Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
Инженерная академия России (Поволжское отделение)
НИИ проблем надёжности механических систем СамГТУ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием

29–31 мая 2007 г.

ЧАСТЬ 3

СЕКЦИЯ
«Дифференциальные уравнения
и краевые задачи»

Самара 2007

УДК 517.9
М33

Математическое моделирование и краевые задачи:
М33 Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2007. — 202 с.: ил.

ISBN 978-5-7964-0908-4

Представлены материалы докладов по секции «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». Предложены новые постановки и обобщающие решения неклассических задач математической физики, уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 517.9

ISBN 978-5-7964-0908-4

Содержание

Абзалимов Р.Р. Метод вычисления собственных колебаний неоднородной прямоугольной мембраны с равномерным натяжением поверхности в случае жёсткого закрепления 9

Абрамов В.В. Исследование устойчивости метода Адамса—Мултона при моделировании тесных сближений небесных тел 13

Алашеева Е.А., Блатов И.А. Построение сплайновых вейвлет на прямоугольнике для решения двумерного уравнения Фредгольма второго рода методом Галёркина . . 17

Алёшин П.С. О единственности решения задачи Коши для дифферециально-разностного уравнения дробной диффузии с распределённым и сосредоточенным запаздыванием 19

Алтынбаев Ф.Х. Решение дифференциальных уравнений движения малых тел солнечной системы на основе метода тейлоровских разложений 22

Андреев А.А., Огородников Е.Н. К постановке начальных и начально-краевых задач для одного класса систем вырождающихся дифференциальных уравнений 23

Арланова Е.Ю. Нелокальная краевая задача с операторами Кобера—Эрдейи и М. Сайго для уравнения влагопереноса 29

Бейлина Н.В. Об одной нелокальной задаче для уравнения колебаний струны 32

Бештоков М.Х. Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка в многомерной области . . 35

Блатов И.А., Рогова Н.В. О приближённом решении одного класса интегральных уравнений 38

Богатко В.И., Колтон Г.А., Потехина Е.А. О применении метода малого параметра в нестационарной задаче гиперзвукового обтекания тонкого крыла 40

Бурцев М.В., Зарубин А.Н. Теорема единственности смешанной задачи для неоднородного уравнения дробной диффузии с запаздывающим аргументом по обеим переменным 42

Бушков С.В., Родионова И.Н. Задача Коши для уравнения $u_{\xi\eta} - \lambda u = 0$ в специальном классе ${}_0R$ 45

Васильев В.Б. Волновая факторизация и почти тригонометрические ряды 50

УДК 533.601.1

В. И. Богатко, Г. А. Колтон, Е. А. Потехина

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА

При решении задач газовой динамики возникает необходимост интегрирования системы нелинейных уравнений в частных производных.

Вообще говоря, построение решения такой системы представляет собой весьма сложную задачу. Однако в ряде задач можн выделить физически обоснованный малый параметр, что позволяет упростить решение задачи, разлагая искомые функции в ряд п этому параметру.

При этом достаточно часто на первом шаге применение метод малого параметра приводит к более простой, но все ещё нелиней ной системе уравнений. Если полученная система уравнений рас щепляется таким образом, что два уравнения могут быть решен независимо от остальных, и при этом одно из них может быть за писано в дивергентном виде, то введение новой функции (аналог функции тока) позволяет свести решение задачи к интегрирован нелинейного уравнения второго порядка в частных производных.

При определённых условиях (когда полученное уравнение имее специальный вид) решение удаётся получить, используя преобразо вание, при котором за одну из независимых переменных выбира частную производную от вновь введённой функции. Преобразова ние такого типа носит название преобразование Эйлера—Ампера [1]

Если уравнение может быть представлено в виде [2]

$$\sum_{i,j} A_{ij}(U_{ij}U_{tt} - U_{it}U_{jt}) + \sum_i B_i U_{it} + DU_{tt} - C = 0,$$

то оно с помощью преобразования Эйлера—Ампера

$$U(x_i, t) = V(x_i, q) + q\,t,$$

где $q = U_t$, а $V(x_i, q)$ — новая искомая функция, сводится к квазил нейному уравнению для функции $V(x_i, q)$

$$\sum_{i,j} A_{ij}V_{ij} + \sum_i B_i V_{iq} + CV_{qq} + D = 0.$$

Здесь A_{ij}, B_i, C и D — функции от q, x_i, V, V_g, V_i или, что то ж самое, от t, x_i, U, U_t, U_i.

Если в уравнении коэффициенты A_{ij}, B_i, C и D зависят только от x_i и U_t, то соответствующее уравнение будет линейным.

