Санкт-Петербургский государственный университет

Т. А. Ефимова

ФУНЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методическое пособие

Санкт-Петербург
ВВМ
2010

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики математико- механического факультета СПбГУ

Составитель:
канд. физ.– мат. наук, доц. Т. А. Ефимова

Рецензент:
доктор физ. – мат. наук, проф. СанктПетербургского государственного университета
М. А. Нарбут

Ефимова Т. А.

Е91 Функции Нескольких переменных. Методическое пособие. — СПб. : ВВМ, 2010. — 100 с.

ISBN 978-5-9651-0450-5

Пособие состоит из четырех глав. Главы 1, 2, 3 разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, подробно разбираются решения типовых примеров. Предлагаются примеры для самостоятельного решения и ответы к ним. В главе 4 приводятся варианты контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений нематематических факультетов университетов. С помощью пособия студенты смогут самостоятельно изучить тему “Функции нескольких переменных”.

ISBN 978-5-9651-0450-5

Введение

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университетов (дневного, вечернего и заочного отделений), изучающих тему “Функции нескольких переменных”. Оно составлено на основе опыта автора чтения лекций и проведения практических занятий на географическом факультете СПбГУ.

При составлении пособия были учтены программы курсов высшей математики для студентов биолого – почвенного, геологического, химического и экономического факультетов СПбГУ. Включенный в пособие материал рассчитан на наиболее насыщенную программу курса. В конкретных случаях отдельные вопросы могут быть исключены преподавателем из курса, особенно при малом количестве академических часов или при недостаточной математической подготовке студентов.

Пособие состоит из четырех глав: функции нескольких переменных, предел и непрерывность – глава 1, частные производные и дифференциалы функции нескольких переменных – глава 2, приложения частных производных – глава 3, варианты контрольных работ – глава 4.

Предполагается, что студенты, изучающие материал данного пособия, знают теорию функции одной переменной и имеют навыки решения задач. Для удобства читателей основные вопросы теории функции одной переменной изложены в приложении: функции одной переменной. Главы 1 – 3 разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, формулировки основных теоретических вопросов и необходимые формулы (доказательства теоретических вопросов не приводятся, их можно найти в одном из учебников [1] – [4]), подробно разбираются решения типовых примеров, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения, даются ответы и указания к решению этих задач. Нумерация формул и рисунков сквозная. В каждой главе примеры нумеруются двумя цифрами: первая – номер параграфа, вторая – номер примера.

В приложении дается определение функции одной переменной, определение предела функции, определение непрерывности функции в точке и на множестве (§1).

В § 2 дается определение производной, приводится таблица производных и основные правила дифференцирования функции одной переменной, а также вопросы приложения производной к исследованию функции. Нумерация формул в приложении собственная.

С помощью пособия студенты могут самостоятельно усвоить основные теоретические вопросы, стандартные приемы решения задач по теории функций нескольких переменных, а также проверить свои знания, выполняя контрольные работы из главы 4, а также подготовиться к восприятию специальных курсов, читающихся на факультетах.

Автор благодарит доцента кафедры общей математики и информатики СПбГУ Александра Васильевича Осипова за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных указаний и замечаний.

Глава 1. Функции нескольких переменных, предел и непрерывность

§ 1. Метрическое пространство. Метрическое пространство R^m. Множества в метрическом пространстве

Множество упорядоченных наборов m вещественных чисел $(x_1,...,x_m)$ называется m — мерным арифметическим пространством и обозначается E^m. При этом упорядоченный набор $(x_1,...,x_m)$ называется точкой пространства E^m и обозначается M или $M(x_1,...,x_m)$, $x_k\ (k=1,...,m)$ — координаты точки. Точка $O(0,...,0)$ — начало координат.

Геометрическая интерпретация: при $n=1$ — точка координатной прямой $M(x)$, при $n=2$ — точка координатной плоскости $M(x,y)$, при $n=3$ — точка координатного пространства $M(x,y,z)$.

Если для любых точек $M_1, M_2 \in E^m$ определена функция $\rho(M_1,M_2)$, удовлетворяющая аксиомам

1. $\rho(M_1,M_2) \geq 0$, $\rho(M_1,M_2)=0$ тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 совпадают,
2. $\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$,
3. $\rho(M_1,M_2) \leq \rho(M_1,M_3)+\rho(M_3,M_2)$ для любой точки M_3 (Это свойство называется неравенством треугольника),

то пространство E^m называется метрическим и обозначается (E^m,ρ), функция $\rho(M_1,M_2)$ называется метрикой или расстоянием.

Определим в E^m расстояние между точками $M_1(x_1^1,...,x_m^1)$ и $M_2(x_1^2,...,x_m^2)$ по формуле

$$\rho\left(M_1, M_2\right)=\sqrt{\left(x_1^1-x_1^2\right)^2+\ldots+\left(x_m^1-x_m^2\right)^2} \qquad (1)$$

Пространство E^m с введенным по формуле (1) расстоянием называется m *— мерным метрическим пространством и обозначается* R^m. Выполнение аксиом метрического пространства 1–3 можно проверить.

Шаром с центром в точке $M_0 \in R^m$ *радиуса* r называется множество точек $M \in R^m$ таких, что $\rho\left(M, M_0\right)<r$, то есть множество точек, удаленных от точки M на расстояние меньшее r.

Если $r=\varepsilon$, то шар называется ε *– окрестностью точки* M_0 *и обозначается* $S_{\varepsilon}\left(M_0\right)$.

Пусть $D \subset R^m$.

Точка M_0 множества D называется *внутренней,* если она содержится в этом множестве вместе с некоторой окрестностью, то есть существует окрестность точки $S_{\varepsilon}\left(M_0\right) \subset D$ (рис.1)

Точка M_1 называется *граничной точкой* множества D, если любая ее окрестность содержит, как точки принадлежащие множеству D, так и не принадлежащие ему (рис.1). Отметим, что граничная точка множества D может не принадлежать этому множеству.

Точка M_2 называется *точкой сгущения* множества D, если любая ее окрестность содержит точку M_3 отличную от M_2. Отметим, что точка M_2 может быть как внутренней, так и граничной точкой множества D.

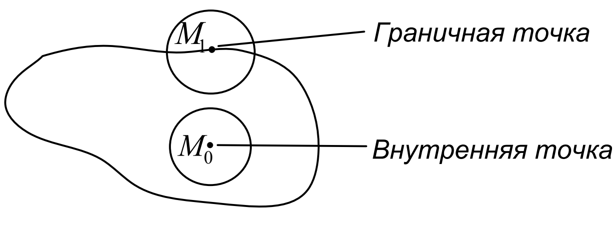

Рис.1

Множество D называется *открытым,* если все его точки внутренние.

Множество D называется *замкнутым,* если оно содержит все свои граничные точки.

Множество D называется *ограниченным,* если оно содержится в шаре достаточно большого радиуса с центром в точке O, то есть существует шар $S_r(O)$ такой, что $D \subset S_r(O)$ (рис. 2).

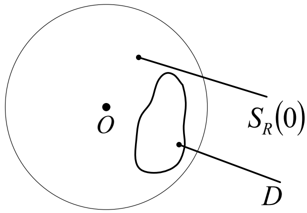

Рис. 2

Множество D называется *связным,* если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой целиком содержащейся в этом множестве. На рис.3.а множество связное, а на рис.3.б несвязное.

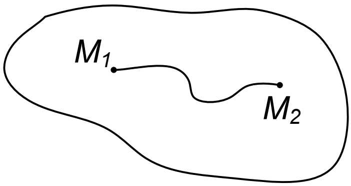

Рис. 3 а

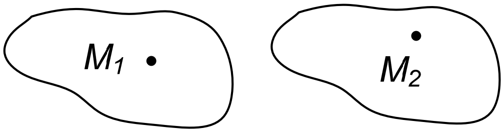

Рис. 3 б

Открытое связное множество называется *областью.*

Отметим, что в пространстве E^m метрику можно определить различными способами. При этом определения ε – окрестности точки, внутренней и граничной точек, а также открытого замкнутого, ограниченного множеств совпадают соответствующими определениями, данными для пространства R^m.

Пусть $\left\{M_n\left(x_n, y_n\right)\right\}$ — последовательность точек пространства R^2. *Последовательность точек* M_n *стремится к точке*

$M_0(x_0, y_0)$ ($\lim M_n = M_0$ или $M_n \to M_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ справедливо неравенство $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$ (то есть члены последовательности с номерами большими n_0 попадают в ε – окрестность точки M_0).

Сравните это определение с определением предела последовательности $\{x_n\}$ (Приложение, определение 1).

Пример 1.1

Пространство E^2 – множество упорядоченных пар вещественных чисел (x, y). Геометрически это координатная плоскость. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычислим по формуле (1) $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, что совпадает с формулой расстояния между точками на плоскости.

ε – окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ является множество точек $M(x, y)$ таких, что $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$. Это открытый круг радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис.4).

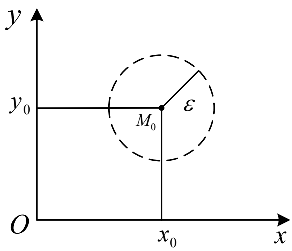

Рис. 4

Пример 1.2

E^2 – множество упорядоченных пар вещественных чисел (x, y). Определим расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ по формуле $\tilde{\rho}(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ (max — максимальное значение). Доказать, что $\tilde{\rho}$ удовлетворяет аксиомам 1–3 метрического пространства и построить ε – окрестность точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Доказательство

1. $\tilde{\rho}\left(M_1, M_2\right)=\max\left\{\left|x_1-x_2\right|,\left|y_1-y_2\right|\right\}\geq 0$, $\tilde{\rho}\left(M_1, M_2\right)=0$, если $\left|x_1-x_2\right|=0$ или $x_1=x_2$ и $\left|y_1-y_2\right|=0$ или $y_1=y_2$. Следовательно, точки M_1 и M_2 совпадают.

