Санкт−Петербургский государственный университет

Т. А. Ефимова

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методическое пособие

Санкт−Петербург
2013

УДК 517.37
Е91

Утверждено
на заседании кафедры общей математики и информатики
математико−механического факультета СПбГУ
3 июля 2013 года.

Автор-составитель:
канд. физ.−мат. наук, доц. Т.А. Ефимова

Рецензент:
доктор физ.−мат. наук, проф. М.А. Нарбут (СПбГУ)

Ефимова Т. А.

Е91 Кратные интегралы. Методическое пособие. / Автор-составитель — Т.А. Ефимова. — СПб.: Издательство ВВМ, 2013. — 98 с.

ISBN 978-5-9651-0754-4

Пособие состоит из четырех глав. Главы 1−3 разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, основные формулы, подробно разбираются решения типовых примеров, предлагаются примеры для самостоятельного решения и даются ответы к ним. В главе 4 приводятся варианты контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений нематематических факультетов университетов. С помощью данного пособия студенты смогут самостоятельно изучить тему “Кратные интегралы”.

ISBN 978-5-9651-0754-4

© Т.А. Ефимова? 2013

Оглавление

Введение

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университетов (дневного, вечернего и заочного отделений), изучающих тему “Кратные интегралы”. Оно составлено на основе опыта автора чтения лекций и проведения практических занятий на географическом факультете СПбГУ.

Включенный в пособие материал рассчитан на наиболее насыщенную программу курса. В некоторых случаях отдельные вопросы могут быть исключены из курса, особенно при малом количестве академических часов или при недостаточной математической подготовке студентов.

Пособие состоит из четырех глав: двойной интеграл − глава 1, тройной интеграл – глава 2, геометрические и физические приложения кратных интегралов − глава 3, варианты контрольных работ − глава 4.

Предполагается, что студенты, изучающие материал данного пособия, знают теорию неопределенного и определенного интеграла и имеют навыки интегрирования. Для удобства читателей основные вопросы этой теории изложены в приложении. Приложение содержит: определение неопределенного интеграла, таблицу неопределенных интегралов, определение определенного интеграла, основную формулу интегрального исчисления (формулу Ньютона– Лейбница), а также некоторые методы вычисления интегралов (формулы замены переменной и интегрирования по частям.

Отметим, что эти вопросы можно изучить с помощью одного из учебников [1]− [3].

Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, формулировки основных теоретических вопросов и необходимые формулы (доказательства теоретических вопросов не приводятся, их можно найти в одном из учебников [1]−[3]), подробно разбираются решения типовых примеров, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним. Нумерация формул и рисунков сквозная. В каждой главе примеры нумеруются двумя цифрами: первая− номер параграфа, вторая

− номер примера. В приложении нумерация формул и примеров собственная.

С помощью пособия студенты могут самостоятельно усвоить основные теоретические вопросы, стандартные приемы решения задач по теории кратных интегралов, а также проверить свои знания, решая контрольные работы из главы 4.

Глава I.
Двойной интеграл

§ 1. Двойной интеграл и его свойства

Пусть D – ограниченная замкнутая область плоскости $\left(S(D) - \text{площадь } D\right)$ и $f(N)$ − функция, определенная в области D. Разобьем область D на части $S_1, S_2, ..., S_n$ непрерывными кривыми. Пусть ΔS_i − площадь S_i, точка $N_i \in S_i$ $\left(i = 1, ..., n\right)$ (рис. 1). $\lambda = \max\limits_{i=1,...,n} \Delta S_i$.

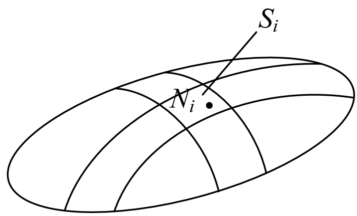


Рис. 1

Выражение вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(N_i\right)\Delta S_i \tag{1}$$

называется интегральной суммой функции $f(N)$ в области D, соответствующей данному разбиению области D на части и данному выбору точек N_i.

Функция $f(N)$ называется интегрируемой, если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения на части и от выбора точек N_i.

Соответствующий предел называется двойным интегралом функции $f(N)$ и обозначается $\iint\limits_D f(N)ds$ (читается двойной интеграл функции $f(N)$ по области D, ds называется элементом площади, $f(N)$ –подынтегральная функция, $f(N)ds$ – подынтегральное выражение). Итак,

$$\iint\limits_D f(N)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta S_i \qquad (2)$$

Отметим, что интегрируемая в области функция ограничена в этой области.

Непрерывная в области D функция интегрируема, ограниченная в области D функция, имеющая в этой области разрывы лишь на конечном числе линий, интегрируема в этой области.

Сравните определение двойного интеграла с определением определенного интеграла функции одной переменной по промежутку (приложение § 1)

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла (приложение § 1). Перечислим эти свойства.

Линейность интеграла

$$\iint\limits_D \left(\alpha f(N)+\beta g(N)\right)ds = \alpha\iint\limits_D f(N)ds + \beta\iint\limits_D g(N)ds$$

Отсюда следует, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

2. Аддитивность интеграла

Если область D разбита на части D_1 и D_2 непрерывной кривой, то

$$\iint\limits_D f(N)ds = \iint\limits_{D_1} f(N)ds + \iint\limits_{D_2} f(N)ds$$

3 . Если $f(N)\geq 0$ $\left(f(N)>0\right)$ в области D, то $\iint\limits_D f(N)ds \geq 0$

Следствие

Если $f(N) \geq g(N)$ $\left(f(N) > g(N)\right)$, то $\iint\limits_D f(N)ds \geq \iint\limits_D g(N)ds$

4. $\left|\iint\limits_D f(N)ds\right| \leq \iint\limits_D |f(N)|ds$

5. Теорема о среднем. Если функция непрерывна в области D, то существует точка $N_0 \in D$ такая, что $\iint\limits_D f(N)ds = f(N_0)S(D)$ ($S(D)$ − площадь D).

Если область D расположена в декартовой системе координат и разбивается на части прямыми, параллельными координатным осям, то $ds = dxdy$ называется элементом площади в декартовой системе координат (площадь прямоугольника со сторонами dx, dy (рис 2)). В этом случае $f(N) = f(x, y)$ − функция двух переменных. Тогда интеграл $\iint\limits_D f(N)ds$ обозначается $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ и называется двойным интегралом в декартовой системе координат.

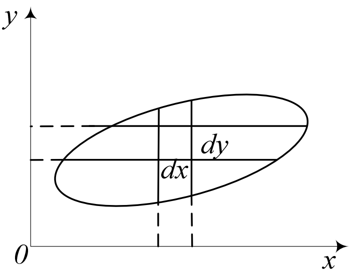


Рис. 2

Физическое истолкование двойного интеграла

Если D – ограниченная область плоскости, по которой распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(N)$, то масса этой области вычисляется по формуле $M(D) = \iint\limits_D \rho(N)ds$.

Масса равна интегралу от плотности. Это физическое истолкование двойного интеграла.

Если $\rho(N)\equiv 1$, то масса области D численно равна ее площади, следовательно, $S(D)=\iint\limits_D ds$.

В декартовой системе координат масса и площадь вычисляется по формулам $M(D)=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$, $S(D)=\iint\limits_D dxdy$

Геометрическое истолкование двойного интеграла

Цилиндрическим брусом называется тело с основанием D, лежащим в плоскости XY, сверху ограниченное поверхностью $z=f(x,y)\geq 0$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z (рис.3). Объем цилиндрического бруса равен $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Это геометрическое истолкование двойного интеграла.

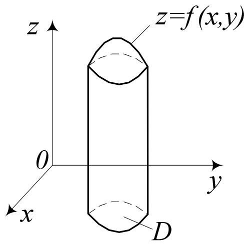


Рис. 3

Примеры на физическое и геометрическое истолкование двойного интеграла будут рассмотрены в главе 3.

§ 2. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

2.1. Случай прямоугольной области интегрирования

Пусть $P=[a,b]\times[c,d]$ − прямоугольник в плоскости XY, ограниченный прямыми, параллельными координатным осям, $x=a$, $x=b$; $y=c$, $y=d$ (рис. 4).

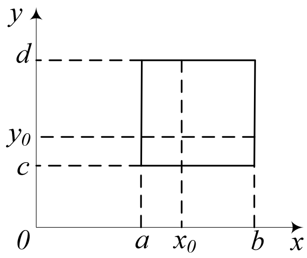


Рис. 4

Если существует двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$ и для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$, то

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b I(x)dx \tag{3}$$

Формулу (3) можно переписать следующим образом $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$. Сначала выполняется интегрирование по y при постоянном значении x (внутренний интеграл), затем выполняется интегрирование по x (внешний интеграл). Интеграл $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ обычно записывается в виде $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ и называется повторным интегралом. Итак,

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{4}$$

Это формула сведения двойного интеграла к повторному интегралу

Если существует двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$, и для любого $y \in [c,d]$ существует интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ (рис. 4), то

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d I(y)dy \qquad (5)$$

Аналогично формуле (3), формулу (5) можно переписать следующим образом $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy =$ $= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$.

Сначала интегрируем по x при постоянном значении y (внутренний интеграл), затем выполняется интегрирование по y (внешний интеграл).

Итак,

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (6)$$

Интегралы $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ и $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ называются повторными интегралами. Из формул (4) и (6) следует, что повторные интегралы равны между собой и равны двойному интегралу. Если функция непрерывна, то все интегралы существуют. Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла или к вычислению двух определенных интегралов. При вычислении определенных интегралов пользуются формулой Ньютона − Лейбница и таблицей неопределенных интегралов (приложение § 2).

Отметим, что при вычислении двойного интеграла следует выбирать наиболее рациональный способ его сведения к повторному интегралу.

Пример 2.1. Вычислить повторные интегралы

а) $\int_0^1 dx \int_0^2 \left(x + y^2\right)dy$ **б)** $\int_2^4 dx \int_6^8 \frac{y}{x^2}dy$

Решение.

а) Пусть $I = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(x + y^2\right)dy$. Вычислим внутренний интеграл по y, считая x постоянным. Получим

$\int_0^2 \left(x+y^2\right)dy = \left(xy+\dfrac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2x+\dfrac{8}{3}$ (постоянный множитель x вынесли за знак интеграла и воспользовались табличным интегралом 2 от степенной функции).

Затем вычисляем внешний интеграл по x. Получим $I=\int_0^1\left(2x+\dfrac{8}{3}\right)dx=\left(x^2+\dfrac{8}{3}x\right)\Bigg|_0^1=1+\dfrac{8}{3}=\dfrac{11}{3}$. Обычно промежуточные вычисления не пишут, и решение примера оформляют следующим образом

$$\int_0^1 dx\int_0^2\left(x+y^2\right)dy=\int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1 dx\left(2x+\frac{8}{3}\right)=$$
$$=\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{3}$$

б) Пусть $I=\int_2^4 dx\int_6^8\dfrac{y}{x^2}dy=\int_2^4 dx\dfrac{1}{x^2}\int_6^8 ydy$. При вычислении внутреннего интеграла по y вынесли постоянный множитель $\dfrac{1}{x^2}$ за знак интеграла. Тогда

$$I=\int_2^4 dx\frac{1}{x^2}\int_6^8 ydy=\int_2^4 dx\frac{1}{x^2}\frac{y^2}{2}\Bigg|_6^8=\int_2^4 dx\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}\left(8^2-6^2\right)=$$
$$=\int_2^4 dx\frac{1}{x^2}14=14\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_2^4=-14\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}.$$

При вычислении последнего интеграла воспользовались табличным интегралом 2 от степенной функции.

Пример 2.2. Вычислить интегралы по прямоугольникам

а) $\iint\limits_P \dfrac{x^2}{1+y^2}dxdy \quad P=[0,1]\times[0,1]$

б) $\iint\limits_P x\sin(x+y)\,dxdy \quad P=[0,\pi]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Пусть $I=\iint\limits_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$. Область интегрирования $P=[0,1]\times[0,1]$ изображена на рис. 5.

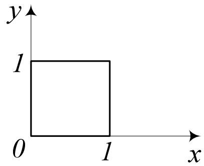


Рис. 5

По формуле (4) интеграл

$$I=\iint\limits_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy=\int_0^1 dx\cdot x^2 arctgy\Big|_0^1=$$

$$=\int_0^1 dx x^2\left(arctg1-arctg0\right)=\int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}dx$$

При вычислении внутреннего интеграла по y постоянный множитель x^2 вынесли за знак интеграла и воспользовались табличным интегралом 10. Следовательно, $I=\int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}dx=\frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}$

При вычислении интеграла по x воспользовались табличным интегралом 2 от степенной функции.

б) Пусть $I=\iint\limits_P x\sin\left(x+y\right)dxdy$. Область интегрирования $P=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ изображена на рис. 6.

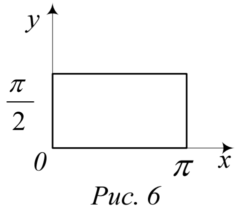


Рис. 6

По формуле (4) интеграл

$$I=\iint_P x\sin(x+y)\,dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)\,dy=$$

$$=\int_0^{\pi}dx\cdot x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,d(x+y)$$

При интегрировании по y постоянный множитель x выносим за знак интеграла и пользуемся свойством дифференциала $dy=d(y+x)$ (x в данном случае постоянное слагаемое) (приложение § 2, формулы (7))

Тогда $I=\int_0^{\pi}dx\cdot x\left(-\cos(x+y)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\pi}dx\cdot x\left(-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos x\right)=$

$=\int_0^{\pi}dx\cdot x(\sin x+\cos x)$.

При вычислении интеграла воспользовались формулой (6) приложения при $u(y)=y+x$.

