САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЭРОДИНАМИКА

К столетию со дня рождения
профессора К. И. Страховича

Сборник статей

Под редакцией профессора Р. Н. Мирошина

Санкт-Петербург
2004

УДК 532–533–534
Аэродинамика (К столетию со дня рождения профессора К. И. Страховича) : Сб. статей / Под ред. Р. Н. Мирошина. — СПб.: "ВВМ". 2004. – 287 с.
ISBN 5-9651-0073-6

Настоящий сборник выходит в свет в связи со столетием со дня рождения профессора Константина Ивановича Страховича (1904–1968), гениального русского ученого, оставившего значимый след в механике жидкости и ее технических приложениях. Сборник содержит очерк о жизненном и творческом пути К. И. Страховича, а также работы по физико-химической аэродинамике, аэродинамике разреженных газов, гидро- и газодинамике, любительском конструировании одноместного самолета и экраноплана и об истории возникновения гидродинамики в России. Книга предназначена для специалистов в области гидроаэромеханики.

Издание осуществлено при финансовой поддержке НТП "Поддержка ведущих научных школ"(НШ-2259.2003.1).

Оригинал-макет подготовил А. Н. Рябинин.

На обложке использовано фото А. Р. Мирошина.

ISBN 5-9651-0073-6

В.И.Богатко, Г.А.Колтон, Е.А.Потехина

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЙЛЕРА-АМПЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ИНТЕНСИВНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

При решении задач газовой динамики возникает необходимость интегрирования системы нелинейных уравнений в частных производных. Вообще говоря, построение решения такой системы представляет собой весьма сложную задачу. Однако, в ряде задач можно выделить физически обоснованный малый параметр, что позволяет упростить решение задачи, разлагая искомые функции в ряд по этому параметру.

Достаточно часто на первом шаге применение метода малого параметра приводит к более простой, но все еще нелинейной системе уравнений. Если полученная система уравнений расщепляется таким образом, что два уравнения могут быть решены независимо от остальных и при этом одно из них может быть записано в дивергентном виде, то введение новой функции (аналога функции тока) позволяет свести решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных.

Для определенных условий (когда полученное уравнение имеет специальный вид) решение удается получить, используя преобразование, при котором за одну из независимых переменных выбирают частную производную от вновь введенной функции. Преобразование такого типа носит название *преобразования Эйлера Ампера* [1, с. 141].

Покажем, при каких условиях нелинейное уравнение второго порядка в частных производных с помощью преобразования Эйлера–Ампера может быть сведено к квазилинейному или линейному уравнению.

Пусть для функции $U(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет место уравнение

$$F\left(U_{ij}, U_{it}, U_{tt}, U_i, U_t, U, x_i, t\right) = 0, \qquad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (Научная школа, НШ - 2259.2003.1).

где

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad U_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j},$$

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U_{tt} = \frac{\partial U_t}{\partial t}, \quad U_{it} = \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Найдем вид функции F, при котором уравнение (1) сводится к квазилинейному уравнению с помощью преобразования

$$U(x_1, \ldots, x_n, t) = V(x_1, \ldots, x_n, q) + qt,$$

где $q = U_t$, а $V(x_1, \ldots, x_n, q)$ — новая искомая функция.

Считая, что $U_{tt} \neq 0$, будем иметь

$$V_q = -t, \ U_i = V_i, \ U_{ij} = V_{ij} - \frac{V_{iq}V_{jq}}{V_{qq}}, \ U_{it} = -\frac{V_{iq}}{V_{qq}}, \ U_{tt} = -\frac{1}{V_{qq}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), после несложных преобразований получим [2], что из всех уравнений в частных производных второго порядка только уравнение вида

$$\sum_{i,j} A_{ij}(U_{ij}U_{tt} - U_{it}U_{jt}) + \sum_i B_i U_{it} + D \cdot U_{tt} - C = 0 \quad (3)$$

сводится к квазилинейному уравнению для функции V

$$\sum_{i,j} A_{ij}V_{ij} + \sum_i B_i V_{iq} + C V_{qq} + D = 0, \quad (4)$$

где A_{ij}, B_i, C и D — функции от q, x_i, V, V_g, V_i или, что то же самое, от t, x_i, U, U_t, U_i.

