-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЭРОДИНАМИКА

К 85-летию со дня рождения
член-корреспондента АН СССР
профессора С. В. Валландера
и к 90-летию со дня рождения
профессора А. А. Гриба

Сборник статей

Под редакцией профессора Р. Н. Мирошина

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2002

УДК 532+533+534

Аэродинамика (К 85-летию со дня рождения член-корреспондента АН СССР профессора С. В. Валландера и к 90-летию со дня рождения профессора А. А. Гриба): Сб. статей / под ред. Р. Н. Мирошина. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. — 265 с.
ISBN 5-7997-0460-6

Настоящий сборник выходит в свет в связи с 85-летием со дня рождения член-корреспондента АН СССР профессора С. В. Валландера и в связи с 90-летием со дня рождения профессора А. А. Гриба, внесших огромный вклад в развитие аэродинамики в Ленинградском университете. В состав сборника вошли работы по истории науки, по физико-химической аэродинамике, по аэродинамике разреженных газов и динамике сплошных сред, а также научно-популярные работы.

Книга предназначена для специалистов в области гидроаэродинамики.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Научная школа, проект №00-15-96106).

ISBN 5-7997-0460-6

В.И.Богатко, Е.А.Потехина

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ В РАБОТАХ А.А.ГРИБА И ЕГО УЧЕНИКОВ

Хорошо известно, что уравнение Эйлера-Дарбу играет существенную роль при решении различных задач газовой динамики.

Это объясняется тем, что во многих практически интересных задачах, где встречается необходимость интегрирования линейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа, часто удается, путем соответствующей аппроксимации коэффициентов этого уравнения, свести его к уравнению Эйлера-Дарбу с целыми коэффициентами и таким образом получить общий интеграл в конечном виде (см., например, [1,2]).

Под уравнением Эйлера-Дарбу обычно подразумевают [3] уравнение

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + \frac{A}{x+y}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{B}{x+y}\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{C}{(x+y)^2}Z, \tag{1}$$

где A, B, C — постоянные.

Если α один из корней уравнения

$$\alpha^2 + (A+B-1)\,\alpha - C = 0 \tag{2}$$

и A, B представимы в виде

$$A = m - \alpha, \qquad B = n - \alpha, \tag{3}$$

где m и n целые положительные числа , то общее решение уравнения (1) можно представить в следующей форме [3]:

$$Z(x,\,y) = (x+y)^{\alpha}\,\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\,\frac{F_1(x) + F_2(y)}{x+y}, \tag{4}$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — произвольные функции.

При $m = n = 0$ и $\alpha = 0$ для уравнения (1) имеем решение Даламбера

$$Z(x,\,y) = Z_1(x) + Z_2(y).$$

Используя (4) при $m = n = \pm 1$ и $\alpha = 0$, А. А. Гриб выполнил интегрирование уравнений неустановившегося движения жидкости при гидравлическом ударе в длинном трубопроводе, диаметр и толщина стенок которого меняются по длине, и для большого класса труб получил [4] аналитическое решение уравнений гидравлического удара в замкнутом виде, удобном для решения краевых задач.

В работах А. И. Буравцева [5, 6] рассмотрена задача распространения упруго-пластической волны нагрузки в стержне конечной длины. С учетом приближенного представления зависимости напряжения от относительной деформации решение задачи было сведено к решению несколько модифицированного уравнения Эйлера-Дарбу. С помощью решения вида (4) в случае $m = n = 1$ и $\alpha = 0$ была решена краевая задача для стержня конечной длины, один конец которого закреплен [5], а ко второму концу приложена ударная нагрузка, сообщающая ему постоянную скорость. В аналогичной постановке в работе [6] было построено решение задачи о сложении и отражении двух встречных волн нагрузки в стержне конечной длины и рассмотрены две краевые задачи для уравнения продольных колебаний стержня. В первом случае решение краевой задачи было получено с помощью модифицированного уравнения Эйлера-Дарбу при $m = n = 1$ и $\alpha = 0$, а во втором — при $m = n = 2$ и $\alpha = 0$.

