_3 = (1, 1, -1, 2),$

$X_4 = (3, -1, -1, 0), X_5 = (0, 2, 2, 6);$

n) $X_1 = (1, -1, -1, -2), X_2 = (-1, 1, -1, -2), X_3 = (-3, 3, 1, 2),$

$X_4 = (0, 0, -2, -4), X_5 = (-2, 2, 0, 0);$

o) $X_1 = (-3, 1, 1, 1), X_2 = (3, -1, 1, 1), X_3 = (-3, 1, 3, 3),$

$X_4 = (-1, 1, 1, -1), X_5 = (-4, 0, -2, 2);$

в пространстве матриц второго порядка —

p) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$

$X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

q) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$

$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

$$r) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$s) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$t) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$u) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$v) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$w) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$x) X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

в пространстве функций —

$$y) f_1 = 1, f_2 = \cos x, f_3 = \cos 2x, f_4 = \cos^2 x,$$

$$f_5 = \cos 3x, f_6 = \cos^3 x;$$

$$z) f_1 = \sin x, f_2 = \sin 2x, f_3 = \sin^2 x, f_4 = \sin 3x, f_5 = \sin^3 x.$$

Контрольное задание №6.

- В пункте а) — найти все значения параметра λ ,
для которых указанная система векторов-строк
будет линейно зависимой;
в пункте б) — из заданной системы векторов
выделить базис их линейной оболочки
и вектора, не вошедшие в базис,
разложить по базису.

1. а) $(-5, -2, 11, 4), (-1, \lambda, 3, 2), (-2, -1, 4, 1)$;
б) $X_1 = (1, -1, 1, -1), X_2 = (-1, 1, -3, -1),$
 $X_3 = (3, -3, 5, -1), X_4 = (3, -3, 7, 1), X_5 = (3, -3, 7, 1)$;
2. а) $(\lambda, -1, -2, -3), (-5, 0, 1, 2), (-4, -1, 0, 1)$;
б) $X_1 = (-1, 1, 0, 1), X_2 = (1, -1, 2, 1),$
 $X_3 = (1, 1, 0, 1), X_4 = (-1, -1, 2, 1), X_5 = (4, -2, 2, 0)$;
3. а) $(-4, 4, \lambda, 5), (-1, \lambda, 1, \lambda), (-2, 0, 0, 1)$;
б) $X_1 = (0, 1, 1, 1), X_2 = (2, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (2, 1, -1, 1), X_4 = (0, 1, 1, -1), X_5 = (6, -1, -3, 3)$;
4. а) $(5, 6, -1, -4), (-1, \lambda, 1, 2), (\lambda, \lambda, 0, 1)$;
б) $X_1 = (-1, 1, 1, -1), X_2 = (1, -1, 1, 3),$
 $X_3 = (1, 1, -1, -1), X_4 = (1, 1, 1, -3), X_5 = (2, -2, -2, 6)$;
5. а) $(3, 2, 1, 1), (\lambda, 0, 1, 3), (-2, \lambda, 0, 1)$;
б) $X_1 = (-1, 0, 1, 1), X_2 = (1, 0, 1, 1),$
 $X_3 = (2, 0, 0, 0), X_4 = (1, 2, 1, -1), X_5 = (2, 2, 4, 2)$;
6. а) $(3, 2, \lambda, 0), (-1, 0, 1, 2), (-2, -1, 2, 1)$;
б) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1),$
 $X_3 = (-3, 3, -1, 1), X_4 = (0, 0, -2, 2), X_5 = (0, 0, 4, -4)$;
7. а) $(\lambda, \lambda, 6, \lambda), (-1, 0, -1, \lambda), (-2, -1, -4, 1)$;
б) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 2),$
 $X_3 = (-3, 3, -1, -2), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-3, 5, 1, 0)$;

