Федеральное агентство по образованию
Министерство образования и науки Самарской области
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
Инженерная академия России (Поволжское отделение)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием

29–31 мая 2008 г.

ЧАСТЬ 3

СЕКЦИЯ
«Дифференциальные уравнения и краевые задачи»

Самара
Самарский технический университет
2008

УДК 517.9
М33

Математическое моделирование и краевые задачи:
М33 Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2008. — 185 с.: ил.

ISBN 978-5-7964-1089-9

Представлены материалы докладов по секции «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». Предложены новые постановки и обобщающие решения неклассических задач математической физики, уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 517.9

Конференция организована при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-06040) и Министерства образования и науки Самарской области

ISBN 978-5-7964-1089-9

Содержание

УДК 533.601.1

В. И. Богатко, Г. А. Колтон, Е. А. Потехина

ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАОСТРЕННЫХ ТЕЛ

Среди аналитических методов, применяемых для решения задач гиперзвукового обтекания тел, широкое распространение получил метод «пограничного слоя» Г. Г. Черного [1].

При использовании этого метода решение задачи начинается с отыскания предельного течения, которое является точным решением системы уравнений газовой динамики при нулевом значении малого параметра. Если решать задачу в переменных Эйлера, то при переходе к предельному течению область изменения газодинамических параметров вырождается в пространство меньшего числа измерений, при этом искомые величины становятся неоднозначными функциями координат и времени. Переход к переменным Лагранжа в таких задачах сохраняет размерность области возмущённого движения газа и устраняет эту неоднозначность.

При рассмотрении нестационарной задачи обтекания тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, в отличие от традиционного способа индивидуализации частицы за переменные Лагранжа целесообразно выбирать значения параметров, характеризующих частицу не на поверхности $t = t_0$ ($t_0 = \mathrm{const}$), а на поверхности $t = \sigma$, где σ – тот момент времени, когда частица пересекает поверхность разрыва.

Рассмотрим течение, возникающее при движении профиля и тела вращения в покоящемся газе с большой переменной скоростью $V(t)$, направленной по оси симметрии тела. Начало координат поместим в носке тела, ось x направим по контуру профиля (по образующей осесимметричного тела), а ось y — по нормали к оси x. Головную ударную волну считаем присоединённой.

В этой системе координат течение газа в ударном слое описывается уравнениями газовой динамики, граничными условиями для которых являются условия динамической совместности за головной ударной волне и условия обтекания на поверхности рассматриваемого тела.

Обозначим через σ момент времени входа частицы газа в ударный слой, а через ξ — абсциссу точки входа. Тогда имеем

$x = x(t, \sigma, \xi)$; $y = y(t, \sigma, \xi)$. Перейдём к переменным Лагранжа (t, σ, ξ) и будем искать решение в виде рядов по степеням малого параметра ε, характеризующего отношение плотностей газа на фронте ударной волны. Система уравнений для определения коэффициентов разложения искомых функций в ряд по ε может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \sigma}\frac{\partial m y_k}{\partial \xi} - \frac{\partial x_0}{\partial \xi}\frac{\partial m y_k}{\partial \sigma} = m\Pi_k(t, \sigma, \xi),$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} + \frac{dV}{dt}\left[(m-1)\cos\alpha(x_0) - m\frac{\sin\alpha(x_0)}{R(x_0)}x_k\right] = Q_k(t, \sigma, \xi, y_k, x_k),$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \sigma}\frac{\partial p_k}{\partial \xi} - \frac{\partial x_0}{\partial \xi}\frac{\partial p_k}{\partial \sigma} = \overline{R}_k(t, \sigma, \xi, y_k, x_k),$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = S_k(t, \sigma, \xi), \qquad \tau_k = \tau_k(h_k, p_k),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1$, причём $m = 0$ при $k = 0$ и $m = 1$ при $k = 1, 2, \ldots$; p — давление, h — энтальпия газа; R — радиус кривизны образующей тела; α — угол между касательной к образующей и осью симметрии тела; τ — величина, обратная плотности, а Π_k, Q_k, $\overline{R}_k$, S_k — известные на каждом шаге функции.

Граничные условия также представляются в виде рядов по ε.

В каждом приближении полученная система уравнений расщепляется, при этом очевидно, что все трудности при построении решения методом тонкого ударного слоя связаны с интегрированием уравнения для определения закона движения частицы газа в нулевом приближении. Если это уравнение удаётся проинтегрировать, то решение для остальных коэффициентов разложения выписывается в квадратурах очевидным образом.

Функции φ_k, определяющие форму фронта головной ударной волны, находятся из формул для y_k при $\xi = x$ и $\sigma = t$:

Так были построены решения задачи гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных заострённых тел при их движении, близком к стационарному [2]; задачи обтекания плоских и осесимметричных заострённых тел, образующая которых слабо искривлена [3]. Для построения решения задачи в общем случае было использовано дополнительное разложение искомых функций в ряд по малому параметру $(t - \sigma)$, характеризующему время пребывания частицы газа в ударном слое [4].

Следует отметить, что представляет интерес не только построение конкретного решения задачи, но и изучение изменения структуры течения в процессе перехода от одного режима движения к другому.

Заметим, что при решении задач обтекания для тел, движущихся с большой переменной скоростью, в случае, когда происходит изменение режима движения тела, следует учитывать существование промежуточной зоны, в которой происходит перестройка течения. При построении решения в этой зоне получающиеся интегралы разбиваются на два. Промежуточный предел интегрирования ξ^* при определении давления и формы фронта головной ударной волны определяется из закона движения частицы газа в нулевом приближении при $\sigma = t_0$. Условие $\xi^* = 0$ даёт возможность определить время установления нового режима течения в данном сечении $x_0 = \mathrm{const}$. В частном случае перехода от равномерного движения клина к равноускоренному для определения времени установления режима равноускоренного движения будем иметь квадратное уравнение.

Таким образом, использование переменных Лагранжа при изучении обтекания тел гиперзвуковым потоком газа позволяет не только построить приближенное решение задачи, выделить новый малый параметр $(t - \sigma)$, но и исследовать процесс перестройки течения газа в ударном слое при изменении режима движения тела.

1. *Черный, Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью [Текст] / Г. Г. Черный. — М.: Физматгиз, 1959. — 220 с.
2. *Потехина, Е. А.* Обтекание плоских и осесимметричных тел при движении, близком к стационарному [Текст] / Е. А. Потехина // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1980. — № 19. — С. 110–112.
3. *Потехина, Е. А.* О нестационарном гиперзвуковом обтекании слабоизогнутого профиля [Текст] / Е. А. Потехина, И. Л. Селезнева // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1978. — № 13. — С. 103–108.
4. *Потехина, Е. А.* Об одном приближенном решении задачи нестационарного обтекания плоских и осесимметричных тел, движущихся с большой переменной скоростью [Текст] / Е. А. Потехина / В сб.: Газодинамика и теплообмен, 1982. — № 7. — С. 86–95.

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербургский государственный горный институт,

г. Санкт-Петербург

eap225@gmail.com

Математическое моделирование и краевые задачи

Часть 3 «Дифференциальные уравнения и краевые задачи»

Редактор *В. П. Радченко*
Оригинал-макет *М. Н. Саушкин*

Лицензия ЛР № 020595 от 09.07.97.
Подп. в печать 19.05.08.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 10,69. Уч.-изд. л. 10,65.
Тираж 120 экз. Рег. № 98. Заказ № 287.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главн. корп.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корп. №8.