Существенное значение имеют результаты А. А. Гриба по модификации уравнения Эйлера-Дарбу. В 1953 году А. А. Гриб [7] построил уравнение

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{A\,f_2'(\eta)}{f_1(\xi)+f_2(\eta)}\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\frac{B\,f_1'(\xi)}{f_1(\xi)+f_2(\eta)}\frac{\partial Z}{\partial\eta}=\frac{C\,f_1'(\xi)\,f_2'(\eta)}{[f_1(\xi)+f_2(\eta)]^2}Z. \quad (5)$$

Это уравнение порождается уравнением Эйлера-Дарбу (1) с помощью замены переменных

$$x = f_1(\xi), \qquad y = f_2(\eta), \quad (6)$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные и достаточно гладкие функции.

Заменой

$$Z = \left[f_1(\xi) + f_2(\eta)\right]^{\alpha} Y, \quad (7)$$

где α удовлетворяет уравнению (3), уравнение (5) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{m\,f_2'(\eta)}{f_1(\xi)+f_2(\eta)}\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \frac{n\,f_1'(\xi)}{f_1(\xi)+f_2(\eta)}\frac{\partial Y}{\partial\eta} = 0, \tag{8}$$

имеющему общий интеграл

$$Y(\xi,\eta,n,m) = \left(\frac{1}{f_1'(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{f_2'(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{n-1}\frac{F_1(\xi)+F_2(\eta)}{f_1(\xi)+f_2(\eta)}. \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f_1'(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{n-1} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{f_1'}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{f_1'}\frac{\partial}{\partial\xi}\cdots\frac{1}{f_1'}\frac{\partial}{\partial\xi};\\ \left(\frac{1}{f_2'(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{m-1} &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} = \frac{1}{f_2'}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{f_2'}\frac{\partial}{\partial\eta}\cdots\frac{1}{f_2'}\frac{\partial}{\partial\eta}\end{aligned}. \tag{10}$$

Тогда можно получить решение уравнения (5). Именно,

$$Z = \left[f_1(\xi) + f_2(\eta)\right]^{\alpha} Y(\xi,\,\eta,\,n,\,m), \tag{11}$$

где $Y(\xi,\,\eta,\,n,\,m)$ определяется соотношением (9).

В случае целых и отрицательных значений m и n общий интерал уравнения (5) запишется в виде:

$$Z = \left[f_1(\xi) + f_2(\eta)\right]^{\alpha+1-m-n} Y(\xi,\,\eta,\,1-n,\,1-m)\,. \tag{12}$$

Для нецелых m и n общий интеграл уравнений (1) и (5) также может быть представлен в аналитической форме, однако вследствие его сложного вида он не удобен для решения краевых задач.

Отметим, что пользуясь решением уравнения Эйлера-Дарбу, можно конструировать решения довольно сложных линейных уравнений за счет применения подходящих аппроксимаций соответствующих коэффициентов уравнения.

Полученные А. А. Грибом результаты по интегрированию обобщенного уравнения Эйлера-Дарбу нашли широкое применение при решении многих важных задач механики сплошной среды. Так А. А. Гриб совместно с И. П. Гинзбургом получил [8] аналитическое решение задачи о гидравлическом ударе в длинном трубопроводе при линейном или линеаризованном законе внешнего трения. При этом предполагалось, что диаметр и толщина стенок трубопровода меняются по длине. Эта работа нашла себе место в широко распространенных учебниках и учебных пособиях (см., например [9]).

Применяя теорию интегрирования обобщенного уравнения Эйлера-Дарбу, А. А. Гриб совместно с А. Г. Рябининым построил [10] приближенное решение уравнений плоского установившегося сверхзвукового движения газа для чисел Маха, заключенных в интервале $1,15 \leq M \leq 2,35$, в простом виде, удобном для решения краевых задач. В ряде работ (см. например, [1,2]) путем соответствующей аппроксимации коэффициентов уравнения газовой динамики, описывающие плоские установившиеся движения газа, сводятся к уравнению Эйлера-Дарбу. При этом в качестве искомых функций от характеристичских координат принимают потенциал скорости и функцию тока. В таких случаях или затруднен переход к физической плоскости, или усложнено решение краевых задач. Решение, предложенное в [10] выгодно отличается от всех предыдущих решений сверхзвуковой задачи, так как здесь отсутствует промежуточная плоскость — (потенциал скорости, функция тока). Это значительно облегчает решение основных краевых задач.