2. $\tilde{\rho}\left(M_1, M_2\right)=\tilde{\rho}\left(M_2, M_1\right)$ (это свойство очевидно).

3. Для любой точки $M_3\left(x_3, y_3\right)$ имеем $\left|x_1-x_2\right|\leq\left|x_1-x_3\right|+\left|x_3-x_2\right|$ и $\left|y_1-y_2\right|\leq\left|y_1-y_3\right|+\left|y_3-y_2\right|$.

Тогда

$$\max\left\{\left|x_1-x_2\right|,\left|y_1-y_2\right|\right\}\leq\max\left\{\left|x_1-x_3\right|,\left|y_1-y_3\right|\right\}+$$
$$+\max\left\{\left|x_3-x_2\right|,\left|y_3-y_2\right|\right\}$$

или

$$\tilde{\rho}\left(M_1, M_2\right)\leq\tilde{\rho}\left(M_1, M_3\right)+\tilde{\rho}\left(M_3, M_2\right).$$

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ является множество точек $M(x, y)$, для которых $\tilde{\rho}\left(M, M_0\right)=\max\left\{\left|x-x_0\right|,\left|y-y_0\right|\right\}<\varepsilon$ или $\left|x-x_0\right|<\varepsilon$, $\left|y-y_0\right|<\varepsilon$.

Отсюда следует, что $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$. Это квадрат с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и стороной 2ε (рис. 5).

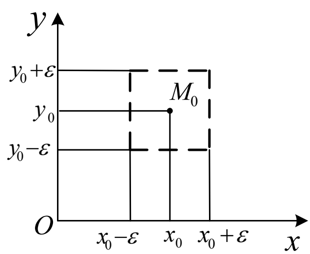

Рис. 5

Пример 1.3

Пусть $M(x,y)$ и $M_0(x_0,y_0)$ – точки пространства R^2. Доказать, что $\rho(M,M_0)<\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|y-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Доказательство

Необходимость.

Пусть $\rho(M,M_0)<\varepsilon$ или $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon$.

Отсюда следует, что

$$|x-x_0|=\sqrt{(x-x_0)^2}<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon .$$

Аналогично проверяется, что $|y-y_0|<\varepsilon$

Достаточность.

Пусть $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|y-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon .$$

Пример 1.4

Доказать, что последовательность $\{M_n(x_n,y_n)\}$ точек пространства R^2 стремится к точке $M_0(x_0,y_0)$ тогда и только тогда, когда $x_n\to x_0$ и $y_n\to y_0$ (то есть сходимость в пространстве R^2 покоординатная).

Доказательство

Необходимость.

Пусть $M_n\to M_0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для любого номера $n>n_0$ справедливо неравенство $\rho(M_n,M_0)<\varepsilon$ или $|x_n-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|y_n-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (пример 1.3). Отсюда следует, что $x_n\to x_0$ и $y_n\to y_0$.

Достаточность.

Пусть $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для любого номера $n > n_0$ справедливо неравенство $\left|x_n - x_0\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Аналогично $\left|y_n - y_0\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ для любого номера $n > n_1$. Для любого номера $n > n_2$ (n_2 – наибольшее из чисел n_0 и n_1) справедливы оба неравенства. Тогда $\rho\left(M_n, M_0\right) < \varepsilon$ для любого номера $n > n_2$ (пример 1.3). Поэтому $M_n \to M_0$.

§ 2. Функции нескольких переменных. Область определения. Линии и поверхности уровня

Пусть D – подмножество пространства R^m $\left(D \subset R^m\right)$. *Функцией m переменных* называется отображение множества D в пространство R^1, то есть правило, по которому каждой точке

$M \in D$ ставится в соответствие единственное вещественное число. D – область определения функции. Функцию обычно обозначают $u = f\left(x_1, \ldots x_m\right)$ $\left(\left(x_1, \ldots x_m\right) \in D\right)$ или $u = f\left(M\right)$ $\left(M \in D\right)$.

В дальнейшем для простоты изложения будем рассматривать функцию двух переменных $z = f\left(x, y\right)$, где $\left(x, y\right) \in D \subset R^2$.

Графиком функции $z = f\left(x, y\right)$ ($\left(x, y\right) \in D$) называется геометрическое место точек пространства R^3 таких, что $\left(x, y\right) \in D$, $z = f\left(x, y\right)$. Это поверхность в пространстве R^3. Точка $M\left(x, y, z\right)$ лежит на поверхности тогда и только тогда, когда точка $\tilde{M}\left(x, y\right) \in D$, $z = f\left(x, y\right)$ (рис.6).

Если функция $z = f\left(x, y\right)$ задана аналитически, то естественной областью определения функции является область существования данного выражения. Это подмножество пространства R^2.

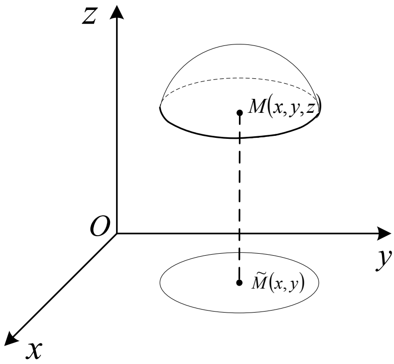

Рис.6

Если $z = f(x,y)$ – функция двух переменных, то кривая $f(x,y) = c$ называется *линией уровня функции.* В точках этой кривой функция сохраняет постоянное значение.

Если $u = f(x,y,z)$ — функция трех переменных, то поверхность $f(x,y,z) = c$ называется *поверхностью уровня данной функции.* В точках этой поверхности функция сохраняет постоянное значение.

Пример 2.1

Найти и построить область определения функции

а) $z = \sqrt{\left(4 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right)}$ **б)** $z = \sqrt{x \sin y}$

в) $u = \dfrac{1}{\ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}$

Решение

а) $z = \sqrt{\left(4 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right)}$. Функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно, то есть $\left(4 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right) \geq 0$. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Первую систему перепишем следующим образом: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x^2 + y^2 \ge 1 \end{cases}$.

Системе удовлетворяют координаты точек плоскости, лежащие вне круга радиуса *1* и внутри круга радиуса *2*. (рис.7)

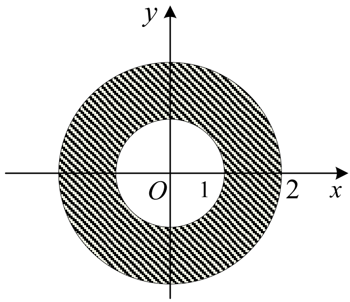

Рис.7

Вторую систему перепишем следующим образом: $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$.

Первому неравенству удовлетворяют координаты точек плоскости, лежащих вне круга радиуса *2*, а второму — внутри круга радиуса *1*. Эта система несовместна (рис. 8). Итак, область определения функции — кольцо (границы включаются) (рис.7).

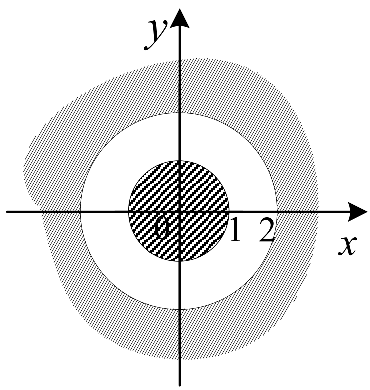

Рис. 8

б) $z=\sqrt{x\sin y}$. Функция определена, если подкоренное выражение неотрицательно, то есть при $x\sin y\ge 0$. Неравенство равносильно системе двух неравенств $\begin{cases} x\ge 0 \\ \sin y\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\le 0 \\ \sin y\le 0 \end{cases}$.

Из первой системы следует, что $x\ge 0$, $2\pi k\le y\le \pi+2\pi k$ $(k=0,\pm 1...)$, то есть множество точек плоскости (x,y), для которых $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\in[2\pi k,\pi+2\pi k] \ (k=0,\pm 1...) \end{cases}$. Это множество полос, изображенных на рис. 9 (границы включаются).

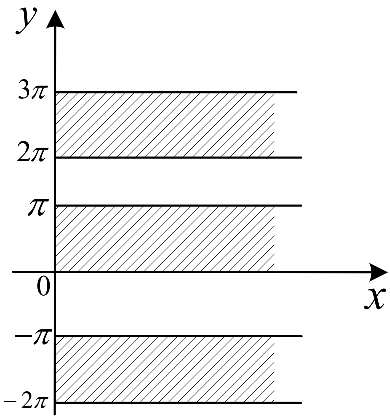

Рис. 9

Из второй системы следует, что $x\le 0$,

$$\pi+2\pi k\le y\le 2\pi+2\pi k \ (k=0,\pm 1...),$$

то есть множество точек плоскости (x,y), для которых

$$\begin{cases} x\le 0 \\ y\in[\pi+2\pi k,\ 2\pi+2\pi k] \ (k=0,\pm 1...) \end{cases}.$$

Это множество полос, изображенных на рис. 10 (границы включаются).

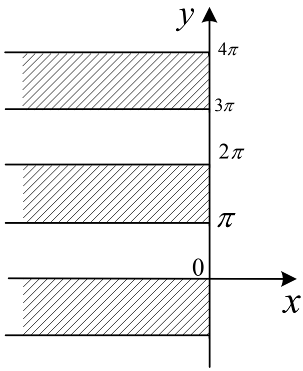

Рис. 10

Область определения функции изображена на рис. 11.

