

Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
Инженерная академия России (Поволжское отделение)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Труды
седьмой Всероссийской научной
конференции с международным
участием

3–6 июня 2010 г.

ЧАСТЬ 2

СЕКЦИЯ

«Моделирование и оптимизация
динамических систем и систем
с распределёнными параметрами»

С а м а р а

Самарский государственный технический университет

2010

УДК 517.9-517.956

М33

Математическое моделирование и краевые задачи:

М33 Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. — Самара: СамГТУ, 2010. — 307 с.: ил.

ISBN 978-5-7964-1329-6

Представлены материалы докладов по секции «Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами». В публикуемых материалах отражены вопросы оптимизации и управления сложными системами и технологическими процессами, приведены постановки задач для динамических систем с распределёнными параметрами и методы их решения. Рассмотрен ряд прикладных задач и их математические модели в различных областях научных исследований.

УДК 517.9-517.956

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Д-р. физ.-мат. наук проф. *В. П. Радченко* (отв. редактор),

д-р. физ.-мат. наук проф. *О. А. Репин*,

д-р. техн. наук проф. *Э. Я. Рапопорт*,

канд. физ.-мат. наук доцент *М. Н. Саушкин* (отв. секретарь)

ISBN 978-5-7964-1329-6

© Авторы, 2010

© Самарский государственный
технический университет, 2010

Содержание

<i>Аверина Т. А.</i> Модифицированный алгоритм статистического моделирования динамических систем с условной марковской структурой	10
<i>Алимов С. В., Данилушкин И. А., Мосин В. Н.</i> Модель теплообмена в аппаратах воздушного охлаждения. Стационарный режим .	13
<i>Базаров А. А., Латыпов Р. Р.</i> Моделирование электромагнитных процессов в индукционной системе возбуждения колебаний дисков турбоагрегатов	16
<i>Безгласный С. П., Мысина О. А.</i> О стабилизации вращательных движений составного спутника	18
<i>Белевич М. Ю.</i> Причинно-обусловленное описание теплопереноса .	22
<i>Бердникова Е. В., Серенков В. Е.</i> Модель прогнозирования удельных расходов топлива на отпуск электроэнергии и тепла ТЭЦ	26
<i>Близорукова М. С., Максимов В. И.</i> Об одном алгоритме решения задачи оптимального управления в гильбертовом пространстве	29
<i>Богатко В. И., Потехина Е. А.</i> Плоские и осесимметричные автомодельные течения газа за фронтом интенсивной ударной волны	32
<i>Богданова С. Б., Гладков С. О.</i> К теории продольной магнитной восприимчивости в магнетиках с фрактальной структурой	36
<i>Бортников П. А.</i> Моделирование монополярного приближения для системы диффузионно-взаимодействующих стоков	38
<i>Васильев С. Б., Зайцева М. И., Колесников Г. Н., Кульбицкий А. В.</i> Разработка и применение логистической модели рассева сыпучих материалов	41
<i>Вдовин А. Ю., Рублева С. С.</i> О динамическом алгоритме моделирования производной с оптимальным порядком точности	45
<i>Владыкина Е. А., Куркина О. Е., Куркин А. А.</i> Математическое моделирование распространения уединенных внутренних волн в двухслойном бассейне с наклонным дном	48
<i>Волосова А. К., Волосов К. А.</i> Система Эйгена — жесткая задача с двумя малыми параметрами	51
<i>Гаврилова А. А., Салов А. Г., Кухарева А. В.</i> Комплексный анализ режимов работы дутьевых вентиляторов паровых котлов и оценка эффективности применения регулируемых приводов	55
<i>Гладков С. О., Денисенко П. Л.</i> Численное решение обобщенного уравнения Вольтерра—Лотка в приближении до третьего порядка по концентрации	58
<i>Головко Н. И., Пелешок О. В.</i> Уравнение типа Такача для СМО $M/G/1$ со скачкообразной интенсивностью входного потока .	62
<i>Голубева Е. С.</i> Фреймы сдвигов в пространствах над полями \mathbb{R}, \mathbb{C} .	64
<i>Гусева М. А.</i> Численно-аналитическая модель теплообменного аппарата с учётом влияния разделителя сред	68