8. a) $(-1, -2, 1, 4), (1, \lambda, 1, 2), (-1, -1, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 3, 1, 1), X_2 = (1, 1, 1, 1),$
 $X_3 = (1, 3, -1, 1), X_4 = (3, 1, -1, 1), X_5 = (5, 1, -3, 1)$;
9. a) $(-5, -2, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1, 1), (-2, \lambda, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (1, 1, 1, 1), X_2 = (3, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (3, 1, -1, 1), X_4 = (-1, 1, 1, -1), X_5 = (-4, 0, -6, -2)$;
10. a) $(-3, -1, \lambda, 3), (-1, 0, -3, 2), (-2, -1, -2, 1)$;
 b) $X_1 = (-3, 1, 1, 1), X_2 = (-1, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (-1, 1, -1, 1), X_4 = (3, 1, 1, -1), X_5 = (0, 2, 4, -2)$;
11. a) $(2, 1, 1, 1), (-1, \lambda, 1, 2), (-3, -1, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (0, 1, 1, 1), X_2 = (2, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (0, 1, -1, 1), X_4 = (2, 1, 1, -1), X_5 = (6, 5, 3, 3)$;
12. a) $(0, \lambda, -2, -3), (\lambda, 0, 1, 1), (-2, \lambda, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (-1, -1, 1, 1), X_2 = (1, 1, 1, 1),$
 $X_3 = (1, 3, -1, 1), X_4 = (1, 3, 1, -1), X_5 = (0, 0, 4, 0)$;
13. a) $(-5, -2, 5, 4), (-1, 0, \lambda, 2), (-2, -1, 1, 1)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, -3), X_2 = (-1, 1, -1, 1),$
 $X_3 = (-1, -1, 1, 1), X_4 = (-4, 2, 2, 8), X_5 = (1, -3, 1, -3)$;
14. a) $(3, 2, \lambda, 0), (-1, 0, 3, 2), (-2, -1, \lambda, \lambda)$;
 b) $X_1 = (0, 1, 1, 1), X_2 = (2, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (-2, 3, 1, 1), X_4 = (2, 1, 1, -1), X_5 = (-8, -1, -5, -1)$;
15. a) $(4, 1, 6, -5), (\lambda, 0, \lambda, 2), (-2, \lambda, -4, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 0, 1), X_2 = (1, -1, 2, 1),$
 $X_3 = (3, -3, 4, 1), X_4 = (1, -1, 4, 3), X_5 = (3, -3, 4, 1)$;
16. a) $(3, 2, \lambda, -3), (-1, 0, \lambda, 3), (-2, -1, 0, 3)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1),$
 $X_3 = (0, 0, 2, -2), X_4 = (-1, 1, 3, -3), X_5 = (-1, 1, -3, 3)$;
17. a) $(\lambda, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, \lambda), (-3, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 0, 1, 1), X_2 = (1, 0, 1, 1),$
 $X_3 = (1, 2, -1, 1), X_4 = (-2, 2, -2, 0), X_5 = (0, 2, 2, 4)$;

18. a) $(0, 1, \lambda, 1), (-1, 0, 1, 1), (-2, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, -1, 1), X_2 = (1, -1, -1, 1)$,
 $X_3 = (1, 1, -3, 1), X_4 = (-4, 2, 4, -2), X_5 = (1, -5, 7, -3)$;
19. a) $(3, 2, \lambda, 6), (-1, 0, \lambda, 0), (-2, -1, 0, -3)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, -1, 1), X_2 = (1, -1, 3, 1)$,
 $X_3 = (1, 1, -3, 1), X_4 = (1, 1, -1, -1), X_5 = (2, 2, -6, -2)$;
20. a) $(-3, \lambda, 1, 0), (\lambda, 0, 1, 1), (-2, \lambda, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (1, 1, -1, -1), X_2 = (-1, 3, -1, -1)$,
 $X_3 = (0, -4, 2, 2), X_4 = (3, -5, 1, 1), X_5 = (-3, 5, -1, -1)$;
21. a) $(-1, -1, -1, \lambda), (-1, \lambda, 1, 1), (-2, -1, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (2, -1, -1, -1), X_2 = (0, 1, -1, -1)$,
 $X_3 = (4, -1, -3, -3), X_4 = (-4, 3, 1, 1), X_5 = (-4, 0, 4, 4)$;
22. a) $(-6, 2, -2, -6), (\lambda, 0, 1, 2), (0, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 0, 1, 1), X_2 = (1, -2, 1, 1)$,
 $X_3 = (-1, -2, 3, 3), X_4 = (-2, 2, 0, 0), X_5 = (-3, 2, 1, 1)$;
23. a) $(1, 1, 1, 2), (\lambda, 0, 1, 2), (-2, \lambda, 0, 0)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 0), X_2 = (-1, 1, -1, -2)$,
 $X_3 = (1, -1, -3, -2), X_4 = (3, -3, 1, 4), X_5 = (2, -2, 0, 2)$;
24. a) $(-4, 7, 2, 5), (-1, 2, 1, 2), (\lambda, 3, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 2)$,
 $X_3 = (-3, 3, -1, -2), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-2, -2, 0, 4)$;
25. a) $(\lambda, -1, -2, 5), (-1, 0, 0, 2), (-2, -1, -2, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 3, 1), X_2 = (1, -1, -1, 1)$,
 $X_3 = (1, 1, 1, 1), X_4 = (1, 1, 3, -1), X_5 = (-1, 5, 11, 1)$;
26. a) $(-6, -1, -2, \lambda), (3, 0, 1, 2), (0, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 0), X_2 = (-1, 1, -1, -2)$,
 $X_3 = (3, -3, 1, 4), X_4 = (-3, 3, 1, -2), X_5 = (2, -2, 0, 2)$;
27. a) $(4, -7, -2, -5), (-1, 2, 1, 2), (-2, 3, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1)$,
 $X_3 = (-1, 1, -3, 3), X_4 = (1, -1, -3, 3), X_5 = (3, -3, 1, -1)$;

28. a) $(-3, 2, \lambda, 3), (-1, 2, \lambda, 2), (-2, 0, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (2, -1, -1, -1), X_2 = (0, 1, -1, -1),$
 $X_3 = (0, -1, 1, -1), X_4 = (-4, 1, 3, 5), X_5 = (2, -1, -1, 3)$;
29. a) $(-3, 0, \lambda, 3), (-1, \lambda, \lambda, 2), (-2, -1, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (0, 1, 1, 1), X_2 = (2, -1, 1, 1),$
 $X_3 = (-4, 4, 0, 0), X_4 = (4, -3, 1, 1), X_5 = (2, 1, 3, 3)$;
30. a) $(3, 1, 2, -3), (\lambda, 0, 0, 2), (-2, \lambda, -2, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 0),$
 $X_3 = (3, -3, 1, -2), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (1, -3, -1, -2)$;
31. a) $(-3, -3, \lambda, 0), (\lambda, 1, 1, 2), (-2, \lambda, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (1, 0, -1, -1), X_2 = (-1, 2, -1, -1),$
 $X_3 = (0, -4, 4, 4), X_4 = (-1, -2, 3, 3), X_5 = (-1, -2, 3, 3)$;
32. a) $(-3, 5, 1, 3), (-1, 2, 1, 2), (\lambda, 3, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 0, 1), X_2 = (1, -1, 2, 1),$
 $X_3 = (-3, 3, -4, -1), X_4 = (1, 1, 2, -1), X_5 = (2, 0, 6, 2)$;
33. a) $(4, 1, -1, \lambda), (-1, 0, 1, 2), (-2, -1, -1, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 0),$
 $X_3 = (1, 1, -1, 0), X_4 = (1, 1, 1, -2), X_5 = (1, -3, 3, -4)$;
34. a) $(-5, 2, 1, \lambda), (-1, 2, 1, 2), (-2, 0, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, -1, 1, 1), X_2 = (1, 1, 1, 1),$
 $X_3 = (-2, -2, 0, 0), X_4 = (1, 3, 1, -1), X_5 = (5, 9, 1, -3)$;
35. a) $(0, -1, \lambda, 3), (\lambda, 0, \lambda, 2), (-1, -1, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (1, 0, -1, -1), X_2 = (-1, 0, -1, -1),$
 $X_3 = (-2, 0, 0, 0), X_4 = (0, 0, 2, 2), X_5 = (-3, 0, -1, -1)$;
36. a) $(3, 2, \lambda, 0), (-1, 0, 3, 2), (-2, -1, \lambda, \lambda)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1),$
 $X_3 = (-1, 1, 3, -3), X_4 = (0, 0, -2, 2), X_5 = (-2, 2, 0, 0)$;
37. a) $(\lambda, -8, 2, 6), (-1, -1, 1, 2), (-2, -3, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 1, 0), X_2 = (1, -1, 1, 2),$
 $X_3 = (1, -1, 3, 4), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-2, -2, 0, 2)$;

38. a) $(\lambda, \lambda, 0, \lambda), (\lambda, 0, \lambda, 2), (-2, \lambda, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (2, -1, -1, -1), X_2 = (0, 1, -1, -1),$
 $X_3 = (-2, -1, 3, 3), X_4 = (-2, -1, -1, 1), X_5 = (0, 2, 6, 2)$;
39. a) $(-3, -4, 1, 3), (\lambda, \lambda, 1, 2), (-2, -3, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 0, 1), X_2 = (1, -1, 2, 1),$
 $X_3 = (1, -1, 4, 3), X_4 = (2, -2, 2, 0), X_5 = (-3, 3, -4, -1)$;
40. a) $(-5, -2, 1, 2), (-1, \lambda, 1, 2), (-2, -1, \lambda, \lambda)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -3, -1), X_2 = (-1, 1, 1, -1),$
 $X_3 = (-3, 3, 7, 1), X_4 = (1, -1, 1, 3), X_5 = (4, -4, -8, 0)$;
41. a) $(\lambda, -4, \lambda, \lambda), (-1, 1, 1, 2), (\lambda, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (1, -1, -1, 1), X_2 = (-1, 1, -1, 1),$
 $X_3 = (-1, -1, 1, -3), X_4 = (-5, 3, 1, -3), X_5 = (4, -2, 0, 2)$;
42. a) $(-2, -2, -2, -4), (-1, 0, \lambda, \lambda), (-2, -1, 0, -1)$;
 b) $X_1 = (0, -1, -1, -1), X_2 = (0, 1, -1, -1),$
 $X_3 = (0, 0, -2, -2), X_4 = (0, -1, 3, 3), X_5 = (0, 1, -3, -3)$;
43. a) $(-5, -4, \lambda, 4), (-1, -2, \lambda, 2), (-2, -1, 0, \lambda)$;
 b) $X_1 = (-1, 2, 1, 1), X_2 = (1, 0, 1, 1),$
 $X_3 = (0, -2, -2, -2), X_4 = (0, 2, 2, 2), X_5 = (0, 2, 2, 2)$;
44. a) $(-3, -1, 1, 4), (-1, \lambda, 1, 3), (-2, -1, \lambda, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 2),$
 $X_3 = (1, 1, -1, 0), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-2, 0, 0, 6)$;
45. a) $(-6, \lambda, 1, 4), (\lambda, 0, 1, 2), (\lambda, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 2, 1), X_2 = (1, -1, 0, 1),$
 $X_3 = (1, 1, 0, 1), X_4 = (1, 1, 2, -1), X_5 = (3, -5, -2, -3)$;
46. a) $(-3, \lambda, 1, 3), (-1, -1, 1, 2), (\lambda, -1, 0, 1)$;
 b) $X_1 = (-1, 1, 2, 1), X_2 = (1, -1, 2, 1),$
 $X_3 = (1, 1, 0, 1), X_4 = (1, 1, 0, -1), X_5 = (-3, 3, -2, -3)$;
47. a) $(-1, -1, -3, -1), (-1, 0, 5, 2), (\lambda, -1, 2, 1)$;
 b) $X_1 = (0, -1, -1, -1), X_2 = (-2, 1, -1, -1),$
 $X_3 = (-4, 1, -3, -3), X_4 = (4, 0, 4, 4), X_5 = (4, -3, 1, 1)$;

