Математические заметки

Том 110 выпуск 4 октябрь 2021

УДК 517.9

О регулярности решения уравнения Прандтля

В. Э. Петров, Т. А. Суслина

Изучаются вопросы разрешимости и регулярности решения задачи Дирихле для уравнения Прандтля

$$\frac{u(x)}{p(x)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(t)}{t-x}\,dt = f(x),$$

где $p(x)$ – положительная функция на $(-1,1)$, причем $\sup(1-x^2)/p(x) < \infty$. В терминах специального интегрального преобразования на отрезке вводится шкала пространств $\widetilde{H}^s(-1,1)$. Устанавливается теорема существования и единственности решения в классах $\widetilde{H}^s(-1,1)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. В частности, при $s=1$ результат таков: если $r^{1/2}f \in L_2$, то $r^{-1/2}u, r^{1/2}u' \in L_2$, где $r(x) = 1-x^2$.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: уравнение Прандтля, обобщенное решение, интегральное преобразование Фурье, интегральное преобразование на отрезке.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13138

Введение

0.1. Уравнение Прандтля: физическая мотивировка. Уравнение Прандтля

$$u(x) - p(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(t)}{t-x}\,dt = p(x)f(x), \qquad u(-1) = u(1) = 0, \tag{0.1}$$

является одним из универсальных уравнений математической физики. Оно используется практически во всех случаях, когда исследуются тонкие пластины (оболочки с краем). В аэродинамике и гидродинамике [1], [2] уравнение описывает циркуляцию (усредненную по хорде $c(x)$ нагрузку) на трехмерном тонком крыле размаха L в набегающем под углом атаки $\alpha_0(x)$ потоке со скоростью U_0. В этом случае $p(x) = a_0c(x)/L$, $f(x) = \alpha_0(x)U_0$, где a_0 – некоторый постоянный коэффициент. В магнитостатике [3] уравнение (0.1) описывает распределение поверхностной (усредненной по толщине $\delta(x)$) намагниченности, индуцируемой в тонкой пластинке шириной L из ферромагнитного материала с восприимчивостью $\varkappa$ в поперечном внешнем магнитном поле с касательной составляющей $f(x)$. В этом случае $p(x) = \varkappa\delta(x)/L$.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

В двумерной механике [4] уравнение (0.1) является основным инструментом при исследовании контактных задач и расчетов ребер жесткости. Уравнение (0.1) можно рассматривать как уравнение теории потенциала для следующей краевой задачи:

$$\begin{cases}\Delta\Phi(x,y)=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus[-1,1],\\ \partial_y\Phi^+(x,0)=\partial_y\Phi^-(x,0), & x\in[-1,1],\\ \Phi^+(x,0)-\Phi^-(x,0)+p(x)\,\partial_y\Phi^+(x,0)=p(x)f(x), & x\in[-1,1],\end{cases} \tag{0.2}$$

если решение искать в виде потенциала двойного слоя с плотностью $u(t)$:

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{1}{\rho}\bigg|_{\tau=0}dt,\qquad \rho=\sqrt{(x-t)^2+(y-\tau)^2}\,,$$

или для сопряженной задачи (в смысле условий Коши–Римана)

$$\begin{cases}\Delta\Psi(x,y)=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus[-1,1],\\ \Psi^+(x,0)=\Psi^-(x,0), & x\in[-1,1],\\ \partial_y\Psi^+(x,0)-\partial_y\Psi^-(x,0)-\partial_x(p(x)\,\partial_x\Psi(x,0))=\partial_x(p(x)f(x)), & x\in[-1,1],\end{cases} \tag{0.3}$$

если решение искать в виде потенциала простого слоя с плотностью $u'(t)$:

$$\Psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}u'(t)\ln\frac{1}{\rho}\,dt,\qquad \rho=\sqrt{(x-t)^2+y^2}\,.$$

Краевые задачи типа (0.2), (0.3) возникают из общих трехмерных задач, когда один из параметров области (или поверхности) становится "тонким".

Как правило, $p(x)\geqslant 0$; при этом вырождаться эта функция может лишь на концах промежутка. Вообще говоря, уравнения теории потенциала для краевых задач (0.2), (0.3) содержат гиперсингулярные операторы. В задаче (0.2) это нормальная производная потенциала двойного слоя, а в задаче (0.3) это вторая касательная производная потенциала простого слоя. Однако вырождение на концах коэффициента $p(x)$, стоящего перед интегральным оператором, сглаживает такую сингулярность. В частности, если $p(x)=(1-x^2)p_0(x)$ и $p_0(\pm1)\neq0$, то оператор, отвечающий второму слагаемому в (0.1), будет уже просто сингулярным.

Обычно не удается решить уравнение Прандтля точно[1]. Поэтому основная литература, касающаяся приложений, посвящена поиску удобных численных схем. Одна из самых популярных схем – метод Мультоппа, обоснованию которого посвящена значительная часть монографии [4]. Однако условия, при которых метод оправдывается, оказываются слишком ограничительными (например, требуется гёльдеровость выражения $\sqrt{1-x^2}/p(x)$).

Таким образом, строгое функциональное исследование уравнения Прандтля при естественных (с точки зрения физических приложений) условиях на коэффициент $p(x)$ весьма актуально.

[1]Единственный широко известный случай – эллиптическое крыло. Если $p(x)=p_0\sqrt{1-x^2}$ и $f(x)=1$, то $u(x)=2p_0(p_0+2)^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

0.2. Связь с теорией уравнения Шрёдингера с дробным лапласианом. Интегральный оператор в уравнении (0.1) может быть также представлен в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(t)}{t-x}\,dt=\sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}\,[u](x).$$

Число работ, посвященных исследованию уравнений с дробным лапласианом, огромно. В частности, строятся обобщенные решения краевых задач для уравнений вида

$$(-\Delta)^\sigma u(x)+V(x)u(x)=f(x),\qquad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<\sigma<1.$$

Обзор, некоторые новые результаты и обширную литературу, посвященную этой теме, можно найти в [5] и [6]. Отметим, что одномерный случай, как правило, не выделяется, хотя имеет важную особенность: граница области в одномерном случае несвязна (она состоит из двух точек ± 1).

0.3. Основные результаты. Мы изучаем задачу (0.1), предполагая, что коэффициент $p(x)$ – положительная на $(-1,1)$ функция, которая может вырождаться на краях интервала, но порядок нулей не выше первой степени (см. ниже условие (1.2), наложенное на $V(x)=p(x)^{-1}$). Например, к этому случаю относятся интересные с точки зрения практики примеры треугольного крыла самолета и составного крыла с разрывом хорды первого рода.

В разделе 1, используя подход с преобразованием Фурье, мы даем определение обобщенного решения задачи (0.1) в классе $H^{1/2}_{00}(-1,1)$ (состоящем из функций u на отрезке, допускающих продолжение нулем до функций из класса Соболева $H^{1/2}(\mathbb{R})$). При этом уравнение заменяется на подходящее интегральное тождество, а правая часть $f(x)$ берется из класса, сопряженного к $H^{1/2}_{00}(-1,1)$ (относительно спаривания в $L_2(-1,1)$). Устанавливается теорема существования и единственности решения. (Разумеется, аналоги этих результатов имеются в литературе; см. [5].)

Однако полученное решение $u\in H^{1/2}_{00}(-1,1)$ не обязано быть даже непрерывным. А с физической точки зрения интерес представляют непрерывные решения. Поэтому нужно исследовать вопрос о повышении гладкости решения (при прежних условиях на коэффициент $p(x)$ за счет усиления предположений о функции $f(x)$).