1. *Кряжсимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О реконструкции тремальных возмущений в параболических уравнениях // *ЖВМ*, 1997. Т. 37, № 3. — С. 291–301.
2. *Кряжсимский А. В., Осипов Ю. С.* К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями / В сб.: *Некоторые методы позиционного и программного управления*: Сб. науч. тр. Свердловск: ИММ, 1987. — С. 34–54.
3. *Кряжсимский А. В., Максимов В. И., Самарская Е. А.* О реконструкции входов в параболических системах // *Матем. моделирование*, 1997. — Т. № 3. — С. 45–61.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00002), Программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и Урало-Сибирского междисциплинарного проекта.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

msb@imm.uran.ru, maksimov@imm.uran.ru

УДК 533.601.1

В. И. Богатко, Е. А. Потехина

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЗА ФРОНТОМ ИНТЕНСИВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

При построении решения задачи о движении газа за фронтом сильной ударной волны в рамках метода тонкого ударного слоя обычно предполагается, что $M = V/a \rightarrow \infty$, где $V = V_f$ — скорость перемещения фронта ударной волны, a — скорость звука в невозмущенном газе перед фронтом ударной волны. Различные варианты учета конечности числа Маха ударной волны предлагались в [1, 2] для решения стационарных задач гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел при условии что параметры $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ и $\eta = 1/M^2$ независимы (γ — эффективный показатель адиабаты). В работе [3] при решении нестационарной задачи обтекания клина и конуса было сделано предположение о том, что параметр η зависит от ε и стремится к нулю быстрее, чем ε .

В настоящей работе для построения решения задачи о движении газа за фронтом сильной ударной волны по методу тонкого

ударного слоя предлагается способ нахождения второго и следующих приближений. При этом в отличие от [4] строится приближенное аналитическое решение задачи с учетом конечности числа Маха распространяющейся сильной ударной волны и используется предложенная в [5] зависимость параметров ε и η .

Рассмотрим автомодельное движение газа за фронтом сильной ударной волны, распространяющейся по закону

$$x = N_0 t f_1(s), \quad y = N_0 t f_2(s). \quad (1)$$

Здесь x и y — декартовы координаты, N_0 — некоторая характерная скорость перемещения фронта ударной волны, t — время. Если параметр s отождествить с длиной дуги фронта волны в плоскости автомодельных переменных, то функции f_1 и f_2 должны удовлетворять условию $f_1'^2 + f_2'^2 = 1$.

В осесимметричном случае под плоскостью x, y следует подразумевать меридиональную плоскость, при этом за ось симметрии примем ось x .

Предположим, что все гидродинамические характеристики потока зависят от двух автомодельных переменных ξ и η , где $\xi = x/N_0 t$, $\eta = y/N_0 t$ и перейдем к переменным Лагранжа, которые в силу автомодельности введём по формулам

$$x = N_0 t \xi(\mu\psi), \quad y = N_0 t \eta(\mu\psi),$$

где $\mu = t_0/t$, t_0 — момент времени входа частицы в ударный слой, ψ — полярный угол точки входа частицы газа в ударный слой. Компоненты вектора скорости связаны с новыми искомыми функциями $\xi(\mu, \psi)$ и $\eta(\mu, \psi)$ формулами

$$v_x = \frac{1}{N_0} \frac{dx}{dt} = \xi - \mu \dot{\xi}, \quad v_y = \frac{1}{N_0} \frac{dy}{dt} = \eta - \mu \dot{\eta}$$

Здесь и ниже точкой обозначено дифференцирование по μ .