48. a) $(-3, -1, 7, 3), (-1, 0, 3, 2), (-2, -1, \lambda, 1)$;
b) $X_1 = (1, -2, -1, -1), X_2 = (-1, 0, -1, -1),$
 $X_3 = (0, 2, 2, 2), X_4 = (4, -4, 0, 0), X_5 = (2, -2, 0, 0)$;
49. a) $(1, \lambda, -1, -4), (1, 0, 1, \lambda), (-1, -1, 0, 1)$;
b) $X_1 = (-1, 1, 1, 3), X_2 = (1, -1, 1, -1),$
 $X_3 = (1, 1, -1, -1), X_4 = (1, 1, 1, -3), X_5 = (1, 1, -1, 3)$;
50. a) $(0, -2, 2, 6), (\lambda, 0, \lambda, 2), (-1, -1, 0, \lambda)$;
b) $X_1 = (-1, 1, 1, 2), X_2 = (1, -1, 1, 0),$
 $X_3 = (-1, 1, 3, 4), X_4 = (1, 1, 1, 0), X_5 = (-2, 4, 0, 2)$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

§ 1. Действия над матрицами

1. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -1 \\ 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; d) (-2) ;
- e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;
- i) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- m) $\begin{pmatrix} 1 & n^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} -1024 & 0 \\ 0 & -1024 \end{pmatrix}$;
- p) $\begin{pmatrix} 2^{36} & 0 \\ 0 & 2^{36} \end{pmatrix}$; q) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. a) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$;
- i) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;
- l) $\begin{pmatrix} -6 & 10 & 6 \\ 10 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; m) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 12 & 20 \\ 4 & 16 & 28 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
3. a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

$$\text{h) } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{i) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{j) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{k) } \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{l) } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -16 & -6 \end{pmatrix}$; c)¹¹ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \beta+1 & \alpha \\ \beta & \alpha+1 \end{pmatrix}$; e) $\alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \beta E$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha A + \beta E$;

g) решений нет; h) $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

k) решений нет; l) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 2. Определители. Обратная матрица

1. a) -4; b) 5; c) 100; d) $a^2 + b^2$; e) -3; f) 3; g) -12;
 h) 0; i) 2; j) -2; k) 8; l) 0; m) 1; n) -3; o) 4;
 p) -2; q) 1; r) 2; s) 0; t) a^4 ; u) $(af - be + cd)^2$.

2. a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ -9 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -9 & -7 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 5 \\ 4 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

¹¹ Здесь и далее буквы α , β и γ обозначают произвольные числа.

$$\begin{array}{lll}
\text{j)} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}; & \text{k)} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -9 & 6 & 4 \end{pmatrix}; & \text{l)} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{m)} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; & \text{n)} \begin{pmatrix} -9 & 8 & 5 \\ 6 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; & \text{o)} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ -9 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \\
\text{p)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{q)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \\
\text{r)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{s)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \\
\text{t)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{u)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \\
\text{v)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{w)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

§ 3. Системы линейных уравнений

1. a) $x_1 = -1, x_2 = 1;$ b) $x_1 = 3, x_2 = 5;$
- c) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2;$ d) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3;$
- e) $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 3;$ f) $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1;$
- g) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1;$ h) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1;$
- i) $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1;$ j) $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 2;$
- k) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2;$ l) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2;$
- m) $x_1 = a + b, x_2 = -a + b;$
- n) $x_1 = 2a + 2b + c, x_2 = -2a + b + 2c, x_3 = -a + 2b - 2c;$
- o) $x_1 = a + b + c + d, x_2 = a + b - c - d, x_3 = a - b + c - d,$
 $x_4 = a - b - c + d.$

