MATERIÁLY

VIII MEZINÁRODNÍ VĚDECKO - PRAKTICKÁ KONFERENCE

«AKTUÁLNÍ VYMOŽENOSTI VĚDY – 2012»

27 června – 05 července 2012 roku

Díl 19
Matematika

Praha
Publishing House «Education and Science» s.r.o
2012

Vydáno Publishing House «Education and Science»,
Frýdlanská 15/1314, Praha 8
Spolu s DSP SHID, Berdianskaja 61 Б, Dnepropetrovsk

Materiály VIII mezinárodní vědecko - praktická konference «Aktuální vymoženosti vědy - 2012». - Díl 19. Matematika: Praha. Publishing House «Education and Science» s.r.o - 72 stran

VIII sběrné nádobě obsahují materiály mezinárodní vědecko - praktická konference «Aktuální vymoženosti vědy»
(27 června – 05 července 2012 roku) po sekcích «Matematika»

Pro studentů, aspirantů a vědeckých pracovníků

Cena 270 Kč

ISBN 978-966-8736-05-6

MATEMATIKA

MATEMATICKÁ ANALYSA

к.ф-м.н. Богатко В. И. [1], к.ф.-м.н. Колтон Г.А. [2], к.ф.-м.н. Потехина Е.А. [3]
[1], [3] Санкт-Петербургский государственный университет,
[2] Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Решение задачи определения параметров течения газа за фронтом искривленной сильной ударной волны связано с необходимостью интегрирования системы нелинейных уравнений в частных производных. Сложность этой газодинамической задачи связана не только с нелинейностью системы уравнений, описывающей течение газа в возмущенной области, но и с наличием поверхностей разрыва, положение и конфигурация которых заранее не известны и должны быть определены в ходе построения решения задачи.

Однако, если в задаче может быть выделен малый параметр, то процесс построения решения упрощается, так как искомые функции могут быть представлены в виде рядов по этому параметру. При этом часто на первом шаге применение метода малого параметра дает более простую, но еще нелинейную систему уравнений. Если в полученной системе уравнений два уравнения могут быть решены независимо от остальных, и при этом одно из них записывается в дивергентном виде, то введение новой функции (аналога функции тока) позволяет свести решение задачи к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка в частных производных.

В том случае, когда полученное уравнение имеет специальный вид, решение удается получить, используя преобразование, при котором за одну из независимых переменных выбирают частную производную от вновь введенной функции. Преобразование такого типа носит название преобразование Эйлера-Ампера [1].

Пусть для функции $U(x_i,t)$ $(i=1,2,...,n)$ имеет место уравнение

$$\Omega\,(U_{i,j},U_{it},U_{tt},U_i,U_t,U,x_i,t)=0, \qquad (1)$$

где

$$U_i=\frac{\partial U(x_i,t)}{\partial x_i}, \qquad U_{ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \qquad U_t=\frac{\partial U(x_i,t)}{\partial t}, \qquad U_{tt}=\frac{\partial U_t}{\partial t}, \qquad U_{it}=\frac{\partial U_i}{\partial t},$$

$i=1,2,\ldots,\ldots,n.$

Воспользуемся преобразованием Эйлера-Ампера – введем новую переменную $q = U_t$ и новую искомую функцию $V(x_i, q)$:

$$U(x_i, t) = V(x_i, q) + qt \tag{2}$$

В результате получим [2], что только уравнение вида

$$\sum_{i,j} A_{ij}(U_{i,j}U_{tt} - U_{it}U_{jt}) + \sum_i B_i U_{it} + DU_{tt} - C = 0 \tag{3}$$

сводится к квазилинейному уравнению для функции $V(x_i, q)$

$$\sum_{i,j} A_{ij}V_{i,j} + \sum_i B_i V_{i,q} + CV_{qq} + D = 0 \tag{4}$$

где A_{ij}, B_i, C и D – функции от q, x_i, V, V_q, V_i или, что то же самое, от t, x_i, U, U_t, U_i, а $U_{tt} \neq 0$.

Если в уравнении (3) коэффициенты A_{ij}, B_i, C и D зависят только от x_i и U_t, то соответствующее ему уравнение (4) будет линейным.

Пусть теперь $V(x_i, q)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $V_{qq} \neq 0$. Тогда функция $U(x_i, t)$, определяемая соотношениями

$$U = V(x_i, q) + qt = -V_q \tag{5}$$

является решением уравнения (3).

Уравнение (3) кроме решений вида (5) может иметь особое решение

$$U(x_i, t) = t\,f(x_i) + \psi(x_i),$$

для которого $U_{tt} \equiv 0$.

Естественным малым параметром в задачах газовой динамики с сильными ударными волнами является отношение плотностей газа перед фронтом ударной волны и непосредственно за ней. Анализ условий динамической совместности показывает, что для сильных ударных волн параметры течения в возмущенной области вблизи фронта ударной волны могут быть представлены в виде рядов специального вида по степеням параметра $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ (γ – эффективный показатель адиабаты), характеризующего отношение плотностей газа на фронте ударной волны [3]. Это следует из того, что в соотношении

$$\tau_S = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M^2},$$

при возрастании интенсивности ударной волны второе слагаемое стремится к нулю быстрее первого, и для сильных ударных волн им можно пренебречь.