Если в уравнении (3) коэффициенты A_{ij}, B_i, C и D зависят только от x_i и U_t, то соответствующее ему уравнение (4) будет линейным.

Пусть теперь $V(x_1, \ldots, x_n, q)$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $V_{qq} \neq 0$. Тогда функция U, определяемая соотношениями

$$U = V(x_1, \ldots, x_n, q) + qt, \quad t = -V_q, \quad (5)$$

является решением уравнения (3).

Уравнение (3) кроме решений вида (5) может иметь особое решение

$$U(x_i,\, t) \;=\; tf(x_i) \;+\; \psi(x_i),$$

для которого $U_{tt} \;\equiv\; 0$.

В задачах газовой динамики с сильными ударными волнами естественным малым параметром является отношение плотностей газа перед фронтом ударной волны и непосредственно за ней. Из условий динамической совместности на прямом скачке уплотнения следует, что

$$\tau_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma+1)\,M^2}\,, \tag{6}$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей газа (или эффективный показатель адиабаты), M — число Маха набегающего потока, $\tau_s \;=\; \varrho_\infty/\varrho_s$, индекс s указывает, что соответствующая величина вычисляется на фронте ударной волны.

Расчеты показывают, что при возрастании интенсивности ударной волны второе слагаемое в (6) стремится к нулю значительно быстрее первого. Поэтому для сильных ударных волн вторым слагаемым часто пренебрегают и при построении решения газодинамической задачи параметры течения в возмущенной области вблизи фронта интенсивной ударной волны представляют в виде рядов по степеням параметра $\varepsilon \;=\; (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Такой метод построения приближенных аналитических решений задач газовой динамики с сильными ударными волнами впервые был предложен в 50-х годах прошлого столетия Г. Г. Черным для решения двумерных задач газовой динамики и получил название *метод тонкого ударного слоя* или *метод "пограничного слоя"* Г. Г. Черного.

Применение указанного метода для широкого класса задач обычно приводит к такой ситуации, когда система уравнений для поправок первого приближения расщепляетя и появляется возможность свести решение всей системы уравнений к решению одного нелинейного уравнения второго порядка в частных производных. Так, при решении нестационарной задачи в плоском и осесимметричном случаях, когда форма фронта сильной ударной волны мало отличается от прямой ($\nu \;=\; 0$) и плоскости ($\nu \;=\; 1$) [2], это уравнение имеет вид

$$\delta^{\,\nu+1} F_{\zeta t} - \delta\, F_\delta\, F_{\zeta\zeta} + \delta\, F_\zeta\, F_{\zeta\delta} - \nu\, F_\zeta^2 \;=\; 0,$$

где $\zeta = (x - t)/\varepsilon$, $\delta = y/\sqrt{\varepsilon}$, а x, y — декартовы координаты, причем ось x направлена по вектору скорости перемещения падающей ударной волны.

Аналогично, в случае, когда форма фронта сильной ударной волны мало отличается от дуги окружности ($\nu = 0$) и сферы ($\nu = 1$) [2], при описании нестационарного течения приходим к уравнению

$$t\,\varphi^{\nu+1} F_{tR} + \varphi\left(F_R - \varphi^{\nu+1}\right) F_{R\varphi} - \varphi\, F_\varphi\, F_{RR} - \nu\, F_R\left(F_R - \varphi^{\nu+1}\right) = 0,$$

где $R = (r - t)/\varepsilon$, $\theta = \varphi/\sqrt{\varepsilon}$, а r, θ — полярные координаты. Оба эти уравнения с помощью преобразования типа Эйлера–Ампера

$$F_\beta = q\,\alpha^\nu \quad F = \Phi(q,\, \alpha,\, t) + \beta\,\alpha^\nu\, q$$

приводятся к линейным уравнениям, что позволяет получить решение исходной системы уравнений в параметрической форме. Здесь $\alpha = \delta$, $\beta = \zeta$ для первого случая и $\alpha = \varphi$, $\beta = R$ для второго; $\nu = 0$ и $\nu = 1$ для плоского и осесимметричного случая соответственно.