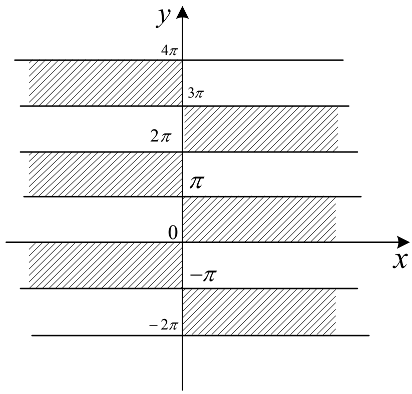

Рис. 11

в) $u = \dfrac{1}{\ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}$. Функция определена, если выражение под знаком логарифма больше нуля и не равно единице, то есть $\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \end{cases}$

Это внутренность шара единичного радиуса, за исключением точки $O\left(0,0,0\right)$ (рис.12).

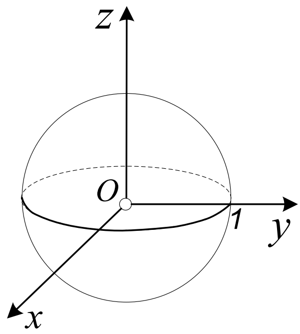

Рис.12

Пример 2.2

Найти линии уровня функции

а) $z = 2x + y$. Выделить кривую, проходящую через точку $M(1,3)$

б) $z = x^2 + y^2$

Решение

а) $z = 2x + y$. Линии уровня имеют уравнение $2x + y = c$. Это семейство параллельных прямых (рис.13) . Подставив в уравнение линии уровня координаты точки $M(1,3)$, найдем $c = 2 + 3 = 5$. Тогда $2x + y = 5$ линия уровня, проходящая через точку $M(1,3)$.

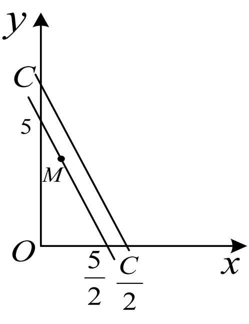

Рис.13

б) $z = x^2 + y^2$. Линии уровня имеют уравнение $x^2 + y^2 = c$ ($c \geq 0$). Это концентрические окружности радиуса $\sqrt{c}$ при $c > 0$ и точка $O(0,0)$ при $c = 0$ (рис. 14).

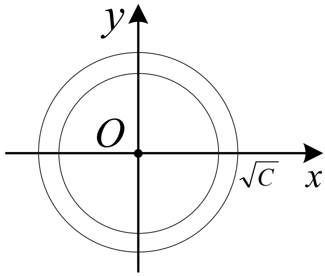

Рис.14

Пример 2.3

Найти поверхности уровня функции

а) $u = x + y + z$ **б)** $u = x^2 + y^2 + z^2$. Выделить поверхность, проходящую через точку $M(1,2,2)$.

Решение

а) $u = x + y + z$. Поверхности уровня имеют уравнения $x + y + z = c$. Это плоскости (рис.15).

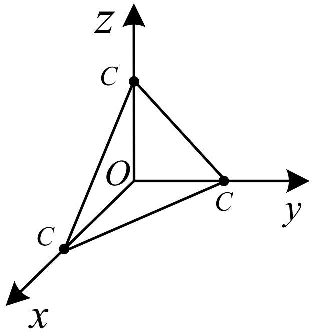

Рис.15

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$. Поверхности уровня имеют уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = c \ (c \geq 0)$. Это концентрические сферы радиуса $\sqrt{c}$ при $c > 0$ и точка $O(0,0,0)$ при $c = 0$ (рис.16). Подставляя в уравнение поверхности уровня координаты точки $M(1,2,2)$, находим $c = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$. Следовательно, поверхность уровня, проходящая через точку $M(1,2,2)$, имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (сфера радиуса 3).

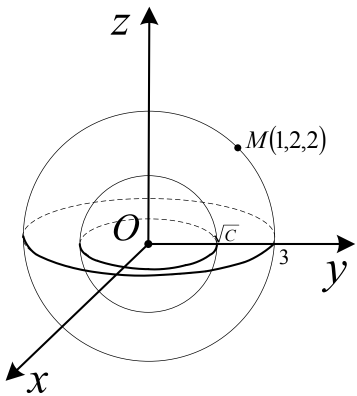

Рис.16

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти и построить область определения функции

а. $z = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$ **б.** $z = \sqrt{\sin \pi \left(x^2 + y^2\right)}$

в. $z = \arcsin \dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$ **г.** $z = \ln\left(x \ln\left(y - x\right)\right)$

д. $z = \dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(36 - x^2 - y^2\right)}}$

е. $u = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}$

ж. $u = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{z}$.

2. Найти линии уровня функции:

а. $z=\dfrac{y}{x^2}$. Выделить кривую, проходящую через точку $M(1,2)$

б. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$ **. в.** $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

3. Найти поверхности уровня функции

а. $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ **б.** $u=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2$. Выделить поверхность, проходящую через точку $M(1,3,1)$.

в. $u=4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+5$. Выделить поверхность, проходящую через точку $O(0,0,0)$.

Ответы

1. Множество точек плоскости, удовлетворяющих системам уравнений

а. $\begin{cases} -3\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} y\ge 2 \\ y\le -2 \end{array}\right. \end{cases}$ (рис.17)

б. $2k\le x^2+y^2\le 1+2k$ ($k=0,1,...$) (рис.18)

в. $9\le x^2+y^2\le 36$ (рис.19)

г. $\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2\le x\le 2 \\ x\le 0 \\ y\le 0 \end{cases}$ (рис. 20)

д. $\begin{cases} x>0 \\ y>1-x \end{cases}$ и $\begin{cases} x<0 \\ x<y<1+x \end{cases}$ (рис. 21)

е. $4<x^2+y^2+z^2\le 25$ (рис. 22)

ж. $x^2+y^2\ge z$ и $-x^2-y^2\le z$ исключая точку $O(0,0,0)$ (рис. 23).

2. а. $y=cx^2$, $y=0$. Кривая, проходящая через точку $M(1,2)$, имеет уравнение $y=2x^2$ **б.** $y=c\sqrt{x}$, $y=0$

в. $x^2+y^2=2cx$

3. а. $z=c\left(x^2+y^2\right)$ **б.** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=c$, $c\ge 0$.

Поверхность, проходящая через точку $M(1,3,1)$, имеет уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=2$

в. $4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+5=c$.

Поверхность, проходящая через точку $O(0,0,0)$, имеет уравнение $4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z=0$.

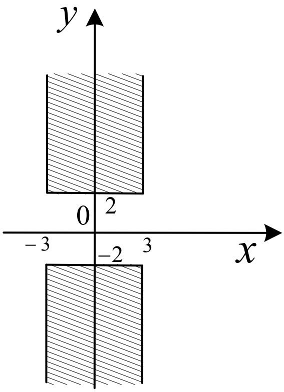

Рис.17

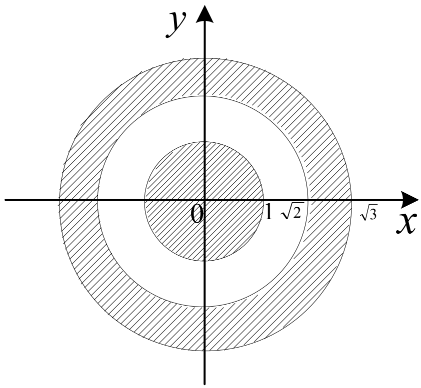

Рис.18

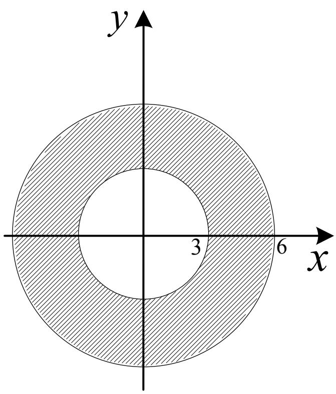

Рис.19

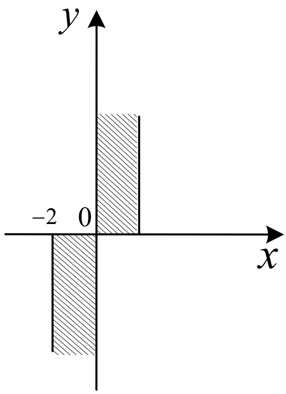

Рис. 20

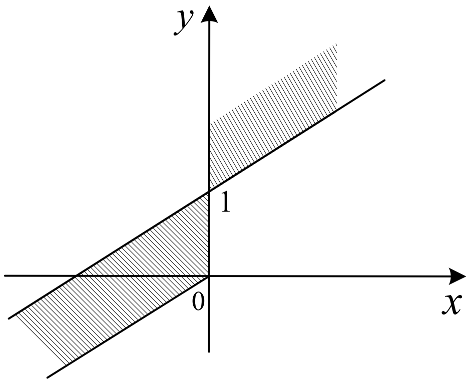

Рис. 21

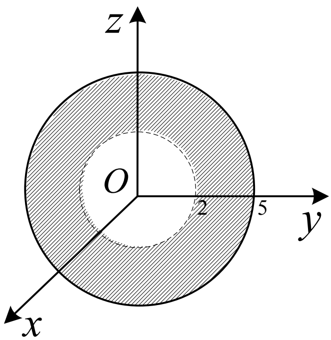

Рис. 22

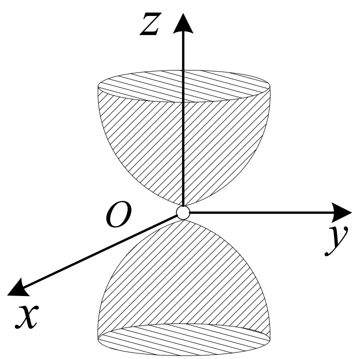

Рис. 23

§ 3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f\left(x, y\right)$ определена на множестве $D \subset R^2$, $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – точка сгущения множества (в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ функция может быть не определена).

Число A называется *пределом функции* $f(x,y)$ при $M(x,y)$ стремящемся к $M_0(x_0,y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $M(x,y) \in D$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ (то есть принадлежащих δ — окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$), справедливо неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$. Для предела принято обозначение $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $f(M) \underset{M \to M_0}{\to} A$.