Последний интеграл находим по формуле интегрирования по частям (приложение § 2, формула (9) $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

В нашем случае $u=x$, $dv=(\sin x+\cos x)dx$, тогда $du=dx$, $v=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x$. Отсюда следует, что

$$I=x(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=\pi(\sin\pi-\cos\pi)+$$

$$+(\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=\pi+(\cos\pi+\sin\pi)-(\cos 0+\sin 0)=$$

$$=\pi-1-1=\pi-2\ .$$

Замечание. При вычислении интегралов а) и б) можно было воспользоваться формулой 6.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить повторные интегралы

а. $\int_2^4 dx\int_1^3 xydy$ **б.** $\int_3^5 dx\int_0^2 (x+y)dy$

в. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dy \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dx$ **г.** $\int_{4}^{8} dy \int_{1}^{3} \frac{y}{x^3}\,dx$

2. Вычислить двойные интегралы по прямоугольнику

а. $\iint\limits_{P} e^{x+y}\,dxdy \qquad P=[0,1]\times[0,1]$ **б.** $\iint\limits_{P} \left(3xy^2+4y^3\right)dxdy$

$P=[0,1]\times[2,4]$

в. $\iint\limits_{P} x^2 y e^{xy}\,dxdy \quad P=[0,1]\times[0,2]$ **г.** $\iint\limits_{P} \frac{dxdy}{\left(x+y+1\right)^2} \quad P=[1,2]\times[0,1]$

Ответы.

1. **а.** 24 **б.** 20 **в.** 2 **г.** $\frac{32}{3}$

2. **а.** $(e-1)^2$ **б.** 268 **в.** 2 **г.** $\ln\frac{9}{8}$

2.2 Случай произвольной области интегрирования

Область D ограничена двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ и вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$, причем $y_1(x)\le y_2(x)$ для любого $x\in[a,b]$ (рис. 7).

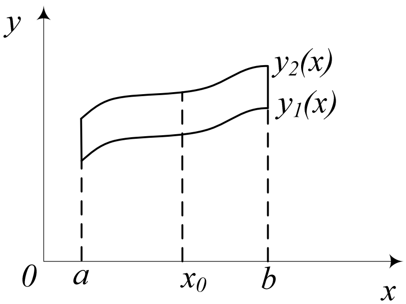


Рис. 7

Отметим, что для любого $x_0\in[a,b]$ вертикальная прямая $x=x_0$ пересекает границу области D только в двух точках.

Если существует двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ и для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x)dx$, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} I(x)dx \tag{7}$$

$$\text{или } \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \;.$$

Последний интеграл записывается следующим образом $\int\limits_{a}^{b} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ и называется повторным интегралом, интеграл по y называется внутренним интегралом, интеграл по x называется внешним интегралом.

Итак,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \tag{8}$$

Пусть область D ограничена кривыми $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и горизонтальными прямыми $y = c$, $y = d$, причем $x_1(y) \le x_2(y)$ для любого $y \in [c,d]$ (рис.8).

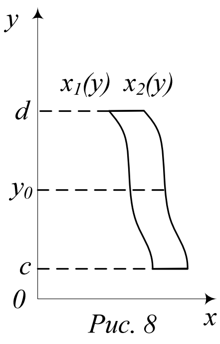


Рис. 8

В этом случае для любого $y_0 \in [c,d]$ горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает границу области D не более чем в двух точках.

Если существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ и для любого $y \in [c,d]$ существует интеграл $I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$,

то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d I(y)dy$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \,.$$

Последний интеграл записывается следующим образом $\int\limits_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ и называется повторным интегралом, интеграл по x называется внутренним интегралом, интеграл по y называется внешним интегралом.

Итак,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (9)$$

Если область D такова, что применить формулу (8) или (9) невозможно, то ее следует разбить на несколько частей, для каждой из которых можно применить формулу (8) или (9). Например, для вычисления интеграла по области D (рис. 9) можно применить формулу (8). Можно также область D разбить на три части D_1, D_2, D_3 и к каждой из них применить формулу (9). Ясно, что первый способ сведения двойного интеграла к повторному интегралу более рациональный.

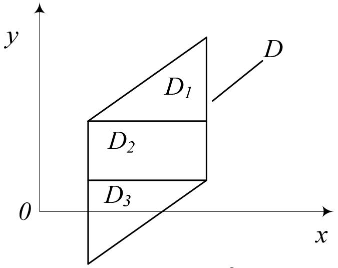


Рис. 9

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла или двух определенных интегралов. Для их вычисления, как и случае прямоугольной области интегрирования, пользуются формулой Ньютона–Лейбница и таблицей неопределенных интегралов (приложение § 2).

Отметим, что в повторных интегралах внешние пределы интегрирования всегда постоянны, внутренние пределы интегрирования, как правило, функции от той переменной, по которой производится внешнее интегрирование. Внутренние и внешние пределы интегрирования постоянны только в случае прямоугольной области интегрирования.

Отметим также, что при вычислении двойного интеграла следует выбирать наиболее рациональный способ его сведения к повторному интегралу.

Пример 2.3. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^2 dy \int_y^{y\sqrt{3}} \frac{y}{x^2+y^2}dx$

Решение.

Пусть $I = \int\limits_0^2 dy \int_y^{y\sqrt{3}} \frac{y}{x^2+y^2}dx = \int\limits_0^2 dy \cdot y \cdot arctg \left.\frac{x}{y}\right|_y^{y\sqrt{3}}$

При вычислении внутреннего интеграла по x вынесли постоянный множитель y за знак интеграла и воспользовались табличным интегралом 10.

Тогда

$$I = \int\limits_0^2 dy \cdot y\left(arctg\frac{y\sqrt{3}}{y} - arctg\frac{y}{y}\right) = \int\limits_0^2 dy \cdot y\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = \frac{\pi}{6}$$

Пример 2.4. Поменять порядок интегрирования

а) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dy$ **б)** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y)dx$

Решение.

а) Повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{2} dx \int_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dy$ равен двойному интегралу по области D, то есть $\int\limits_{-1}^{2} dx \int_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$. Область D ограничена параболой $y = x^2 + 1$ с вершиной в точке $C(0,1)$, прямой $y = x + 3$ и вертикальными прямыми $x = -1$, $x = 2$. Из системы $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$ находим точки пересечения параболы и прямой $A(-1,2)$ и $B(2,5)$. Так как $x \in [-1,2]$, то область D имеет вид, изображенный на рис. 10.

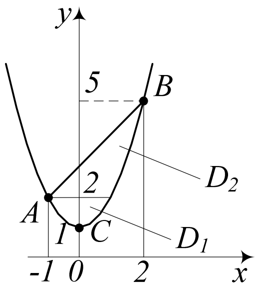


Рис. 10

Чтобы внешние пределы интегрирования были по y, разобьем область D на две части D_1 и D_2 прямой $y = 2$. Из уравнения $y = x^2 + 1$ найдем $x = \pm\sqrt{y-1}$. Тогда $x = -\sqrt{y-1}$ левая ветвь параболы, $x = +\sqrt{y-1}$ − правая ветвь. Из уравнения $y = x + 3$ найдем $x = y - 3$. Если $y \in [1,2]$, то x меняется от левой ветви параболы

$x=-\sqrt{y-1}$ до правой $x=+\sqrt{y-1}$. Следовательно, $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_1^2 dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dy$. Если, $y\in[2,5]$ то x меняется от прямой $x=y-3$ до правой ветви параболы $x=+\sqrt{y-1}$.

Следовательно, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_2^5 dy\int_{y-3}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dy$

Тогда исходный повторный интеграл равен двойному интегралу по области D, равен сумме двойных интегралов по областям D_1, D_2 и равен сумме повторных интегралов

$$\int\limits_{-1}^{2} dx\int_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dy=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_1^2 dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dx+\int\limits_2^5 dy\int_{y-3}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)dx.$$

б) Представим сумму повторных интегралов $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int_{y}^{2} f(x,y)dx$ в виде суммы двойных интегралов по непересекающимся областям D_1 и D_2.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int_{y}^{2} f(x,y)dx=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Пусть $D=D_1\cup D_2$ (объединение D_1 и D_2).

Область D_1 ограничена гиперболой $x=\dfrac{1}{y}$ и прямой $x=2$ ($y\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$). Область D_2 ограничена прямыми $x=y$, $x=2$ ($y\in[1,2]$). Так как $A(1,1)$ − точка пересечения гиперболы $x=\dfrac{1}{y}$ и прямой $x=y$, $B\left(2,\frac{1}{2}\right)-$ точка пересечения гиперболы $x=\frac{1}{y}$ и прямой $x=2$, $C(2,2)-$ точка пересечения прямых $x=2$, $x=y$, то область $D=D_1\cup D_2$ имеет вид, изображенный на рис. 11.

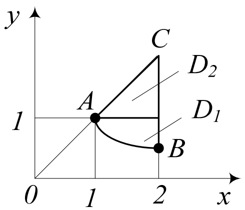


Рис. 11

Из уравнения $x=\frac{1}{y}$ находим $y=\frac{1}{x}$, из уравнения $x=y$ находим $y=x$. Если $A(1,1)$, то y меняется от гиперболы $y=\frac{1}{x}$ до прямой $y=x$. Следовательно, сумма повторных интегралов равна сумме двойных интегралов по областям D_1 и D_2, равна двойному интегралу по области D и равна одному повторному интегралу

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)dxdy=$$

$$=\iint_{D}f(x,y)dxdy=\int_{1}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy.$$

Пример 2.5. Вычислить интегралы

а) $\iint_D xy^2dxdy$. Область D ограничена кривой $y^2=4x$ и прямой $x=1$.

б) $\iint_D \frac{1}{x^2}dxdy$. Область D ограничена кривой $y=x^2+5$ и прямыми $x=1$, $x=3$, $y=2$.

Решение.

а) Пусть $I = \iint\limits_D xy^2 dxdy$. Область D ограничена частью параболы $y^2 = 4x$, симметричной относительно оси x, и прямой $x = 1$ (рис. 12).

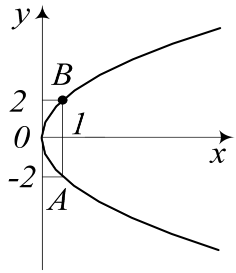


Рис. 12

Способ 1.

Из уравнения $y^2 = 4x$ находим $y = \pm 2\sqrt{x}$. Тогда $y = -2\sqrt{x}$ нижняя ветвь, $y = +2\sqrt{x}$ − верхняя ветвь параболы (рис. 12).

Если $x \in [0,1]$, то y меняется от нижней до верхней ветви параболы. Следовательно,

$$I = \iint\limits_D xy^2 dxdy = \int\limits_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy^2 dy = \int\limits_0^1 dx \cdot x \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \cdot \frac{x}{3} \cdot \left(8x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{3}\int\limits_0^1 dx \cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{16 \cdot 2}{3} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\Bigg|_0^1 = \frac{32}{21}.$$

Способ 2.

Очевидно, что $A(1,-2)$ и $B(1,2)$ − точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ и прямой $x = 1$ (рис. 12). Из уравнения $y^2 = 4x$ находим $x = \frac{y^2}{4}$. Если $y \in [-2,2]$, то x меняется от параболы $x = \frac{y^2}{4}$ до прямой $x = 1$.

Поэтому

$$\iint_D xy^2dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} xy^2dx = \int_{-2}^{2} dy \cdot y^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\frac{y^2}{4}}^{1} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dy \cdot y^2 \cdot \left(1 - \frac{y^4}{16}\right)$$

Поскольку подынтегральная функция четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ (приложение § 1, свойство 9).

Тогда $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dy \cdot y^2 \cdot \left(1 - \frac{y^4}{16}\right) = \int_{0}^{2} dy \cdot y^2 \cdot \left(1 - \frac{y^4}{16}\right) = \int_{0}^{2} \left(y^2 - \frac{y^6}{16}\right)dy =$

$$= \left. \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{16 \cdot 7}\right) \right|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{2^7}{2^4 \cdot 7} = \frac{8}{3} - \frac{8}{7} = \frac{32}{21}.$$

б) Пусть $I = \iint_D \frac{1}{x^2}dxdy$ Область D параболой $y = x^2 + 5$ с вершиной в точке $A(0,5)$ и прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$ (рис. 13).

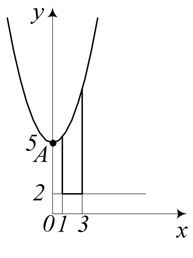


Рис. 13

Если $x \in [1,3]$, то y меняется от прямой $y = 2$ до параболы $y = x^2 + 5$. Поэтому (формула (8)) имеем

$$\iint_D \frac{1}{x^2}dxdy = \int_1^3 dx \int_2^{x^2+5} \frac{1}{x^2} \cdot dy = \int_1^3 dx \frac{1}{x^2} \cdot y \Big|_2^{x^2+5} =$$

$$= \int_1^3 dx \frac{1}{x^2} \cdot \left(x^2 + 5 - 2\right) = \int_1^3 dx \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \left. \left(x - \frac{3}{x}\right) \right|_1^3 = 3 - 1 - (1 - 3) = 4.$$

Интеграл $\int \frac{3}{x^2}dx$ табличный от степенной функции.

Отметим, что если пользоваться формулой (9), то область D следует разбить на две. Ясно, что этот способ вычисления нерациональный.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить повторные интегралы

а. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} xdy$ б. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 (1-y)dy$ в. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 ydx$

2. Поменять порядок интегрирования

а. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$ **б.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$

в. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$ **г.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$

3. Вычислить двойные интегралы

а. $\iint\limits_D x^4 ydxdy$. Область D ограничена кривыми $xy=1$, $y=x$, $x=2$.

б. $\iint\limits_D xdxdy$**.** Область D ограничена кривыми $y=x^2$, $y=4$, $x=0$.

в. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy$. Область D ограничена прямыми $y=x$, $y=5x$, $x=3$.

г. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ Область D ограничена кривыми $y^2=x$, $x=0$, $y=1$**.**

Ответы.

1. а. $\frac{1}{15}$ **б.** $\frac{8}{15}$ **в.** $\frac{12}{5}$

2. **а.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x^2} f(x,y)dy$

б. $\int\limits_0^{48} dy\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{x}{3}}} f(x,y)dy$

в. $\int\limits_0^{12} dx\int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dy+\int\limits_{12}^{24} dx\int\limits_{\frac{y}{12}}^{2} f(x,y)dy$

г. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

3. **а.** $7\dfrac{19}{21}$ **б.** 4 **в.** 207 **г.** $\dfrac{1}{2}$

§ 3. Замена переменных в двойном интеграле

3.1. Общий случай

Пусть G – ограниченная замкнутая область в плоскости XY, Γ – ограниченная замкнутая область в плоскости UV (рис.14).