Проиллюстрируем такой подход на примере задачи о нерегулярном взаимодействии сильной плоской ударной волны с поверхностью тонкого конуса.

Пусть сильная плоская ударная волна с характерным отношением плотностей на фронте $\varepsilon << 1$ набегает со скоростью N_0 на тонкий конус с углом полураствора β. Характер взаимодействия ударной волны с конусом и картина течения в возмущенной области существенно зависят от соотношения малых параметров ε и β. Рассмотрим случай, когда величины ε и β одного порядка малости, т. е. $\beta = \varepsilon\,\beta_0$, $\beta_0 = O(1)$. При таком соотношении параметров отражение будет нерегулярным, а фронт отраженной волны будет присоединен к вершине конуса.

Рассматриваемая задача является автомодельной, так как не содержит линейного размера. Систему уравнений газовой динамики для этого случая можно записать в виде

$$rl(v_\xi - \xi)\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta)\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = -\tau\frac{\partial p}{\partial \xi},$$
$$(v_\xi - \xi)\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta)\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} = -\tau\frac{\partial p}{\partial \eta},$$

$$
\begin{aligned}
&(v_\xi - \xi)\frac{\partial \tau}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta)\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \tau\Big(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{v_\eta + v_\xi \operatorname{tg}\beta}{\eta + \xi \operatorname{tg}\beta}\Big),\\
&(v_\xi - \xi)\frac{\partial i}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta)\frac{\partial i}{\partial \eta} = \tau\Big[(v_\xi - \xi)\frac{\partial p}{\partial \xi} + (v_\eta - \eta)\frac{\partial p}{\partial \eta}\Big],\\
&\tau = \tau(i,p) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{i}{p}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь $v_\xi, v_\eta, p, \varrho = 1/\tau$ и i — компоненты вектора скорости частиц газа, давление, плотность и энтальпия, отнесенные к N_0, $\varrho_\infty N_0^2$, ϱ_∞ и N_0^2 соответственно; ξ и η — безразмерные автомодельные независимые переменные; ось ξ направлена вдоль стенки, а ось η — по нормали к ней.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является то, что в зоне возмущенного течения между отраженной волной, поверхностью конуса и волной Маха можно выделить три области, в которых асимптотические разложения по параметру ε зависимых и независимых переменных имеют существенно различный характер. При этом для поправок первого приближения в областях, примыкающих к фронту отраженной ударной волны, получаются системы линейных уравнений, а в области, непосредственно примыкающей к волне Маха — нелинейная система уравнений. Рассмотрим подробнее область возмущенного течения, непосредственно примыкающую к маховской ножке, которая в данном случае мало отличается от плоскости. Для этой области, исходя из условий динамической совместности, имеем

$$
\begin{aligned}
&rl\xi = 1 + \varepsilon\,\zeta, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\,\delta, \quad v_\xi = 1 + \varepsilon\, u + ..., \quad v_\eta = \varepsilon\, v + ...,\\
&p = 1 + \varepsilon\, p_2 + ..., \quad \tau = 1 + \varepsilon \tau_2 + ..., \quad i = \frac{1}{2} + \varepsilon\, i_2 + ...
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Тогда с учетом разложения (8) из первых трех уравнений системы (7), получим

$$
\begin{aligned}
rl(u - \zeta)\,\frac{\partial u}{\partial \zeta} + (v - \delta)\,\frac{\partial u}{\partial \delta} &= -\,\frac{\partial p_2}{\partial \zeta},\\
(u - \zeta)\,\frac{\partial v}{\partial \zeta} + (v - \delta)\,\frac{\partial v}{\partial \delta} &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \delta} + \frac{v}{\delta} &= 0.
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения этой системы следует существование аналога функции тока $F(\zeta,\,\delta)$:

$$u\,\delta\,=\,-\,F_\delta,\quad v\,\delta\,=\,F_\zeta.$$

Тогда второе уравнение системы примет следующий вид

$$(F_\delta\,+\,\zeta\,\delta)\,\delta\,F_{\zeta\zeta}\,+\,(\delta^2-F_\zeta)\,(\delta\,F_{\zeta\delta}-F_\zeta)\,=\,0.$$

Для интегрирования этого нелинейного уравнения второго порядка применим преобразование типа Эйлера–Ампера

$$F(\zeta,\delta)\,=\,\Phi(q,\delta)\,+\,\zeta\,\delta\,q,\quad q=\delta^{-1}F_\zeta.$$

Тогда при $F_{\zeta\zeta}\neq 0$ придем к линейному уравнению Эйлера–Дарбу

$$(\delta-q)\,\Phi_{\delta\,q}=2\,\Phi_q-\Phi_\delta,$$

решение которого можно записать в виде

$$\Phi=(\delta-q)^4\;\frac{\partial^3}{\partial q^2\partial\delta}\;\frac{H(q)+L(\delta)}{\delta-q}\,.$$

Таким образом, для искомых функций u и v получаем решение в параметрическом виде

$$\begin{aligned}
v\,&=\,q,\\
u\,&=\,-\,\frac{1}{\delta^2}\Big\{-q(\delta-q)^2H''(q)+2(\delta-q)^2H'(q)+2(2\delta-q)H(q)+\\
&\qquad+\,(2\delta-q)L(\delta)-\delta\,(\delta-q)L'(\delta)\Big\},\\
\zeta\,&=\,-\,\frac{1}{\delta}\,\left\{(\delta-q)^2H''(q)+2(\delta-q)H'(q)+2H(q)+L(\delta)\right\},
\end{aligned}$$

где q – некоторый параметр, сохраняющий постоянное значение вдоль траектории частиц газа, уравнение которой в переменных $(\zeta,\,\delta)$ имеет вид $d\zeta/(u-\zeta)=d\delta/(v-\delta)$; $H(q)$, $L(\delta)$ – произвольные функции своих аргументов, определяемые из условий на сильном разрыве и из условия смыкания построенного решения с решением, справедливым для областей, удаленных от фронта ударной волны.

Полное решение указанной задачи приведено в работе [3]. В аналогичной постановке задача о нерегулярном отражении сильной плоской ударной волны от поверхности тонкого клина рассмотрена в [4].

Такой подход к решению системы уравнений газовой динамики позволил найти в параметрическом виде решение ряда задач дифракции и отражения сильной ударной волны, а также задачи обтекания гиперзвуковым потоком газа тонкого крыла переменной формы.

В задаче о нелинейной дифракции сильной ударной волны на стенке с малым углом излома [5,6] предлагаются некоторые простые аппроксимации для произвольных функций, позволяющие приближенно найти их в построенном решении и тем самым определить поле течения вблизи фронта ударной волны. Сравнение с опытными данными показало, что теория находится в хорошем соответствии с результатами эксперимента. Полученное решение может быть использовано также в задаче о распространении сильной ударной волны вдоль горизонтальной проницаемой стенки. Если предположить, что нормальная к проницаемой поверхности составляющая вектора скорости частиц газа пропорциональна перепаду давления на стенке, то рассматриваемая задача будет эквивалентна задаче о дифракции сильной ударной волны на выпуклом угле $\pi + \omega$, где ω имеет тот же порядок малости, что и нормальная к перфорированной границе компонента вектора скорости. Замкнутое решение задачи о дифракции сильной ударной волны на выпуклой криволинейной стенке и о движении ударной волны в симметричном канале с изломом стенки получено в [7].

