Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
Инженерная академия России (Поволжское отделение)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием

3–6 июня 2010 г.

ЧАСТЬ 2

СЕКЦИЯ

«Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами»

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

УДК 517.9–517.956
М33

Математическое моделирование и краевые задачи:
М33 Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. — Самара: СамГТУ, 2010. — 307 с.: ил.

ISBN 978–5–7964–1329–6

Представлены материалы докладов по секции «Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами». В публикуемых материалах отражены вопросы оптимизации и управления сложными системами и технологическими процессами, приведены постановки задач для динамических систем с распределёнными параметрами и методы их решения. Рассмотрен ряд прикладных задач и их математические модели в различных областях научных исследований.

УДК 517.9–517.956

ISBN 978–5–7964–1329–6

Содержание

1. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О реконструкции э тремальных возмущений в параболических уравнениях // *ЖВМ*, 1997. Т. 37, № 3. — С. 291–301.
2. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* К регуляризации выпуклой экстремал ной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к зад оптимального управления с фазовыми ограничениями / В сб.: *Некото рые методы позиционного и программного управления*: Сб. науч. тр. Свердловск: ИММ, 1987. — С. 34–54.
3. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Самарская Е. А.* О реконструкци входов в параболических системах // *Матем. моделирование*, 1997. — Т. № 3. — С. 45–61.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00002), Программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и Урало-Сибирского интердисциплинарного проекта.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

msb@imm.uran.ru, maksimov@imm.uran.ru

УДК 533.601.1

В. И. Богатко, Е. А. Потехина

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЗА ФРОНТОМ ИНТЕНСИВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

При построении решения задачи о движении газа за фро том сильной ударной волны в рамках метода тонкого ударно слоя обычно предполагается, что $M = V/a \to \infty$, где $V =$ — скорость перемещения фронта ударной волны, a — скорост звука в невозмущенном газе перед фронтом ударной волны. Раз личные варианты учета конечности числа Маха ударной волн предлагались в [1, 2] для решения стационарных задач гиперзву кового обтекания плоских и осесимметричных тел при услови что параметры $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ и $\eta = 1/M^2$ независимы (γ — эффективный показатель адиабаты). В работе [3] при решени нестационарной задачи обтекания клина и конуса было сдела предположение о том, что параметр η зависит от ε и стремится нулю быстрее, чем ε.

В настоящей работе для построения решения задачи о движе нии газа за фронтом сильной ударной волны по методу тонко ударного слоя предлагается способ нахождения второго и следующих приближений. При этом в отличие от [4] строится приближенное аналитическое решение задачи с учетом конечности числа Маха распространяющейся сильной ударной волны и используется предложенная в [5] зависимость параметров ε и η.

Рассмотрим автомодельное движение газа за фронтом сильной ударной волны, распространяющейся по закону

$$x = N_0 t f_1(s), \qquad y = N_0 t f_2(s). \tag{1}$$

Здесь x и y – декартовы координаты, N_0 — некоторая характерная скорость перемещения фронта ударной волны, t — время. Если параметр s отождествить с длиной дуги фронта волны в плоскости автомодельных переменных, то функции f_1 и f_2 должны удовлетворять условию ${f_1'}^2 + {f_2'}^2 = 1$.

В осесимметричном случае под плоскостью x, y следует подразумевать меридиональную плоскость, при этом за ось симметрии примем ось x.

Предположим, что все гидродинамические характеристики потока зависят от двух автомодельных переменных ξ и η, где $\xi = x/N_0 t$, $\eta = y/N_0 t$ и перейдём к переменным Лагранжа, которые в силу автомодельности введём по формулам

$$x = N_0 t \xi(\mu \psi), \quad y = N_0 t \eta(\mu \psi),$$

где $\mu = t_0/t$, t_0 — момент времени входа частицы в ударный слой, ψ – полярный угол точки входа частицы газа в ударный слой. Компоненты вектора скорости связаны с новыми искомыми функциями $\xi(\mu, \psi)$ и $\eta(\mu, \psi)$ формулами

$$v_x = \frac{1}{N_0}\frac{dx}{dt} = \xi - \mu\dot{\xi}, \quad v_y = \frac{1}{N_0}\frac{dy}{dt} = \eta - \mu\dot{\eta}$$

Здесь и ниже точкой обозначено дифференцирование по μ.