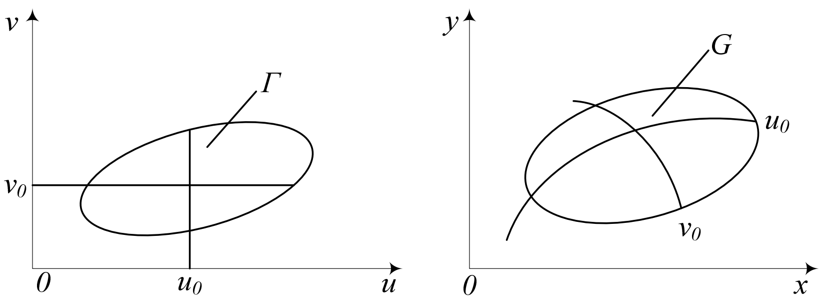


Рис.14

Пусть в Γ определены функции $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, отображающие область Γ в область G. Отображение взаимнооднозначно. При этих условиях система однозначно разрешима относительно u и v

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}.$$

Тогда положение точки на плоскости XY однозначно определяется заданием пары чисел $(u,\ v)$, поэтому их можно рассматривать как координаты точки на плоскости XY.

Линия, на которой одна из координат сохраняет постоянное значение, называется координатной линией.

Если $u = u_0$ (прямая параллельная оси v), то $\begin{cases} x = x(u_0,v) \\ y = y(u_0,v) \end{cases}$ кривая в плоскости XY (координатная линия u_0) (рис. 14).

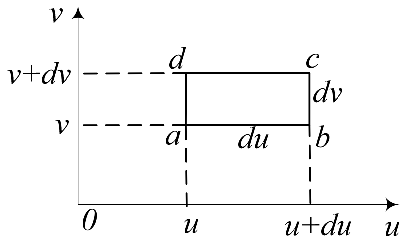
Если $v = v_0$ (прямая параллельная оси u), то $\begin{cases} x = x(u,v_0) \\ y = y(u,v_0) \end{cases}$ кривая в плоскости XY (координатная линия v_0) (рис. 14).

Плоскость XY разбивается на части семейством координатных линий. В силу взаимной однозначности отображения через каждую точку плоскости проходит только одна кривая каждого семейства. Поскольку координатные линии, вообще говоря, кривые, то система координат называется криволинейной.

Пусть функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по u и v.

Определитель $I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ называется определителем Якоби или якобианом преобразования. Пусть $I(u,v) \neq 0$ в области Γ.

Образом прямоугольника со сторонами du, dv в плоскости UV является фигура $ABCD$ в плоскости XY (рис. 15).



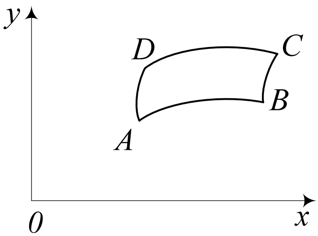


Рис.15

Известно, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка − это параллелограмм и его площадь равна $\left|I(u,v)\right|dudv$. Геометрический смысл якобиана: $\left|I(u,v)\right|$ − коэффициент изменения площади при переходе к криволинейной системе координат. Выражение $\left|I(u,v)\right|dudv$ называется элементом площади в криволинейной системе координат. Если $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ отображение области Γ в плоскости UV в область G плоскости XY, удовлетворяющее перечисленным выше условиям, то формула замены переменной в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Gamma f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\cdot\left|I(u,v)\right|dudv \qquad (10)$$

Двойной интеграл по области Γ сводится к повторному по одной из формул (4), (6), (8), (9).

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{xy}dxdy$. Область G ограничена кривыми $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$.

Решение.

Пусть $I = \iint\limits_G e^{xy}dxdy$. Область G ограничена гиперболами $xy=1$, $xy=2$ и прямыми $y=x$, $y=4x$ (рис 16).

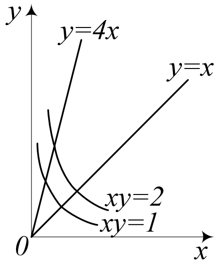


Рис.16

При вычислении интеграла в декартовой системе координат область интегрирования следует разбить на три и к каждой из них применить формулу (8). Для упрощения вычислений сделаем замену переменных $\begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases}$. При этой замене координатные линии u – гиперболы $xy = u$ и координатные линии v прямые $y = vx$. Так как область G ограничена гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$, то u меняется от 1 до 2 и прямыми $y = x$, $y = 4x$, то v меняется от 1 до 4. Из системы $\begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases}$ выразим x и y. Имеем $\begin{cases} y = \dfrac{u}{x} \\ \dfrac{u}{x} = vx \end{cases}$ или $\begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ y = \dfrac{u}{x} = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

Находим частные производные $x_u' = \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$, $x_v' = -\dfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}}$, $y_u' = \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$, $y_v' = \dfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$

Тогда Якобиан $I(u,v) = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\dfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ y_u' = \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{4} v^{-1} + \frac{1}{4} v^{-1} = \frac{1}{2} v^{-1}$$

Так как $v > 0$, то $\left|\frac{1}{2}v^{-1}\right| = \frac{1}{2}v^{-1}$. По формуле (10) имеем

$$\iint\limits_G e^{xy}\,dxdy = \iint\limits_\Gamma e^u \frac{1}{2v} dudv .$$

Так как $u \in [1,2]$, $v \in [1;4]$ то последний интеграл равен повторному интегралу (формула (4)).

$$\int_1^2 du \int_1^4 e^u \frac{1}{2v} dv = \int_1^2 due^u \frac{1}{2}\ln v\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\int_1^2 due^u \ln 4 = \frac{1}{2}\ln 4e^u\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4\left(e^2 - e\right).$$

При интегрировании по v воспользовались табличным интегралом 3, а при интегрировании по u табличным интегралом 4 а.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить интегралы

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^4}$. Область D ограничена прямыми $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$.

2. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$. Область D ограничена кривыми $xy = 3$, $xy = 5$, $y = x$, $y = 4x$

Ответы.

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x+y\right)^2}$. Указание. Сделать замену переменных $\begin{cases} x + y = u \\ y = vx \end{cases}$

2. 30. Указание. Сделать замену переменных $\begin{cases} xy = u \\ y = vx \end{cases}$.

3.2. Полярная система координат

Часто в двойном интеграле переходят к полярной системе координат. Положение точки на плоскости определяется двумя координатами ρ расстоянием от начала координат до точки M и углом ϕ между положительным направлением оси X и лучом OM (рис. 17).

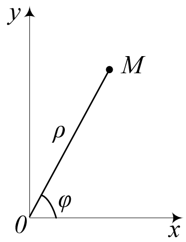


Рис.17

Если (x, y) декартовы координаты точки M, то (ρ, ϕ) полярные координаты точки M. Очевидно, что $\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$, при этом $0 \le \phi < 2\pi$, $0 \le \rho < +\infty$ Отображение переводит полуполосу $\rho \ge 0$, $0 \le \phi < 2\pi$ в плоскости (ρ, ϕ) во всю плоскость XY.

Модуль якобиана преобразования равен $|I(\rho, \phi)| = \rho$, $\rho d\rho d\phi -$ элемент площади в полярной системе координат

При $\rho = \rho_0$ имеем $\begin{cases} x = \rho_0\cos\phi \\ y = \rho_0\sin\phi \end{cases}$ или $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ − окружность радиуса ρ_0. Это координатная линия ρ (рис. 18).

При $\phi = \phi_0$ имеем $\begin{cases} x = \rho\cos\phi_0 \\ y = \rho\sin\phi_0 \end{cases}$ или луч $\phi = \phi_0$ − координатная линия ϕ (рис. 18).

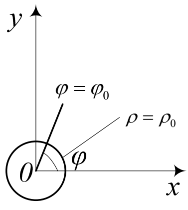


Рис.18

Формула перехода к полярной системе координат имеет вид

$$\iint_G f(x, y)dxdy = \iint_\Gamma f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\cdot\rho d\rho d\phi \qquad (11)$$

Поскольку координатные линии окружности, то переходить к полярной системе координат рекомендуется, если области интегрирования части плоскости, ограниченные окружностями или их частями.

Пример 3.2. Вычислить интегралы в полярной системе координат

а) $\iint_G (x^2 + y^2)dxdy$. Область G ограничена кривыми $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ ($x > 0$, $y > 0$).

б) $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$. Область G ограничена кривой $x^2 + y^2 = 2x$

Решение.

а) Пусть $I = \iint_G (x^2 + y^2)dxdy$. Область G ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ и прямыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ ($x > 0$, $y > 0$) (рис. 19).

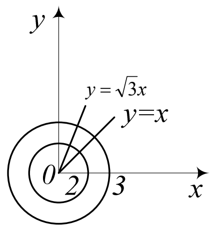


Рис.19

По формуле (11) перехода к полярной системе координат

$$I = \iint_G (x^2 + y^2)dxdy = \iint_\Gamma (\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi)\rho d\rho d\phi =$$

$$= \iint_\Gamma \rho^2\rho d\rho d\phi = \iint_\Gamma \rho^3 d\rho d\phi$$

G – часть кругового кольца, ограниченного окружностями $x^2+y^2=4$ или $\rho=2$ и $x^2+y^2=9$ или $\rho=3$ и лучами $y=x$ или $\phi=\frac{\pi}{4}$, $y=\sqrt{3}x$ или $\phi=\frac{\pi}{3}$. Отсюда следует, что ρ меняется от 2 до 3, а ϕ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$.

Поэтому (формула (4))

$$\iint_{\Gamma}\rho^3 d\rho d\phi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\phi\int_2^3\rho^3 d\rho=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\phi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_2^3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\phi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_2^3=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\phi\frac{1}{4}\cdot(81-16)=\left.\frac{65}{4}\phi\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{65}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{65\pi}{48}.$$

б) Пусть $I=\iint_G\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$. Область G ограничена кривой $x^2+y^2=2x$. В интеграле $\iint_G\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ перейдем к полярной системе координат (формула (11)). Получим

$$I=\iint_G\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{\Gamma}\sqrt{\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi}\,\rho d\rho d\phi=\iint_{\Gamma}\rho^2 d\rho d\phi$$

Уравнение $x^2+y^2=2x$ запишем следующим образом $\left(x^2-2x+1\right)-1+y^2=0$ или $(x-1)^2+y^2=1$. Это окружность с центром в точке $M(1;0)$ радиуса 1 (рис. 20).

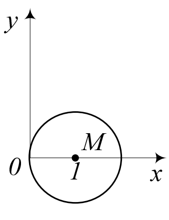


Рис.20

Запишем уравнение окружности $x^2+y^2=2x$ в полярной системе координат. Получим $\rho^2=2\rho\cos\phi$, или $\rho=2\cos\phi$. Так как $\rho\ge 0$, то $\cos\phi\ge 0$ или $\phi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ρ меняется от нуля до окружности $\rho=2\cos\phi$. Поэтому интеграл $\iint\limits_{\Gamma}\rho^2 d\rho d\phi$ сводится к следующему повторному интегралу (формула (8))

$$\iint\limits_{\Gamma}\rho^2 d\rho d\phi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int\limits_{0}^{2\cos\phi}\rho^2 d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{0}^{2\cos\phi}=\frac{8}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\cos^3\phi=$$

$$=\frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\cos^3\phi$$

(воспользовались тем, что для четной подынтегральной функции $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$ (приложение § 1, свойство 9). Последний интеграл находим следующим образом. Заметим, что $\cos\phi d\phi=d\sin\phi$ (внесли $\sin\phi$ под знак дифференциала). Тогда

$$\frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi d\sin\phi=\frac{16}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\phi\right)d\sin\phi=$$

$$=\frac{16}{3}\left.\left(\sin\phi-\frac{\sin^3\phi}{3}\right)\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{9}.$$

Воспользовались формулой (6) приложения при $u(\phi)=\sin\phi$.

Примеры для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы в полярной системе координат

1. $\iint\limits_{D}e^{-x^2-y^2}dxdy$. Область D круг $x^2+y^2\le 1$

2. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$. Область D круг $x^2+y^2 \le 16$

3. $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$. Область D ограничена окружностями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}$, $x^2+y^2=4\pi^2$.

4. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$. Область D круг $x^2+y^2 \le 2x$.

Ответы.

1. $\pi\left(1-e^{-1}\right)$ **2.** 4π **3.** $2\pi-\pi^2$ **4.** $\frac{8}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$

Глава 2.
Тройной интеграл

§ 1. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть ω − пространственная ограниченная замкнутая область ($V(\omega)$ − её объем) и $f(N)$ − функция, определенная в этой области.

Разобьем область ω на n частей $V_1, V_2, ..., V_n$.

Пусть ΔV_i − объем V_i, точка $N_i \in V_i$, $\lambda = \max\limits_{i=1,...,n} \Delta V_i$.

Выражение вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(N_i) \Delta V_i \tag{12}$$

называется интегральной суммой функции $f(M)$ по объему ω.

Функция $f(N)$ называется интегрируемой в области ω, если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения ω на части и от выбора точек N_i. Для тройного интеграла принято обозначение $\iiint\limits_{\omega} f(N) dV$.

Итак

$$\iiint\limits_{\omega} f(N) dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(N_i) \Delta V_i \tag{13}$$

(читается тройной интеграл функции $f(N)$ по объему ω, dV − элемент объема, $f(N)$ − подынтегральная функция, $f(N)dV$ − подынтегральное выражение)

Отметим, что интегрируемая функция ограничена.

Непрерывная в области интегрируема в этой области, ограниченная в области ω функция, имеющая разрывы лишь на конечном числе кривых, интегрируема в этой области.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам определенного и двойного интегралов (приложение § 1 и глава 1). Перечислим их.