По мнению авторов преобразование Фурье, заданное на оси, является не самым удобным инструментом для исследования задачи на конечном отрезке. Поэтому, решая задачу повышения гладкости, мы используем интегральное преобразование $\mathscr{P}$ на отрезке, введенное и подробно изученное в работе [7]. Ранее применение преобразования $\mathscr{P}$ позволило решить многие задачи на отрезке, которые до этого либо были решены гораздо более трудоемким способом [8], либо оставались открытыми [9], [10]. Определение и основные свойства преобразования $\mathscr{P}$ приведены в разделе 2. В терминах преобразования $\mathscr{P}$ вводится интерполяционная шкала пространств $\widetilde{H}^s(-1,1)$, $s\geqslant 0$.

В разделе 3 мы даем независимое определение обобщенного решения

$$u\in\widetilde{H}^{1/2}(-1,1)=H^{1/2}_{00}(-1,1)$$

задачи (0.1) в терминах преобразования $\mathscr{P}$, а затем устанавливаем теорему о повышении гладкости решения. Именно, в предположении $\int_{-1}^{1}(1-x^2)|f(x)|^2\,dx<\infty$

выяснено, что решение принадлежит классу $\widetilde{H}^1(-1,1)$ (который выделяется условием (2.6)) и выполнена оценка

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{|u(x)|^2}{1-x^2}+(1-x^2)|u'(x)|^2\right)dx\leqslant C\int_{-1}^{1}(1-x^2)|f(x)|^2\,dx.$$

По интерполяции устанавливается разрешимость задачи (0.1) в $\widetilde{H}^s(-1,1)$, где $1/2\leqslant s\leqslant 1$ (в предположении, что f принадлежит сопряженному классу к $\widetilde{H}^{1-s}(-1,1)$). При $s>1/2$ решение оказывается непрерывным на замкнутом интервале $[-1,1]$ и удовлетворяет краевым условиям $u(\pm 1)=0$. Наконец, из соображений двойственности мы получаем разрешимость задачи (0.1) в $\widetilde{H}^s(-1,1)$, где $0\leqslant s<1/2$ (в предположении, что f принадлежит сопряженному классу к $\widetilde{H}^{1-s}(-1,1)$). В частности, при $s=0$ речь идет о так называемом "очень слабом" решении из класса $\widetilde{H}^0(-1,1)$ (выделяемом условием $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1}|u(x)|^2\,dx<\infty$).

Таким образом, применение адекватного аппарата позволило нам ввести правильную шкалу пространств и доказать повышение гладкости решения при широких условиях на коэффициент $p(x)$ и правую часть $f(x)$.

1. Обобщенное решение уравнения Прандтля

1.1. Постановка задачи. Удобно обозначить $V(x):=p(x)^{-1}$ и записать уравнение Прандтля (0.1) с условиями Дирихле в виде

$$V(x)u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u'(t)}{t-x}\,dt=f(x),\qquad u(-1)=u(1)=0. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения. Предполагается, что коэффициент $V(x)$ измерим на интервале $(-1,1)$ и подчинен условиям

$$V(x)\geqslant 0\quad \text{при п.в. } x\in(-1,1),\qquad (1-x^2)V(x)\leqslant M<\infty. \tag{1.2}$$

Условия на правую часть будут сформулированы позднее.

Наша первая цель – дать определение обобщенного решения уравнения (1.1) и установить теорему существования и единственности решения.

1.2. Определение обобщенного решения. Подход через преобразование Фурье. Как обычно в теории обобщенных решений краевых задач, проведем сначала формальные рассмотрения, которые подскажут нам, как разумно определить решение. В силу краевых условий естественно рассматривать функцию $u(x)$ на всей вещественной оси, продолжая ее нулем. Пусть $g(x)$ – некоторая функция с носителем на $[-1,1]$, но также заданная на всей оси. Умножим уравнение (1.1) на $\overline{g(x)}$ и проинтегрируем:

$$\int_{-1}^{1}V(x)u(x)\overline{g(x)}\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u'(t)}{x-t}\,dt\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{1.3}$$

Далее, используем преобразование Фурье, которое возьмем в виде

$$\widehat{u}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{-ix\zeta}\,dx,\qquad u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(\zeta)e^{ix\zeta}\,d\zeta.$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части (1.3) с помощью равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)}\,d\zeta. \tag{1.4}$$

Воспользуемся тем, что внутренний интеграл в (1.3) есть Фурье-свертка[2] $u'(t) * t^{-1}$. Фурье-образ функции $u'(t)$ равен $i\zeta\widehat{u}(\zeta)$, а Фурье-образ функции t^{-1} равен $-i\pi\,\mathrm{sign}\,\zeta$. Таким образом, равенство (1.3) запишется в виде

$$\int_{-1}^{1} V(x)u(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta|\widehat{u}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)}\,d\zeta = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{1.5}$$

Введем обозначение для полуторалинейной формы в левой части равенства (1.5):

$$[u,g] := \int_{-1}^{1} V(x)u(x)\overline{g(x)}\,dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta|\widehat{u}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)}\,d\zeta. \tag{1.6}$$

Естественный класс, в котором следует искать обобщенное решение – это класс[3] $H^{1/2}_{00} := H^{1/2}_{00}(-1,1)$, определяемый как подпространство в пространстве Соболева $H^{1/2}(\mathbb{R})$, состоящее из функций, равных нулю почти везде вне отрезка $[-1,1]$. По поводу свойств этого класса функций см. [11; гл. 1, § 11.5]. Норма в $H^{1/2}_{00}$ задается как стандартная норма в $H^{1/2}(\mathbb{R})$:

$$\|u\|^2_{H^{1/2}_{00}} = \|u\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\zeta|^2)^{1/2}|\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta, \qquad u \in H^{1/2}_{00}.$$

Отметим, что множество $C_0^\infty(-1,1)$ плотно в $H^{1/2}_{00}$.

Нам понадобится следующее свойство функций из класса $H^{1/2}_{00}$ (для полноты изложения приведем доказательство).

Лемма 1. *Для всякой функции $u \in H^{1/2}_{00}(-1,1)$ справедливо неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta||\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta. \tag{1.7}$$

Доказательство. Продолжим функцию $u \in H^{1/2}_{00}$ нулем, сохраняя прежнее обозначение. Воспользуемся тождеством, справедливым на классе $H^{1/2}(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta||\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta. \tag{1.8}$$

Для проверки (1.8) обозначим левую часть через $J[u]$ и выполним подстановку $y = x+z$:

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|z|^2}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+z)-u(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|z|^2}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{iz\zeta}-1|^2|\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{iz\zeta}-1|^2}{|z|^2}\,dz. \end{aligned}$$

[2] Далее будет рассматриваться свертка и для другого интегрального преобразования.

[3] В литературе используются различные обозначения для этого класса и сопряженного к нему; мы придерживаемся обозначений, принятых в [11].

Мы воспользовались равенством Парсеваля (1.4), а также теоремой Фубини. Внутренний интеграл вычисляется: он равен $2\pi|\zeta|$. Это приводит к (1.8).

Теперь, поскольку $u(y)=0$ при $y\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, из (1.8) вытекает неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta||\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta \geqslant \int_{-1}^{1}|u(x)|^2\,dx\int_{-\infty}^{-1}\frac{dy}{|x-y|^2}+\int_{-1}^{1}|u(x)|^2\,dx\int_{1}^{\infty}\frac{dy}{|x-y|^2}$$
$$=2\int_{-1}^{1}\frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx,$$

что доказывает (1.7).