2. a) $x_1 = 3 - 2\alpha - 2\beta, x_2 = 1 - 2\alpha - \beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta;$
 b) нет решений
 c) $x_1 = 2 + 2\alpha - \beta, x_2 = \alpha, x_3 = -3 - 2\alpha - \beta, x_4 = \beta;$
 d) $x_1 = 20 - 6\alpha, x_2 = 2\alpha - 5, x_3 = \alpha, x_4 = 4 - \alpha;$
 e) $x_1 = \alpha, x_2 = 2\alpha - 3, x_3 = 2, x_4 = -2;$
 f) $x_1 = 2\alpha - \beta, x_2 = \alpha, x_3 = 1 - \beta, x_4 = \beta;$
 g) нет решений
 h) $x_1 = 20 - 6\alpha, x_2 = 7 - 2\alpha, x_3 = \alpha, x_4 = 2 - \alpha;$
 i) $x_1 = \alpha, x_2 = \alpha - 2, x_3 = 2, x_4 = 1;$
 j) $x_1 = 4 - 3\alpha, x_2 = 4\alpha - 2, x_3 = 2\alpha, x_4 = 4 - 2\alpha;$
 k) $x_1 = 2 - \alpha, x_2 = \alpha, x_3 = 1, x_4 = 1;$
 l) $x_1 = 3 + \alpha, x_2 = \alpha, x_3 = 3, x_4 = 1;$
 m) $x_1 = 2 + 2\alpha - \beta, x_2 = \alpha, x_3 = 1 + \beta, x_4 = \beta;$
 n) $x_1 = 2 + \alpha, x_2 = \alpha, x_3 = 2, x_4 = 1.$

§ 4. Ранг матрицы. Однородные системы

1. a) 4; b) 2; c) 3; d) 3; e) 3; f) 4; g) 3; h) 2; i) 2; j) 2; k) 4;
 l) 3; m) 2; n) 2; o) 3; p) 4; q) 2; r) 3; s) 3; t) 2; u) 4; v) 4;
 w) 4; x) 3; y) 3; z) 3.
- 2.¹² a) $X_1 = (-1, 0, 0, 1, 1), X_2 = (0, 0, -3, 1, 2);$
 b) $X_1 = (1, 0, 0, 1, 0), X_2 = (-1, 1, 0, 0, 1);$
 c) $X_1 = (-1, 0, 0, 2);$
 d) $X_1 = (0, -2, 1, -1), X_2 = (1, 2, -1, 2);$
 e) $X_1 = (-1, 2, 0, 0), X_2 = (-1, 0, 1, 1);$
 f) $X_1 = (-2, 0, 0, 1);$
 g) $X_1 = (0, -1, 0, 2);$
 h) $X_1 = (0, 0, 0, 1, -2), X_2 = (-1, 0, -1, 2, -1), X_3 = (-1, -1, 0, 2, 0);$
 i) $X_1 = (-2, 0, 0, 1, 1);$
 j) $X_1 = (2, -5, 0, -2, 2);$
 k) $X_1 = (1, 2, 0, 0, 2);$
 l) $X_1 = (-1, -2, 1, 0, 1), X_2 = (1, 1, -1, 1, 1);$

¹² Разумеется, здесь приведены лишь отдельные возможные решения, возможно, не самые изящные. Убедитесь, однако, что они правильные.

- m) $X_1 = (0, 1, -1, 1)$;
n) $X_1 = (-1, 0, 0, 1, 1)$, $X_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
o) $X_1 = (-1, -2, -3, -1, 4)$;
p) $X_1 = (1, -1, 0, 0, 1)$;
q) $X_1 = (0, 1, 0, 3, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $X_3 = (0, 0, 0, 2, 1)$;
r) $X_1 = (1, 0, 0, 1)$;
s) $X_1 = (1, -1, -1, 2)$;
t) $X_1 = (0, -3, 0, 1, -1)$, $X_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
u) $X_1 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $X_2 = (0, 1, -1, 1, 2)$;
v) $X_1 = (1, 0, -3, 2, 1)$, $X_2 = (0, 0, -1, 1, 1)$, $X_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$;
w) $X_1 = (-2, -2, 0, 1, 2)$;
x) $X_1 = (-1, 1, -1, 0)$;
y) $X_1 = (2, 0, -2, 1, 1)$, $X_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$;
z) $X_1 = (0, 0, 1, 0, 1)$;

§ 5. Собственные значения и столбцы матриц

1. a) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^T$, $D_2 = -3$, $X_2 = \alpha_2(1, 4)^T$;
b) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 3)^T$, $D_2 = 1$, $X_2 = \alpha_2(1, 1)^T$;
c) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(3, 4)^T$;
d) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(4, 3)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(2, 1)^T$;
e) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 2)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, 1)^T$;
f) $D_1 = -1$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^T$;
g) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(2, 1)^T$;
h) $D_1 = -2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^T$, $D_2 = -1$, $X_2 = \alpha_2(4, 3)^T$;
i) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, -1)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, -2)^T$;
j) $D_1 = 2$, $X_1 = \alpha_1(1, 1)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(1, 2)^T$;
k) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 3)^T$, $D_2 = 2$, $X_2 = \alpha_2(1, 2)^T$;
l) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(2, 1)^T$, $D_2 = 3$, $X_2 = \alpha_2(4, 1)^T$.
2. a) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 2, 2)^T$,
 $D_2 = 2$, $X_2 = \alpha_{21}(1, -1, 0)^T + \alpha_{22}(1, 0, 1)^T$;
b) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(1, 1, 3)^T$,
 $D_2 = -2$, $X_2 = \alpha_2(-7, 2, -9)^T$,
 $D_3 = 4$, $X_3 = \alpha_3(2, 2, 3)^T$;
c) $D_1 = 1$, $X_1 = \alpha_1(-3, 1, 1)^T$,
 $D_2 = -2$, $X_2 = \alpha_2(3, -5, 4)^T$,