1. Линейность интеграла

$$\iiint\limits_{\omega}\left(\alpha f(N)+\beta g(N)\right)dV=\alpha\iiint\limits_{\omega} f(N)\,dV+\beta\iiint\limits_{\omega} g(N)\,dV$$

Отсюда следует, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Аддитивность интеграла

Если область ω разбита на части ω_1 и ω_2 поверхностью, то

$$\iiint\limits_{\omega}\left(f(N)\right)dV=\iiint\limits_{\omega_1} f(N)\,dV+\iiint\limits_{\omega_2} f(N)\,dV$$

3. Если $f(N)\ge 0$ $\left(f(N)>0\right)$ в области ω, то $\iiint\limits_{\omega}\left(f(N)\right)dV\ge 0$

Следствие

Если $f(N)\ge g(N)$ $\left(f(N)>g(N)\right)$, то

$$\iiint\limits_{\omega}\left(f(N)\right)dV\ge\iiint\limits_{\omega} g(N)\,dV$$

4. $\left|\iiint\limits_{\omega}\left(f(N)\right)dV\right|\le\iiint\limits_{\omega}\left|f(N)\right|dV$.

5. Теорема о среднем. Если функция непрерывна в области ω, то существует точка $N_0\in\omega$ такая, что

$$\iiint\limits_{\omega}\left(f(N)\right)dV=f(N_0)\cdot V(\omega).$$

Если область ω расположена в декартовой системе координат XYZ и разбивается на части плоскостями параллельными координатным плоскостям, то $dV = dxdydz$ называется элементом объема в декартовой системе координат (объем параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz) (рис. 21).

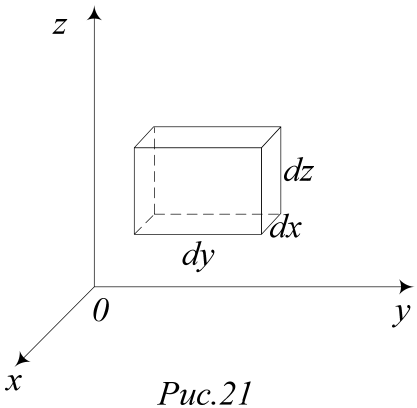


Рис.21

В этом случае функция $f(N) = f(x, y, z)$ − функция трех переменных x, y, z. Тогда тройной интеграл $\iiint\limits_{\omega} f(N)dV$ записывается так $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)dxdydz$ и называется тройным интегралом в декартовой системе координат.

§ 2. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

2.1 Область интегрирования прямоугольный параллелепипед

Пусть $\omega = [a, b] \times [c, d] \times [k, l]$ − прямоугольный параллелепипед. Это область, ограниченная плоскостями параллельными координатным плоскостям, $x = a, x = b; y = c, y = d; z = k, z = l$ (рис. 22).

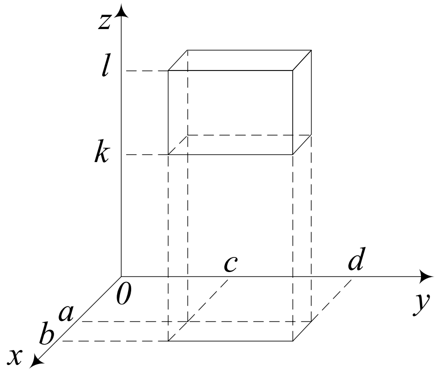


Рис.22

Прямоугольник $P = [a,b] \times [c,d]$ − проекция ω на плоскость XY (рис. 23).

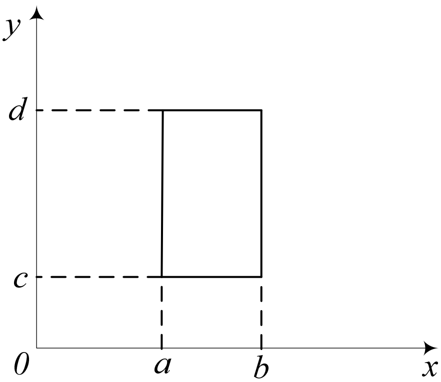


Рис. 23

Пусть существует тройной интеграл $\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ и для любой точки $M(x,y) \in P$ существует интеграл $I(x,y) = \int\limits_{k}^{l} f(x,y,z)\,dz$, тогда $\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{P} I(x,y)\,dxdy$

Последний интеграл можно переписать следующим образом $\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{P}\left(\int\limits_{k}^{l} f(x,y,z)dz\right)dxdy$ или $\iint\limits_{P} dxdy\int\limits_{k}^{l} f(x,y,z)dz$.

Итак, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\iiint\limits_{\omega}\left(f(x,y,z)\right)dxdydz = \iint\limits_{P} dxdy\int\limits_{k}^{l} f(x,y,z)dz \tag{14}$$

Двойной интеграл по прямоугольнику сводится к повторному (формула (4)). Поэтому

$$\iiint\limits_{\omega}\left(f(x,y,z)\right)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{c}^{d} dy\int\limits_{k}^{l} f(x,y,z)\,dz \tag{15}$$

Отметим, что в данном случае пределы интегрирования постоянны, интегрировать можно в любом порядке и следует при вычислении выбирать наиболее рациональный способ. Определенные интегралы вычисляются по формуле Ньютона −Лейбница с использованием таблицы интегралов.

Пример 2.1. Вычислить повторный интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{0}^{2} dy\int\limits_{0}^{3}\left(x^3 + y^2 + z\right)dz$$

Решение.

Пусть

$$I = \int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{0}^{2} dy\int\limits_{0}^{3}\left(x^3 + y^2 + z\right)dz = \int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{0}^{2} dy\left(\left(x^3 + y^2\right)z + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{0}^{2} dy\left(3x^3 + 3y^2 + \frac{9}{2}\right).$$

При интегрировании по z вынесли постоянный множитель $x^3 + y^2$ за знак интеграла. Далее интегрируем по y, считая x постоянным. Получим

$$I=\int_0^1 dx\left(\left(3x^3+\frac{9}{2}\right)y+\frac{3y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\int_0^1 dx\left(6x^3+9+8\right)=\left(17x+\frac{6x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=17+\frac{3}{2}=18\frac{1}{2}.$$

Пример 2.2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\omega}(6x+8y+4z+5)\,dxdydz$ по прямоугольному параллелепипеду $\omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Решение.

Пусть $I=\iiint\limits_{\omega}(6x+8y+4z+5)\,dxdydz$. Область интегрирования изображена на рис. 24.

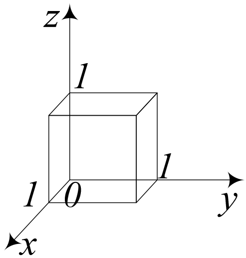


Рис.24

Прямоугольник $P=[0,1]\times[0,1]$ – проекция ω на плоскость XY (рис. 25).

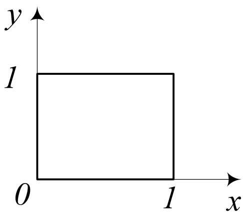


Рис. 25

По формуле (14) интеграл

$$I = \iiint\limits_{\omega} (6x + 8y + 4z + 5)\,dxdydz = \iint\limits_{P} dxdy \int\limits_{0}^{1} (6x + 8y + 4z + 5)dz =$$

$$= \iint\limits_{P} dxdy \left((6x + 8y)z + \frac{4z^2}{2} + 5z \right)\Bigg|_0^1 = \iint\limits_{P} dxdy (6x + 8y + 7).$$

При интегрировании по z постоянный множитель $(6x + 8y)$ вынесли за знак интеграла. Двойной интеграл по прямоугольнику P вычислим по формуле (4) Имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx (6x + 4 + 7) = \left(\frac{6x^2}{2} + 11x \right)\Bigg|_0^1 = 14 .$$

При интегрировании по y постоянный множитель $6x$ вынесли за знак интеграла.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить повторные интегралы

а. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + y + z)dz$ **б.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x + y + z + 1}}$

2. Вычислить интегралы по прямоугольным параллелепипедам

а. $\iiint\limits_{\omega} x\,dxdydz \quad \omega = [0,1] \times [2,3] \times [2,4]$

б. $\iiint\limits_{\omega} (7x - 5y + 3z + 1)\,dxdydz \quad \omega = [0,2] \times [0,3] \times [0,4]$

Ответы.

1. **а.** $\frac{3}{2}$ **б.** $\frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right)$

2. **а.** 1 **б.** 156

2.2 Случай произвольной области интегрирования

Пусть область ω ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси z, S − проекция области ω на плоскость XY (рис. 26).

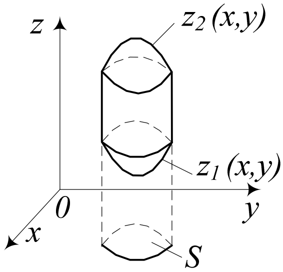


Рис. 26

В этом случае прямая, проходящая через любую точку области ω параллельно оси z, пересекает границу области ω только в двух точках.

Пусть существует тройной интеграл $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dxdydz$ и для любой точки $M(x, y) \in S$ существует интеграл $I(x, y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$, тогда $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{S} I(x, y)\,dxdy$

Последний интеграл можно переписать следующим образом

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{S} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy \text{ или}$$

$$\iint\limits_{S} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

Тогда

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{S} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \tag{16}$$

Это формула сведения тройного интеграла к двойному интегралу. В данном случае область ω проектировалась на плоскость XY.

В некоторых случаях область ω удобно проектировать на другие координатные плоскости XZ или YZ. Например, область, изображенная на рис. 27, ограничена поверхностями $y = y_1(x,z)$, $y = y_2(x,z)$ $\left(y_1(x,z) \le y_2(x,z)\right)$ и цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси y.

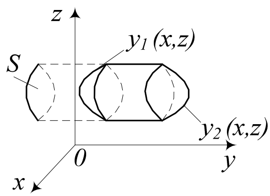


Рис. 27

Если S – проекция области на плоскость XZ, то тройной интеграл сводится к двойному интегралу по формуле

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{S} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \tag{17}$$

Вернемся к формуле (16). Если область S плоскости XY ограничена кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y_1(x) \le y_2(x)$ (рис. 28),

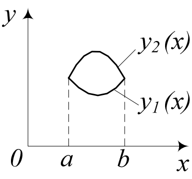


Рис. 28

то последний двойной интеграл сводится к повторному (формула (8)), тогда

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (18)$$

Это формула сведения тройного интеграла к повторному интегралу. При этом внешние пределы интегрирования (по x) постоянны, пределы первого внутреннего интеграла (по z), вообще говоря, функции от x и y, пределы второго внутреннего интеграла (по y), вообще говоря, функции от x. Все пределы интегрирования постоянны только в случае прямоугольного параллелепипеда.

Пример 2.3. Вычислить повторный интеграл

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} \left(x^3 y^2 z\right) dz$$

Решение.

Пусть

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} \left(x^3 y^2 z\right) dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(x^3 y^2 \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{xy} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(x^5 y^4\right).$$

При интегрировании по z множители, зависящие от x и y, вынесли за знак интеграла.

Тогда $I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(x^5 y^4\right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \cdot x^5 \frac{y^5}{5}\Bigg|_0^x = \frac{1}{10} \int\limits_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{10} \frac{x^{11}}{11}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{110}$.

Пример 2.4. Вычислить тройные интегралы

а) $I = \iiint\limits_{\omega} y\,dxdydz$. Область ω ограничена плоскостями $x+y+z=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$.

б) $I = \iiint\limits_{\omega} x dx dy dz$. Область ω ограничена частью цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, расположенного в первом октанте, и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$.

в) $I = \iiint\limits_{\omega} z^2 dx dy dz$. Область ω ограничена сферой единичного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение.

а) Пусть $I = \iiint\limits_{\omega} y dx dy dz$. Область ω ограничена плоскостью $x + y + z = 8$, которая отсекает на осях координат отрезки равные 8 и проектируется на плоскость XY в виде прямой $x + y = 8$, координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостями $x = 2$, $y = 4$, параллельными оси z (рис. 29).

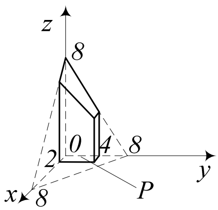


Рис. 29

Проекция ω на плоскость XY прямоугольник $P = [0,2] \times [0,4]$ (рис. 30).

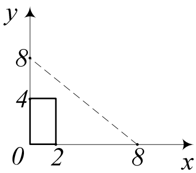


Рис. 30

Для любой точки M из прямоугольника z меняется от нуля до плоскости $x + y + z = 8$ или $z = 8 - x - y$. Поэтому

$$I=\iiint\limits_{\omega} ydxdydz=\iint\limits_{P} dxdy\int\limits_{0}^{8-x-y} ydz=\iint\limits_{P} dxdy\, yz\Big|_{0}^{8-x-y}=$$

$$=\iint\limits_{P} dxdy\cdot y\left(8-x-y\right)$$

Двойной интеграл по прямоугольнику $P=\left[0,2\right]\times\left[0,4\right]$ сведем к повторному (формула (6)).

$$I=\iint\limits_{P} dxdyy\left(8-x-y\right)=\int\limits_{0}^{4} dy\int\limits_{0}^{2} y\left(8-x-y\right)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{4} dyy\left(\left(8-y\right)x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\int\limits_{0}^{4} dyy\left(\left(8-y\right)2-2\right)=$$

$$=\int\limits_{0}^{4} dy\cdot y\left(14-2y\right)=2\int\limits_{0}^{4}\left(7y-y^2\right)dy=2\left(\frac{7y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{4}=$$

$$=2y^2\left(\frac{7}{2}-\frac{y}{3}\right)\Bigg|_{0}^{4}=32\left(\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{6}\cdot 13=\frac{208}{3}.$$

При интегрировании по x постоянный множитель y и $8-y$ вынесли за знак интеграла.

б) Пусть $I=\iiint\limits_{\omega} xdxdydz$. Область ω ограничена частью цилиндра $x^2+y^2=1$, расположенного в первом октанте, координатными плоскостями и плоскостью $z=3$ (рис. 31).

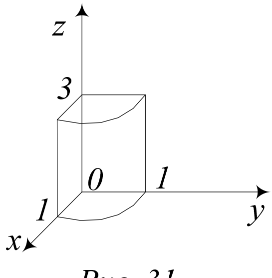


Рис. 31

Проекция цилиндра на плоскость XZ прямоугольник $P=[0,1]\times[0,3]$ (рис. 32).

