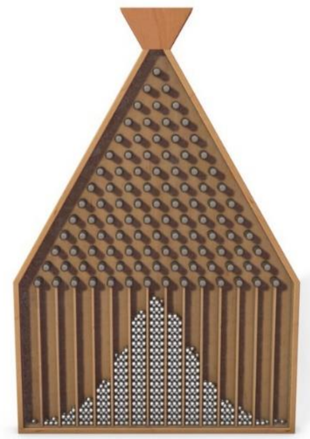
Бросание шарика на доску Гальтона

Татьяненко Алексей Дмитриевич

Академическая гимназия им. Д.К. Фаддеева СПбГУ

Научный руководитель: Звонарёв Никита Константинович, к. ф.-м. н, старший преподаватель кафедры статистического моделирования СПбГУ

1. *Что такое доска Гальтона?*



Доска Гальтона[1][2] — устройство (см. рисунок справа), изобретённое английским учёным Фрэнсисом Гальтоном для демонстрации нормального закона распределения. Доска состоит из N рядов гвоздиков и лунок в ряду N+1.

Сверху на гвоздики забрасывается шарик; после попадания на гвоздик он падает на правый или на левый относительно предыдущего гвоздик следующего ряда. Так происходит до тех пор, пока шарик не попадёт в одну из лунок, расположенных в нижнем ряду. Бросание множества шариков вместо одного позволяет моделировать дискретные распределения.

2. *Постановка задачи*

Рассмотрим обобщённую доску Гальтона, в которой для каждого гвоздика можно задать вероятность поворота направо.

Если (i,j) гвоздик в i-ом ряду ($1 \le i \le N$) в j-ой позиции ($1 \le j \le i$), то шарик, оказавшись на нём, с вероятностью $P_{i,j}$ падает на гвоздик $(i+1, j+1)$, либо с вероятностью $(1 - P_{i,j})$ на гвоздик $(i+1, j)$, пока не упадёт в лунку (достигнет ряда N+1).

В таком случае:
1. При каком наборе вероятностей $P_{i,j}$ шарик с одинаковой вероятностью $1/(N+1)$ попадает в каждую из лунок?
2. С вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_{N+1}$ в соответствующие лунки?

3. *Актуальность работы*

Модифицированная таким образом доска Гальтона позволяет моделировать равномерное либо произвольное дискретное распределение с N исходами используя только последовательность из распределений Бернулли с вычисленными мной вероятностями успеха. Это может использоваться, например, для генерации случайных чисел.

4. *Общие замечания*

Поскольку повороты на разных гвоздиках являются независимыми событиями, в одном маршруте вероятности этих событий перемножаются.[3] Прохождения по самим маршрутам — непересекающиеся события, поэтому вероятности этих событий складываются.

Маршруты в доске Гальтона можно получить, представив её взвешенным ориентированным графом, в котором вершины (узлы) соответствуют гвоздикам и лункам, а рёбра соединяют каждый гвоздик с двумя гвоздикам, на которые с него может упасть шарик. Вес ребра — вероятность прохождения шарика по нему, если шарик уже на гвоздике, из вершины, соответствующей которому, выходит это ребро.[4]

5. *Дискретное равномерное распределение, вероятность поворота зависит от N*

Ограничим возможные маршруты следующим правилом: шарик, однажды повернув направо, далее не поворачивает налево.

Рассмотрев вероятности попадания в несколько лунок, предположим и докажем корректность следующей формулы:

$$P_{i,1} = \frac{1}{N+2-i}, \qquad \text{где} \quad i \in [1;N]. \tag{1}$$

Для остальных гвоздиков по использующемуся ограничению маршрутов получаем:

$$P_{i,j} = 1 \quad \text{для} \quad i \in [2;N], j \in [2;\ i]. \tag{2}$$

6. *Дискретное равномерное распределение, вероятность поворота не зависит от N*

Поскольку вероятности $P_{i,j}$ равны между собой на досках с разным N, гвоздики (i,j) неразличимы вне зависимости от того, на какой доске они (если, разумеется, они существуют на этой доске). В таком случае выдвинем и докажем предположение, что на всех рядах каждой из таких досок достигается дискретное равномерное распределение.

Рассмотрев несколько вероятностей попадания в узлы ряда $i+1$ с ряда i, предположим и докажем корректность следующей формулы:

$$P_{i,j} = \frac{j}{i+1}, \qquad \text{где} \quad i \in [1;N], j \in [1;\ i]. \tag{3}$$

7. *Заданное дискретное распределение, вероятность поворота зависит от N*

Использовав ограничение, аналогичное таковому в пункте №5, рассмотрим вероятности попадания в несколько лунок.

Выполнив некоторые преобразования, получим формулу:

$$P_{i,1} = \frac{P_{N+2-i}}{1-\sum_{k=N+3-i}^{N+1} P_k}, \text{где } i \in [2;N]. \tag{4}$$

Для остальных гвоздиков по такому ограничению маршрутов получаем формулу (2).

Результаты

В ходе работы были получены:

- дискретное равномерное распределение, где $P_{i,j}$ зависит от N,
- дискретное равномерное распределение, где $P_{i,j}$ не зависит от N,
- некоторое дискретное распределение ($P_{i,j}$ зависит от N), соответствующее произвольному набору вероятностей попадания в лунку P_1, P_2, …, P_{N+1}.

Список используемой литературы

1. Лютикас В.С., *Школьнику о теории вероятностей,* 2-е изд., М.: Просвещение, 1983, гл. I.
2. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В., *Введение в теорию вероятностей,* М: Наука, 1982, гл. 1, §5.
3. Ширяев А.Н., *Вероятность — 1,* 3-е изд., М: МЦНМО, 2004, гл. 1, §1–3.
4. Карпов Д.В., *Теория графов*. [Рукопись] https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf