САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЭРОДИНАМИКА

К 300-летию Петергофа

Сборник статей

Под редакцией профессора Р. Н. Мирошина

Санкт-Петербург
2005

УДК 532+533–534

Аэродинамика (К 300-летию Петергофа) : Сб. статей / Под ред. Р. Н. Мирошина. — СПб.: "ВВМ". 2005. — 280 с.
ISBN 5-9651-0158-9

Настоящий сборник выходит в свет в связи с 300-летием Петергофа, который получил к юбилею статус наукограда. Открывает сборник статья о Борисе Васильевиче Филиппове (1934–2005), о его роли в создании кафедры физической механики и его научных достижениях. Сборник содержит работы по физико-химической аэродинамике, гидро- и газодинамике, динамике полета, истории науки. Включена научно-популярная статья и информация о некоторых международных конференциях, а также сведения о содержании книг, написанных авторами сборника и вышедшими за последние пять лет.

Книга предназначена для специалистов в области гидроаэромеханики.

Издание осуществлено при финансовой поддержке НТП "Поддержка ведущих научных школ"(НШ-2259.2003.1).

Оригинал-макет подготовил А. Н. Рябинин.

ISBN 5-9651-0158-9

Подписано в печать 28.11.2005. Формат бумаги 60 x 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 16,3.
Тираж 100 экз. Заказ 3728.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр.26

В. И. Богатко, Г. А. Колтон, Е. А. Потехина

ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ИНТЕНСИВНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

При решении задач газовой динамики с интенсивными ударными волнами удобно использовать переменные Лагранжа. Это связано с тем, что для построения приближенного аналитического решения задачи чаще всего применяется метод малого параметра.

Естественным малым параметром в таких задачах является отношение плотностей газа на фронте ударной волны. На использовании этого малого параметра основан метод тонкого ударного слоя или метод пограничного слоя Г. Г. Черного. При этом газодинамические величины представляются в виде рядов специального вида по степеням малого параметра, характеризующего отношение плотностей газа перед волной к плотности газа непосредственно за ней.

При реализации такого подхода решение начинается с отыскания так называемого предельного течения, которое является точным решением системы уравнений газовой динамики при значении малого параметра, равным нулю.

Следует отметить, что если решать задачу в переменных Эйлера, то при переходе к предельному течению область возмущенного течения вырождается в пространство меньшего числа измерений, при этом газодинамические параметры становятся неоднозначными функциями координат и времени. Переход к переменным Лагранжа сохраняет размерность области возмущенного движения газа и устраняет эту неоднозначность.

Заметим также, что в тех немногих случаях, когда удается проинтегрировать упрощенную систему уравнений в переменных Эйлера, решение получается в параметрическом виде, причем параметр по своему физическому смыслу является переменной Лагранжа (см., например, [1, 2]).

На примере двумерных (плоских и осесимметричных) нестационарных автомодельных течений газа покажем как переход к переменным Лагранжа позволяет получить удобную для применения

Работа выполнена при поддержке НТП "Поддержка ведущих научных школ"(НШ-2259.2003.1).

метода тонкого ударного слоя систему уравнений, описывающую течение газа за фронтом интенсивной ударной волны.

Рассмотрим случай, когда ударная волна распространяется по закону

$$x = N_0 t f_1(s), \qquad y = N_0 t f_2(s). \tag{1}$$

Здесь x и y — декартовы координаты, t — время, N_0 — некоторая характерная скорость перемещения фронта. Параметр s может быть выбран произвольно. Если же в качестве параметра s выбрать длину дуги вдоль фронта ударной волны, то функции f_1 и f_2 должны удовлетворять условию

$$(f_1')^2 + (f_2')^2 = 1.$$

Система уравнений газовой динамики в плоском и осесимметричном случае может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\tau \frac{\partial p}{\partial x}, \\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\tau \frac{\partial p}{\partial y}, \\
&\frac{\partial \tau}{\partial t} + v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} = \tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \nu \frac{v_y}{y} \right), \\
&\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} = \tau \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\
&\tau = \tau(h, p)
\end{aligned} \tag{2}$$

где v_x, v_y — компоненты вектора скорости частиц газа, p — давление, h — энтальпия, τ — отношение плотностей газа на фронте ударной волны. В осесимметричном случае под плоскостью x, y следует подразумевать меридиональную плоскость, а за ось симметрии принять ось x. При этом $\nu = 0$ в плоском и $\nu = 1$ в осесимметричном случае.

Перейдем к переменным Лагранжа, которые в силу автомодельности течения введем по формулам

$$x = t\,\xi(\mu, \psi), \qquad y = t\,\eta(\mu, \psi),$$

где $\mu = t_0/t$, t_0 — момент времени входа частицы в ударный слой, ψ — полярный угол точки входа частицы газа в ударный слой.

Компоненты вектора скорости связаны с новыми искомыми функциями $\xi(\mu, \psi)$ и $\eta(\mu, \psi)$ формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \xi - \mu\,\dot{\xi}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \eta - \mu\,\dot{\eta}.$$

Для перехода к новым независимым переменным μ и ψ имеем формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t\,\delta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\,\frac{\partial}{\partial \mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{t\,\delta}\left(-\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\,\frac{\partial}{\partial \mu} - \dot{\xi}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t\,\delta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\,\frac{\partial}{\partial \mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\right) + \frac{\eta}{t\,\delta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \mu} - \dot{\xi}\frac{\partial}{\partial \psi}\right),$$

$$\delta = \frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(\mu, \psi)} = \dot{\xi}\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \dot{\eta}\,\frac{\partial \xi}{\partial \psi}. \tag{3}$$

Тогда из системы уравнений (2) получим

$$\mu^2\,\ddot{\xi}\,\delta = -\tau\left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\,\frac{\partial p}{\partial \mu} - \dot{\eta}\,\frac{\partial p}{\partial \psi}\right), \tag{4}$$

$$\mu^2\,\ddot{\eta}\,\delta = \tau\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\,\frac{\partial p}{\partial \mu} - \dot{\xi}\,\frac{\partial p}{\partial \psi}\right), \tag{5}$$

$$\mu\,\delta\,\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = -\tau\Bigg[(\dot{\xi} - \mu\,\ddot{\xi})\,\frac{\partial \eta}{\partial \psi} - (\dot{\eta} - \mu\,\ddot{\eta})\,\frac{\partial \xi}{\partial \psi} +$$

$$+\mu\left(\dot{\eta}\,\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \psi} - \dot{\xi}\,\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \psi}\right) + \nu\,\delta\left(1 - \mu\,\frac{\dot{\eta}}{\eta}\right)\Bigg], \tag{6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mu} = \tau\frac{\partial p}{\partial \mu}. \tag{7}$$

Система уравнений (4) - (7) не достаточно удобна для применения метода тонкого ударного слоя, так как в уравнениях (4) - (6) правые и левые части уравнений одного порядка и одновременно обращаются в ноль при $\tau \to 0$.

Действительно, уравнение (6), учитывая выражение для якобиана преобразования (3), можно представить в виде

$$\delta\left[(\nu+1)\,\tau+\mu\,\frac{\partial\tau}{\partial\mu}\right]=\tau\,\mu\left(\frac{\partial\delta}{\partial\mu}+\nu\,\frac{\delta}{\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right),$$

Интегрируя это уравнение по μ , получим

$$\eta^{\nu}\,\delta=\tau\,\mu^{\nu+1}\,C(\psi). \tag{8}$$

Произвольную функцию $C(\psi)$ следует искать из условий динамической совместности на фронте ударной волны.

Из уравнения неразрывности (8) следует, что $\delta\to 0$ при $\tau\to 0$, т. е. в предельном течении все частицы находятся на фронте ударной волны, так как вся область возмущенного движения газа вырождается в кривую на плоскости $(\xi,\,\eta)$.

Преобразуем систему уравнений (4) - (6) к более удобному виду для построения решения с помощью метода тонкого ударного слоя. Умножая уравнения (4) и (5) на производную от ξ и η соответственно сначала по μ, а потом по ψ и складывая, получим

$$\begin{aligned}&\mu^2(\dot\xi\ddot\xi+\dot\eta\ddot\eta)=-\tau\frac{\partial p}{\partial\mu},\\ &\mu^2\left(\ddot\xi\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\ddot\eta\frac{\partial p}{\partial\psi}\right)=-\tau\frac{\partial p}{\partial\psi}.\end{aligned} \tag{9}$$

Эти два уравнения можно рассматривать как систему уравнений для определения закона движения частиц газа в каждом следующем приближении, если правые части вычислены на основе предыдущего приближения.

Для определения давления можно воспользоваться любым из уравнений системы (9) с учетом (8) или их комбинацией. Если воспользоваться первым из них, то придем к уравнению

$$\frac{\partial\eta}{\partial\psi}\frac{\partial p}{\partial\mu}-\dot\eta\frac{\partial p}{\partial\psi}=-\frac{\mu^{\nu+3}}{\eta^{\nu}}\ddot\xi C(\psi). \tag{10}$$

Легко показать, что в предельном случае (при $\tau\to 0$) уравнения (4) и (5) равносильны.

Добавив сюда уравнение энергии

$$\frac{\partial h}{\partial\mu}=\tau\frac{\partial p}{\partial\mu} \tag{11}$$

и уравнение состояния

$$\tau = \tau(h, p), \tag{12}$$

получим замкнутую систему уравнений для определения основных газодинамических параметров течения.

Построенная таким образом система уравнений (9) - (12) пригодна не только для применения метода тонкого ударного слоя. Она также может быть использована для построения некоторого итерационного процесса, где за исходное приближение удобно взять предельное течение, т. е. такое движение газа, которое описывается решением уравнений газовой динамики при ($\tau = 0$).

Действительно, при $\tau = 0$ полученная замкнутая система уравнений (9) - (12) расщепляется, а, следовательно, в каждом следующем приближении уравнения (9) образуют систему для определения закона движения частиц газа. По найденному закону движения из уравнения (10) определится давление газа, а из уравнения (11) — энтальпия. Далее по давлению и энтальпии из соотношения (12) находится величина τ, после чего можно переходить к отысканию закона движения частиц в следующем приближении из нелинейной системы уравнений (9), где правые части должны быть вычислены на основе уже построенного приближения.

Если же искать решение в виде рядов специального вида, то в каждом следующем приближении будем иметь линейную систему уравнений [3], а все нелинейные эффекты будут учтены уже в исходном приближении (предельное течение).

Заметим также, что переход к переменным Лагранжа в некоторых задачах позволяет выделить новый малый параметр. Так, например, в задачах обтекания таким малым параметром является время пребывания частицы газа в ударном слое [4].

Использование этого малого параметра позволяет строить весьма простые приближенные аналитические решения задач обтекания не только при гиперзвуковых, но также и при сверхзвуковых скоростях движения обтекаемого тела [5].

Отметим также, что разложение по этому параметру, сохраняя достаточную для практики точность, обеспечивает значительное сокращение машинного времени, необходимого для расчетов одного варианта. Кроме того, использование такого разложения совместно с методом тонкого ударного слоя позволяет сравнительно просто оценить члены второго приближения в методе тонкого ударного слоя.

Указатель литературы

[1] *Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А.* Двумерная задача о нерегулярном взаимодействии сильной ударной волны с тонким телом // Аэродинамика / Под ред. Р. Н. Мирошина. — СПб., 1996. С. 179–192.

[2] *Богатко В. И., Колтон Г. А., Потехина Е. А.* Нестационарная задача гиперзвукового обтекания тонкого крыла // Аэродинамика / Под ред. Р. Н. Мирошина. — СПб., 2000. С. 167–187.

[3] *Богатко В. И.* Плоские и осесимметричнын нестационарные течения газа с сильными ударными волнами // Журн. прикл. мат. и мех. 1974. Т. 38. №3. С. 477–483.

[4] *Ильенко В. И., Потехина Е. А.* К задаче о нестационарном обтекании профиля // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1980. Вып. 4. №19. С. 45—49.

[5] *Потехина Е. А.* О сверхзвуковом нестационарном обтекании плоских и осесимметричных заостренных тел // Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. мат., мех., астрон. 1984, Вып. 1. №1, с. 80-84.

СОДЕРЖАНИЕ