Решения рассмотренного типа могут быть использованы для построения течения газа вблизи искривленной поверхности сильного разрыва в нелинейных задачах о маховском отражении сильной ударной волны от поверхности тонкого профиля [8] и тела вращения [9].

Результаты, полученные в теории интегрирования нелинейных уравнений второго порядка [2] позволили решить ряд задач теории тонкого крыла.

В рамках метода тонкого ударного слоя с помощью преобразования Эйлера–Ампера было найдено [10-12] приближенное решение задачи обтекания равномерным однородным гиперзвуковым потоком идеального газа наветренной стороны тонкого крыла, форма поверхности которого зависит от времени. Головная ударная волна предполагалась присоединенной к передней кромке крыла по крайней мере в одной точке. Найдены поправки первого приближения к основному "ньютоновскому"течению.

В аналогичной постановке была рассмотрена задача обтекания нестационарным гиперзвуковым потоком идеального газа наветренной стороны тонкого крыла переменной формы [13]. Она решена для случая, когда скорость набегающего потока и угол атаки мало отличаются от постоянных.

Решение нестационарной пространственной задачи обтекания наветренной стороны тонкого крыла переменной формы, движущегося с большой переменной скоростью, было построено для случая, когда движение тела близко к стационарному [14], и для случая, когда проекцию вектора скорости движения тела на вертикальную ось можно считать медленно меняющейся [15].

Указатель литературы

[1] *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. I М.–Л.;ОНТИ — НКТП СССР, 1936. 591 с.

[2] *Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А.* Некоторые приближенные решения уравнений нестационарной гиперзвуковой газовой динамики// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1976. Вып. 3. (№13). С. 51–56.

[3] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* О нерегулярном взаимодействии сильной ударной волны с тонким конусом// Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1976. №6. С. 117–123.

[4] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* О нерегулярном отражении сильной ударной волны от тонкого клина// Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1974. №5. С. 55–61.

[5] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* Об одном приближенном решении нелинейной задчи дифракции сильной ударной волны около угла// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1978. Вып. 1. (№1). С. 89–95.

[6] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* К задаче о нелинейной дифракции сильных ударных волн// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1988. Вып. 3. (№15). С. 45–49.

[7] *Колтон Г.А., Исхаков В.А.* Плоская задача взаимодействия сильной ударной волны с жесткой стенкой// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1984. Вып. 4. (№19). С. 37–44.

[8] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* Нерегулярное взаимодействие сильной ударной волны с тонким профилем// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. Вып. 3. (№15). С. 45–49.

[9] *Богатко В.И., Колтон Г.А.* Маховское отражение сильной ударной волны от тонкого тела вращения// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. Вып. 4. (№22). С. 40–44.

[10] *Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А.* Нестационарное обтекание тонкого крыла конечного размаха гиперзвуковым потоком газа// Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. №5. С. 1040–1041.

[11] *Богатко В.И., Гриб А.А. Колтон Г.А.* Обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа// Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1979. №4. С. 94–101.

[12] *Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А.* Второе приближение в теории тонкого крыла конечного размаха, обтекаемого гиперзвуковым потоком газа// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1979. Вып. 1. (№1). С. 87–95.

[13] *Матвеева Е.Л., Потехина Е.А.* О нестационарном гиперзвуковом обтекании тонкого крыла переменной формы// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 1. (№1). С. 106–108.

[14] *Богатко В.И., Потехина Е.А.* О неустановившемся гиперзвуковом течении газа при обтекании тонкого крыла переменной формы// Вестн. С.-Петербург. ун-та. 1995. Сер. 1. Вып. 3. (№15). С. 73–78.

[15] *Богатко В.И., Колтон Г.А., Потехина Е.А.* Определение параметров течения газа в ударном слое при обтекании тонкого крыла переменной формы, движущегося с большой переменной скоростью// Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2002. Сер. 1. Вып. 2. (№9). С. 60 – 69.

Подписано в печать 15.11.2004 г. Формат бумаги 60Х84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 17,9 усл. п. л. Тираж 100 экз. Заказ 3408.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.