В результате система уравнений газовой динамики, описывающих движения газа за фронтом сильной ударной волны, после ряда преобразований примет вид:

$$\mu^2(\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta}) = -\tau\frac{\partial p}{\partial \mu}, \tag{2}$$

$$\mu^2\Big(\ddot{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\ddot{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\Big)=-\tau\frac{\partial p}{\partial\psi}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\frac{\partial p}{\partial\mu}-\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial\psi}=-\frac{\mu^{\nu+3}}{\eta^{\nu}}\,\ddot{\xi}\;C(\psi), \tag{4}$$

$$\frac{\partial i}{\partial\mu}=\tau\frac{\partial p}{\partial\mu}, \tag{5}$$

$$\tau=\tau(i,p). \tag{6}$$

Здесь τ — величина обратная безразмерной плотности; p и i — безразмерные давление и энтальпия; $\nu = 0$ для плоских и $\nu = 1$ для осесимметричных движений, произвольную функцию $C(\psi)$ следует искать из условий динамической совместности на фронте ударной волны.

Полученная система может быть использована для построения некоторого итерационного процесса, где за исходное приближение удобно взять предельное течение газа ($\tau = 0$). При этом в каждом следующем приближении уравнения (2) и (3) образуют систему для определения закона движения частиц газа. По найденному закону движения из уравнения (4) определится давление газа, а из уравнения (5) — энтальпия. После определения τ по давлению и энтальпиии из соотношения (6) можно переходить к отысканию закона движения в следующем приближении из нелинейной системы уравнений (2) и (3).

Граничными условиями для системы уравнений (2)–(6) являются условия динамической совместности (при $\mu = 1$). Форма фронта ударной волны подлежит определению в процессе решения задачи из дополнительного условия. Таким условием может служить условие обтекания, условие на поршне и т.п.

Анализ граничных условий показывает, что рассматриваемая задача содержит два малых параметра: $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ и $q = 1/M^2$. Известно, что с ростом скорости перемещения фронта ударной волны плотность газа за ее фронтом растет. Поэтому из физических соображений естественно считать эти параметры зависимыми. При этом, как показывают расчеты параметров газа на фронте ударной волны, второй параметр стремится к нулю значительно быстрее первого. Поэтому, следуя [5], положим

$$q = \varepsilon\triangle,$$

где $\triangle \to 0$ с ростом скорости перемещения ударной волны. Предположение о малости $\triangle$ соответствует режимам движения, при которых $(\gamma - 1)M^2 \gg 1$.

Решение системы уравнений (2)–(6) будем искать в виде

$$f = \sum_{j,k=0}^{\infty} \varepsilon^j \triangle^k f_{jk}.$$

Начальные коэффициенты разложения с индексами $j = 0$, $k = 0$ и $j = 1$, $k = 0$ были найдены в [4].

В качестве примера рассмотрена задача о расширении поршня, уравнение которого в плоскости автомодельных переменных имеет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

1. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975. — [illegible] с.
2. *Асимптотические методы в гиперзвуковой аэродинамике*, 1983. — 88 с.
3. *[illegible] В. И.* К задаче нестационарного гиперзвукового обтекания клина и конуса. В сб.: *Прикладные вопросы аэрогазодинамики.* — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 44–48.
4. *[illegible] В. И.* Плоские и осесимметричные нестационарные течения газа с сильными ударными волнами // *ПММ*, 1974. — Т. 38. — С. 477–483.
5. *[illegible] В. И., Потехина Е. А.* Об учете конечности чисел Маха при обтекании плоских и осесимметричных тел, движущихся с большой переменной скоростью // *Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер.* 1, 1995. — Т. 2, № [illegible]. — С. 49–53.

Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет,

г. Санкт-Петербург, Старый Петергоф

[illegible].com

Математическое моделирование и краевые задачи

Часть 2 «Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами»

Редактор *В. П. Радченко*
Оригинал-макет *М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева*

Подп. в печать 22.05.10.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 13,2. Уч.-изд. л. 13,01.
Тираж 100 экз. Рег. № 144/09. Заказ № 539

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главн. корп.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корп. №8.