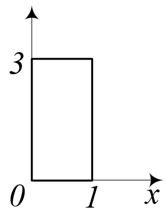


Рис. 32

Для любой точки M из прямоугольника y меняется от 0 до поверхности цилиндра $x^2+y^2=1$ или $y=\sqrt{1-x^2}$ ($y\geq 0$).

Сведем тройной интеграл к двойному (формула (17))

$$I=\iiint\limits_{\omega} xdxdydz=\iint\limits_{P} dxdz\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xdy=\iint\limits_{P} dxdz\, xy\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\iint\limits_{P} dxdzx\sqrt{1-x^2}$$

Полученный двойной интеграл по прямоугольнику сведем к повторному (формула (4)), тогда

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^3 x\sqrt{1-x^2}dz=\int\limits_0^1 dx\, x\sqrt{1-x^2}\, z\Big|_0^3=3\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

При интегрировании по z выражение, зависящее от x, вынесли за знак интеграла. Для вычисления последнего интеграла представим xdx в виде $xdx=\frac{1}{2}dx^2=-\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right)$ (внесли $-x$ под знак дифференциала и прибавили единицу). Тогда

$$I=3\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{3}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = 1$$

Воспользовались формулой (6) приложения при $u(x) = 1 - x^2$.

в) Пусть $I = \iiint\limits_{\omega} z^2 dxdydz$ Область ω ограничена сферой единичного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (рис. 33).

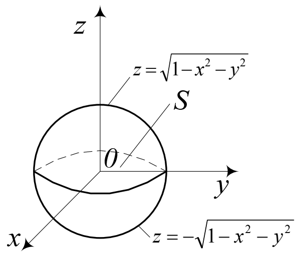


Рис. 33

Тогда $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ − нижняя половина сферы, $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ − верхняя половина сферы, S − круг единичного радиуса $x^2 + y^2 \le 1$ − проекция ω на плоскость XY (рис. 34).

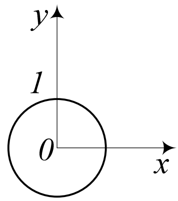


Рис. 34

Для любой точки M из круга z меняется от нижней половины сферы $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ до верхней $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. По формуле (16) тройной интеграл сводится к двойному

$$I=\iiint\limits_{\omega} z^2dxdydz = =\iint\limits_S dxdy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2dz=\iint\limits_S dxdy\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$$

$$=\iint\limits_S dxdy\frac{1}{3}\cdot\cdot\left(\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3-\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\iint\limits_S dxdy\left(\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Для вычисления последнего двойного интеграла перейдем к полярной системе координат $\begin{cases} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \end{cases}$. По формуле (11) получим

$$I=\frac{2}{3}\iint\limits_{\Gamma}\left(\left(1-\rho^2\cos^2\phi-\rho^2\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}\right)\rho d\rho d\phi = =\frac{2}{3}\iint\limits_{\Gamma}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho d\rho d\phi .$$

Область интегрирования ограничена окружностью $x^2+y^2=1$, поэтому $\phi\in\left[0,2\pi\right]$, $\rho\in\left[0,1\right]$. Следовательно,

$$I=\frac{2}{3}\iint\limits_{\Gamma}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho d\rho d\phi=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho d\phi=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 d\rho\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho\phi\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\int\limits_0^1 d\rho\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho .$$

При интегрировании по ϕ выражение, зависящее от ρ вынесли за знак интеграла. Для вычисления последнего интеграла внесем множитель $-\rho$ под знак дифференциала и прибавим единицу. Тогда $\rho d\rho=\frac{1}{2}d\rho^2=-\frac{1}{2}d\left(1-\rho^2\right)$. Следовательно,

$$I=\frac{4}{3}\pi\int\limits_0^1 d\rho\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho=-\frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\left(1-\rho^2\right)\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\left.\frac{-\frac{2}{3}\pi\left(1-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1=-\frac{4}{15}\pi\left(0-1\right)=\frac{4}{15}\pi.$$

Воспользовались формулой (6) приложения при $u\left(\rho\right)=1-\rho^2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить повторные интегралы

а. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{\left(3x+2y+z-4\right)^4}$ **б.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x} dy\int\limits_0^{y} xyzdz$

2. Вычислить тройные интегралы

а. $\iiint\limits_{\omega}\frac{1}{\left(4x+3y+z-2\right)^6}dxdydz$ Область ω ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

б. $\iiint\limits_{\omega} xdxdydz$. Область ω ограничена плоскостями $x+y+z=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$.

Ответы.

1. **а.** $\frac{1}{216}$ **б.** $\frac{1}{48}$

2. **а.** $\frac{1}{192}$ **б.** $\frac{112}{3}$

§ 3. Замена переменной в тройном интеграле

3.1. Общий случай

Пусть $\omega-$ ограниченная замкнутая область в пространстве UVW, $\Omega-$ ограниченная замкнутая область в пространстве XYZ.

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$ взаимнооднозначное отображение ω в Ω. При этих условиях система однозначно разрешима относительно u, v, w и положение точки в пространстве XYZ однозначно определяется заданием трех чисел (u,v,w). Поэтому их можно рассматривать, как координаты точки в пространстве XYZ.

Поверхности, на которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называется координатными поверхностями.

Например, при $u = u_0$ $\begin{cases} x = x(u_0,v,w) \\ y = y(u_0,v,w) \\ z = z(u_0,v,w) \end{cases}$ поверхность в пространстве XYZ.

Пусть функции (x,y,z) имеют непрерывные частные производные по всем переменным. Определитель $I(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' & x_w' \\ y_u' & y_v' & y_w' \\ z_u' & z_v' & z_w' \end{vmatrix}$ называется определителем Якоби или якобианом преобразования. Предположим, что $I(u,v,w) \neq 0$. Образом прямоугольного параллелепипеда со сторонами du, dv, dw является тело в пространстве XYZ (рис. 35).

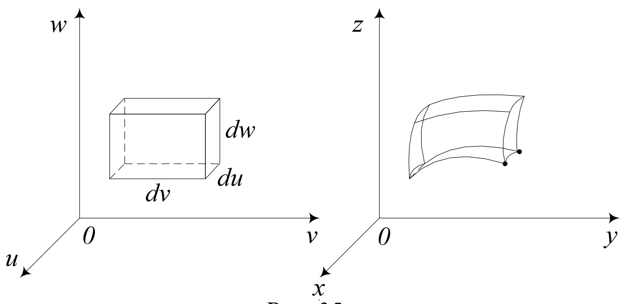


Рис. 35

Можно доказать, что с точностью до бесконечно малых более высоких порядков это прямоугольный параллелепипед и его объем равен $\left|I\left(u,v,w\right)\right|dudvdw$. Отсюда следует геометрический смысл якобиана. Абсолютная величина якобиана $\left|I\left(u,v,w\right)\right|$ − коэффициент изменения объема при переходе к системе координат XYZ .

Если отображение ω в Ω удовлетворяет перечисленным выше условиям, то формула замены переменной в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \tag{19}$$

$$= \iiint\limits_{\omega} f\Big(x\left(u,v,w\right), y\left(u,v,w\right), z\left(u,v,w\right)\Big)\left|I\left(u,v,w\right)\right|dudvdw$$

3.2. Цилиндрическая система координат

Положение точки M в пространстве XYZ определяется заданием трех координат $\left(r,\phi,z\right)$, где $z-$ расстояние от точки M до плоскости XY. Если точка $M'\left(x,y\right)$ − проекция точки $M\left(x,y,z\right)$ на плоскость XY, то r –расстояние от начала координат до точки $M'\left(x,y\right)$, $\phi-$ угол между положительным направлением оси X и лучом OM', то есть в плоскости XY вводится полярная система координат (рис. 36).

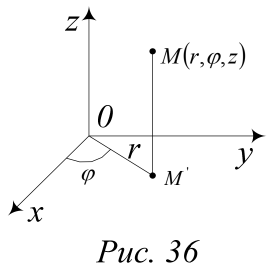


Рис. 36

Тогда декартовы координаты точки $M\left(x,y,z\right)$ выражаются через цилиндрические по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$, при этом $0 \le r < +\infty$, $0 \le \phi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Координатная поверхность $r = r_0$ имеет уравнение $\begin{cases} x = r_0\cos\phi \\ y = r_0\sin\phi \\ z = z \end{cases}$ или $x^2 + y^2 = r_0^2$, $z = z$ − это цилиндрическая поверхность с радиусом основания r_0.

Поскольку одна из координатных поверхностей − цилиндр, то система координат называется цилиндрической. Якобиан преобразования равен r. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\omega} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)rdrd\phi dz \qquad (20)$$

формула перехода к цилиндрической системе координат.

Пример 3.1. Вычислить интегралы в цилиндрической системе координат

а) $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z\right)^2 dxdydz$. Область Ω ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

б) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$. Область Ω ограничена параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$.

Решение.

а) Пусть $I = \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z\right)^2 dxdydz$. Область Ω ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$ (рис. 37).

По формуле (20) перехода к цилиндрической системе $I = \iiint\limits_{\omega}\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + z\right)^2 rdrd\phi dz = = \iiint\limits_{\omega}\left(r^2 + z\right)^2 rdrd\phi dz$. Из уравнения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ находим $r^2 = 1$ или $r = 1$. Отсюда следует, что z меняется от 0 до 1, r от 0 до 1, ϕ от 0 до 2π.

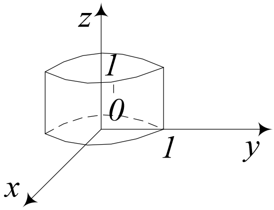


Рис. 37

Поэтому последний интеграл сводится к повторному ((формула(15)) $\iiint\limits_{\omega}\left(r^2+z\right)^2 rdrd\phi dz=\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{2\pi}\left(r^2+z\right)^2 rd\phi$

Проинтегрировав по ϕ, получим

$$I=\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^1 dr\left(r^2+z\right)^2 r\phi\Big|_0^{2\pi}=2\pi\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^1\left(r^2+z\right)^2 rdr$$

При интегрирования по r заметим, что $rdr=\frac{1}{2}dr^2=\frac{1}{2}d\left(r^2+z\right)$ (внесли множитель r под знак дифференциала и прибавили постоянное слагаемое z). (приложение § 2, формулы (7)).

Тогда интеграл

$$I=2\pi\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^1\left(r^2+z\right)^2\frac{1}{2}d\left(r^2+z\right)=$$

$$=\pi\int\limits_0^1 dz\frac{\left(r^2+z\right)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}\int\limits_0^1 dz\left(\left(1+z\right)^3-z^3\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\int\limits_0^1\left(1+3z+3z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}\left(z+\frac{3z^2}{2}+\frac{3z^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{7\pi}{6}.$$

При интегрировании по r воспользовались формулой (6) приложения при $u(r) = r^2 + z$.

б) Пусть $I = \iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$. Область Ω ограничена параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ (рис. 38).

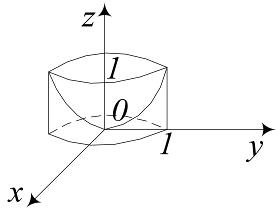


Рис. 38

По формуле (20) перехода к цилиндрической системе координат $I = \iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz = \iiint\limits_{\omega} z r dr d\phi dz$. Уравнение параболоида в цилиндрической системе координат $z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\phi + r^2 \sin^2\phi = r^2$. Поэтому ϕ меняется от 0 до 2π, r меняется от 0 до 1 (проекция линии пересечения параболоида и плоскости $z = 1$), z меняется от поверхности параболоида $z = r^2$ до плоскости $z = 1$. Тогда тройной интеграл равен повторному (формула (18)).

$$I = \iiint\limits_{\omega} z r dr d\phi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{r^2}^1 z r dz = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr \left. \frac{r z^2}{2} \right|_{r^2}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr r \left(1 - r^4\right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr \left(r - r^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \left. \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{6} \int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{6} \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить тройные интегралы в цилиндрической системе координат

1. $\iiint\limits_{\omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$. Область ω ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостью $z=1$.

2. $\iiint\limits_{\omega} z^2 dxdydz$. Область ω ограничена конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=1$.

3. $\iiint\limits_{\omega}\left(x^2+y^2+z\right)^4 dxdydz$. Область ω ограничена параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

4. $\iiint\limits_{\omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$. Область ω ограничена параболоидом $z=2-x^2-y^2$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ответы.

1. $\frac{\pi}{2}$ **2.** $\frac{\pi}{5}$ **3.** $\frac{31\pi}{30}$ **4.** $\frac{13\pi}{30}$

3.3. Сферическая система координат

Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве XYZ определяется заданием трех координат (r,θ,ϕ), где r – расстояние от начала координат до точки $M(x,y,z)$, θ – угол между осью z и лучом OM. Если $M'(x,y)$ – проекция точки $M(x,y,z)$ на плоскость XY, то ϕ – угол между осью X и лучом OM' (рис. 39).

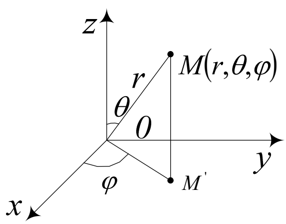


Рис. 39

Тогда $OM' = r\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = r\sin\theta$ и $\begin{cases} x = OM'\cos\phi \\ y = OM'\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi .$$

Координатная поверхность $r = r_0$ имеет уравнение

$$\begin{cases} x = r_0\sin\theta\cos\phi \\ y = r_0\sin\theta\sin\phi \\ z = r_0\cos\theta \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$. Это сфера с центром в начале координат радиуса r_0. Поскольку одна из координатных поверхностей сфера, система координат называется сферической. Якобиан преобразования равен $I = r^2\sin\theta$. Тогда формула перехода к сферической системе координат имеет вид

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \\ = \iiint_{\omega} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\phi dz \tag{21}$$

Пример 3.2. Вычислить интегралы в сферической системе координат.

а) $I = \iiint_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 dxdydz$. Область Ω ограничена полусферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$ и плоскостью XY

б) $I = \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$. Область Ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

Решение.

а) $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3 dxdydz$. Область Ω ограничена полусферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (z \geq 0)$ и плоскостью XY (рис. 40).