Покажем, что включение $u\in H_{00}^{1/2}$ равносильно условию $[u,u]<\infty$.

Предположим, что $[u,u]<\infty$. Тогда в силу (1.7)

$$\int_{-1}^{1}|u(x)|^2\,dx\leqslant\int_{-1}^{1}\frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta||\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta. \tag{1.9}$$

Из (1.6) и (1.9) с учетом равенства Парсеваля (1.4) вытекает оценка

$$\|u\|^2_{H_{00}^{1/2}}\leqslant\int_{-1}^{1}|u(x)|^2\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta||\widehat{u}(\zeta)|^2\,d\zeta\leqslant(2\pi+2)[u,u]. \tag{1.10}$$

С другой стороны, в силу (1.2) и (1.7)

$$\int_{-1}^{1}V(x)|u(x)|^2\,dx\leqslant M\int_{-1}^{1}\frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx\leqslant M\pi\|u\|^2_{H_{00}^{1/2}}.$$

Отсюда и из (1.6) получаем оценку

$$[u,u]\leqslant\left(M\pi+\frac{1}{2}\right)\|u\|^2_{H_{00}^{1/2}},\qquad u\in H_{00}^{1/2}. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) следует, что форма $[u,u]^{1/2}$ определяет норму в $H_{00}^{1/2}$, эквивалентную стандартной. Тогда полуторалинейную форму $[u,g]$, определенную равенством (1.6), можно принять за скалярное произведение в этом пространстве.

Запишем равенство (1.5) в виде

$$[u,g]=(f,g), \tag{1.12}$$

где $(f,g):=(f,g)_{L_2(-1,1)}$. Естественный класс для правой части f – это пространство $(H_{00}^{1/2})^*$, сопряженное к $H_{00}^{1/2}$ относительно спаривания в $L_2(-1,1)$. Иными словами, обобщенная функция f, являющаяся антилинейным непрерывным функционалом над $C_0^\infty(-1,1)$, принадлежит классу $(H_{00}^{1/2})^*$, если

$$\sup_{0\neq u\in C_0^\infty(-1,1)}\frac{|(f,u)|}{\|u\|_{H_{00}^{1/2}}}<\infty. \tag{1.13}$$

Тогда спаривание (f,u) в $L_2(-1,1)$ распространяется на пары $f\in(H_{00}^{1/2})^*$, $u\in H_{00}^{1/2}$, а левая часть в (1.13) принимается за норму f в $(H_{00}^{1/2})^*$. При этом

$$\|f\|_{(H_{00}^{1/2})^*}=\sup_{0\neq u\in H_{00}^{1/2}}\frac{|(f,u)|}{\|u\|_{H_{00}^{1/2}}}. \tag{1.14}$$

Дадим теперь строгое определение обобщенного решения задачи (1.1).

Определение 1. Пусть $f \in (H_{00}^{1/2})^*$. *Обобщенным решением задачи* (1.1) называется элемент $u \in H_{00}^{1/2}$, удовлетворяющий интегральному тождеству (1.5) для всех функций $g \in H_{00}^{1/2}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициент* $V(x)$ *удовлетворяет условиям* (1.2). *Тогда при любом* $f \in (H_{00}^{1/2})^*$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in H_{00}^{1/2}$ *задачи* (1.1). *Это решение подчинено оценке*

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}} \leqslant (2\pi + 2)\|f\|_{(H_{00}^{1/2})^*}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Используем запись тождества (1.5) в виде (1.12). В силу равенства (1.14) правая часть $l_f(g) = (f, g)$ есть антилинейный непрерывный функционал над $g \in H_{00}^{1/2}$, причем выполнена оценка

$$|l_f(g)| \leqslant \|f\|_{(H_{00}^{1/2})^*}\|g\|_{H_{00}^{1/2}}. \tag{1.16}$$

Будем рассматривать $H_{00}^{1/2}$ как гильбертово пространство со скалярным произведением $[u, g]$. По теореме Рисса об общей форме антилинейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $u \in H_{00}^{1/2}$ такой, что $l_f(g) = [u, g]$ для всех $g \in H_{00}^{1/2}$, т.е. выполнено тождество (1.12). Это доказывает существование и единственность решения.

Оценка (1.15) вытекает из равенства $[u, u] = l_f(u)$ с учетом (1.10) и (1.16).

Пример. Обозначим $r(x) := 1 - x^2$. Пусть $f \in L_{2,r}(-1, 1) =: L_{2,r}$, т.е.

$$\|f\|^2_{L_{2,r}} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,|f(x)|^2\,dx < \infty. \tag{1.17}$$

Тогда с учетом (1.7) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |(f, g)| &\leqslant \left(\int_{-1}^{1} r(x)|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} \frac{|g(x)|^2}{r(x)}\,dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{\pi}\,\|f\|_{L_{2,r}}\|g\|_{H_{00}^{1/2}}, \qquad g \in H_{00}^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что $L_{2,r} \subset (H_{00}^{1/2})^*$, причем $\|f\|_{(H_{00}^{1/2})^*} \leqslant \sqrt{\pi}\,\|f\|_{L_{2,r}}$. Вместе с (1.15) это влечет оценку решения

$$\|u\|_{H_{00}^{1/2}} \leqslant (2\pi + 2)\sqrt{\pi}\,\|f\|_{L_{2,r}}. \tag{1.19}$$

Отметим, что функции из класса $H_{00}^{1/2}$, вообще говоря, не являются даже непрерывными. Впрочем, при условии $f \in L_{2,r}$ мы можем рассчитывать на повышение гладкости решения. Однако исследовать вопрос о повышении гладкости, используя подход с преобразованием Фурье, неудобно. Мы изучим этот вопрос, пользуясь другим интегральным преобразованием.

2. Интегральное преобразование $\mathscr{P}$

Нам понадобится интегральное преобразование $\mathscr{P}$ на отрезке, теория которого подробно изложена в [7], [8]. Приведем основные сведения, которые понадобятся в дальнейшем. В терминах преобразования $\mathscr{P}$ вводится шкала гильбертовых пространств $\widetilde{H}^s(-1, 1)$; этот материал является новым.

2.1. Определение преобразования $\mathscr{P}$. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}_2(-1,1)$ измеримых функций на интервале $(-1,1)$, для которых

$$\|u\|^2_{\widetilde{L}_2(-1,1)} := \int_{-1}^{1} \frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx < \infty.$$

Для функций $u \in \widetilde{L}_2(-1,1)$ упомянутое преобразование вводится формулами[4]:

$$\begin{cases} U(\xi) := \mathscr{P}[u](\xi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(y)\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{i\xi} \frac{dy}{1-y^2}\,, & \xi \in \mathbb{R}, \\ u(x) = \mathscr{P}^{-1}[U](x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-i\xi} d\xi, & x \in (-1,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $U \in L_2(\mathbb{R})$. Точные пояснения того, в каком смысле понимаются формулы (2.1), можно найти в [7], [8]. Ниже по умолчанию оригиналы обозначаем строчными буквами, а $\mathscr{P}$-образы соответствующими прописными буквами.

2.2. Равенство Парсеваля. Справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-1}^{1} u(y)\overline{g(y)}\,\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi. \tag{2.2}$$

В силу равенства Парсеваля принадлежность оригинала пространству $\widetilde{L}_2(-1,1)$ эквивалентна принадлежности $\mathscr{P}$-образа пространству $L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, отображение $\pi^{-1/2}\mathscr{P}$ является унитарным отображением пространства $\widetilde{L}_2(-1,1)$ на $L_2(\mathbb{R})$.