- $D_3 = 4, X_3 = \alpha_3(0, 1, 1)^T;$
 d) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(0, 2, 3)^T,$
 $D_2 = 2, X_2 = \alpha_2(3, 1, 3)^T,$
 $D_3 = 5, X_3 = \alpha_3(3, 2, 0)^T;$
 e) $D_1 = 2, X_1 = \alpha_1(2, -1, 0)^T,$
 $D_2 = 3, X_2 = \alpha_2(1, 0, 2)^T,$
 $D_3 = 5, X_3 = \alpha_3(1, -1, -1)^T;$
 f) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(2, 1, 1)^T;$
 g) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 1)^T;$
 h) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(5, 2, -4)^T,$
 $D_2 = 2, X_2 = \alpha_2(1, 0, -1)^T,$
 $D_3 = 3, X_3 = \alpha_3(1, 1, -1)^T;$
 i) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 0)^T;$
 j) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, -1)^T,$
 $D_{23} = -2, X_2 = \alpha_{21}(1, 0, 1)^T + \alpha_{22}(0, 2, -3)^T;$
 k) $D_1 = -2, X_1 = \alpha_1(1, 1, -1)^T,$
 $D_2 = 1, X_2 = \alpha_2(4, 1, 2)^T,$
 $D_3 = -5, X_3 = \alpha_3(1, 4, 2)^T;$
 l) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, -1, 3)^T,$
 $D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(7, 5, 6)^T,$
 $D_3 = 4, X_3 = \alpha_3(2, 1, 0)^T;$
 m) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 0)^T;$
 n) $D_{12} = 1, X_1 = \alpha_{11}(1, 1, 0)^T + \alpha_{12}(1, 0, 1)^T,$
 $D_3 = -2, X_2 = \alpha_3(2, 1, 0)^T;$
 o) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(-2, 3, 4)^T,$
 $D_2 = 2, X_2 = \alpha_2(2, 3, 5)^T,$
 $D_3 = 5, X_3 = \alpha_3(1, 0, -2)^T;$
 p) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 1)^T;$
 q) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_{11}(0, 1, 3)^T + \alpha_{12}(2, 1, 0)^T,$
 $D_2 = 0, X_2 = \alpha_2(1, 1, 1)^T;$
 r) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 2)^T;$
 s) $D_1 = 2, X_1 = \alpha_1(1, 3, 1)^T,$
 $D_{23} = -2, X_2 = \alpha_{21}(1, 1, 0)^T + \alpha_{22}(-1, 0, 1)^T;$
 t) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(4, 2, 1)^T,$
 $D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(1, -1, 1)^T,$
 $D_3 = -5, X_3 = \alpha_3(1, 2, 4)^T;$
 u) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(-3, 3, 1)^T,$
 $D_2 = -2, X_2 = \alpha_2(0, 3, 5)^T,$
 $D_3 = 4, X_3 = \alpha_3(3, 0, 1)^T;$
 v) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 3, 0)^T;$

w) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(0, 3, -4)^T;$

x) $D_1 = -4, X_1 = \alpha_1(6, 5, 3)^T,$

$D_2 = -1, X_2 = \alpha_2(3, 1, 0)^T,$

$D_3 = 2, X_3 = \alpha_3(1, 1, -1)^T;$

y) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(0, 1, -1)^T;$

z) $D_1 = 4, X_1 = \alpha_1(5, -2, -5)^T,$

$D_2 = 1, X_2 = \alpha_2(2, 1, 1)^T,$

$D_3 = -2, X_3 = \alpha_3(2, 2, 1)^T.$

3. a) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_{11}(1, 0, 0, 1)^T + \alpha_{12}(1, -1, -4, 1)^T;$

b) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, -2, 2, 2)^T,$

$D_2 = 0, X_2 = \alpha_2(1, -3, 2, 2)^T,$

$D_3 = 1, X_3 = \alpha_3(0, -2, 1, 1)^T;$

$D_4 = 2, X_4 = \alpha_4(0, 1, 0, -1)^T;$

c) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 1, 0)^T,$

$D_2 = 0, X_2 = \alpha_2(2, -1, -2, 0)^T,$

$D_3 = -1, X_3 = \alpha_{31}(0, 1, 1, 0)^T + \alpha_{32}(1, 2, 2, 1)^T;$

d) $D_1 = 2, X_1 = \alpha_1(1, 1, 0, 1)^T,$

$D_2 = 1, X_2 = \alpha_2(0, 1, 0, 1)^T,$

$D_3 = -1, X_3 = \alpha_3(0, 1, -1, 1)^T,$

$D_4 = -2, X_4 = \alpha_4(0, 1, -1, 2)^T;$

e) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(0, 1, 0, 0)^T;$

f) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 0)^T;$

g) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 0)^T,$

$D_2 = 0, X_2 = \alpha_2(1, 3, 1, 1)^T,$

$D_3 = -1, X_3 = \alpha_{31}(1, 2, 1, 1)^T + \alpha_{32}(0, 1, 0, 1)^T;$

h) $D_1 = -1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 1, 0)^T;$

i) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 1, 1, 1)^T;$

j) $D_1 = 2, X_1 = \alpha_1(1, 0, 1, 1)^T,$

$D_2 = 1, X_2 = \alpha_2(1, 1, 0, 0)^T,$

$D_3 = -1, X_3 = \alpha_3(1, 1, -1, 0)^T,$

$D_4 = -2, X_4 = \alpha_4(1, 1, 0, 1)^T;$

k) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_{11}(1, 0, 0, 0)^T + \alpha_{12}(0, 1, 1, 1)^T;$