Сравните это определение с определением предела функции одной переменной (Приложение, определение 2).

Замечание. Поскольку $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ тогда и только тогда, когда $x \to x_0$, $y \to y_0$, то запись $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ равносильна записи $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$. Поскольку $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ тогда и только тогда, когда $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ и $0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то в определении предела неравенство $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ можно заменить неравенствами $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $0 < |y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$.

Для того чтобы функция имела предел при $M \to M_0$ равный A, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $M_k \to M_0$ соответствующая последовательность значений функции $f(M_k)$ стремилась к A.

Аналогично дается определение предела для функции m переменных $u = f(x_1, ..., x_m)$.

Теоремы о пределах, справедливые для функции одной переменной, справедливы и для функции m переменных.

Функция $z = f(x,y)$, определенная на множестве $D \subset R^2$, называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0,y_0) \in D$ (M_0 – точка сгущения D), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Аналогично дается определение непрерывности в точке M_0 для функции m переменных.

Функция называется *непрерывной на множестве* $D \subset R^m$, если она непрерывна в каждой его точке.

Теоремы, справедливые для непрерывных функций одной переменной, справедливы и для функций нескольких переменных.

Если в некоторой точке M_0 не выполняется условии непрерывности, то эта точка называется *точкой разрыва функции*. Функция разрывна в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, если она определена в окрестности этой точки и не определена в самой точке, а также, если $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right)$ не существует или $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) \neq f\left(M_0\right)$.

Нарушение условий непрерывности может происходить, как в отдельных точках, так и в точках, образующих некоторую линию. Она называется линией разрыва функции.

Пример 3.1

Найти пределы **а)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2}$, **б)** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 y^2}{xy + 2}$

Решение

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2}$. Воспользовавшись теоремами о пределе суммы, произведения и частного, получим $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1 \cdot 1 - 2}{1 + 4} = -\dfrac{1}{5}$.

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 y^2}{xy + 2}$. По теоремам о пределе суммы, произведения и частного найдем $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \dfrac{x^2 y^2}{xy + 2} = \dfrac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 2} = 1$.

Пример 3.2

Раскрыть неопределенности **а)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x}$ **б)** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$

Решение

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x}$. При $x\to 0$ и $y\to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Это неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Умножив числитель и знаменатель дроби на y^2, получим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{xy^2}y^2=9$ (воспользовались замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$)

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$. При $x\to 2$ и $y\to 2$ имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Разложив числитель на множители и сократив на $(x-y)$, находим $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}(x+y)=4$

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$. При $x\to 0$ и $y\to 0$ имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, то есть на $\sqrt{x^2+y^2+4}+2$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(x^2+y^2+4-4\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)=4$$

Пример 3.4

Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$ не существует.

Решение

Пусть $f\left(x,y\right)=\dfrac{x}{x+y}$. Рассмотрим две последовательности точек $M_k\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)$ и $\tilde{M}_k\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$

Ясно, что $M_k\to 0$ и $f\left(M_k\right)=\dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+\frac{1}{k}}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$, $\tilde{M}_k\to 0$ и $f\left(\tilde{M}_k\right)=\dfrac{0}{\frac{1}{k}+0}=0\to 0$. Для разных последовательностей точек, стремящихся к нулю, последовательность значений функции имеет разные пределы. Это означает, что функция $f\left(x,y\right)=\dfrac{x}{x+y}$ не имеет предела при $x\to 0$, $y\to 0$.

Пример 3.4

Доказать непрерывность функции в любой точке плоскости

а) $f\left(x,y\right)=x+y-xy$ **б)** $f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy$

Решение

а) $f\left(x,y\right)=x+y-xy$.

Для любой точки $M_0\left(x_0,y_0\right)$ имеем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f\left(x,y\right)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left(x+y-xy\right)=x_0+y_0-x_0y_0=f\left(x_0,y_0\right).$$

Следовательно, функция непрерывна в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

б) $f\left(x, y\right) = x^3 + y^3 - 3xy$. Для любой точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ имеем

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left(x^3 + y^3 - 3xy\right) = x_0^3 + y_0^3 - 3x_0 y_0 = f\left(x_0, y_0\right).$$

Следовательно, функция непрерывна в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Пример 3.5

Найти точки или линии разрыва функции

а) $f\left(x, y\right) = \dfrac{1}{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2}$ **б)** $f\left(x, y\right) = \dfrac{xy^2 + 1}{x^2 - y}$

Решение

а) $f\left(x, y\right) = \dfrac{1}{\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2}$. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, то есть при $\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 0$ или при $x = 1$, $y = 2$. Следовательно, $M\left(1, 2\right)$ — точка разрыва функции.

б) $f\left(x, y\right) = \dfrac{xy^2 + 1}{x^2 - y}$. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, то есть при $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$. Следовательно, парабола $y = x^2$ — линия разрыва функции.

Пример 3.6

$f\left(x, y\right) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $f\left(0, 0\right) = 0$. Доказать, что функция $f\left(x, y\right)$ разрывна в точке $O\left(0, 0\right)$

Решение

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f\left(x, y\right)$ не существует. Рассмотрим две последовательности точек

$$M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) \text{ и } \tilde{M}_k\left(0,\frac{1}{k}\right). \text{ Ясно, что } M_k \to 0 \text{ и}$$

$$f\left(M_k\right)=\frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=0\to 0\,,\ \tilde{M}_k \to 0 \text{ и } f\left(\tilde{M}_k\right)=\frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=-1\to -1\,.$$

Для разных последовательностей точек, стремящихся к нулю, последовательность значений функции имеет разные пределы. Это означает, что функция $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $x\to 0$, $y\to 0$.

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right)$ не существует, то в точке $O\left(0,0\right)$ функция имеет разрыв.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы

а. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-xy}{x^2+y^2}$ **б.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2-y^2}{xy-1}$ **в.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

2. Раскрыть неопределенности

а. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}}\dfrac{\sin\left(xy\right)}{x}$ **б.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ **в.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{1-xy}}{xy}$.

3. Доказать, что предел не существует

а. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **б.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ **в.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

4. Доказать, что функция непрерывна в любой точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$**.**

а. $z=x^2+xy+1$ **б.** $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+2}$.

5. Найти точки или линии разрыва функции

а. $z=\dfrac{x}{\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2}$ **б.** $z=\dfrac{x}{3x-y}$ **в.** $z=\dfrac{x}{x^2+y^2-4}$

6. Доказать, что функция $f\left(x,y\right)$ разрывна в точке $O\left(0,0\right)$, если

$$f\left(x,y\right)=\frac{xy}{x^2+y^2}\text{, } f\left(0,0\right)=0\text{.}$$

Ответы

1 а. $\frac{3}{13}$. **б.** 3. **в.** $\frac{1}{2}$.

2. а. 4. **б.** 1. **в.** $\frac{1}{2}$. **5.**

а. $M\left(2,3\right)$ — точка разрыва функции

б. $y=3x$ — линия разрыва функции

в. $x^2+y^2=4$ — линия разрыва функции.

Глава 2. Частные производные и дифференциалы функции нескольких переменных

§ 1. Частные производные функции

Функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$.

Выражение вида

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{2}$$

называется *полным приращением функции.* Предполагается, что точка $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$

Частным приращением по переменной x называется выражение вида

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{3}$$

Это приращение по переменной x при фиксированном y.

Аналогично определяется *частное приращение по переменной* y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{4}$$

Частной производной по переменной x называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения частного приращения по x к этому приращению. Для частной производной по переменной x принято обозначение $z_x^{'}$ (читается z штрих по x) или $\frac{\partial z}{\partial x}$ (читается де z по де x).

Итак,

$$z_x^{'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{5}$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y

$$z_y^{'} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{6}$$

Сравните определение частных производных с определением производной функции одной переменной (Приложение, определение 4)

Для функции m переменных $u = f\left(x_1,...,x_m\right)$ определение частных приращений и частных производных аналогичны. Функция m переменных имеет m частных производных. Частная производная по переменной x_i ($i = 1,...,m$) обозначается u'_{x_i} или $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

Для нахождения частной производной по переменной x_i ($i = 1,...,m$) пользуются правилами дифференцирования для функции одной переменной x_i (Приложение, §2), считая другие переменные постоянными.

Пример 1.1

Найти полное и частные приращения функции $z = x^2 - xy + y^2$.

Решение

По определению (формула (2)) полное приращение функции равно

$$\begin{aligned}\Delta z = z\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - z\left(x,y\right) = \left(x+\Delta x\right)^2 - \\ -\left(x+\Delta x\right)\left(y+\Delta y\right) + \left(y+\Delta y\right)^2 - \left(x^2 - xy + y^2\right) = \quad (7) \\ = 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + 2y\Delta y + \left(\Delta y\right)^2\end{aligned}$$

Частное приращение по переменной x (формула (3)) равно

$$\begin{aligned}\Delta_x z = z\left(x+\Delta x, y\right) - z\left(x,y\right) = \left(x+\Delta x\right)^2 - \\ -\left(x+\Delta x\right)y + y^2 - \left(x^2 - xy + y^2\right) = 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - y\Delta x\,.\end{aligned}$$

Частное приращение по переменной y равно

$$\Delta_y z = z\left(x, y+\Delta y\right) - z\left(x,y\right) = -x\Delta y + 2y\Delta y + \left(\Delta y\right)^2$$

(выражение получено из формулы (7) при $\Delta x = 0$).

Пример 1.2

Найти по определению частные производные функции $z = x^2 - xy + y^2$

Решение

По формуле (4) частная производная по x равна $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Подставляя в это выражение $\Delta_x z$, найденное в примере 1.1, получим

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x - y) = 2x - y .$$

Аналогично частная производная по y равна

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0}(-x + 2y + \Delta y) = -x + 2y .$$

Пример 1.3

Найти частные производные функций
а) $z = x^2 - xy + y^2$ **б)** $z = 2^{xy}$

Решение

а) $z = x^2 - xy + y^2$. Считая y постоянным и пользуясь таблицей производных, находим $z'_x = 2x - y$ (Приложение, §2).