2.3. Связь с преобразованием Фурье. Преобразование $\mathscr{P}$ связано с преобразованием Фурье заменой переменной: пусть

$$x = \operatorname{th}\omega, \qquad \omega = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,, \quad \omega \in \mathbb{R}, \qquad u(x) = u_1(\omega). \tag{2.3}$$

Тогда $\mathscr{P}$-образ функции $u(x)$ и Фурье-образ функции $u_1(\omega)$ связаны соотношением

$$U(\xi) = \widehat{u}_1(2\xi). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что отображение $A\colon \widetilde{L}_2(-1,1) \to L_2(\mathbb{R})$, определенное по правилу $(Au)(\omega) = u_1(\omega)$, является изометрическим изоморфизмом:

$$\|u\|_{\widetilde{L}_2(-1,1)} = \|Au\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2.4. Преобразование производных. Пространства $\widetilde{H}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Определим теперь пространство $\widetilde{H}^n(-1,1) =: \widetilde{H}^n$ измеримых функций $u(x)$, имеющих обобщенные производные до порядка n на интервале $(-1,1)$ и таких, что

$$|||u|||^2_{\widetilde{H}^n} := \int_{-1}^{1} \sum_{m=0}^{n} |(1-x^2)^m u^{(m)}(x)|^2\,\frac{dx}{1-x^2} < \infty.$$

Тогда $\widetilde{H}^0(-1,1) = \widetilde{L}_2(-1,1)$. Очевидно, $\widetilde{H}^n(-1,1) \subset H^n_{\mathrm{loc}}(-1,1)$.

---

[4] В работах [7], [8] преобразование действовало с отрезка на мнимую ось.

Если $u \in \widetilde{H}^n$, то интегрированием по частям устанавливается формула

$$\mathscr{P}\left[\left((1-y^2)\,\frac{d}{dy}\right)^n u(y)\right](\xi) = (2i\xi)^n U(\xi). \tag{2.5}$$

Поясним это подробнее в случае $n=1$. Условие $u \in \widetilde{H}^1$ означает, что

$$|||u|||^2_{\widetilde{H}^1} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{|u(x)|^2}{1-x^2} + (1-x^2)|u'(x)|^2\right) dx < \infty. \tag{2.6}$$

Поскольку $\widetilde{H}^1 \subset H^1_{\mathrm{loc}}(-1,1)$, то в силу теоремы вложения Соболева любая функция $u \in \widetilde{H}^1$ абсолютно непрерывна внутри интервала $(-1,1)$. Покажем, что она непрерывна на замкнутом отрезке $[-1,1]$. Для любых $x, y \in (-1,1)$ имеем

$$\big||u(y)|^2 - |u(x)|^2\big| = \left|2\,\mathrm{Re}\int_x^y u(t)\overline{u'(t)}\,dt\right| \leqslant \int_x^y \left(\frac{|u(t)|^2}{1-t^2} + (1-t^2)|u'(t)|^2\right) dt,$$

и из условия (2.6) следует, что $\big||u(y)|^2 - |u(x)|^2\big| \to 0$ при $x \to 1$ и $y \to 1$. Тогда из критерия Коши вытекает существование конечного предела $\lim_{y\to 1-0}|u(y)|^2$. Этот предел равен нулю, так как иначе интеграл $\int_{-1}^{1}(|u(t)|^2/(1-t^2))\,dt$ разойдется. Следовательно, $u(y)$ стремится к нулю при $y \to 1-0$ и можно положить

$$u(1) := \lim_{y\to 1-0} u(y) = 0.$$

Аналогично проверяется, что существует предел

$$u(-1) := \lim_{y\to -1+0} u(y) = 0.$$

С учетом непрерывности функции u внутри интервала $(-1,1)$ получаем $u \in C[-1,1]$.

Теперь формула (2.5) при $n=1$ получается интегрированием по частям с учетом краевых условий $u(-1) = u(1) = 0$:

$$\mathscr{P}[(1-y^2)u'(y)](\xi) = \int_{-1}^{1} u'(y)\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{i\xi} dy = 2i\xi U(\xi), \qquad u \in \widetilde{H}^1. \tag{2.7}$$

Далее, из (2.2), (2.6) и (2.7) следует равенство

$$|||u|||^2_{\widetilde{H}^1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+4\xi^2)|U(\xi)|^2\,d\xi, \qquad u \in \widetilde{H}^1.$$

Аналогичным образом оправдывается формула (2.5) при $u \in \widetilde{H}^n$ с произвольным $n \in \mathbb{N}$. Выясняется, что квадрат нормы $|||u|||^2_{\widetilde{H}^n}$ допускает двусторонние оценки через

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^n} := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+4\xi^2)^n|U(\xi)|^2\,d\xi. \tag{2.8}$$

Замечание 1. Проведенные рассуждения позволяют дать другое определение пространств $\widetilde{H}^n$ (при всех $n \in \mathbb{Z}_+$) в терминах преобразования $\mathscr{P}$: $\widetilde{H}^n(-1,1)$ – это класс функций $u \in \widetilde{L}_2(-1,1)$, для которых конечна норма $\|u\|_{\widetilde{H}^n}$, определенная равенством (2.8). С учетом (2.4) очевидно, что отображение A (см. п. 2.3), суженное на $\widetilde{H}^n(-1,1)$, является изометрическим изоморфизмом пространства $\widetilde{H}^n(-1,1)$ на пространство Соболева $H^n(\mathbb{R})$:

$$\|u\|_{\widetilde{H}^n} = \|Au\|_{H^n(\mathbb{R})}, \qquad u \in \widetilde{H}^n(-1,1).$$

2.5. Пространства $\widetilde{H}^s$. Введем теперь пространство $\widetilde{H}^s(-1,1) =: \widetilde{H}^s$ с произвольным значком $s \geqslant 0$ как подпространство в $\widetilde{L}_2(-1,1) = \widetilde{H}^0$, состоящее из функций u, для которых

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s} := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+4\xi^2)^s|U(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Автоматически при $n \in \mathbb{Z}_+$ это согласуется с прежним определением (см. замечание 1). При всяком $s \geqslant 0$ отображение A, суженное на $\widetilde{H}^s(-1,1)$, является изометрическим изоморфизмом пространства $\widetilde{H}^s(-1,1)$ на пространство Соболева $H^s(\mathbb{R})$:

$$\|u\|_{\widetilde{H}^s} = \|Au\|_{H^s(\mathbb{R})}, \qquad u \in \widetilde{H}^s(-1,1).$$

Поскольку $H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant 0$, образует интерполяционную шкалу гильбертовых пространств, это же верно для пространств $\widetilde{H}^s(-1,1)$, $s \geqslant 0$.

Замечание 2. Напомним, что в пространстве $H^s(\mathbb{R})$ при $s \neq [s] =: k$ можно ввести норму во внутренних терминах, эквивалентную стандартной, следующим образом:

$$|u_1|^2_{\widetilde{H}^s(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}|u_1^{(j)}(\omega)|^2\,d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u_1^{(k)}(\omega)-u_1^{(k)}(\tau)|^2}{|\omega-\tau|^{1+2\{s\}}}\,d\omega\,d\tau, \qquad \{s\} = s-k.$$

Используя изоморфизм A, получаем, что в пространстве $\widetilde{H}^s(-1,1)$ при $s \neq [s] = k$ можно ввести норму, эквивалентную стандартной и заданную во внутренних терминах:

$$|u|^2_{\widetilde{H}^s} = \sum_{j=0}^{k}\int_{-1}^{1}|(1-x^2)^j u^{(j)}(x)|^2\,\frac{dx}{1-x^2} + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|(1-x^2)^k u^{(k)}(x)-(1-y^2)^k u^{(k)}(y)|^2}{|\ln((1-x)/(1+x))-\ln((1-y)/(1+y))|^{1+2\{s\}}}\,\frac{dx}{1-x^2}\,\frac{dy}{1-y^2}\,.$$

Впрочем, ниже мы такую норму использовать не будем.