l) $D_1 = 1, X_1 = \alpha_1(1, 0, 0, 1)^T.$

4. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$ f) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$ h) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$ j) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

k) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$ l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$

n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

o) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$

p) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

q) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$

r) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

s) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

t) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

$$u) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$v) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$5. a) \begin{pmatrix} -6140 & 4094 \\ -12282 & 8189 \end{pmatrix}; \quad b) \frac{1}{1024} \begin{pmatrix} 3070 & -1023 \\ 6138 & -2045 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 200 & 200 \\ -100 & -100 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$g) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad h) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad j) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$k) \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad l) \frac{\pi}{6} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -12 & -5 \end{pmatrix};$$

$$m) \frac{\pi}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad n) \frac{\pi}{6} \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{o)} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; & \text{p)} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}; \\
\text{q)} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; & \text{r)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \\
\text{s)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; & \text{t)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
\text{u)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{v)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -8 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \\
\text{w)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{x)} \begin{pmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -8 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \\
\text{y)} \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}; & \text{z)} \frac{\pi}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

§ 6. Некоторые приложения (модель Леонтьева)

1. a) (862, 658); b) (500, 366); c) (295, 265);
d) (726, 820); e) (422, 408); f) (1391, 1786);
g) (637, 806); h) (409, 738); i) (1205, 845);
j) (497, 827); k) (737, 1008); l) (951, 889);
m) (445, 909); n) (776, 903); o) (728, 606);
p) (527, 454); q) (750, 1369); r) (1006, 916);
s) (1160, 1631); t) (430, 652); u) (502, 772);
v) (1085, 863); w) (817, 1201); x) (956, 650);
y) (820, 855); z) (767, 1058).

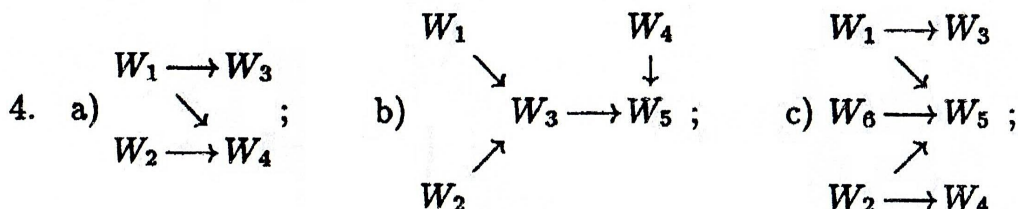
ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Примеры векторных пространств, подпространства

1. a) да; b) нет; c) да; d) нет; e) нет; f) нет; g) да; h) нет;
i) нет; j) нет; k) да; l) нет; m) нет; n) да; o) нет; p) да;
q) да; r) нет; s) да; t) нет; u) да; v) да; w) да; x) да;
y) нет; z) нет.
2. a) да; b) да; c) нет; d) да; e) да; f) да; g) да; h) да;
i) нет; j) да; k) да; l) да; m) да; n) да; o) да; p) да;

q) да; r) нет; s) да; t) да; u) да; v) нет; w) да; x) да;
y) да; z) нет.

3. a) нет; b) да; c) нет; d) да; e) нет; f) да; g) да; h) да;
i) да; j) да; l) нет;



§ 2. Линейные зависимости

1. a) да; b) нет; c) нет; d) да; e) да; f) нет; g) нет; h) нет;
i) нет; j) нет; k) да; l) нет; m) нет; n) нет; o) нет; p) да;
q) да; r) нет; s) нет; t) да; u) да; v) нет; w) да; x) да;
y) да; z) нет.

2. a) $2A_2 = A_3 - A_1$; b) $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$;
c) функции независимы; d) $f_3 = 3f_1 - 4f_2$.

3. a)¹³-2, b) 1, c)¹⁴0, d) 1, e) 1, f) 1, g) 2, h) 1,
i) -3, j) 3, k) 3, l) 1, m) -1, n) -1, o) -2, p) 1,

¹³ Решение. Векторы $X_1 = (3, 1, -\lambda)$, $X_2 = (1, 0, 1)$ и $X_3 = (1, 1, 0)$ образуют линейно зависимую систему тогда и только тогда, если равенство $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$ имеет место при $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$, что равносильно тому, что однородная система с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет нетривиальное решение.