Считая x постоянным, находим частную производную $z'_y = -x + 2y$

Отметим, что частные производные этой функции были найдены в примере 1.2 по определению.

б) $z = 2^{xy}$. Считая y постоянным, пользуясь таблицей производных и формулой для вычисления производной сложной функции, находим $z'_x = 2^{xy} \ln 2 (xy)'_x = 2^{xy} y \cdot \ln 2$. Считая x постоянным, аналогично находим частную производную

Пример 1.4

Найти частные производные функции $z = \dfrac{y}{x+y}$ и вычислить их значения в точке $M(-4,3)$.

Решение

Считая y постоянным, и вынося его за знак производной, находим частную производную

$$z'_x = y\left(\left(x+y\right)^{-1}\right)'_x = y\left(-\left(x+y\right)^{-2}\right)\left(x+y\right)'_x = \frac{-y}{\left(x+y\right)^2}$$

Частную производную по y находим по правилу дифференцирования частного (Приложение, формула (4))

$$z'_y = \frac{y'_y\left(x+y\right)-y\left(x+y\right)'_y}{\left(x+y\right)^2} = \frac{x+y-y}{\left(x+y\right)^2} = \frac{x}{\left(x+1\right)^2}.$$

Подставляя в найденные значения частных производных координаты точки $M\left(-4,3\right)$, находим

$$z'_x\left(-4,3\right) = -\frac{3}{\left(-3+4\right)^2} = -3\ ,\ z'_y\left(-4,3\right) = -\frac{4}{\left(-3+4\right)^2} = -4\ .$$

Пример 1.5

Найти частные производные функции трех переменных $u = \dfrac{2y-3z}{4z-5x}$

Решение

При нахождении частной производной по x воспользуемся тем, что числитель дроби постоянный, поэтому

$$u'_x = \left(2y-3z\right)\left(\left(4z-5x\right)^{-1}\right)'_x = \left(2y-3z\right)\left(-\left(4z-5x\right)^{-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(4z-5x\right)'_x = 5\left(2y-3z\right)\left(4z-5x\right)^{-2}$$

Частную производную по y находим, воспользовавшись тем, что знаменатель дроби постоянный, $u'_y = \dfrac{1}{4z-5x}\left(2y-3z\right)'_y = \dfrac{2}{4z-5x}$.

Частную производную по z находим по правилу дифференцирования частного (Приложение, формула (4))

$$u_z' = \frac{(2y-3z)_z'(4z-5x)-(2y-3z)(4z-5x)_z'}{(4z-5x)^2} =$$

$$= \frac{-3(4z-5x)-4(2y-3z)}{(4z-5x)^2} = \frac{15x-8y}{(4z-5x)^2}.$$

Пример 1.6

Доказать, что функция $z = y\sin\left(ye^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению $z_x' + yz_y' = z$

Решение

Считая y постоянным и вынося его за скобки, находим частную производную

$$z_x' = y\left(\sin\left(ye^{-x}\right)\right)_x' = y\cos\left(ye^{-x}\right)\left(ye^{-x}\right)_x' = y\cos\left(ye^{-x}\right)\left(-ye^{-x}\right) =$$
$$= -y^2e^{-x}\cos\left(ye^{-x}\right)$$

Частную производную по y находим, воспользовавшись теоремой о производной произведения,

$$z_y' = y_y'\sin\left(ye^{-x}\right) + y\left(\sin\left(ye^{-x}\right)\right)_y' = \sin\left(ye^{-x}\right) + y\cos\left(ye^{-x}\right)\left(ye^{-x}\right)_y' =$$
$$= \sin\left(ye^{-x}\right) + y\cos\left(ye^{-x}\right)e^{-x}.$$

Подставляя найденные значения частных производных в левую часть уравнения, получим

$$-y^2e^{-x}\cos\left(ye^{-x}\right) + y\left(\sin\left(ye^{-x}\right) + ye^{-x}\cos\left(ye^{-x}\right)\right) = y\sin\left(ye^{-x}\right) = z.$$

Что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

1. $z = xy + x + y$. Найти полное приращение функции Δz и частные приращения $\Delta_x z$, $\Delta_y z$.

2. Найти частные производные функции $z = xy + x + y$ на основании определения.

3. Найти частные производные функции двух переменных.

а. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ **б.** $z = x^y$ **в.** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

г. $z = arctg\dfrac{x}{y}$ **д.** $z = \ln tg\dfrac{x}{y}$ **е.** $z = x^2 \cos\left(x + 3y\right)$.

4. Доказать, что функция $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $xz_x^{'} + yz_y^{'} = 2$.

5. Доказать, что функция $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению $x^2 z_x^{'} + y^2 z_y^{'} = \dfrac{x^3}{y}$.

6. Найти частные производные функции трех переменных.

а. $u = \sin\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ **б.** $u = xy + yz + zx$ **в.** $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$

7. Доказать, что функция $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$ удовлетворяет уравнению $u_x^{'} + u_y^{'} + u_z^{'} = 1$

Ответы

1. $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y + \Delta x + \Delta y$, $\Delta_x z = y\Delta x + \Delta x$,
$\Delta_y z = x\Delta y + \Delta y$

2. $z_x^{'} = y + 1$, $z_y^{'} = x + 1$.

3. а. $z_x^{'} = 3x^2 - 3y$, $z_y^{'} = 3y^2 - 3x$ **б.** $z_x^{'} = yx^{y-1}$, $z_y^{'} = x^y \ln x$

в. $z_x^{'} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z_y^{'} = \dfrac{y}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}}$.

г. $z_x^{'} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $z_y^{'} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

д. $z_x^{'} = \dfrac{2}{y\sin\left(\dfrac{2x}{y}\right)}$, $z_y^{'} = -\dfrac{2x}{y^2 \sin\left(\dfrac{2x}{y}\right)}$.

е. $z_x^{'} = 2x\cos\left(x + 3y\right) - x^2 \sin\left(x + 3y\right)$, $z_y^{'} = -3x^2 \sin\left(x + 3y\right)$.

4. а. $u_x^{'} = 2x\cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$,

$u'_y = 2y\cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right), u'_z = 2z\cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

б. $u'_x = y + z$, $u'_y = x + z$, $u'_z = x + y$. **в.** $u'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$,

$u'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{z}{y^2} e^{-\frac{z}{y}}$, $u'_z = -\frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}}$.

§ 2. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Полным дифференциалом (дифференциалом) функции $z = f\left(x, y\right)$ называется выражение вида

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad (8)$$

Отметим, что дифференциалы независимых переменных x и y равны их приращениям $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

Если функция имеет непрерывные частные производные, то она называется *дифференцируемой*, и полное приращение функции связано с ее дифференциалом формулой

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (9)$$

где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отсюда следует, что полный дифференциал является главной линейной относительно Δx и Δy частью приращения и при малых Δx и Δy справедливо приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \quad (10)$$

Полный дифференциал обладает следующими свойствами

1. $d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$ **2.** $d\left(uv\right) = vdu + udv$.

3. $d\left(c\right) = 0$ **4.** $d\left(cu\right) = cdu$ **5.** $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Пример 2.1

Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = x^2 - xy + y^2$.

Решение

Полное приращение функции равно

$$\Delta z = 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + 2y\Delta y + \left(\Delta y\right)^2$$

(см. пример 1.1)

Сгруппируем в этом выражении слагаемые, содержащие Δx и Δy в первой степени, тогда

$$\Delta z = \left(2x - y\right)\Delta x + \left(-x + 2y\right)\Delta y + \left(\Delta x\right)^2 - \Delta x\Delta y + \left(\Delta y\right)^2 .$$

Из этого представления следует, что линейная относительно Δx и Δy часть приращения равна $\left(2x - y\right)\Delta x + \left(-x + 2y\right)\Delta y$. Следовательно, полный дифференциал равен

$$dz = \left(2x - y\right)\Delta x + \left(-x + 2y\right)\Delta y .$$

Пусть $\alpha = \Delta x - \Delta y$, $\beta = \Delta y$. Ясно, что $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Для полного приращения Δz справедливо представление
$\Delta z = \left(2x - y\right)\Delta x + \left(-x + 2y\right)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Отметим, что коэффициенты при Δx и Δy равны частным производным $z_x^{'} = 2x - y$, $z_y^{'} = -x + 2y$.

Пример 2.2

Для функции $z = x^2 y$ найти полный дифференциал и полное приращение в точке $M\left(1,2\right)$ и сравнить их, если

а) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$.

б) $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение

По формуле (2) полное приращение функции

$$\Delta z = z\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - z\left(x, y\right) = \left(x + \Delta x\right)^2\left(y + \Delta y\right) - x^2 y$$

Значение Δz в точке $M\left(1,2\right)$ равно $\Delta z\left(M\right) = \left(1 + \Delta x\right)^2\left(2 + \Delta y\right) - 2$

Дифференциал функции dz равен

$$dz = \left(x^2 y\right)_x^{'} \Delta x + \left(x^2 y\right)_y^{'} \Delta y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y \ ,$$

его значение в точке $M\left(1,2\right)$ равно $dz\left(M\right) = 4\Delta x + \Delta y$.

а) при $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ приращение $\Delta z = \left(1+1\right)^2 \cdot \left(2+2\right) - 2 = 14$.

Дифференциал $dz\left(M\right) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$, разность $\Delta z - dz = 8$.

б) при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$ приращение

$$\Delta z = \left(1+0{,}1\right)^2 \cdot \left(2+0{,}2\right) - 2 = 0{,}662 \ .$$

Дифференциал $dz\left(M\right) = 4 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$, разность

$$\Delta z - dz = 0{,}062 \ .$$

Отсюда следует, что в случае а) при больших Δx , Δy разность $\Delta z - dz$ велика, в случае б) при малых Δx и Δy имеем $dz \approx \Delta z$.