С помощью изоморфизма A, используя плотность множества $C_0^\infty(\mathbb{R})$ в $H^s(\mathbb{R})$, получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *При всяком $s \geqslant 0$ множество $C_0^\infty(-1,1)$ плотно в пространстве $\widetilde{H}^s(-1,1)$.*

Нам понадобится следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы вложения Соболева.

Предложение 2. *Пусть $s > 1/2$. Тогда справедливо непрерывное вложение*

$$\widetilde{H}^s(-1,1) \subset C[-1,1].$$

При этом для любой функции $u \in \widetilde{H}^s(-1,1)$ выполнены краевые условия

$$u(-1) = u(1) = 0 \tag{2.9}$$

и оценка

$$\|u\|_{C[-1,1]} \leqslant C(s)\|u\|_{\widetilde{H}^s}, \qquad C(s) = \left(\frac{\Gamma(s-1/2)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Будем опираться на связь преобразования $\mathscr{P}$ с преобразованием Фурье (см. п. 2.3).

По теореме вложения Соболева при $s > 1/2$ пространство $H^s(\mathbb{R})$ непрерывно вкладывается в пространство равномерно непрерывных функций. Далее, для функции $u_1(\omega)$ из класса $H^s(\mathbb{R})$ выполнено $\widehat{u}_1 \in L_1(\mathbb{R})$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}_1(\xi)|\,d\xi \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^{-s}\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^{s}|\widehat{u}_1(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} = C_s\|u_1\|_{H^s(\mathbb{R})} < \infty. \tag{2.11}$$

Здесь $C_s = (2\pi^{3/2}\Gamma(s-1/2)/\Gamma(s))^{1/2}$. Тогда из формулы обращения

$$u_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\omega}\widehat{u}_1(\xi)\,d\xi$$

по лемме Римана–Лебега следует, что

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} u_1(\omega) = 0. \tag{2.12}$$

Таким образом, $u_1(\omega)$ принадлежит классу $C_0(\mathbb{R})$ равномерно непрерывных функций на оси, удовлетворяющих условиям (2.12). Из (2.11) и формулы обращения вытекает оценка

$$\max_{\omega\in\mathbb{R}}|u_1(\omega)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}_1(\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi}\,C_s\|u_1\|_{H^s(\mathbb{R})}. \tag{2.13}$$

Пусть теперь $u \in \widetilde{H}^s(-1,1)$, $s > 1/2$. Выполняя замены (2.3), получаем, что $(Au)(\omega) = u_1(\omega)$ принадлежит $H^s(\mathbb{R})$, причем $\|u_1\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|u\|_{\widetilde{H}^s}$. Тогда из доказанных выше свойств функции $u_1(\omega)$ следует, что $u(x)$ равномерно непрерывна на замкнутом интервале $[-1,1]$ и удовлетворяет граничным условиям (2.9). Из равенства

$$\|u\|_{C[-1,1]} = \max_{x\in[-1,1]}|u(x)| = \max_{\omega\in\mathbb{R}}|u_1(\omega)|$$

и неравенства (2.13) вытекает оценка (2.10).

2.6. Преобразование обобщенных функций. Преобразование $\mathscr{P}$ обобщенных функций вводится по двойственности аналогично определению преобразования Фурье обобщенных функций. Рассмотрим пространство $\mathscr{X}$, состоящее из функций $\psi \in C^\infty[-1,1]$ таких, что конечны полунормы

$$\sup_{x\in[-1,1]}(1-x^2)^n|\psi^{(n)}(x)|\left(1+\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^k$$

при всех $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Сходимость в $\mathscr{X}$ понимается как сходимость по этому набору полунорм. Пусть $\mathscr{X}'$ – класс обобщенных функций, сопряженный к $\mathscr{X}$ относительно спаривания в $\widetilde{L}_2(-1,1)$. Преобразование $\mathscr{P}$ переводит класс $\mathscr{X}$ на класс Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Пусть $u \in \mathscr{X}'$. Тогда $\mathscr{P}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ определяется соотношением

$$(\mathscr{P}u, \varphi)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, \mathscr{P}^*\varphi)_{\widetilde{L}_2(-1,1)} = \pi(u, \mathscr{P}^{-1}\varphi)_{\widetilde{L}_2(-1,1)}, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Ниже нам понадобится результат вычисления $\mathscr{P}$-образа обобщенной функции $v(y) = 1/y$ (понимаемой в смысле главного значения); см. [7; (1.9)]:

$$\mathscr{P}\left[\frac{1}{y}\right](\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{y}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{i\xi} \frac{dy}{1-y^2} = -i\pi \operatorname{cth} \pi\xi, \tag{2.14}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения и в точке $y = 0$, и на концах.

2.7. Формулы свертки. Для преобразования $\mathscr{P}$ справедливы следующие формулы свертки:

$$\mathscr{P}\left[\int_{-1}^{1} u(x)\, v\left(\frac{y-x}{1-xy}\right) \frac{dx}{1-x^2}\right](\xi) = U(\xi)V(\xi), \tag{2.15}$$

$$\mathscr{P}\left[\int_{-1}^{1} u'(x) v\left(\frac{y-x}{1-xy}\right) dx\right](\xi) = 2i\xi U(\xi)V(\xi). \tag{2.16}$$

В (2.15) предполагается, что $u \in \widetilde{L}_2(-1,1)$, $v \in \widetilde{L}_1(-1,1) \cap \widetilde{L}_2(-1,1)$. Класс $\widetilde{L}_1(-1,1)$ выделяется условием $\int_{-1}^{1} |v(t)|(1-t^2)^{-1}\, dt < \infty$. Формула (2.16) справедлива при тех же условиях на v и при $u \in \widetilde{H}^1$. Однако, как и в случае преобразования Фурье, условия применимости формул (2.15), (2.16) можно значительно расширить. В частности, можно ослабить требования на v, считая v обобщенной функцией и при необходимости усиливая требования на u. Мы не будем входить здесь в детали.

3. Обобщенное решение уравнения Прандтля. Подход с преобразованием $\mathscr{P}$

3.1. “Другое” определение обобщенного решения. Применим теперь преобразование $\mathscr{P}$ к исследованию задачи (1.1). Как и прежде, начнем с формальных рассмотрений. Пользуясь краевыми условиями $u(-1) = u(1) = 0$ и равенством $1 - x^2 = 1 - xt + x(t-x)$, преобразуем выражение в (1.1):

$$-(1-x^2)\int_{-1}^{1} \frac{u'(t)}{t-x}\, dt = \int_{-1}^{1} u'(t) \frac{1-xt}{x-t}\, dt. \tag{3.1}$$

Вид правой части позволяет применить формулу свертки (2.16) при $v(t) = t^{-1}$ для вычисления $\mathscr{P}$-образа функции (3.1). С учетом (2.14) получаем

$$\mathscr{P}\left[-(1-x^2)\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u'(t)}{t-x}\, dt\right](\xi) = \xi \operatorname{cth} \pi\xi\, U(\xi). \tag{3.2}$$

Умножим (1.1) на некоторую функцию $\overline{g(x)}$ и, интегрируя по отрезку, получаем в силу (2.2) и (3.2) следующее равенство:

$$\int_{-1}^{1} V(x)u(x)\overline{g(x)}\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth} \pi\xi\, U(\xi)\overline{G(\xi)}\, d\xi = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx. \tag{3.3}$$