Здесь M – число Маха набегающего потока, $\tau_S = \rho_\infty / \rho_S$, индекс s указывает на то, что величина вычисляется на фронте ударной волны

Применение такого подхода, называемого методом тонкого ударного слоя (методом Г.Г. Черного) [3], к широкому классу задач обычно приводит к ситуации, когда система уравнений для поправок первого приближения расщепляется и появляется возможность свести решение всей системы уравнений к решению одного нелинейного уравнения второго порядка в частных производных.

Результаты, полученные в теории интегрирования нелинейных уравнений второго порядка [2], позволили решить ряд задач теории гиперзвукового обтекания тонкого крыла переменной формы, а также задач дифракции и отражения сильной ударной волны.

Как известно, при движении тел с гиперзвуковой скоростью перед телом образуется сильная головная ударная волна. Задача состоит в определении параметров течения в области между фронтом головной волны и поверхностью обтекаемого тела.

В рамках метода тонкого ударного слоя с помощью преобразования Эйлера-Ампера было построено [4,5] приближенное решение задачи обтекания равномерным однородным гиперзвуковым потоком идеального газа наветренной стороны тонкого крыла, форма поверхности которого зависит от времени. Головная ударная волна предполагалась присоединенной к передней кромке крыла, по крайней мере, в одной точке.

В аналогичной постановке была рассмотрена задача обтекания нестационарным гиперзвуковым потоком идеального газа наветренной стороны тонкого крыла переменной формы [6]. Решение было построено для случая, когда скорость набегающего потока и угол атаки мало отличаются от постоянных.

Решение нестационарной пространственной задачи обтекания наветренной стороны тонкого крыла переменной формы, движущегося с большой переменной скоростью, было построено для случая, когда движение тела близко к стационарному [7], и для случая, когда проекцию вектора скорости движения тела на вертикальную ось можно считать медленно меняющейся [8].

Решения рассмотренного типа могут быть использованы для построения течения газа вблизи искривленной поверхности сильного разрыва в нелинейных задачах о нерегулярном (маховском) отражении сильной ударной волны от поверхности тонкого профиля [9] и тела вращения [10].

В задаче о нелинейной дифракции сильной ударной волны на стенке с малым углом излома [11] предлагаются некоторые простые аппроксимации для произвольных функций, позволяющие приближенно найти их в построенном решении и тем самым определить поле течения вблизи фронта ударной волны.

Полученное решение может быть использовано также в задаче о распространении сильной ударной волны вдоль горизонтальной проницаемой стенки. Если предположить, что нормальная к проницаемой поверхности составляющая вектора скорости частиц газа пропорциональна перепаду давления на стенке, то рассматриваемая задача будет эквивалентна задаче о дифракции сильной ударной волны на выпуклом угле $\pi+\omega$, где ω имеет тот же порядок малости, что и нормальная к перфорированной границе компонента вектора скорости.

Замкнутое решение задачи о дифракции сильной ударной волны на выпуклой криволинейной стенке и о движении ударной волны в симметричном канале с изломом стенки получено в [12].

Литература

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1. М. – Л., ОНТИ – НКТП СССР, 1936. 591 с.

2. Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Некоторые приближенные решения уравнений нестационарной гиперзвуковой газовой динамики// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. – 1976. – Вып. 3. – (№ 13). – С. 51-56.}

3. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз., 1959. 220 с.

4. Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Нестационарное обтекание тонкого крыла конечного размаха гиперзвуковым потоком газа // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 5. – С. 1040-1041.

5. Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Второе приближение в теории тонкого крыла конечного размаха, обтекаемого гиперзвуковым потоком газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. – 1979. – Вып. 1. – № 1. – С. 87-95.

6. Матвеева Е.Л., Потехина Е.А. О нестационарном гиперзвуковом обтекании тонкого крыла переменной формы // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1990. – Вып. 1. –№ 1. – С. 106-108.

7. Богатко В.И., Потехина Е.А. О неустановившемся гиперзвуковом течении газа при обтекании тонкого крыла переменной формы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. – 1995. – Сер. 1. – Вып. 3. – № 15. – С. 73-78.

8. Богатко В.И., Колтон Г.А., Потехина Е.А. Определение параметров течения газа в ударном слое при обтекании тонкого крыла переменной формы, движущегося с большой переменной скоростью // Вестн. С.-Петербург. ун-та. – 2002. – Сер. 1. – Вып. 2. – № 9. – С. 60 – 66.

9. Богатко В.И., Колтон Г.А. Нерегулярное взаимодействие сильной ударной волны с тонким профилем // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1989. – Вып. 3. – № 15. – С. 45-49.

10. Богатко В.И., Колтон Г.А. Маховское отражение сильной ударной волны от тонкого тела вращения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1989. – Вып. 4. – № 22. – С. 40-44.

11. Богатко В.И., Колтон Г.А. К задаче о нелинейной дифракции сильных ударных волн// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. – 1988. – Вып. 3. – № 15. – С. 45-49.

12. Колтон Г.А., Исхаков В.А. Плоская задача взаимодействия сильной ударной волны с жесткой стенкой// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. – 1984. – № 19. – С. 37-44.