Были рассмотрены плоские задачи дифракции и отражения сильной ударной волны [11]. Показано, что если характерное отношение плотностей на фронте ударной волны мало по сравнению с единицей, то течение газа вблизи фронта искривленной ударной волны приближенно описывается одним нелинейным уравнением второго порядка. С помощью полученных ранее результатов по интегрированию уравнения Эйлера-Дарбу построено решение этого уравнения с двумя произвольными функциями. Произвольные функции определяются из условий на сильном разрыве и из условия смыкания построенного решения с решением, справедливым для областей, удаленных от фронта ударной волны.

Кроме того, в [11] было рассмотрено одномерное неустановившееся движение газа за фронтом ударной волны, движущейся с переменной скоростью. Как известно, изучение такого течения может быть сведено к исследованию уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \psi\, \partial p}\right)^2 = -\frac{1}{\gamma}\, p^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\, S(\psi), \tag{13}$$

где $dz = u\, d\psi + t\, dp$, $d\psi = \varrho\, dx - \varrho u\, dt$, u, p, t и ϱ — скорость, давление, время и плотность соответственно, x — координата, γ — отношение теплоемкостей, S — энтропия газа. При этом

$$u = \frac{\partial z}{\partial \psi}, \qquad t = \frac{\partial z}{\partial p}.$$

Если уравнение состояния среды может быть аппроксимировано зависимостью $1/\varrho = D^2(\psi)\, p + E(\psi)$ ($\gamma = -1$ — газ Чаплыгина), то после несложных преобразований уравнение (13) обратится в классическое уравнение Эйлера-Дарбу (1) при $A = B$ и $C = 0$.

Несомненный интерес представляет случай, когда из нелинейного уравнения второго порядка в частных производных общего вида может быть получено классическое или обобщенное уравнение Эйлера-Дарбу.

Пусть для функции $U(x, y)$ имеет место уравнение

$$F\left(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}\right) = 0. \tag{14}$$

Найдем вид функции F, при котором уравнение (14) сводится к уравнению Эйлера-Дарбу. Для этого воспользуемся преобразованием

$$U(x, y) = V(g, y) + g\, x, \tag{15}$$

где $g = U_x$, а $V(g, y)$ — новая искомая функция.

В результате получим [11], что из всех уравнений в частных производных второго порядка только уравнение вида

$$C_1 \left(U_{xx}\, U_{yy} - U_{xy}^2\right) + D_1\, U_{xx} + B_1\, U_{xy} = A_1 \tag{16}$$

сводится к квазилинейному уравнению

$$A_1\, V_{gg} + B_1\, V_{gy} + C_1\, V_{yy} + D_1 = 0, \tag{17}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — функции от g, y, V, V_g, V_y или, что то же самое, от x, y, U, U_x, U_y.

Заметим, что уравнение (16) является частным случаем уравнения Монжа-Ампера.

Положим в уравнении (16)
$A_1 = C_1 = 0$, $B_1 = b_1 U_x + b_2 y + b_3$, $D_1 = a_1 x + a_2 U_y + a_3$, где a_i и b_i — постоянные.

Тогда уравнение (16) с помощью преобразования (15) приводится к линейному уравнению

$$V_{gy} = \frac{a_1 V_g - a_2 V_y - a_3}{b_1 g + b_2 y + b_3}. \tag{18}$$

Легко видно, что уравнение (18) линейным преобразованием может быть сведено к классическому уравнению Эйлера-Дарбу (1) при $C = 0$.

Если в уравнении (16) $A_1 = C_1 = 0$, а коэффициенты B_1 и D_1 могут быть представлены в виде

$$B_1 = \varphi_1(U_x) + \varphi_2(y),$$

$$D_1 = n U_y \varphi_1'(U_x) + m x \varphi_2'(y) + k (U - x U_x) \frac{\varphi_1'(U_x) \varphi_2'(y)}{\varphi_1(U_x) + \varphi_2(y)},$$

то уравнение (16) с помощью преобразования (15) сводится к обобщенному уравнению Эйлера-Дарбу

$$V_{gy} = \frac{m \varphi_2'(y)}{\varphi_1(g) + \varphi_2(y)} V_g - \frac{n \varphi_1'(g)}{\varphi_1(g) + \varphi_2(y)} V_y - k \frac{\varphi_1'(g) \varphi_2'(y)}{\left[\varphi_1(g) + \varphi_2(y)\right]^2} V. \tag{19}$$

Это уравнение было подробно исследовано А.А.Грибом в работе [7].