В результате система уравнений газовой динамики, описывающей движение газа за фронтом сильной ударной волны, после преобразований примет вид:

$$\mu^2 (\dot{\xi} \ddot{\xi} + \dot{\eta} \ddot{\eta}) = -\tau \frac{\partial p}{\partial \mu}, \quad (2)$$

$$\mu^2 \left(\ddot{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \ddot{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) = -\tau \frac{\partial p}{\partial \psi}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial p}{\partial \mu} - \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{\mu^{\nu+3}}{\eta^{\nu}} \ddot{\xi} C(\psi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial i}{\partial \mu} = \tau \frac{\partial p}{\partial \mu}, \quad (5)$$

$$\tau = \tau(i, p). \quad (6)$$

Здесь τ — величина обратная безразмерной плотности; p и i — безразмерные давление и энтальпия; $\nu = 0$ для плоских и $\nu = 1$ для осесимметричных движений, произвольную функцию $C(\psi)$ следует искать из условий динамической совместности на фронте ударной волны.

Полученная система может быть использована для построения некоторого итерационного процесса, где за исходное приближение удобно взять предельное течение газа ($\tau = 0$). При этом в каждом следующем приближении уравнения (2) и (3) образуют систему для определения закона движения частиц газа. По найденному закону движения из уравнения (4) определится давление газа, а из уравнения (5) — энтальпия. После определения τ по давлению и энтальпии из соотношения (6) можно переходить к отысканию закона движения в следующем приближении из нелинейной системы уравнений (2) и (3).

Граничными условиями для системы уравнений (2)–(6) являются условия динамической совместности (при $\mu = 1$). Форма фронта ударной волны подлежит определению в процессе решения задачи из дополнительного условия. Таким условием может служить условие обтекания, условие на поршне и т.п.

Анализ граничных условий показывает, что рассматриваемая задача содержит два малых параметра: $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ и $q = 1/M^2$. Известно, что с ростом скорости перемещения фронта ударной волны плотность газа за ее фронтом растет. Поэтому с физических соображений естественно считать эти параметры независимыми. При этом, как показывают расчеты параметров газа на фронте ударной волны, второй параметр стремится к нулю значительно быстрее первого. Поэтому, следуя [5], положим

$$q = \varepsilon \Delta,$$

где $\Delta \rightarrow 0$ с ростом скорости перемещения ударной волны. Предположение о малости Δ соответствует режимам движения, при которых $(\gamma - 1)M^2 \gg 1$.

Решение системы уравнений (2)–(6) будем искать в виде

$$f = \sum_{j,k=0}^{\infty} \varepsilon^j \Delta^k f_{jk}.$$

Начальные коэффициенты разложения с индексами $j = 0, k = 0$ и $j = 1, k = 0$ были найдены в [4].

В качестве примера рассмотрена задача о расширении поршня. уравнение которого в плоскости автомодельных переменных имеет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

1. Лаврентьев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975. — 207 с.
2. Аналитические методы в гиперзвуковой аэродинамике, 1983. — 88 с.
3. Бегалов В. И. К задаче нестационарного гиперзвукового обтекания клина в криволинейном пространстве // Прикладные вопросы аэрогазодинамики. — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 44–48.
4. Бегалов В. И. Плоские и осесимметричные нестационарные течения газа с ударными волнами // ПММ, 1974. — Т. 38. — С. 477–483.
5. Бегалов В. И., Потехина Е. А. Об учете конечности чисел Маха при обтекании плоских и осесимметричных тел, движущихся с большой переменной скоростью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1, 1995. — Т. 2, № 3. — С. 49–53.

Санкт-Петербургский механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург. Старый Петергоф

mech@phs.spb.ru

Математическое моделирование и краевые задачи

Часть 2 «Моделирование и оптимизация
динамических систем и систем
с распределёнными параметрами»

Редактор *В. П. Радченко*

Оригинал-макет *М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева*

Подп. в печать 22.05.10.

Формат 60×84^{1/16}. Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Усл.-печ. л. 13,2. Уч.-изд. л. 13,01.

Тираж 100 экз. Рег. № 144/09. Заказ № 539

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главн. корп.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корп. №8.