Пример 2.3

Найти полные дифференциалы функций

а) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$ **б)** $u = x^{yz}$

Решение

а) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$. Частные производные равны

$$z_x^{'} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right)}} \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \ .$$

$$z_y^{'} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right)}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} \ .$$

Тогда полный дифференциал функции (формула (8))

$$dz = z_x^{'} dx + z_y^{'} dy = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(dx - \frac{x}{y} dy\right).$$

б) $u = x^{yz}$. Отметим, что полный дифференциал функции трех переменных равен $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$.

Находим частные производные $u'_x = yzx^{yz-1}$ (производная степенной функции)

$$u'_y = x^{yz} \ln x \left(yz\right)'_y = z \cdot x^{yz} \ln x ,$$

$$u'_z = x^{yz} \ln x \left(yz\right)'_z = y \cdot x^{yz} \ln x$$

(производные показательной функции). Тогда полный дифференциал функции равен

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz =$$
$$= x^{yz-1} \left(yzdx + xz \ln x dy + xy \ln x dz \right) .$$

Пример 2.4

Вычислить приближенно

а) $\sqrt{\left(4,03\right)^2 + \left(2,98\right)^2}$ **б)** $\sqrt{\left(1,04\right)^{1,99} + \ln\left(1,02\right)}$

Решение

а) $\sqrt{\left(4,03\right)^2 + \left(2,98\right)^2}$. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и положим $x = 4$, $y = 3$, $\Delta x = 0,03$, $\Delta y = -0,02$

Полное приращение функции $\Delta z = z\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - z\left(x, y\right)$

Отсюда $z\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) = z\left(x, y\right) + \Delta z$. По формуле (10) $\Delta z \approx dz$,поэтому $z\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx z\left(x, y\right) + dz$ или

$$\sqrt{\left(x + \Delta x\right)^2 + \left(y + \Delta y\right)^2} \approx \sqrt{x^2 + y^2} + dz \qquad (11)$$

Найдем полный дифференциал функции

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Delta x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Delta y .$$

Вычисляя его значение в точке $M\left(4,3\right)$ при $\Delta x = 0,03$, $\Delta y = -0,02$, получим

$$dz\left(M\right) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} 0,03 - \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} 0,02 = \frac{0,12 - 0,06}{5} = 0,012 .$$

Подставляя значения $x=4$, $y=3$, $\Delta x=0,03$, $\Delta y=-0,02$ и $dz(M)$ в формулу (11), находим

$$\sqrt{4,03^2+2,98^2}\approx\sqrt{4^2+3^2}+0,012=5,012.$$

б) $\sqrt{(1,04)^{1,99}+\ln(1,02)}$. Рассмотрим функцию $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ и положим $x=1$, $y=2$, $z=1$, $\Delta x=0,04$, $\Delta y=-0,01$, $\Delta z=0,02$.

По формуле аналогичной формуле (11) из примера 2.4 а

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\approx u(x,y,z)+du$$

или

$$\sqrt{(x+\Delta x)^{y+\Delta y}+\ln(z+\Delta z)}\approx\sqrt{x^y+\ln(z)}+du. \quad (12)$$

Частные производные функции равны $u'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x^y+\ln z}}y\cdot x^{y-1}$,

$$u'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^y+\ln z}}x^y\ln x,\ u'_z=\frac{1}{2\sqrt{x^y+\ln z}}\frac{1}{z}.$$

Тогда дифференциал функции

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x^y+\ln z}}\left(yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y+\frac{1}{z}\Delta z\right).$$

Вычислим его значение в точке $M(1,2,1)$ при $\Delta x=0,04$, $\Delta y=-0,01$, $\Delta z=0,02$.

$$du(M)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\left(2\cdot1\cdot0,04+1^2\ln1(-0,01)+\frac{1}{1}0,02\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(0,08+0,02)=0,05.$$

Подставляя значения $x=1$, $y=2$, $z=1$, $\Delta x=0,04$, $\Delta y=-0,01$, $\Delta z=0,02$, $du(M)=0,05$ в формулу (12), получим

$$\sqrt{1,04^{1,99}+\ln1,02}\approx\sqrt{1^2+\ln(1)}+0,05=1,05.$$

Пример 2.5

Высота конуса *h=30 см.*, радиус основания *r =10 см*. Как изменится объем конуса, если *h* увеличили на *3 мм*, а *r* уменьшили на *1 мм*.

Решение

Объем конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 h$. Имеем *h=30 см*, $\Delta h = 0,3$ *см*, *r =10 см*, $\Delta r = -0,1$ *см*.

Изменение объема равно $\Delta V = \dfrac{\pi}{3}\left(\left(r+\Delta r\right)^2\left(h+\Delta h\right) - r^2 h\right)$. При малых Δr и Δh имеем $dV \approx \Delta V$ (формула(10)). Дифференциал равен $dV \approx V_r^{'}\Delta r + V_h^{'}\Delta h = \dfrac{\pi}{3}\left(r^2\Delta h + 2rh\Delta r\right)$.

Находим значение дифференциала при *h=30 см*, $\Delta h = 0,3$ *см*, $r = 10$ *см*, $\Delta r = -0,1$ *см*.

$$dV = \frac{\pi}{3}\left(\left(10\right)^2 0,3 + 2\cdot 30\cdot 10\cdot\left(-0,1\right)\right) = -10\pi \text{ см}^3 .$$

Поэтому изменение объема $\Delta V \approx dV \approx -10\pi$. Отметим, что точное изменение объема

$$\Delta V = \frac{\pi}{3}\left(\left(10-0,1\right)^2\left(30+0,3\right) - 10^2\cdot 30\right) = -10,099\pi \text{ см}^3 .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = xy + x + y$.

2. Для функции $z = xy$ найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz в точке $M\left(2,1\right)$ и сравнить их, если

а. $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ **б.** $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. Вычислить приближенно

а. $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$ **б.** $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$ **в.** $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

г. $\sqrt{2,02^2 + 1,03^2 + 1,97^2}$.

4. Найти полные дифференциалы функций

а. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$ **б.** $z = \sqrt{\ln xy}$ **в.** $u = \ln\left(x^3 - 2y^3 - z^3\right)$.

5. Стороны прямоугольника $a = 10$ *см.*, $b = 24$ *см.* Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 *мм.*, а сторону b укоротить на 1 *мм.* Найти приближенное значение и сравнить с точным.

Ответы

1. $\Delta z = (y+1)\Delta x + (x+1)\Delta y + \Delta x\Delta y$, $dz = (y+1)\Delta x + (x+1)\Delta y$.

2. $\Delta z(M) = (2+\Delta x)(1+\Delta y) - 2$, $dz(M) = \Delta x + 2\Delta y$.

а. $\Delta z = 7$, $dz = 5$ $\Delta z - dz = 2$ **б.** $\Delta z = 0{,}52$, $dz = 0{,}5$ $\Delta z - dz = 0{,}02$.

3. а. $1{,}013$ **б.** $3{,}037$ **в.** $0{,}005$ **г.** $3{,}003$.

4. а. $dz = \left(2xy^4 - 3x^2y^4 + 4x^3y^2\right)dx +$

$+\left(4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y\right)dy$

б. $dz = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\dfrac{1}{xy}(ydx + xdy)$

в. $dz = \dfrac{1}{x^3 - 2y^3 - z^3}\left(3x^2dx - 6y^2dy - 3z^2dz\right)$

5. $\Delta l = 0{,}065$ — точное изменение длины диагонали, $dl = 0{,}062$ — приближенное изменение длины диагонали.

§ 3. Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в области $D \subset R^2$ частные производные z'_x, z'_y.

В дальнейшем будем называть их *частными производными первого порядка.* Они являются функциями двух переменных и могут иметь частные производные.

Частные производные от частных производных первого порядка называются *частными производными второго порядка*. Очевидно, что функция двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка $\left(z'_x\right)'_x$, $\left(z'_x\right)'_y$, $\left(z'_y\right)'_x$, $\left(z'_y\right)'_y$.

Для частных производных второго порядка принято обозначение $\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx}$ (читается z два штриха по x, x) или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читается де два z по де x дважды) Аналогично обозначаются и читаются частные производные $\left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Частные производные $\left(z'_x\right)'_y = z''_{xy}$ (читается де два штриха по x, y) и $\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}$ называются смешанными частными производными.

Отметим, что, если смешанные частные производные непрерывны в точке $M\left(x, y\right)$, то они равны в этой точке $z''_{xy}\left(M\right) = z''_{yx}\left(M\right)$.

Аналогично, частными производными третьего порядка называются частные производные от частных производных второго порядка. В общем случае, если определены частные производные порядка $n-1$, то частные производные от них называются *частными производными n – го порядка* функции $z = f\left(x, y\right)$.

Смешанные частные производные высших порядков, отличающиеся друг от друга лишь порядком дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны (например $z'''_{xyx} = z'''_{xxy} = z'''_{yxx}$).

Пример 3.1

Найти частные производные второго порядка функции $z = 2^{xy}$.

Решение

Согласно примеру 1.3 б частные производные первого порядка равны $z'_x = y \cdot 2^{xy} \ln 2$, $z'_y = x \cdot 2^{xy} \ln 2$.

Находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(y 2^{xy} \ln 2\right)'_x = y \ln 2 \cdot 2^{xy} \ln 2 \cdot y = y^2 \ln^2 2 \cdot 2^{xy}.$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(y 2^{xy} \ln 2\right)'_y = \ln 2 \cdot \left(y' 2^{xy} + y\left(2^{xy}\right)'_y\right) =$$

$$\ln 2 \cdot \left(2^{xy} + xy 2^{xy} \ln 2\right)$$

(воспользовались теоремой о производной произведения).