В качестве примера использования такого подхода для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается задача определения параметров течения газа за фронтом головной ударной волны, образующейся при нестационарном гиперзвуковом движении тонкого крыла переменной формы. При этом предполагается, что толщина, размах и хорда крыла имеют порядок $(O(\varepsilon), O(\sqrt{\varepsilon}), O(1))$ соответственно, где ε — естественный малый параметр, характеризующий отношение плотностей газа на фронте головной ударной волны. Задача решается методом тонкого ударного слоя [3] в постановке, аналогичной [4]. Система координат выбирается так, что поверхность крыла мало отличается от плоскости (x, z). Вектор скорости движения крыла зависит от времени и лежит в плоскости (x, y). Головная ударная волна считается присоединённой к передней кромке крыла хотя бы в одной точке.

Течение газа в ударном слое описывается системой нелинейных уравнений в частных производных (системой уравнений газовой динамики) с граничными условиями на фронте головной ударной волны и поверхности крыла.

Получены системы уравнений для определения предельного течения и поправок первого приближения. Для случая, когда скорость движения крыла слабо зависит от времени, а также для случая, когда проекцию скорости движения крыла на ось можно считать медленно меняющейся, решение выписано в квадратурах. При этом система уравнений для определения поправок первого приближения расщепляется таким образом, что два уравнения могут быть решены независимо от остальных и одно из них может быть записано в дивергентном виде. Введение новой функции (аналога функции тока) позволило свести решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных. Для построения решения было использовано преобразование, при котором за одну из независимых переменных выбирают частную производную от вновь введённой функции (преобразование Эйлера–Ампера). Полученное решение зависит от двух произвольных функций и неизвестной формы фронта. Для нахождения этих трёх функций построена интегро-дифференциальная система уравнений. Для окончательного решения поставленной задачи предлагается полуобратный метод, заключающийся в том, что задаётся вид одной из функций и уравнение передней кромки крыла, а форма обтекаемого тела отыскивается в процессе решения указанной выше интегро-дифференциальная системы уравнений.

В случае крыла конечного размаха толщина, размах и хорда крыла будут иметь порядок $(O(\varepsilon), O(1), O(1))$, и приближенное аналитическое решение задачи удаётся построить в конечном виде.

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. I М.–Л., ОНТИ–НКТП СССР, 1936. – 591 с.
2. *Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А.* Некоторые приближенные решения уравнений нестационарной гиперзвуковой газовой динамики // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., 1976. – Вып. 3. (№ 13). – С. 51–56.
3. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. – М.: Физматгиз, 1959. – 220 с.
4. *Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А.* Обтекание тонкого крыла переменной формы гиперзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1979. – № 4. – С. 3–5.

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербургский государственный горный институт, г. Санкт-Петербург
eap225@gmai.com

УДК 517.956

М. В. Бурцев, А. Н. Зарубин

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПО ОБЕИМ ПЕРЕМЕННЫМ

В области $D = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$ рассматривается неоднородное уравнение дробного порядка с запаздыванием по обеим переменным

$$LU(x, t) = H(t-h)U(x, t-h) - H(x-\tau)U(x-\tau, t) + F(x, t), \qquad (1)$$

где $L \equiv D^{\alpha}_{0t} - \frac{d^2}{dx^2}$; $H(f)$ – функция Хевисайда; $0 < h$, $\tau \equiv \mathrm{const}$; D^{α}_{0t} – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования [1, с. 43], действующий на функцию $U(x, t)$ по переменной t, $0 < \alpha < 1$; $F(x, t)$ – заданная, ограниченная функция.

Задача S. Найти в области D решение $U(x, t)$ уравнения (1) из класса $D^{\alpha-1}_{0t}U(x, \xi) \in C(\bar{D})$, $t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x, \xi)$, $U_{xx}(x, t) \in C(D)$, удовлетворяющее условиям $U(0, t) = 0$, $t > 0$; $\lim\limits_{t \to 0+} D^{\alpha-1}_{0t}U(x, \xi) = \omega(x)$, $x \geqslant 0$; $\omega(0) = \omega(+\infty) = 0$, где заданные функции $\omega(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$; $F(x, t) = f(x)g(t) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D)$.

Математическое моделирование и краевые задачи

Часть 3 «Дифференциальные уравнения и краевые задачи»

Печатается в авторской редакции

Редактор *В.П. Радченко*
Оригинал-макет *М.Н. Саушкин*

Лицензия ЛР № 020595 от 09.07.97.
Подп. в печать 25.04.07.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 11,74. Уч.-изд. л. 11,6.
Тираж 110 экз. Рег. № 138. Заказ № 336.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 224. Главн. корп.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 224. Корп. №8.