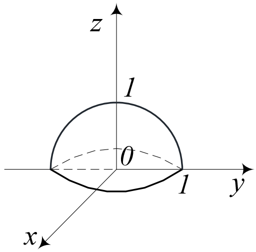


Рис. 40

По формуле (21) перехода к сферической системе координат получим $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3 dxdydz = \iiint\limits_{\omega} \left(\sqrt{r^2} \right)^3 r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta =$
$= \iiint\limits_{\omega} r^5 \sin\theta dr d\phi d\theta$.

Из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ находим $r = 1$. Поэтому r меняется от 0 до поверхности сферы $r = 1$.

Так как $z \geq 0$, то угол θ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, угол ϕ меняется от 0 до 2π.

Тогда тройной интеграл $I = \iiint\limits_{\omega} r^3 \sin\theta dr d\phi d\theta$ сводится к повторному интегралу (формула (15)).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^5 \sin\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \frac{r^6}{6} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \sin\theta \phi \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$==\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=-\frac{\pi}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{3}.$$

При интегрировании по r и ϕ множитель $\sin\theta$ вынесли за знак интегралов.

б) $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$. Область Ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=2z$ и конусом $x^2+y^2=z^2$.

По формуле (21) перехода к сферической системе координат интеграл $I=\iiint\limits_{\omega}\sqrt{r^2}\,r^2\sin\theta drd\phi d\theta=\iiint\limits_{\omega}r^3\sin\theta drd\phi d\theta$

Уравнение $x^2+y^2+z^2=2z$ представим в виде $x^2+y^2+z^2-2z+1=1$ или $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Это сфера с центром в точке $M(0,0,1)$ радиуса 1 (рис.41). Ее уравнение в сферической системе координат имеет вид $r^2=2r\cos\theta$ или $r=2\cos\theta$. Так как $r\ge 0$, то $\cos\theta\ge 0$ или $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (учли, что $\theta\in[0,\pi]$). Уравнение конуса $x^2+y^2=z^2$ (рис.41) в сферической системе координат имеет вид $r^2\sin^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\theta\sin^2\phi=r^2\cos^2\theta$ или $\sin\theta=\cos\theta$, тогда $\theta=\frac{\pi}{4}$, так как $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

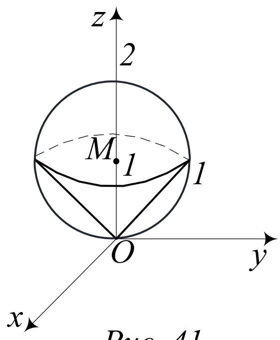


Рис. 41

Отсюда следует, что $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, r меняется от нуля до сферы $r = 2\cos\theta$ и $\phi \in [0, 2\pi]$. Сведем тройной интеграл к повторному интегралу (формула (18))

$$I = \iiint\limits_{\omega} r^3 \sin\theta dr d\phi d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2cos\theta} dr \int\limits_0^{2\pi} r^3 \sin\theta d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2cos\theta} dr r^3 \sin\theta \phi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2cos\theta} dr r^3 \sin\theta .$$

При интегрировании по ϕ множитель $r^3 \sin\theta$ вынесли за знак интеграла.

Проинтегрировав по r, получим

$$I = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2cos\theta} dr r^3 \sin\theta = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2cos\theta} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta \cdot 16\cos^4\theta = 8\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta \sin\theta d\theta .$$

Для вычисления последнего интеграла заметим, что $\sin\theta d\theta = -d\cos\theta$ (внесли $\sin\theta$ под знак дифференциала). Тогда

$$I = -8\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta \cdot d\cos\theta = \frac{-8\pi}{5} \cos^5\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{-8\pi}{5}\left(\cos^5\frac{\pi}{4} - \cos^5 0\right) = -\frac{8\pi}{5}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 1\right) =$$

$$= \frac{8\pi}{5}\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right).$$

Воспользовались формулой (6) приложения при $u(\theta) = \cos\theta$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить интегралы в сферической системе координат

1. $\iiint\limits_{\omega} \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$. Область ω ограничена верхней половиной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостью $z = 0$

2. $\iiint\limits_{\omega} \frac{dxdydz}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} + 1}}$. Область ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. $\iiint\limits_{\omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$. Область ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = z$

4. $\iiint\limits_{\omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$. Область ω ограничена верхней половиной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостью XY.

Ответы.

1. $2\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ **2.** $\frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ **3.** $\frac{\pi}{10}$ **4.** $\frac{4\pi}{15}$

Глава 3.
Геометрические и физические приложения кратных интегралов

§ 1. Вычисление массы и площади плоской области. Физическое истолкование двойного интеграла

Если D – ограниченная замкнутая область плоскости, по которой распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(N)$, то масса этой области вычисляется по формуле

$$M(D) = \iint\limits_D \rho(N)\,ds .$$

Масса равна интегралу от плотности. Это физическое истолкование двойного интеграла.

Если $\rho(N) \equiv 1$, то масса численно равна площади D, следовательно, площадь области

$$S(D) = \iint\limits_D ds .$$

Отметим, что в декартовой системе координат масса и площадь вычисляются по формулам

$$M(D) = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dxdy \qquad (22)$$

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy \qquad (23)$$

(глава 1, § 1).

Пример 1.1. Найти площадь фигуры ограниченной кривыми $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 1$.

Решение.

а) Площадь область равна $S(D)=\iint\limits_D dxdy$ (формула (23)), область ограничена параболами $y=x^2$, $4y=x^2$ и прямой $y=1$ (рис. 42).

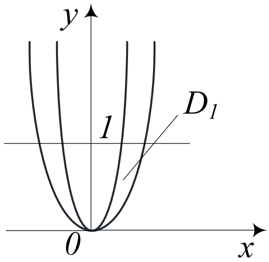


Рис. 42

Ясно, что фигура симметрична относительно оси y, поэтому достаточно вычислить половину площади. Следовательно,

$$\frac{1}{2}S(D)=\iint\limits_{D_1} dxdy .$$

Сведем двойной интеграл к повторному. Если внешний предел интегрирования по x, то область D_1 следует разбить на две области. Если внешний предел по y, то двойной интеграл сводится к одному повторному. Из уравнения $y=x^2$ находим $x=\pm\sqrt{y}$, уравнение правой ветви $x=+\sqrt{y}$. Из уравнения $4y=x^2$ находим $x=\pm 2\sqrt{y}$ уравнение правой ветви $x=+2\sqrt{y}$. Поэтому, если $y\in[0,1]$, то x меняется от правой ветви первой параболы $x=+\sqrt{y}$ до правой ветви второй параболы $x=+2\sqrt{y}$. Тогда

$$\frac{1}{2}S(D)=\iint\limits_{D_1} dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx=\int\limits_0^1 dy x\Big|_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}=\int\limits_0^1 dy\sqrt{y}=\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$$

Значит $S(D) = \frac{4}{3}$.

Пример 1.2. Найти массу плоской фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4$, $xy = 9$, $y^2 = 3x$, $y^2 = 6x$, если плотность $\rho(x, y) = \sqrt{xy}$.

Решение.

Масса плоской фигуры равна

$$M(D) = \iint_D \rho(x, y)\,dxdy = \iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$$

(формула (22)).

Область D ограничена двумя гиперболами $xy = 4$, $xy = 9$ и двумя параболами $y^2 = 3x$, $y^2 = 6x$ (рис. 43).

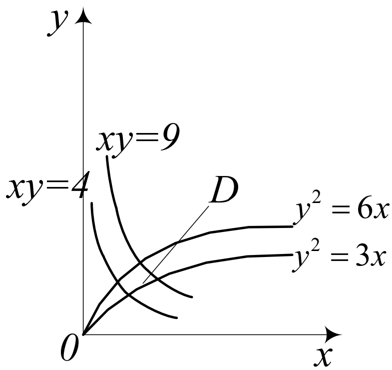


Рис.43

Если вычислять интеграл в декартовой системе координат, то область интегрирования следует разбить на три. Поэтому удобно сделать замену переменной $\begin{cases} y^2 = vx \\ xy = u \end{cases}$, тогда $u \in [4, 9]$, $v \in [3, 6]$. Из системы $\begin{cases} y^2 = vx \\ xy = u \end{cases}$ выразим x, y через u, v. Из второго уравнения находим $y=\dfrac{u}{x}$, подставляя в первое, получим $\dfrac{u^2}{x^2}=vx$ или $x^3=u^2v^{-1}$

тогда $\begin{cases} x=u^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{1}{3}} \\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

Частные производные равны $x_u^{'}=\dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$, $x_v^{'}=-\dfrac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}}$, $y_u^{'}=\dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$, $y_v^{'}=\dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}$

Якобиан преобразования равен

$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\dfrac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=\frac{2}{9}v^{-1}+\frac{1}{9}v^{-1}=\frac{1}{3}v^{-1}.$$

Так как $v\in[3,6]$, то $|I|=\left|\dfrac{1}{3}v^{-1}\right|=\dfrac{1}{3}v^{-1}$.

По формуле (10) замены переменной в двойном интеграле имеем $M(D)=\iint\limits_D\sqrt{xy}\,dxdy=\iint\limits_{\Gamma}\sqrt{u}\,\dfrac{1}{3}v^{-1}dudv$.

Последний двойной интеграл сводится к повторному интегралу (формула (4))

$$M(D)=\iint\limits_{\Gamma}\sqrt{u}\,\frac{1}{3}v^{-1}dudv=\frac{1}{3}\int\limits_4^9 du\int\limits_3^6\sqrt{u}\,\frac{dv}{v}=\frac{1}{3}\int\limits_4^9 du\sqrt{u}\ln v\Big|_3^6=$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_4^9 du\sqrt{u}\left(\ln 6-\ln 3\right)=\frac{\ln 2}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^9=\frac{2}{9}\ln 2\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\ln 2(27-8)=\frac{38}{9}\ln 2.$$

Воспользовались табличными интегралами 2 и 3.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми

а. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$

б. $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$

в. $xy = \frac{1}{2}$, $xy = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$

2. Найти массу плоской области D, если известна плотность $\rho(x, y)$.

а. Область D ограничена кривыми $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$, $\rho = x$

б. Область D ограничена кривыми $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, ($y \geq 0$), $\rho = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

в. Область D ограничена кривыми $x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}x$, ($y \geq 0$), $x = 0$, $\rho = x\left(x^2 + y^2\right)$

г. Область D ограничена кривыми

$$x + y = 8,\ x + y = 4,\ y = \frac{x}{3},\ y = 3x,\ \rho = \frac{1}{(x + y)^3}.$$

Ответы.

1. **а.** $4{,}5$ **б.** 3π **в.** $\frac{3}{2}\ln 2$

2. **а.** $20\frac{2}{3}$ **б.** $\frac{\pi}{12}$ **в.** $3{,}2$ **г.** $\frac{1}{16}$

§ 2. Вычисление объемов тел и площадей поверхности с помощью двойного интеграла

Цилиндрическим брусом называется тело с основанием D, лежащим в плоскости XY, сверху ограниченное поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси z (рис. 44).

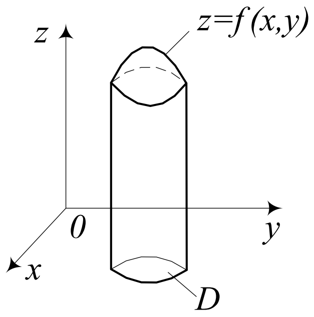


Рис. 44

Объем цилиндрического бруса равен

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy \,. \tag{24}$$

Это геометрическое истолкование двойного интеграла (глава 1, § 1)

Площадь поверхности $z = f(x,y)$, вырезанной цилиндрической поверхностью с основанием D в плоскости XY и образующими параллельными оси z (рис. 44), вычисляется по формуле

$$S_{пов} = \iint_D \sqrt{1 + \left(z_x^{'}\right)^2 + \left(z_x^{'}\right)^2}\,dxdy \tag{25}$$

Пример 2.1. Найти объем цилиндрического бруса, ограниченного поверхностями

а) $x + y + z = 4$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$

б) $z = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geq 0)$, $2x + y = 4$

Решение.

а) Цилиндрический брус ограничен сверху плоскостью $x + y + z = 4$ или $z = 4 - x - y$, отсекающей на координатных осях отрезки равные 4, $x + y = 4$ − ее проекция на плоскость XY, $y = 0$, $z = 0$ −координатные плоскости XZ и XY, $y = x$ − плоскость, проходящая через ось z, $x = 2$ плоскость параллельная оси z (рис. 45).

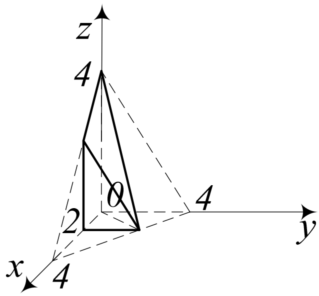


Рис. 45

Треугольник S, ограниченный прямыми $y = x$, $x = 2$, $y = 0$, − его проекция на плоскость XY (рис. 46).

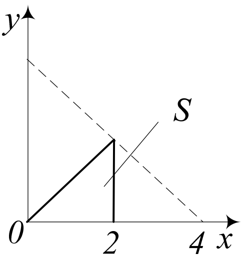


Рис.46

По формуле (24) объем цилиндрического бруса равен $V(\omega) = \iint\limits_S z(x, y)\,dxdy = \iint\limits_S (4 - x - y)\,dxdy$

Полученный двойной интеграл по треугольнику сведем к повторному (формула (8)). Если $x \in [0, 2]$, то y меняется от 0 до прямой $y = x$. Поэтому

$$V(\omega) = \iint\limits_S (4 - x - y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x (4 - x - y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \left((4 - x)y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^x = \int\limits_0^2 dx \left((4 - x)x - \frac{x^2}{2} \right) =$$

$$=\int_0^2\left(4x-\frac{3x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{4x^2}{2}-\frac{3x^3}{2\cdot 3}\right)\Bigg|_0^2=2\cdot 4-4=4\,.$$

б) Цилиндрический брус ограничен сверху цилиндром с основанием $z=4-x^2$ (часть параболы), лежащим в плоскости XZ , и образующими параллельными оси y , $x=0$, $y=0$, $z=0$,$(x\geq 0)$ координатные плоскости, $2x+y=4$ плоскость, параллельная оси z (рис. 47).