Аналогично находим

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(x2^{xy}\ln 2\right)'_x = \ln 2\cdot\left(x'2^{xy} + x\left(2^{xy}\right)'_x\right) =$$
$$= \ln 2\cdot\left(2^{xy} + xy2^{xy}\ln 2\right).$$

Установлено, что смешанные частные производные равны $\left(z''_{xy} = z''_{yx}\right)$. $z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(x2^{xy}\ln 2\right)'_y = \ln 2\cdot\left(x2^{xy}\ln 2\right)x = x^2\ln^2 2\cdot 2^{xy}$.

Пример 3.2

Пусть $z = \ln\left(x+y\right)$. Найти z'''_{xxy}

Решение

Частная производная первого порядка равна

$$z'_x = \left(\ln\left(x+y\right)'_x\right) = \frac{1}{x+y} = \left(x+y\right)^{-1}.$$

Частная производная второго порядка равна

$$z''_{xx} = \left(\left(x+y\right)^{-1}\right)'_x = -\left(x+y\right)^{-2}$$

Частная производная третьего порядка равна

$$z'''_{xxy} = \left(-\left(x+y\right)^{-2}\right)'_y = 2\left(x+y\right)^{-3}$$

Можно проверить, что $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$.

Пример 3.3

Доказать, что функция $z = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $z'_x - z'_y + yz''_{xy} = 0$.

Решение

Считая y постоянным, находим частную производную $z'_x = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}$. Считая x постоянным, находим частную производную $z'_y = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = -e^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y^2}$.

Смешанная частная производная равна

$$z''_{xy} = \left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = \left(\frac{1}{y}\right)' e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y^3}.$$

(воспользовались теоремой о производной произведения)

Подставляя найденные значения производных в левую часть уравнения, получим

$$\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} + \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + y\left(-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y^3}\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частные производные второго порядка функции

а. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$, **б.** $z = arctg\frac{x}{y}$, **в.** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

2. а. $z = xe^{-y}$ Найти $\frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$.

б. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

3. Доказать, что функция $z = \cos(x - at) + e^{x+at}$ удовлетворяет уравнению $z''_{xx} - \frac{1}{a^2}z''_{tt} = 0$.

4. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$. Доказать, что **а.** $z'_x + z'_y = 1$,

б. $z''_{xx}z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 0$

Ответы

1. а. $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y - 15y^2$, $z''_{yy} = 2x - 30xy + 20y^3$.

б. $z''_{xx} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $z''_{yy} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

в. $z''_{xx} = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

$$z''_{yy} = \frac{x^3 + \left(x^2 - y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

2. а. $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4} = e^{-y}$ **б.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{4x\left(3y^2 - x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

§ 4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет в области $D \subset R^2$ непрерывные частные производные первого порядка, тогда существует дифференциал функции $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. В дальнейшем будем называть его дифференциалом *первого порядка.*

Дифференциалом второго порядка функции $z = f\left(x, y\right)$ называется *дифференциал от дифференциала первого порядка* $d\left(dz\right)$. Для дифференциала второго порядка принято обозначение $d^2 z$. Итак $d^2 z = d\left(dz\right)$.

Дифференциал второго порядка существует, если функция имеет непрерывные частные производные второго порядка. Такая функция называется дважды дифференцируемой.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3 z = d\left(d^2 z\right)$.

В общем случае, если существует дифференциал порядка $n-1$, то *дифференциалом порядка* n называется дифференциал от дифференциала $\left(n-1\right)$ – ого порядка. $d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)$.

Дифференциал n – ого порядка существует, если функция имеет непрерывные частные производные n – ого порядка. В этом случае функция называется n раз дифференцируемой.

Для дифференциала n – ого порядка справедлива символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z\ , \tag{14}$$

которая понимается так: сначала “многочлен” формально возводится в степень n, затем все слагаемые умножаются на z (которое приписывается в числителе при ∂^i), после этого символам возвращается их смысл как производных и дифференциалов.

Для дифференциала $n-$ ого порядка функции m переменных $u = f\left(x_1,...x_m\right)$ справедлива символическая формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u \qquad (15)$$

Пример 4 .1

Найти дифференциалы первого и второго порядков dz и $d^2 z$, если $z = x^y$.

Решение

Дифференциал первого порядка равен $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Находим частные производные первого порядка $z'_x = yx^{y-1}$ (производная степенной функции) $z'_y = x^y \ln x$ (производная показательной функции), тогда $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$. Найдем дифференциал второго порядка. По определению $d^2 z = d\left(dz\right) = d\left(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\right)$. Учитывая, что dx и dy постоянны и воспользовавшись свойствами дифференциала, получим

$$d^2 z = d\left(yx^{y-1}\right)dx + d\left(x^y \ln x\right)dy = \left(\left(yx^{y-1}\right)'_x dx + \left(yx^{y-1}\right)'_y dy\right)dx +$$

$$+\left(\left(x^y \ln x\right)'_x dx + \left(x^y \ln x\right)'_y dy\right)dy =$$

$$= \left(y\left(y-1\right)x^{y-2}dx + \left(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\right)dy\right)dx +$$

$$+\left(\left(y \cdot x^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^y \ln^2 x\right)dy\right)dy =$$

$$= y\left(y-1\right)x^{y-2}\left(dx\right)^2 + 2\left(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\right)dxdy +$$

$$+x^y \ln^2 x\left(dy\right)^2.$$

Отметим, что во втором и третьем слагаемом коэффициенты при $dxdy$ одинаковы, поскольку это смешанные частные производные второго порядка z''_{xy} и z''_{yx}.

Пример 4.2

Найти дифференциал второго порядка функции $z = 2^{xy}$.

Решение

По символической формуле (14) дифференциал второго порядка $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^2 z = = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$.

Подставляя в эту формулу, найденные в примере 3.1 , частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = y^2 2^{xy} \ln 2,\ z''_{xy} = \ln 2\left(2^{xy}\left(1 + xy2^{xy}\ln 2\right)\right),\ z''_{yy} = x^2 2^{xy}\ln 2,$$

получим

$$d^2z = y^2 2^{xy}\ln 2(dx)^2 + 2\ln 2 \cdot 2^{xy}\left(1 + xy2^{xy}\ln 2\right)dxdy + x^2 2^{xy}\ln 2(dy)^2.$$

Пример 4.3

Найти дифференциалы первого и второго порядка du и d^2u, если $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.

Решение

По символической формуле (15) дифференциал первого порядка равен $du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz \right)u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

Находим частные производные первого порядка

$$u'_x = \left(x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \right)'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} \quad u'_y = \left(x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \right)'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}$$

$$u'_z = \left(x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \right)'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}.$$

Подставляя частные производные в формулу для дифференциала первого порядка, получим

$$du = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right)dx + \left(\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right)dy + \left(\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)dz.$$

По символической формуле (15) дифференциал второго порядка равен

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz \right)^2 u \ .$$

Поскольку $\left(a+b+c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, то дифференциал второго порядка равен

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(dx\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(dy\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(dz\right)^2 +$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz$$

Находим частные производные второго порядка

$$u''_{xx} = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right)'_x = \frac{y^2}{2x^3}\ ,\ u''_{yy} = \left(\frac{y^2}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right)'_y = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\ ,$$

$$u''_{zz} = \left(\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)'_z = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\ .$$

$$u''_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right)'_y = -\frac{y}{2x^2}\ ,\ u''_{xz} = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right)'_z = 0\ ,$$

$$u''_{yz} = \left(\frac{y^2}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right)'_z = -\frac{2z}{y^2}\ .$$

Подставляя частные производные второго порядка в формулу, получим

$$d^2u = \frac{y^2}{2x^3}\left(dx\right)^2 + \left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right)\left(dy\right)^2 + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)\left(dz\right)^2 +$$
$$+2\left(-\frac{y}{2x^2}\right)dxdy + 2\left(-\frac{2z}{y^2}\right)dydz\ .$$

Пример 4.4

Найти дифференциал третьего порядка функции $z = x^2 y - xy^2$

Решение

По символической формуле (15) дифференциал третьего порядка равен

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}(dx)+\frac{\partial}{\partial y}(dy)\right)^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2\,dy+$$

$$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

(воспользовались формулой $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$).

Найдем последовательно частные производные. Частные производные первого порядка равны:

$$z'_x=\left(x^2y-xy^2\right)'_x=2xy-y^2,\; z'_y=\left(x^2y-xy^2\right)'_y=x^2-2xy,$$

частные производные второго порядка равны:

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\left(2xy-y^2\right)'_x=2y,\; z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(2xy-y^2\right)'_y=2x-2y$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(x^2-2xy\right)'_y=-2x,$$

частные производные третьего порядка равны:

$$z'''_{xxx}=\left(z''_{xx}\right)'_x=(2y)'_x=0,\; z'''_{xxy}=\left(z''_{xx}\right)'_y=(2y)'_y=2,$$

$$z'''_{xyy}=\left(z''_{xy}\right)'_y=(2x-2y)'_y=-2,\; z'''_{yyy}=\left(z''_{yy}\right)'_y=(-2x)'_y=0$$

Подставляя значения частных производных в формулу для дифференциала третьего порядка, получим

$$d^3z=3\cdot 2(dx)^2\,dy-3\cdot 2dx(dy)^2=6\left((dx)^2\,dy-dx(dy)^2\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции двух переменных

а. $z=\ln(xy)$, **б.** $z=e^{xy}$

2. Найти дифференциалы второго порядка функции двух переменных

а. $z = arctg\dfrac{x}{y}$ **б.** $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

3. Найти дифференциал второго порядка функции трех переменных

а. $u = \sin\left(x + y + z\right)$ **б.** $u = xyz$

4. Найти дифференциал третьего порядка функции

а. $z = x\cos y + y\sin x$ **б.** $z = x^3 y - xy^3$

Ответы

1.а. $dz = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y}$, $d^2 z = -\dfrac{\left(dx\right)^2}{x^2} - \dfrac{\left(dy\right)^2}{y^2}$.