При $m = -1$, $n = 1$ и $k = 0$ общее решение уравнения (19) с двумя произвольными функциями, как показал С.В.Валландер, легко может быть построено [12]. В этом случае

$$V(g, y) = \frac{\Phi_1(g) + \Phi_2(y)}{\varphi_1(g) + \varphi_2(y)}.$$

Тогда общее решение уравнения (16) записывается в параметрическом виде

$$\begin{cases} U = V(g, y) + g \dfrac{\varphi_2'(y)\left[\Phi_1(g) + \Phi_2(y)\right] - \Phi_1'(g)\left[\varphi_1(g) + \varphi_2(y)\right]}{\left[\varphi_1(g) + \varphi_2(y)\right]^2}, \\[2ex] x = \dfrac{\varphi_2'(y)\left[\Phi_1(g) + \Phi_2(y)\right] - \Phi_1'(g)\left[\varphi_1(g) + \varphi_2(y)\right]}{\left[\varphi_1(g) + \varphi_2(y)\right]^2}. \end{cases}$$

Заметим далее, что уравнение Эйлера-Дарбу использовалось не только при решении задач сплошной среды. Так, например, при исследовании задачи обтекания тела потоком разреженного газа с использованием теории локального взаимодействия обнаружилась тесная связь аэродинамических коэффициентов с дифференциальными уравнениями.

В рамках этой теории коэффициент лобового сопротивления представляется в виде

$$C_x = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k S_k,$$

где λ_k — коэффициенты режима, а S_k — функции формы, которые могут быть выражены через некоторую неотрицательную "*опорную функцию*" q. Для нее функции формы S_k будут соответствующими обобщенными моментами [13, 14].

В осесимметричном случае функция q удовлетворяет [13, 14] дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$2(\sin\eta + \sin\xi)\, q_{\eta\xi} + \cos\eta \cdot q_\xi + \cos\xi \cdot q_\eta = 0,$$

где ξ и η — некоторые характеристические переменные.

Это уравнение с помощью замены переменных

$$x = \sin\eta, \qquad y = -\sin\xi$$

приводится к классическому уравнению Эйлера-Дарбу

$$q_{xy} = \frac{q_x - q_y}{2(x-y)}. \tag{20}$$

Решение задачи Гурса для этого уравнения выражается с помощью функции Римана, которая для уравнения (20) известна в аналитической форме [15].

Указатель литературы

[1] *Христианович С. А.* Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа // Прикл. мат. и мех. 1947. Т. 11. № 2. С. 215–222.

[2] *Фалькович С. В.* Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях // Прикл. мат. и мех. 1947. Т. 11. № 4. С. 459–464.

[3] *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957. 443 с.

[4] *Гриб А. А.* Интегрирование уравнений неустановившегося движения жидкости при гидравлическом ударе в длинных трубопроводах // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83. № 1. С. 43–46.

[5] *Бурсацев А.И.* Распространение упруго-пластической волны нагрузки в стержне конечной длины // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. астрон. 1963. Вып. 1 (№ 1). С. 79–85.

[6] *Бурсацев А.И.* Некоторые задачи упруго-пластического колебания стержней // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1965. Вып. 1 (№ 1). С. 77–83.

[7] *Гриб А.А.* Обобщение уравнения Эйлера-Дарбу с целыми коэффициентами // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. № 6. С. 953–956.

[8] *Гинзбург И.П., Гриб А.А.* Гидравлический удар реальных жидкостей в сложных трубопроводах // Вестн. Ленигр. ун-та. 1954. № 8. С. 107–128.

[9] *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М. 1975. 296 с.

[10] *Гриб А.А., Рябинин А.Г.* К вопросу о приближенном интегрировании уравнений плоского установившегося сверхзвукового движения газа // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. № 3. С. 425–428.

[11] *Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А.* О некоторых решениях уравнений газовой динамики, содержащих произвольные функции // Газодинамика и теплообмен. Вып. 4. Л., 1975. С. 60–67.

[12] *Валландер С.В.* Об интегрировании гипреболической системы двух уравнений при двух независимых переменных // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83. № 5. С. 637–639.

[13] *Мирошин Р.Н.* Математические проблемы теории локального взаимодействия // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1078–1081.

[14] *Мирошин Р.Н.* Уравнение, ассоциированное с теорией локального взаимодействия в разреженном газе // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. астрон. 1985. Вып. 1 (№ 1). С. 69–73.

[15] *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М., 1981. 368 с.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 22.10.2002 г. Формат бумаги 60X84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 16,56 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ 2674.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.