XXX Всероссийская
научно-практическая конференция

«Университетская гимназия»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

18-19 марта 2021

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Академическая гимназия
им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

Материалы
XXX Всероссийской научно-практической конференции
«Университетская гимназия»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

18-19 марта 2021 г.
Санкт-Петербург

достаточно мала, но есть способы увеличить вероятность выигрыша.

Литература:

1. Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв Теория вероятностей и математическая статистика. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2018.

2. Д. К. Фаддеев, М. С Никулин, И. Ф. Соколовский Элементы высшей математики для школьников. М.: "Наука", 1987.

3. Ю. Кривин Маленький трактат о случае и случайностях. Минск: "Дискурс", 2019.

4. https://www.chem-astu.ru/chair/study/probabilitytheory/3_Theorems_of_addition_and_multiplication.shtml

5. https://foxford.ru/wiki/matematika/chislo-sochetaniy

6. https://winstolot.ru/lotteries/4x20/

Бросание шарика на доску Гальтона

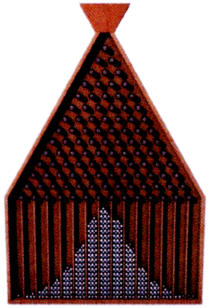
Татьяненко А.Д.
Академическая гимназия им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

Научный руководитель: Звонарев Н.К., канд.физ.-мат.наук, старший преподаватель кафедры статистического моделирования СПбГУ

Что такое доска Гальтона?

Доска Гальтона[1,2] — устройство (см. рисунок справа), изобретённое английским учёным Фрэнсисом Гальтоном для демонстрации нормального закона распределения. Доска состоит из N рядов гвоздиков и лунок в ряду N+1.

Сверху на гвоздики забрасывается шарик; после попадания на гвоздик он падает на правый или на левый относительно предыдущего гвоздик следующего ряда. Так происходит до тех пор, пока шарик не попадёт в одну из лунок, расположенных в нижнем ряду. Бросание множества шариков вместо одного позволяет моделировать дискретные распределения.



Постановка задачи

Рассмотрим обобщённую доску Гальтона, в которой для каждого гвоздика можно задать вероятность поворота направо.

Если (i, j) гвоздик в i-ом ряду $(1 \leq i \leq N)$ в j-ой позиции $(1 \leq j \leq i)$, то шарик, оказавшись на нём, с вероятностью $P_{i,j}$ падает на гвоздик $(i + 1, j + 1)$, либо с вероятностью $(1 - P_{i,j})$ на гвоздик $(i + 1, j)$, пока не упадёт в лунку (достигнет ряда N+1).

Возникают следующие вопросы:

1. При каком наборе вероятностей $P_{i,j}$ шарик с одинаковой вероятностью $1/(N + 1)$ попадает в каждую из лунок?

2. С вероятностями P_1, P_2, …, P_{N+1} в соответствующие лунки?

Актуальность работы

Модифицированная таким образом доска Гальтона позволяет моделировать равномерное либо произвольное дискретное распределение с N исходами, используя только последовательность из распределений Бернулли с вычисленными мной вероятностями успеха. Это может использоваться, например, для генерации случайных чисел.

Общие замечания

Поскольку повороты на разных гвоздиках являются независимыми событиями, в одном маршруте вероятности этих событий перемножаются [3]. Прохождения по самим маршрутам — непересекающиеся события, поэтому вероятности этих событий складываются.

Маршруты в доске Гальтона можно получить, представив её взвешенным ориентированным графом, в котором вершины (узлы) соответствуют гвоздикам и лункам, а рёбра соединяют каждый гвоздик с двумя гвоздикам, на которые с него может упасть шарик. Вес ребра — вероятность прохождения шарика по нему, если шарик уже на гвоздике, из вершины, соответствующей которому, выходит это ребро [4].

Дискретное равномерное распределение, вероятность поворота зависит от N

Ограничим возможные маршруты следующим правилом: шарик, однажды повернув направо, далее не поворачивает налево.

Рассмотрев вероятности попадания в несколько лунок, предположим и докажем корректность следующей формулы:

$$P_{i,1} = \frac{1}{N+2-i}, \qquad \text{где} \quad i \in [1; N]. \qquad (1)$$

Для остальных гвоздиков по использующемуся ограничению маршрутов получаем:

$$P_{i,j} = 1 \quad \text{для} \quad i \in [2; N], j \in [2;\ i]. \qquad (2)$$

Дискретное равномерное распределение, вероятность поворота не зависит от N

Поскольку вероятности $P_{i,j}$ равны между собой на досках с разным N, гвоздики (i, j) неразличимы вне зависимости от того, на какой доске они находятся (если, разумеется, они существуют на этой доске). В таком случае выдвинем и докажем предположение, что на всех рядах каждой из таких досок достигается дискретное равномерное распределение.

Рассмотрев несколько вероятностей попадания в узлы ряда $i + 1$ с ряда i, предположим и докажем корректность следующей формулы:

$$P_{i,j} = \frac{j}{i+1}, \qquad \text{где } i \in [1; N], j \in [1;\ i]. \qquad (3)$$

Заданное дискретное распределение, вероятность поворота зависит от N

Использовав ограничение, аналогичное таковому в пункте №5, рассмотрим вероятности попадания в несколько лунок.

Выполнив некоторые преобразования, получим формулу:

$$P_{i,1} = \frac{P_{N+2-i}}{1 - \sum_{k=N+3-i}^{N+1} P_k}, \text{где } i \in [2; N]. \qquad (4)$$

Для остальных гвоздиков по такому ограничению маршрутов получаем формулу (2).

Результаты

В ходе работы были получены и доказаны следующие соотношения:

- Формула (1) для дискретного равномерного распределения, где $P_{i,j}$ зависит от N,
- Формула (3) для дискретного равномерного распределения, где $P_{i,j}$ не зависит от N,

•Формула (4) для некоторого дискретного распределения, соответствующего произвольному набору вероятностей попадания в лунку $P_1, P_2, \ldots, P_{N+1}$.

Список используемой литературы

1. Лютикас В.С., *Школьнику о теории вероятностей*, 2-е изд., М.: Просвещение, 1983, гл. I.

2. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В., *Введение в теорию вероятностей*, М: Наука, 1982, гл. 1, §5.

3. Ширяев А.Н., *Вероятность — 1*, 3-е изд., М: МЦНМО, 2004, гл. 1, §1–3.

Одна олимпиадная задача о минимизации сумм.

Широких А.А.
Академическая гимназия им. Д.К. Фаддеева СПБГУ

Научный руководитель: Флоринский А.А., канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры математического анализа СПбГУ.

Исходным пунктом проекта послужила задача, предложенная школьникам на XXX Межрегиональной олимпиаде школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии и состоящая в следующем: “На координатной прямой отмечены 9 точек с координатами 2; 25; 7; −3; 12; 19; −5; 8; 9. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 9 точек минимальна”.

В проекте рассматриваются естественные обобщения приведенной задачи. Такие обобщения возникают, во-первых, если рассматривать вместо указанного набора из девяти точек произвольный конечный набор точек на прямой. Во-вторых, вместо