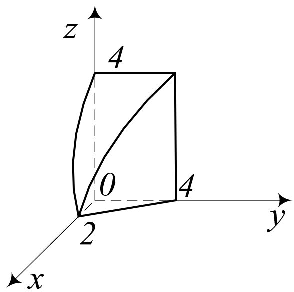


Рис.47

Треугольник, ограниченный прямой $2x+y=4$ и осями координат,− проекция цилиндра на плоскость (рис. 48).

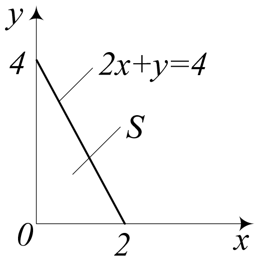


Рис.48

По формуле (25) объем цилиндрического бруса равен $V(\omega)=\iint\limits_S\left(4-x^2\right)dxdy$. Двойной интеграл сведем к повторному (формула (8)). Если $x \in [0,2]$ то y меняется от нуля до прямой $2x + y = 4$ или $y = 4 - 2x$. Тогда

$$V(\omega) = \iint\limits_S (4 - x^2)\,dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} (4 - x^2)\,dy = \int\limits_0^2 dx(4 - x^2)\,y\Big|_0^{4-2x} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx(4 - x^2)(4 - 2x).$$

(при интегрировании по y выражение, зависящее от x, вынесли за знак интеграла). Поэтому

$$V(\omega) = 2\int\limits_0^2 dx(4 - x^2)(2 - x) = 2\int\limits_0^2 (8 - 2x^2 - 4x + x^3)\,dx =$$

$$= 2\left(8x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(16 - \frac{16}{3} - \frac{16}{2} + \frac{16}{4}\right) =$$

$$= 32\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{40}{3}.$$

Пример 2.2. Найти площади указанных поверхностей

а) части плоскости $x + y + z = 4$, вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$

б) части поверхности параболоида $z = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 27$.

Решение.

а) $x + y + z = 4$ или $z = 4 - x - y$ плоскость, отсекающая на осях координат отрезки равные 4, $x + y = 4$ − ее проекция на плоскость XY, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ координатные плоскости, $x = 2$, $y = 2$ плоскости параллельные оси z (рис. 49).

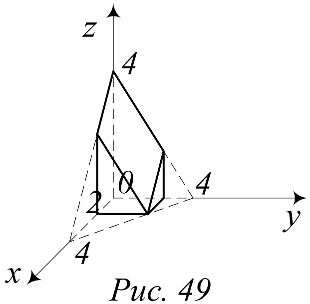


Рис. 49

Квадрат $P = [0,2] \times [0,2]$ – проекция части плоскости $z = 4 - x - y$ на плоскость XY (рис. 50).

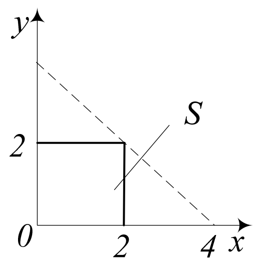


Рис.50

Площадь поверхности вычислим по формуле (26).

Находим частные производные $z'_x = (4 - x - y)'_x = -1$, $z'_y = (4 - x - y)'_y = -1$ и подставляем их в формулу (26). Тогда $S_{пов} = \iint\limits_P \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy = \sqrt{3} \iint\limits_P dxdy$. Последний интеграл равен площади квадрата со стороной 2, то есть 4. Поэтому площадь поверхности равна $S_{пов} = \sqrt{3} \cdot 4$.

б) часть поверхности параболоида $z = \frac{1}{6}\left(x^2 + y^2\right)$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 27$, изображена на рис. 51.

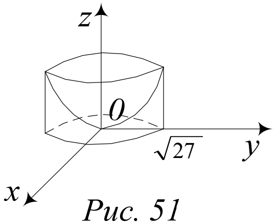


Рис. 51

Ее проекция на плоскость XY – круг радиуса $\sqrt{27}$ (рис. 52).

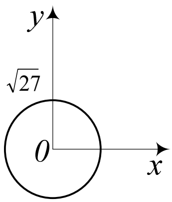


Рис. 52

Найдя частные производные

$$z_x' = \left(\frac{1}{6}\left(x^2+y^2\right)\right)_x' = \frac{1}{3}x \quad z_y' = \left(\frac{1}{6}\left(x^2+y^2\right)\right)_y' = \frac{1}{3}y$$

и воспользовавшись формулой (26), получим

$$S_{пов} = \iint_D \sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_x'\right)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left(\frac{1}{3}y\right)^2}\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_D \sqrt{9+x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярной системе координат $\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ x = \rho\sin\phi \end{cases}$. Тогда (формула (11))

$$S_{пов} = \frac{1}{3}\iint_D \sqrt{9+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{Г}\sqrt{9+(\rho\cos\phi)^2+(\rho\sin\phi)^2}\rho d\rho d\phi==\frac{1}{3}\iint\limits_{Г}\sqrt{9+\rho^2}\rho d\rho d\phi.$$

Так как область интегрирования круг радиуса $\sqrt{27}$, то $\rho\in\left[0,\sqrt{27}\right]$, $\phi\in[0,2\pi]$. Последний интеграл сведем к повторному (формула (4)).

Тогда

$$S_{пов}=\frac{1}{3}\iint\limits_{Г}\sqrt{9+\rho^2}\rho d\rho d\phi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\sqrt{27}}d\rho\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{9+\rho^2}\rho d\rho d\phi=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\sqrt{27}}d\rho\sqrt{9+\rho^2}\rho\phi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\sqrt{27}}d\rho\sqrt{9+\rho^2}\rho.$$

При вычислении интеграла по ϕ выражение, зависящее от ρ, вынесли за знак интеграла. Для вычисления последнего интеграла представим $\rho d\rho$ в виде $\rho d\rho=\frac{1}{2}d\left(\rho^2+9\right)$ (внесли ρ под знак дифференциала и прибавили 9).

Тогда

$$S_{пов}=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\sqrt{27}}d\rho\sqrt{9+\rho^2}\rho=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\sqrt{27}}\left(9+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d\left(\rho^2+9\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\frac{\left(9+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{27}}=\frac{2\pi}{9}\left(\left(9+27\right)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=42\pi.$$

При интегрировании по ρ воспользовались формулой (6) приложения при $u(\rho)=9+\rho^2$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти объем цилиндрического бруса, ограниченного поверхностями

а. $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

б. $x + y + z = 1$, $3x + y = 1$, $\frac{3}{2}x + y = 1$, $y = 0$, $z = 0$

в. $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$

2. Найти площади, указанных поверхностей

а. части плоскости $x + y + z = 6$, вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$, $y = 3$

б. части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемого плоскостью $z = 2$

в. части цилиндра $x^2 + z^2 = 9$ $(z \geq 0)$, отсекаемого плоскостями $y = 0$, $y = 2$

Ответы.

1. **а.** $\frac{3\pi}{2}$ **б.** $\frac{1}{18}$ **в.** $\frac{1}{6}$

2. **а.** $9\sqrt{3}$ **б.** $\frac{13\pi}{3}$ **в.** 6π

§ 3. Вычисление массы и объемов тел с помощью тройного интеграла

Пусть ω – ограниченная замкнутая область пространства, по которой распределена масса с объемной плотностью $\rho(N)$, тогда масса области вычисляется по формуле $M(\omega) = \iiint\limits_{\omega} \rho(N)dV$.

Если $\rho(N) \equiv 1$, то масса численно равна объему, то есть объем $V(\omega) = \iiint\limits_{\omega} dV$.

Этот факт дает физическое истолкование тройного интеграла.

В декартовой системе координат

$$M(\omega) = \iiint\limits_{\omega} \rho(x, y, z)dxdydz \tag{27}$$

$$V(\omega)=\iiint\limits_{\omega} dxdydz \qquad (28)$$

Пример 3.1. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $3z=x^2+y^2$

Решение.

По формуле (28) объем $V(\omega)=\iiint\limits_{\omega} dxdydz$. Область ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=4$ радиуса 2 и параболоидом $3z=x^2+y^2$ (рис. 53).

Линия пересечения сферы и параболоида − окружность, радиус которой найдем из системы $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 3z=x^2+y^2 \end{cases}$. Отсюда $3z+z^2=4$ или $z^2+3z-4=0$, то есть $z=1$ или $z=-4$ (постороннее решение). При $z=1$ имеем $x^2+y^2=3$. Тогда область ω имеет вид, изображенный на рис. 53.

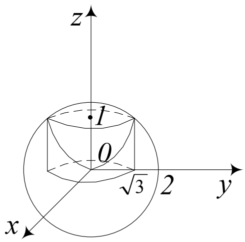


Рис. 53

Ее проекция на плоскость XY круг радиуса $\sqrt{3}$ (рис. 54).

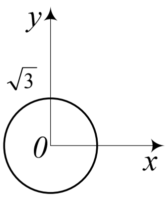


Рис. 54

По формуле (16) сведем тройной интеграл к двойному.

Для любой точки M из круга z меняется от параболоида $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ до верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=4$ или $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Тогда

$$V(\omega)=\iiint\limits_{\omega} dxdydz=\iint\limits_{S} dxdy\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz=\iint\limits_{S} dxdyz\Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}=$$

$$=\iint\limits_{S} dxdy\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right).$$

В двойном интеграле перейдем к полярной системе координат $\begin{cases} x=\rho\cos\phi \\ x=\rho\sin\phi \end{cases}$ (формула (11)).

$$V(\omega)==\iint\limits_{\Gamma}\left(\sqrt{4-\rho^2\cos^2\phi-\rho^2\sin^2\phi}-\frac{\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi}{3}\right)\rho d\rho d\phi=$$

$$=\iint\limits_{\Gamma}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho d\rho d\phi.$$

Поскольку область интегрирования круг радиуса $\sqrt{3}$, то, $\rho\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ $\phi\in[0,2\pi]$. Двойной интеграл сводится к повторному интегралу (формула (4)) $V(\omega)=\int\limits_0^{\sqrt{3}} d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\dfrac{\rho^2}{3}\right)\rho d\rho d\phi=$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{3}} d\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho\phi\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}} d\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho=$$

$$=2\pi\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}} d\rho\rho\sqrt{4-\rho^2}-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{\rho^3}{3}d\rho\right).$$

Проинтегрировали по ϕ, вынося выражение, зависящее от ρ, за знак интеграла.

При вычислении первого интеграла представим $\rho d\rho$ в виде $\rho d\rho = -\frac{1}{2}d\left(4-\rho^2\right)$ (внесли $-\rho$ под знак дифференциала и прибавили 4). Тогда

$$V(\omega) = 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}} d\rho\rho\sqrt{4-\rho^2} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho^3}{3}d\rho\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4-\rho^2\right) - -\frac{\rho^4}{12}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} - \frac{9}{12}\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(1-4^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{4}\right) = \frac{19\pi}{6}.$$

При вычислении первого интеграла воспользовались формулой (6) приложения при $u(\rho) = 4-\rho^2$.

Пример 3.2. Найти массу области, ограниченной плоскостями $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$, если плотность $\rho(x,y,z) = x+y+z$.

Решение.

Масса $M(\omega) = \iiint\limits_{\omega}(x+y+z)dxdydz$ (формула (26)).

Область ω ограничена плоскостями $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$. $x+y=1$ прямая в плоскости XY и плоскость, параллельная оси z, в пространстве XYZ, $x=0$, $y=0$, $z=0$ − координатные плоскости $z=1$ − плоскость параллельная плоскости XY (рис. 55).

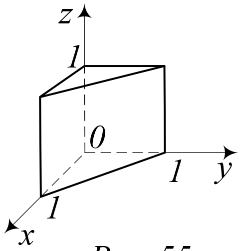


Рис. 55

Проекция S области ω на плоскость XY − треугольник, ограниченный прямой $x+y=1$ и координатными осями (рис. 56).

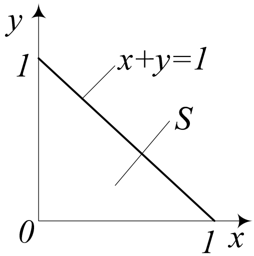


Рис. 56

Для любой точки $M(x,y)$ треугольника z меняется от 0 до 1. Поэтому по формуле (16) имеем

$$M(\omega)=\iiint_{\omega}(x+y+z)\,dxdydz=\iint_{S}dxdy\int_{0}^{1}(x+y+z)dz=$$

$$=\iint_{S}dxdy\left((x+y)z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\iint_{S}dxdy\left(x+y+\frac{1}{2}\right).$$

При интегрировании по z постоянный множитель $(x+y)$ вынесли за знак интеграла. Вычислим двойной интеграл по треугольнику. При $x\in[0,1]$ y меняется от 0 до прямой $x+y=1$ или $y=1-x$. Поэтому по формуле (8)

$$M(\omega)=\iint_S dxdy\left(x+y+\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{(1-x)}==\frac{1}{2}\int_0^1 dx\Big(2x(1-x)+(1-x)^2+(1-x)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2-x-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{12}.$$

При интегрировании по y постоянный множитель x выносим за знак интеграла и пользуемся табличными интегралами.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

а. $z=x^2+y^2+2$, $x^2+y^2=1$, $z=0$

б. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=z^2$

в. $x+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=3$

2. Найти массу объемной области ω, ограниченной поверхностями, если известна объемная плотность ρ

а. область ω ограничена плоскостями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=1$, если $\rho=x$

б. область ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$, если $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

в. область ω ограничена конусом $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$, если $\rho=z$

г. область ω ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $z=0$, $z=1$, $y=0$ $(y\ge 0)$, если

$\rho=z\sqrt{x^2+y^2}$

Ответы.

1. а. $\frac{5\pi}{2}$ **б.** $\pi a^3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **в.** 6

2.а. $\frac{1}{24}$ **б.** $\frac{\pi}{10}$ **в.** $\frac{\pi}{4}$ **г.** $\frac{8}{9}$

Глава 4.
Варианты контрольных работ

В этой главе приведены четыре варианта контрольных работ. Студенты могут использовать их для проверки своих знаний, а преподаватели для аудиторных и домашних контрольных заданий. Контрольные работы рассчитаны на наиболее насыщенную программу курса, поэтому в некоторых случаях отдельные примеры (особенно примеры 5) можно исключить из заданий.