Введем обозначение для полуторалинейной формы в левой части (3.3):

$$[u,g]_1 := \int_{-1}^{1} V(x)u(x)\overline{g(x)}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth}\pi\xi\, U(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi. \tag{3.4}$$

Естественный класс, в котором следует искать обобщенное решение, – это пространство $\widetilde{H}^{1/2}(-1,1)$; см. п. 2.5. Форма $[u,u]_1^{1/2}$ определяет в $\widetilde{H}^{1/2}$ норму, эквивалентную стандартной: с помощью оценок

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{3}\,\xi^2 \leqslant \xi^2 \operatorname{cth}^2 \pi\xi \leqslant \frac{1}{\pi^2} + \xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} V(x)|u(x)|^2\,dx &\leqslant M\int_{-1}^{1}\frac{|u(x)|^2}{1-x^2}\,dx\\ &= \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|U(\xi)|^2\,d\xi \leqslant M\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}}, \qquad u \in \widetilde{H}^{1/2},\end{aligned}$$

проверяется, что

$$\frac{1}{\pi}\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}} \leqslant [u,u]_1 \leqslant \left(M + \frac{1}{2}\right)\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}}, \qquad u \in \widetilde{H}^{1/2}.$$

Тогда полуторалинейную форму $[u,g]_1$, определенную равенством (3.4), можно принять за скалярное произведение в $\widetilde{H}^{1/2}$. В силу предложения 1 множество $C_0^\infty(-1,1)$ плотно в $\widetilde{H}^{1/2}$.

Запишем равенство (3.3) в виде

$$[u,g]_1 = (f,\,g).$$

Естественный класс для правой части f – это пространство $(\widetilde{H}^{1/2})^*$, сопряженное к $\widetilde{H}^{1/2}$ относительно спаривания в $L_2(-1,1)$. (Оно вводится по аналогии с определением пространства $(H_{00}^{1/2})^*$.) Норма в $(\widetilde{H}^{1/2})^*$ определяется соотношением

$$\|f\|_{(\widetilde{H}^{1/2})^*} = \sup_{0\neq u\in\widetilde{H}^{1/2}} \frac{|(f,u)|}{\|u\|_{\widetilde{H}^{1/2}}}\,.$$

Замечание 3. При $u,g \in C_0^\infty(-1,1)$ выполнено равенство $[u,g]_1 = [u,g]$, где $[u,g]$ определено в (1.6). Действительно, оба выражения $[u,g]$ и $[u,g]_1$ совпадают с интегралом от произведения левой части (1.1) на $\overline{g(x)}$. Поскольку $C_0^\infty(-1,1)$ плотно как в $H_{00}^{1/2}$, так и в $\widetilde{H}^{1/2}$, $[u,u]^{1/2}$ задает в $H_{00}^{1/2}$ норму, эквивалентную стандартной, а $[u,u]_1^{1/2}$ задает в $\widetilde{H}^{1/2}$ норму, эквивалентную стандартной, мы приходим к выводу о том, что $\widetilde{H}^{1/2} = H_{00}^{1/2}$ и $[u,g]_1 = [u,g]$ при всех $u,g \in H_{00}^{1/2}$. Тогда пространство $(\widetilde{H}^{1/2})^*$ совпадает с $(H_{00}^{1/2})^*$.

Можно дать определение обобщенного решения задачи (1.1), независимое от определения 1 на основании тождества (3.3).

Определение 2. Пусть $f \in (\widetilde{H}^{1/2})^*$. *Обобщенным решением задачи* (1.1) называется элемент $u \in \widetilde{H}^{1/2}$, удовлетворяющий интегральному тождеству (3.3) для всех функций $g \in \widetilde{H}^{1/2}$.

Следующая теорема равносильна теореме 1 и устанавливается аналогичным образом (с помощью теоремы Рисса).

Теорема 2. *Пусть коэффициент $V(x)$ удовлетворяет условиям* (1.2). *Тогда при любом $f \in (\widetilde{H}^{1/2})^*$ существует единственное обобщенное решение $u \in \widetilde{H}^{1/2}$ задачи* (1.1). *Решение подчинено оценке*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{1/2}} \leqslant \pi \|f\|_{(\widetilde{H}^{1/2})^*}. \tag{3.6}$$

Пример. Предположим, что $f \in L_{2,r}(-1,1)$, см. (1.17). Тогда

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_{L_{2,r}} \|g\|_{\widetilde{H}^{1/2}}, \qquad g \in \widetilde{H}^{1/2},$$

ср. (1.18). Значит, $L_{2,r} \subset (\widetilde{H}^{1/2})^*$, причем $\|f\|_{(\widetilde{H}^{1/2})^*} \leqslant \|f\|_{L_{2,r}}$. Вместе с (3.6) это влечет оценку

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{1/2}} \leqslant \pi \|f\|_{L_{2,r}},$$

ср. (1.19). Ниже нам понадобится также оценка

$$\int_{-1}^{1} V(x)|u(x)|^2\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\|f\|^2_{L_{2,r}}, \tag{3.7}$$

которая вытекает из тождества $[u,u]_1 = (f,u)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} V(x)|u(x)|^2\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth}\pi\xi\,|U(\xi)|^2\,d\xi \\
&\quad = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{u(x)}\,dx \leqslant \|f\|_{L_{2,r}}\|u\|_{\widetilde{L}_2} = \|f\|_{L_{2,r}}\biggl(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|U(\xi)|^2\,d\xi\biggr)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \|f\|_{L_{2,r}}\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth}\pi\xi\,|U(\xi)|^2\,d\xi\biggr)^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{4}\|f\|^2_{L_{2,r}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth}\pi\xi\,|U(\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством Парсеваля (2.2), нижней оценкой (3.5) и элементарным неравенством $ab \leqslant \alpha a^2 + (1/4\alpha)b^2$ (для $a, b > 0$ с произвольным $\alpha > 0$).

В следующем пункте мы покажем, что при условии $f \in L_{2,r}$ решение является более гладким.

3.2. Повышение гладкости. В настоящем пункте мы предполагаем, что $f \in L_{2,r}(-1,1)$, т.е. выполнено (1.17). Очевидно, пространство $L_{2,r}(-1,1)$ сопряжено к $\widetilde{L}_2(-1,1)$ относительно спаривания в $L_2(-1,1)$. Иначе говоря, $L_{2,r}(-1,1) = (\widetilde{H}^0)^*$, причем

$$\|f\|_{(\widetilde{H}^0)^*} = \|f\|_{L_{2,r}}.$$

Запишем интегральное тождество (3.3) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi \operatorname{cth}\pi\xi\, U(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi = \int_{-1}^{1}(f(x) - V(x)u(x))\overline{g(x)}\,dx, \qquad g \in \widetilde{H}^{1/2}, \tag{3.8}$$

и обозначим

$$Q(\xi) = \mathscr{P}[(1-x^2)(f(x) - V(x)u(x))](\xi) = \int_{-1}^{1}(f(x) - V(x)u(x))\biggl(\frac{1-x}{1+x}\biggr)^{i\xi}\,dx.$$

Легко видеть, что функция $(1-x^2)(f(x)-V(x)u(x))$ принадлежит $\widetilde{L}_2(-1,1)$, а потому $Q \in L_2(\mathbb{R})$. В силу (1.2), (2.2) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Q(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)|f(x)-V(x)u(x)|^2\,dx \\ &\leqslant 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)|f(x)|^2\,dx + 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)V(x)\cdot V(x)|u(x)|^2\,dx \\ &\leqslant C_1\int_{-1}^{1}(1-x^2)|f(x)|^2\,dx, \end{aligned}\tag{3.9}$$

где $C_1 = 2 + (\pi/2)M$.