Последнее же равносильно тому, что ранг этой матрицы меньше трех, то есть ее единственный минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda - 2 \text{ равен нулю, откуда } \lambda = -2.$$

¹⁴ Решение. Аналогично предыдущему, надо выяснить, когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 \\ -1 & \lambda & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ меньше трех, то есть когда все ее четыре

минора третьего порядка $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ -1 & \lambda & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

и $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ равны нулю. Последний из этих миноров обращается в нуль

только при $\lambda = 0$, и легко видеть, что в этом случае и остальные три минора также равны нулю.

- q) -1 , r) 1 , s) 1 , t) 1 , u) -2 , v) 3 , w) -1 , x) -2 ,
 y) -1 , z) 3 .

§ 3. Базис и размерность

1. a) размерность равна mn ,
 базис¹⁵ состоит из матричных единичек¹⁶ e_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$;
 - b) размерность равна $n(n+1)/2$,
 базис: $\{e_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{ij} + e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$;
 - c) размерность равна $n(n-1)/2$,
 базис: $\{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$;
 - d) размерность равна $n(n+1)/2$,
 базис: $\{e_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$;
 - e) размерность равна $n(n-1)/2$,
 базис: $\{e_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq n\}$;
 - f) размерность равна $n^2 - 1$,
 базис состоит из всех матричных единичек, кроме e_{nn} ;
2. a) базис: $\{X_1, X_4\}$, $X_2 = -2X_1$, $X_3 = 41X_1 + 31X_4$;
 - b) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -X_1 + X_2$, $X_4 = -5X_1 + 4X_2$;
 - c) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = X_1 + X_2 - X_3$;
 - d) базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = X_1 + X_2$; $X_5 = 3X_1 + X_2 + X_4$;
 - e) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = -X_1 - 2X_2 + 2X_3$;
 - f) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = 2X_1 - 2X_2 + 3X_3$;
 - g) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $X_5 = 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4$;
 - h) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = X_1 - X_2 - 2X_3$, $X_5 = -2X_1 - X_2 - 2X_3$;
 - i)¹⁷ базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = -2X_1 - 2X_2$, $X_5 = X_1 + X_2 + X_4$;

¹⁵ Разумеется, базис определен неоднозначно. Приводится наиболее естественный — с точки зрения составителей — вариант.

¹⁶ Матричная единичка e_{ij} — это матрица, у которой элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце, равен единице, а все остальные элементы равны нулю.

¹⁷ Решение. Ясно, что векторы X_1 и X_2 независимы, так что могут быть включены в конструируемый базис. Попытка представить вектор X_3 в виде комбинации X_1 и X_2 , то есть в виде $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, приводит к системе $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -4$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -4$, которая имеет (разумеется, единственное) решение $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$; следовательно, вектор X_3 не может быть включен в базис. Аналогичная попытка с заменой X_3 на X_4 приводит к несовместной системе $-\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $-\alpha_1 + \alpha_2 = 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$, так что этот вектор X_4 должен быть включен в базис. Наконец, вектор X_5 представим в виде комбинации X_1 , X_2 и X_4 . Этот метод построения базиса может быть назван методом вычеркивания — из системы образующих последовательно вычеркиваются все векторы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих.

- j) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -X_1 + X_2$, $X_4 = -2X_1 + 2X_2$, $X_5 = X_1 + X_2$;
- k) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = X_1 - X_2$, $X_5 = -2X_1 + 2X_2$;
- l) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $X_5 = -X_1 - X_2 - X_3 - 2X_4$;
- m) базис: $\{X_1, X_2, X_3\}$, $X_4 = -X_1 + X_2 + X_3$, $X_5 = 2X_1 + X_2 + X_3$;
- n) базис: $\{X_1, X_2\}$, $X_3 = -2X_1 + X_2$, $X_4 = X_1 + X_2$, $X_5 = -X_1 + X_2$;
- o) базис: $\{X_1, X_2, X_4\}$, $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_5 = X_1 - X_2 - 2X_4$;
- p) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- q) базис: $\{X_1, X_2, X_4, X_5\}$, $X_3 = -X_1 - X_2 - X_4 + 2X_5$;
- r) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- s) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- t) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- u) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- v) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- w) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- x) базис: $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, $X_4 = -X_1 - X_2 - X_3 + 2X_5$;
- y) базис: $\{f_1, f_2, f_4, f_6\}$, $f_3 = -f_1 + 2f_4$, $f_5 = -3f_2 + 4f_6$;
- z) базис: $\{f_1, f_2, f_3, f_5\}$, $f_4 = 3f_1 - 4f_5$.

Учебное издание

**Учебные и контрольные задания по математике
Высшая алгебра**

*Михаил Владимирович Бондарко
Геннадий Николаевич Малолеткин
Андрей Алексеевич Семенов
Владимир Георгиевич Халип
Петр Константинович Черняев*

Учебное пособие

Подписано в печать с оригинал-макета 19.10.2010.
Формат 60x84¹/₁₆. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 5,58. Доп. тираж 300 экз. Заказ № 1189.

Издательский центр экономического факультета СПбГУ
191123, С.-Петербург, ул. Чайковского, 62.