Каждая контрольная работа состоит из пяти заданий на вычисление двойных и тройных интегралов методами, рассмотренными в пособии, а именно: перестановка пределов интегрирования в двойном интеграле, вычисление двойного и тройного интеграла в декартовой системе координат, замена переменной в двойном и тройном интеграле, вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системе координат. В контрольную работу включены также примеры на физическое и геометрическое приложение кратных интегралов: вычисление площадей и объемов тел с помощью двойных интегралов, вычисление массы плоских и объемных областей и площади поверхности.

Вариант 1

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^4 y\,dx\,dy$. Область

D ограничена кривыми $xy=1$, $y=x$, $x=2$.

3. Найти массу области ω, ограниченной плоскостями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$, $z=1$, если плотность $\rho(x,y,z)=x$.

4. Вычислить интеграл в сферической системе координат $\iiint\limits_{\omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, область ω ограничена полусферой $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$ и плоскостью XY

5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy$. Область D ограничена кривыми $xy=3$, $xy=5$, $y=x$, $y=4x$. Указание. Сделать замену переменных $xy=u$, $y=vx$.

Вариант 2

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D} x(y-1)dxdy$. Область D ограничена прямыми $y=x$, $y=5x$, $x=3$.

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\omega} xdxdydz$. Область ω ограничена плоскостями $x+y+z=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$.

4. Найти массу объемной области ω, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$, и плоскостью $z=1$, если известна объемная плотность $\rho(x,y,z)=z$.

5. Вычислить интеграл в сферической системе координат $\iiint\limits_{\omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, область ω ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=z$.

Вариант 3.

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$. Область D ограничена кривыми $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

3. Найти объем цилиндрического бруса, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $3x + y = 1$, $\frac{3}{2}x + y = 1$, $z = 0$

4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_\omega z^2 dxdydz$ в цилиндрической системе координат. Область ω ограничена конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 1$.

5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$, область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2x$

Вариант 4.

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_P x^2 y e^{xy} dxdy$. Область P прямоугольник $P = [0,1] \times [0,2]$.

3. Найти площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченной плоскостью $z = 2$.

4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_\omega \frac{dxdydz}{\sqrt{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$ в сферической системе координат. Область ω ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5. Найти массу области D, ограниченной прямыми $x + y = 4$, $x + y = 8$, $y = \frac{x}{3}$, $y = 3x$, если известна плотность $\rho(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}$.

Указание. Сделать замену переменных $x + y = u$, $y = vx$.

Приложение. Определенный интеграл и методы его вычисления

§ 1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке $[a,b]$. Разделим промежуток $[a,b]$ на *n* частей (необязательно одинаковых) точками $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$. Положим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

($k = 0,\ 1...n-1$), $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$. Выберем в каждом из промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ точку c_k $\left(c_k \in [x_k, x_{k+1}]\right)$. Выражение вида

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

называется *интегральной суммой функции f(x) на промежутке* $[a,b]$, соответствующей данному разбиению отрезка на части и данному выбору точек c_k.

Функция *f(x)* называется *интегрируемой на промежутке* $[a,b]$, если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения $[a,b]$ на части и от выбора точек c_k. Этот предел называется *определенным интегралом и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$ (читается интеграл от *a* до *b f(x) dx*).

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

f(x)− подынтегральная функция,

f(x)dx − подынтегральное выражение.

Числа *a, b* – пределы интегрирования (*a* − нижний предел, *b* − верхний предел).

Операция нахождения определенного интеграла называется *интегрированием.*

Необходимое условие интегрируемости функции. Если функция *f(x)* интегрируема, то она ограничена.

Достаточное условие интегрируемости функции. Если функция *f(x)* непрерывна на промежутке $[a,b]$, то она интегрируема. Если функция кусочно−непрерывна на промежутке $[a,b]$ (то есть имеет на этом промежутке конечное число точек разрыва первого рода), то она интегрируема.

Механическое истолкование определенного интеграла. Тело движется прямолинейно неравномерно со скоростью $V(t)$. Путь, пройденный за время от момента *t1* до момента *t2*, вычисляется по формуле $S=\int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$. Путь равен интегралу от скорости − это механическое истолкование определенного интеграла.

Геометрическое истолкование определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $f(x)\geq 0$ на промежутке $\left[a,b\right]$. Фигура *AabB*, ограниченная осью *X*, графиком функции *f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* называется криволинейной трапецией (рис.1).

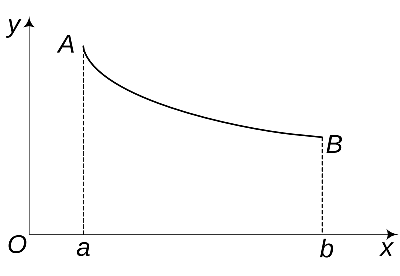


Рис.1

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S_{к.тр.}=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Площадь криволинейной трапеции равна значению определенного интеграла– это геометрическое истолкование определенного интеграла.

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(t)\,dt=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной).

2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$

3. $\int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Замечание. Свойства 2 и 3– дополнения к определению интеграла, то есть распространение этого понятия на случаи $a=b$ и $b<a$.

4. *Линейность интеграла.*

$$\int\limits_b^a \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int\limits_b^a f(x)\,dx+\beta\int\limits_b^a g(x)\,dx$$

Отсюда следует, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, и интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

5. *Аддитивность интеграла.*

Если промежуток $[a,b]$ разбит точкой c на промежутки $[a,c]$ и $[c,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

6. Если $f(x)\geq 0$ $\left(f(x)>0\right)$ на промежутке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

Следствие. Если $f(x)\geq g(x)$ $\left(f(x)>g(x)\right)$ на промежутке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$ (абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины).

8. *Теорема о среднем.*

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

9. *Интеграл по симметричному промежутку.*

а. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если функция $f(x)$ нечетная $\left(f(-x)=-f(x)\right)$.

б. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$, если функция $f(x)$ четная $\left(f(-x)=f(x)\right)$.

§ 2. Основная формула интегрального исчисления

Нахождение определенного интеграла по определению (то есть как предела интегральных сумм) даже в случае простых подынтегральных функций требует довольно больших усилий и применения некоторых искусственных приемов.

Справедлива основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона−Лейбница), которая позволит свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного интеграла.

Напомним определение первообразной функции и неопределенного интеграла ([1]–[3]).

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a,b)$. Отметим, что, если промежуток (a,b) определен естественно, то есть в соответствии с областями определения $f(x)$ и $F(x)$, то его, как правило, не указывают.

Если $F(x)$ одна из первообразных для $f(x)$, то любая первообразная имеет вид $F(x)+C$, где $C-$ произвольная постоянная. Таким образом, чтобы знать все первообразные для функции $f(x)$, достаточно знать одну из них.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для данной функции.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается интеграл $f(x)dx$), где $f(x)-$ подынтегральная функция, $f(x)dx-$ подынтегральное выражение. Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (3)$$

где $F'(x) = f(x)$, $C-$ произвольная постоянная.

Запишем таблицу неопределенных интегралов

№	Функция	Неопределенный интеграл	Примечание
1	0	C	
2	x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\alpha \neq -1$
3	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
4	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$a>0,\ a \neq 1$
4.a	e^x	$e^x + C$	

№	Функция	Неопределенный интеграл	Примечание
5	*sinx*	*−cosx+C*	
6	*cosx*	*sinx+C*	
7	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	*tgx+C*	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, *k*–целое
8	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	*−ctgx+C*	$x \neq \pi k$, *k*–целое
9	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$ $-\arccos\frac{x}{a} + C$	*a>0*, $\lvert x\rvert < a$
10	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ $-\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$	*a>0*
11	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	*a>0*
12	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$	α −любое

Если функция *f(x)* непрерывна на промежутке $[a,b]$, то справедлива ***формула Ньютона−Лейбница***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{4}$$

где $F(x)$− одна из первообразных для функции *f*

($F'(x) = f(x)$). Определенный интеграл равен разности значений любой первообразной в точках *b* и *a*.

$F(b) - F(a)$ обычно записывается в виде $F(x)\big|_a^b$ (читается $F(x)$ подстановка от *a* до *b*).

Тогда формула ***Ньютона−Лейбница*** примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad (5)$$

Эта формула позволяет свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного. Она называется ***основной формулой интегрального исчисления.***

§ 3. Некоторые методы интегрирования

3.1. Простейшая замена переменной (внесение множителя под знак дифференциала)

Справедливо следующее свойство неопределенного интеграла.

Если $\int f(u)du = F(u) + C$, то

$$\int f\big(u(x)\big)du(x) = F\big(u(x)\big) + C$$

(подынтегральные функции предполагаются непрерывными), то есть формула для нахождения неопределенного интеграла справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой или дифференцируемой функцией аргумента x.

В этом случае для вычисления определенного интеграла справедлива формула

$$\int_a^b f(u(x))du(x) = F\big(u(x)\big)\Big|_a^b \tag{6}$$

Пример 1. Вычислить интегралы

а) $\int_1^e \sin(\ln x)d(\ln x)$

б) $\int_0^1 \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}}$

Решение.

а) $I=\int\limits_1^e \sin(\ln x)d(\ln x)=-\cos(\ln x)\Big|_1^e=-\cos(\ln e)+\cos(\ln 1)=$

$=-\cos 1+\cos 0=1-\cos 1$

Воспользовались табличным интегралом 5 и формулой (6) при $u(x)=\ln x$

б) $I=\int\limits_0^1 \dfrac{d(e^x)}{1+e^{2x}}=arctge^x\Big|_0^1=arctge-arctg1=arctge-\dfrac{\pi}{4}$

Воспользовались табличным интегралом 10 и формулой (6) при $u(x)=e^x$

Интегралы, рассмотренные в формуле (6) и в примере, встречаются редко. Однако в некоторых случаях их удается привести к указанному виду.

Требуется вычислить интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$. Пусть подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно привести к виду

$$f(x)dx=f_1\big(u(x)\big)u^{'}(x)dx==f_1\big(u(x)\big)d\big(u(x)\big)$$

Тогда, если $\int f_1(u)du=F(u)+C$,

то

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f_1\big(u(x)\big)d\big(u(x)\big)==F\big(u(x)\big)\Big|_a^b$$

(все подынтегральные функции непрерывны)

При выполнении простейшей замены переменной часто используют следующие свойства дифференциала

$$dx=d(x+c),\ dx=\frac{d(cx)}{c},\ dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$$

(a, b, c − постоянные) (7)

Пример 2.

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$ **б)** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,xdx$

Решение.

а) Пусть $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$. По свойству дифференциала $dx = \frac{1}{2}d(2x+1)$ (формулы (7)). Тогда

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^3} = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4}\left(3^{-2}-1\right) = \frac{2}{3}.$$

Воспользовались табличным интегралом 2 ($\alpha = -3$) и формулой (6) при $u(x) = 2x+1$

б) Пусть $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,xdx$. Представим xdx в виде $xdx = -\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right)$ (внесли $-x$ под знак дифференциала и прибавили 1). Тогда

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,xdx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$

Воспользовались табличным интегралом 2 ($\alpha = \frac{1}{2}$) и формулой (6) при $u(x) = 1-x^2$.

3.2. Замена переменной в интегралах

Справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(x(t)\big)\cdot x'(t)\,dt,$$

замены переменной в неопределенном интеграле. Функция $x(t)$ имеет обратную $t(x)$, $x_t' = \dfrac{1}{t_x'}$ и производная x_t' непрерывна.

Пусть функция $x(t)$ задана на промежутке $[\alpha,\beta]$, удовлетворяет перечисленным выше условиям, и $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, тогда справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)\cdot x'(t)\,dt \qquad (8)$$

Подбирая функцию $x(t)$ можно добиться того, что интеграл в правой части имеют более простой вид.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

Решение.

Пусть $I = \int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$**.** Сделаем замену переменной $\sqrt{2-x} = t$, тогда $2-x=t^2$, $x = 2-t^2$ и $dx = d\left(2-t^2\right) = -2t\,dt$. При $x=1$ $t=\sqrt{2-1}=1$, при $x=2$ $t=\sqrt{2-2}=0$.

По формуле (8) замены переменной в определенном интеграле имеем $I = \int_1^0 \left(2-t^2\right)t(-2t)\,dt = -2\int_1^0 \left(2t^2-t^4\right)dt$

По свойству 2 определенного интеграла получим

$$I = 2\int_0^1 \left(2t^2-t^4\right)dt = 2\left(\frac{2t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{14}{15}.$$

Последние интегралы табличные от степенной функции ($\alpha=2$, $\alpha=4$).

3.3. Формула интегрирования по частям

Справедлива формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$$\int udv = uv - \int vdu \text{ или } \int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

и формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \text{ или } \int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu' dx \qquad (9)$$

(подынтегральные функции непрерывны) uv – внеинтегральные члены. В определенном интеграле во внеинтегральных делается подстановка от a от b.

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Решение.

Пусть $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. Положим $u = x$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$.

По формуле (9) получим $I = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$

Очевидно, что подстановка обращается в нуль. Тогда $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

Список литературы

1. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т.2., М., 1964.
2. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М., 1986
3. *Шипачев В. С.* Высшая математика. М., 1990.
4. *Шипачев В. С.* Сборник задач по высшей математике. М., 1994.
5. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1971.
6. *Андрианова Т. Н., Волков В. А., Ефимова Т. А., Коломойцева З. Д. и др.* Задачник практикум по высшей математике. Функции многих переменных.. СПб., 1994.
7. *Ефимова Т. А.* Неопределенный интеграл. СПб., 2005.
8. *Ефимова Т. А.* Определенный интеграл. СПб., 2009.

Учебное итздание

Татьяна Александровна **Ефимова**

Кратные интегралы

Методическое пособие

Компьютерная верстка: *В.В. Мещерин*

Сдано в набор: 14.07.2013 г. Подписано в печать: 02.08.2013 г.
Формат бумаги 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура Таймс.
Тираж 100 экз. Заказ 5830.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии Химического факультета СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 26.