Теперь, пользуясь (2.2), представим тождество (3.8) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\;\mathrm{cth}\,\pi\xi\,U(\xi)\,\overline{G(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi)\,\overline{G(\xi)}\,d\xi, \quad G \in \mathscr{P}[\widetilde{H}^{1/2}]. \tag{3.10}$$

При $N > 0$ рассмотрим срезку

$$w(\xi,\,N) = \begin{cases} 1, & |\xi| < N, \\ 0, & |\xi| > N+1, \\ -\xi+N+1, & N < \xi < N+1, \\ \xi+N+1, & -N-1 < \xi < -N, \end{cases}$$

и пробную функцию вида

$$G_N(\xi) = \xi\,\mathrm{cth}\,\pi\xi\,U(\xi)w(\xi,N). \tag{3.11}$$

Проверим, что $G_N \in \mathscr{P}[\widetilde{H}^{1/2}]$. Пусть $g_N = \mathscr{P}^{-1}(G_N)$. Тогда с учетом (3.5) выполнено

$$\begin{aligned}\|g_N\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+4\xi^2)^{1/2}|G_N(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-N-1}^{N+1}(1+4\xi^2)^{1/2}\xi^2\,\mathrm{cth}^2\,\pi\xi|U(\xi)|^2\,d\xi \leqslant C(N)\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}}, \end{aligned}\tag{3.12}$$

где $C(N) = 1/\pi^2 + (N+1)^2$. Таким образом, $g_N \in \widetilde{H}^{1/2}$, и мы вправе подставить $G_N \in \mathscr{P}[\widetilde{H}^{1/2}]$ в качестве пробной функции в тождество (3.10). Получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,\mathrm{cth}^2\,\pi\xi|U(\xi)|^2w(\xi,N)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\xi\,\mathrm{cth}\,\pi\xi\,Q(\xi)w(\xi,N)\overline{U(\xi)}\,d\xi. \tag{3.13}$$

Далее, по аналогии с (3.12) легко убедиться, что функция $\widetilde{G}_N(\xi) = Q(\xi)w(\xi,N)$ принадлежит классу $\mathscr{P}[\widetilde{H}^{1/2}]$. Из тождества (3.10) с $G(\xi) = \widetilde{G}_N(\xi)$ вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,\mathrm{cth}\,\pi\xi\,Q(\xi)w(\xi,N)\overline{U(\xi)}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}|Q(\xi)|^2w(\xi,N)\,d\xi. \tag{3.14}$$

Вместе с (3.13) это влечет

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,\mathrm{cth}^2\,\pi\xi\,|U(\xi)|^2w(\xi,N)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}|Q(\xi)|^2w(\xi,N)\,d\xi. \tag{3.15}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \operatorname{cth}^2 \pi\xi |U(\xi)|^2 w(\xi, N)\, d\xi \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi)|^2\, d\xi. \tag{3.16}$$

Устремляя N к бесконечности и применяя теорему Фату, получаем, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \operatorname{cth}^2 \pi\xi |U(\xi)|^2\, d\xi$ сходится и подчинен оценке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \operatorname{cth}^2 \pi\xi |U(\xi)|^2\, d\xi \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi)|^2\, d\xi. \tag{3.17}$$

Из (3.9) и (3.17) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \operatorname{cth}^2 \pi\xi |U(\xi)|^2\, d\xi \leqslant \pi C_1 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)|f(x)|^2\, dx.$$

Отсюда с учетом (2.8) и (3.5) вытекает включение $u \in \widetilde{H}^1$ и оценка

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1} \leqslant C_2 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)|f(x)|^2\, dx, \qquad C_2 = \pi^2 C_1 = \pi^2\biggl(2 + \frac{\pi}{2}\, M\biggr).$$

В силу предложения 2 решение непрерывно на $[-1, 1]$, причем $u(-1) = u(1) = 0$. Отметим, что решение $u \in \widetilde{H}^1$ удовлетворяет тождеству (3.3) при любой пробной функции $g \in \widetilde{H}^0$. Кроме того, для него можно использовать исходную запись задачи (1.1) (уравнение выполнено почти везде, краевые условия выполнены, а потому нет нужды заменять задачу интегральным тождеством). Такое решение называют *сильным*.

В итоге мы установили следующую теорему о повышении гладкости решения.

Теорема 3. *Пусть коэффициент $V(x)$ удовлетворяет условиям* (1.2). *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию* (1.17). *Тогда обобщенное решение $u(x)$ задачи* (1.1) *принадлежит классу $\widetilde{H}^1(-1, 1)$ и справедлива оценка*

$$\int_{-1}^{1} \biggl(\frac{|u(x)|^2}{1 - x^2} + (1 - x^2)|u'(x)|^2\biggr)\, dx \leqslant C_2 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)|f(x)|^2\, dx.$$

Постоянная $C_2 = \pi^2(2 + (\pi/2)M)$ зависит только от константы M из условия (1.2).

3.3. Интерполяция. Обозначим оператор, сопоставляющий правой части f решение задачи (1.1), через R. Теоремы 2 и 3 означают, что оператор R непрерывен из $(\widetilde{H}^{1/2})^*$ в $\widetilde{H}^{1/2}$ и из $(\widetilde{H}^0)^*$ в $\widetilde{H}^1$. При этом

$$\|R\|_{(\widetilde{H}^{1/2})^* \to \widetilde{H}^{1/2}} \leqslant \pi, \tag{3.18}$$

$$\|R\|_{(\widetilde{H}^0)^* \to \widetilde{H}^1} \leqslant \sqrt{C_2}\,. \tag{3.19}$$

Обозначим через $(\widetilde{H}^s)^*$ пространство, сопряженное к $\widetilde{H}^s$ относительно спаривания в $L_2(-1, 1)$. Интерполируя между (3.18) и (3.19), получаем

$$\|R\|_{(\widetilde{H}^{1/2-\theta})^* \to \widetilde{H}^{1/2+\theta}} \leqslant C_\theta = \pi^{1-2\theta} C_2^\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Подытожим результат.

Теорема 4. *Пусть коэффициент* $V(x)$ *удовлетворяет условиям* (1.2). *Пусть* $0 \leqslant \theta \leqslant 1/2$ *и* $f \in (\widetilde{H}^{1/2-\theta})^*$. *Тогда обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (1.1) *принадлежит классу* $\widetilde{H}^{1/2+\theta}(-1,1)$, *причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{1/2+\theta}} \leqslant C_\theta \|f\|_{(\widetilde{H}^{1/2-\theta})^*}.$$

Постоянная C_θ *зависит только от константы* M *из условия* (1.2) *и от* θ.

Из теоремы 4 и предложения 2 вытекает следствие.

Следствие 1. *При условии* $f \in (\widetilde{H}^{1/2-\theta})^*$, *где* $0 < \theta \leqslant 1/2$, *решение* $u(x)$ *задачи* (1.1) *непрерывно на замкнутом отрезке* $[-1,1]$, *причем* $u(-1) = u(1) = 0$. *Выполнена оценка*

$$\|u\|_{C[-1,1]} \leqslant C\left(\frac{1}{2}+\theta\right) C_\theta \|f\|_{(\widetilde{H}^{1/2-\theta})^*}.$$

Здесь $C(1/2+\theta)$ *– это постоянная* $C(s)$ *из* (2.10) *при* $s = 1/2+\theta$.

3.4. Двойственность. Для полноты изложения рассмотрим так называемое "очень слабое" решение из класса $\widetilde{L}_2(-1,1)$, считая, что $f \in (\widetilde{H}^1)^*$.

Определение 3. Пусть $f \in (\widetilde{H}^1)^*$. Функция $u \in \widetilde{L}_2(-1,1)$ называется *очень слабым решением задачи* (1.1), если выполнено тождество (3.3) для любой пробной функции $g \in \widetilde{H}^1(-1,1)$.

Теорема 5. *Пусть коэффициент* $V(x)$ *удовлетворяет условиям* (1.2). *При любом* $f \in (\widetilde{H}^1)^*$ *существует единственное очень слабое решение* $u \in \widetilde{L}_2(-1,1)$ *задачи* (1.1). *При этом выполнена оценка*

$$\|u\|_{\widetilde{L}_2} \leqslant \sqrt{C_2}\, \|f\|_{(\widetilde{H}^1)^*}. \tag{3.20}$$

Доказательство. Пусть $R\colon (\widetilde{H}^0)^* \to \widetilde{H}^1$ – разрешающий оператор из теоремы 3. Тогда корректно определен непрерывный сопряженный оператор $R^*\colon (\widetilde{H}^1)^* \to \widetilde{H}^0$, т.е.

$$(Rg, f) = (g, R^*f), \qquad g \in (\widetilde{H}^0)^*, \quad f \in (\widetilde{H}^1)^*. \tag{3.21}$$

Фиксируем $f \in (\widetilde{H}^1)^*$. Проверим, что $u = R^*f \in \widetilde{H}^0$ является очень слабым решением задачи (1.1).

Пусть $g \in (\widetilde{H}^0)^*$. Тогда $v := Rg \in \widetilde{H}^1$ удовлетворяет тождеству

$$[v,u]_1 = (g,u) \qquad \text{для всех} \quad u \in \widetilde{H}^0.$$

Здесь подразумевается распространение полуторалинейной формы $[v,u]_1$ (см. (3.4)) на пары $v \in \widetilde{H}^1$, $u \in \widetilde{H}^0$. Иначе говоря,

$$[Rg,u]_1 = (g,u) \qquad \text{для всех} \quad g \in (\widetilde{H}^0)^*, \quad u \in \widetilde{H}^0. \tag{3.22}$$

Подставляя в (3.22) функцию $u = R^*f \in \widetilde{H}^0$, получаем

$$[Rg,u]_1 = (g,R^*f) = (Rg,f) \qquad \text{для всех} \quad g \in (\widetilde{H}^0)^*. \tag{3.23}$$

Мы воспользовались соотношением (3.21). Учтем, что если g пробегает $(\widetilde{H}^0)^*$, то $v=Rg$ пробежит $\widetilde{H}^1$. Поэтому тождество (3.23) можно переписать в виде

$$[v,u]_1=(v,f) \qquad \text{для всех} \quad v\in\widetilde{H}^1,$$

что равносильно (за счет эрмитовости формы (3.4)) тождеству

$$[u,v]_1=(f,v) \qquad \text{для всех} \quad v\in\widetilde{H}^1.$$

Это и означает, что $u=R^*f\in\widetilde{H}^0$ является очень слабым решением задачи (1.1).

Для доказательства единственности предположим, что $u\in\widetilde{L}_2(-1,1)$ является очень слабым решением задачи (1.1) при $f=0$. По аналогии с (3.8)–(3.10) перепишем тождество для u в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,\mathrm{cth}\,\pi\xi\,U(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi)\overline{G(\xi)}\,d\xi, \qquad G\in\mathscr{P}[\widetilde{H}^1]. \tag{3.24}$$

При этом $Q\in L_2(\mathbb{R})$ и $\|Q\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\sqrt{\pi}M\|u\|_{\widetilde{L}_2}$. Подставляя в (3.24) в качестве пробной функцию $G_N(\xi)$ вида (3.11) (которая принадлежит $\mathscr{P}[\widetilde{H}^1]$), по аналогии с (3.13)–(3.17) устанавливаем повышение гладкости решения, т.е. включение $u\in\widetilde{H}^1$. Теперь из теоремы 2 (в части единственности) следует, что $u=0$.

Оценка (3.20) следует из (3.19) и из равенства $\|R^*\|_{(\widetilde{H}^1)^*\to\widetilde{H}^0}=\|R\|_{(\widetilde{H}^0)^*\to\widetilde{H}^1}$.

Отметим, что из единственности очень слабого решения следует, что разрешающий оператор $R^*\colon(\widetilde{H}^1)^*\to\widetilde{H}^0$ является распространением оператора $R\colon(\widetilde{H}^{1/2})^*\to\widetilde{H}^{1/2}$. Сохраняя за распространенным оператором прежнее обозначение R, запишем неравенство (3.20) в виде

$$\|R\|_{(\widetilde{H}^1)^*\to\widetilde{H}^0}\leqslant\sqrt{C_2}\,. \tag{3.25}$$

Интерполируя между (3.25) и (3.19), получаем

$$\|R\|_{(\widetilde{H}^{1-s})^*\to\widetilde{H}^s}\leqslant\sqrt{C_2}\,, \qquad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

Мы приходим к следующему итоговому результату, содержащему в себе утверждения всех предыдущих теорем.

Теорема 6. *Пусть коэффициент $V(x)$ удовлетворяет условиям* (1.2). *Пусть $0\leqslant s\leqslant 1$. При любом $f\in(\widetilde{H}^{1-s})^*$ существует единственное решение $u\in\widetilde{H}^s(-1,1)$ задачи* (1.1). *При этом выполнена оценка*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^s}\leqslant\sqrt{C_2}\,\|f\|_{(\widetilde{H}^{1-s})^*}.$$

В теореме 6 при $0\leqslant s<1/2$ решение понимается как очень слабое в смысле определения 3, при $1/2\leqslant s<1$ решение понимается как слабое (или обобщенное) в смысле определения 2, а при $s=1$ решение понимается как сильное.

Авторы благодарны А. И. Назарову и Ф. В. Петрову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. В. Голубев, *Лекции по теории крыла*, Гостехиздат, М., 1949.

[2] K. Stewartson, “A note on lifting line theory”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **13** (1960), 49–56.

[3] И. П. Краснов, *Расчетные методы судового магнетизма и электротехники*, Судостроение, Л., 1986.

[4] А. И. Каландия, *Математические методы двумерной упругости*, Наука, М., 1973.

[5] J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, J. L. Vazquez, “The fractional Schrödinger equation with general nonnegative potentials. The weighted space approach”, *Nonlinear Anal.*, **177**, Part A (2018), 325–360.

[6] M. M. Fall, “Regularity estimates for nonlocal Schrödinger equations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **39**:3 (2019), 1405–1456.

[7] В. Э. Петров, “Интегральное преобразование на отрезке”, *Проблемы матем. анализа*, **31** (2005), 67–95.

[8] В. Э. Петров, “Обобщенное уравнение Трикоми, как уравнение свертки”, *Докл. АН*, **411**:2 (2006), 173–177.

[9] I. V. Andronov, V. E. Petrov, “Diffraction by an impedance strip at almost grazing incidence”, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, **64**:8 (2016), 3562–3572.

[10] В. Э. Петров, “О точных решениях уравнений Ганкеля”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 170–207.

[11] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.

В. Э. Петров
ООО ТВЭЛЛ, г. Санкт-Петербург
E-mail: petrov_twell@list.ru

Поступило
05.05.2021
Принято к публикации
25.05.2021

Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: t.suslina@spbu.ru