б. $dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$$d^2 z = y^2 e^{xy}\left(dx\right)^2 + 2\left(e^{xy} + xye^{xy}\right)dxdy + x^2 e^{xy}\left(dy\right)^2$$

2.а. $d^2 z = -\dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(dx\right)^2 + 2\dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dxdy + \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(dy\right)^2$

б. $d^2 z = \left(2 + \dfrac{4}{x^2}\right)\left(dx\right)^2 + 2dxdy + \left(2 + \dfrac{10}{y^2}\right)\left(dy\right)^2$

3.а. $d^2 u = -\sin\left(x + y + z\right)\left(\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2 + \left(dz\right)^2\right)$

б. $d^2 u = 2\left(zdxdy + ydxdz + zdydx\right)$

4.а. $d^3 z = -y\cos x\left(dx\right)^3 - 3\sin x\left(dx\right)^2 dy - 3\cos ydx\left(dy\right)^2 -$

$-x\sin y\left(dy\right)^3$

б. $d^3 z = 6\left(y\left(dx\right)^3 + 3x\left(dx\right)^2 dy - 3ydx\left(dy\right)^2 - x\left(dy\right)^3\right)$.

§ 5. Дифференцирование сложных функций

Случай функции одной переменной

Пусть функции $z = f\left(x, y\right)$, $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$ дифференцируемы, тогда сложная функция $z\left(t\right) = f\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$ переменной t дифференцируема, и ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (16)$$

Если функции $z = f(x, y)$ и $y = y(x)$ дифференцируемы, то сложная функция $z(x) = f(x, y(x))$ дифференцируема, ее производная называется полной производной и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{17}$$

Случай функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x_1 ... x_m)$, $x_1 = x_1(t_1 ... t_n), ..., x_m(t_1 ... t_n)$ дифференцируемые функции, тогда сложная функция имеет частные производные по переменным $t_1, ..., t_n$.

Запишем эти формулы для $m = 3$, $n = 2$.

Пусть

$$W = f(x, y, z),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v).$$

Тогда функция $W(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ имеет частные производные по u и v, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \tag{18}$$

Отметим частный случай

Пусть $z = f(t)$, $t = t(x, y)$ дифференцируемые функции, тогда сложная функция $z(x, y) = f(t(x, y))$ имеет частные производные, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} \tag{19}$$

Пример 5.1

Найти $\frac{dz}{dt}$ функции $z = e^{x-2y}$, если $x = \sin t$, $y = t^3$

Решение

Задачу можно решить двумя способами

Способ 1

Подставляя $x = \sin t$, $y = t^3$ в формулу $z = e^{x-2y}$, получим $z = e^{\sin t - 2t^3}$. Это функция переменной t и ее производная равна
$z' = e^{\sin t - 2t^3}\left(\sin t - 2t^3\right)' = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$.

Способ 2

По формуле (16) производная равна

$$z' = \left(e^{x-2y}\right)'_x\left(\sin t\right)'_t + \left(e^{x-2y}\right)'_y\left(t^3\right)'_t = e^{x-2y}\cos t - 2e^{x-2y}\cdot 3t^2 =$$
$$= e^{x-2y}\left(\cos t - 6t^2\right)$$

Пример 5.2

Пусть $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$, где $y = e^x$.

Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$.

Решение

Частная производная равна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 - y^2\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 - y^2}\left(x^2 - y^2\right)'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

Полную производную вычислим по формуле (17)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \left(\ln\left(x^2 - y^2\right)\right)'_x + \left(\ln\left(x^2 - y^2\right)\right)'_y\left(e^x\right)' =$$
$$= \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{(-2y)e^x}{x^2 - y^2} = \frac{2}{x^2 - y^2}\left(x - ye^x\right).$$

Пример 5.3

Пусть $z = t^2$, где $t = \dfrac{x}{y} + xy$.

Найти частные производные z'_x и z'_y.

Решение

По формулам (19) частные производные равны

$$z'_x = z'_t \cdot t'_x = \left(t^2\right)' \left(\frac{x}{y} + xy\right)'_x = 2t\left(\frac{1}{y} + y\right)$$

$$z'_y = z'_t \cdot t'_y = \left(t^2\right)' \left(\frac{x}{y} + xy\right)'_y = 2t\left(-\frac{x}{y^2} + x\right).$$

Пример 5.4

Пусть $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$**,** где $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Решение

По формулам (18) ($m = 2$, $n = 2$) находим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x (uv)'_u + \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y \left(\frac{u}{v}\right)'_u =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x (uv)'_v + \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y \left(\frac{u}{v}\right)'_v =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} u + \frac{2y}{x^2 + y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right).$$

Пример 5.5

Доказать, что функция $z = y\phi\left(x^2 - y^2\right)$ (ϕ – дифференцируемая функция) удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

Решение

Найдем сначала частные производные ϕ'_x и ϕ'_y. Положив $t = x^2 - y^2$ и воспользовавшись формулами (19), получим $\phi'_x = \phi'_t \cdot t'_x = \phi'_t \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_x = \phi'_t \cdot 2x,\ \phi'_y = \phi'_t \cdot t'_y = \phi'_t \cdot \left(x^2 - y^2\right)'_y = \phi'_t \cdot (-2y)$

Найдем теперь частные производные z'_x и z'_y.

Считая y постоянным и вынося его за скобки, получим $z'_x = y(\phi)'_x$.

Подставляя в эту формулу ϕ'_x, найдем $z'_x = y \cdot \phi'_t \cdot 2x$.

Частную производную по y находим, воспользовавшись формулой производной произведения $z'_y = y' \cdot \phi + y \cdot \phi'_y$. Подставляя в эту формулу ϕ'_y, найдем $z'_y = \phi + y \cdot \phi'_t \cdot (-2y)$.

Подставляя найденные частные производные в левую часть уравнения, получим

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(y \cdot \phi'_t \cdot 2x\right) + \frac{1}{y}\left(\phi - 2y^2 \cdot \phi'_t\right) = \frac{1}{y}\phi = \frac{y\phi}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$

а. $z = \frac{y}{x}$, где $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$

б. $z = x^2 + y^2 + xy$, где $x = \sin t$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$

в. $z = xyz$, где $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = tgt$

2. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$

а. $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 3x + 1$

б. $z = e^{xy}$, где $y = \sqrt{x^2 + 1}$

3. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

а. $z = \dfrac{u^2}{v}$, где $u = x - 2y$, $v = x + 2y$

б. $z = u + v^2$, где $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

4. Доказать, что функция $z = \phi\left(x^2 + y^2\right)$ удовлетворяет уравнению

$yz'_x - xz'_y = 0$

5. Доказать, что функция $z = xy + \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y = xy + z$

Ответы

1. а. $-\dfrac{y}{x^2}e^t + \dfrac{1}{x}\left(-2e^{2t}\right)$

б. $\left(2x + y\right)\cos\left(t\right) + \left(2y + x\right)\dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$

в. $yz\left(2t\right) + xz\left(\dfrac{1}{t}\right) + xy\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)$

2. а. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{4xy - 6x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

б. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{dz}{dx} = ye^{xy} + e^{xy}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. а. $z'_x = \dfrac{2u}{v} - \dfrac{u^2}{v^2}$, $z'_y = -2\left(\dfrac{2u}{v}\right) - 2\dfrac{u^2}{v^2}$

б. $z'_x = 2x + 2vy$, $z'_y = -2y + 2vx$.

§ 6. Дифференцирование функций, заданных неявно

Случай функции одной переменной

Функция $y = y\left(x\right)$, $x \in \left(\alpha, \beta\right)$ называется *заданной неявно*, если она задана уравнением $f\left(x, y\right) = 0$ (функция $f\left(x, y\right)$ дифференцируема), то есть справедливо тождество $f\left(x, y(x)\right) \equiv 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Если $f_y'(x, y) \neq 0$, то производная функции $y(x)$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)} \tag{20}$$

Случай функции нескольких переменных

Ограничимся случаем функции двух переменных. Функция $z = z(x, y), (x, y) \in D \subset R^2$ *задана неявно,* если она задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ (функция $F(x, y, z)$ дифференцируема), то есть справедливо тождество $F\left(x, y, z(x, y)\right) \equiv 0$, при $(x, y) \in D \subset R^2$.

Если $F_z'(x, y, z) \neq 0$, то частные производные функции $z = z(x, y)$ вычисляются по формулам

$$z_x' = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)},\ z_y' = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}. \tag{21}$$

Пример 6.1

Найти производную функции, заданной неявно с помощью уравнения

а) $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0.$ **б)** $\cos(x + y) + y = 0.$

Решение

а) $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$. Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1

Положим $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 1$ и найдем частные производные $F_x' = 2x - y$, $F_y' = 2y - x$, тогда по формуле (20) $y' = -\dfrac{2x - y}{2y - x}$.

Способ 2

Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 1$, тогда имеем $F(x, y) = 0$ и, следовательно, $dF(x, y) = 0$.

Так как частные производные $F'_x = 2x - y$, $F'_y = 2y - x$, то $dF = F'_x dx + F'_y dy = (2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$.

Отсюда находим $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - y}{2y - x}$

б) $\cos(x + y) + y = 0$. Положим $F(x, y) = \cos(x + y) + y$, тогда $F(x, y) = 0$ и $dF(x, y) = 0$.

Следовательно,

$$dF = F'_x dx + F'_y dy = (\cos(x + y) + y)'_x dx + (\cos(x + y) + y)'_y dy =$$
$$= (-\sin(x + y))dx + (-\sin(x + y) + 1)dy = 0.$$

Отсюда находим $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)}$

Пример 6.2

Найти производные первого и второго порядков (y' и y''), если $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$

Решение

Обозначим левую часть уравнения через $F(x, y)$, то есть

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$$

Найдем частные производные

$$F'_x = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 6x = 6x\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right),$$

$$F'_y = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 6y = 6y\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right)$$

По формуле (20) $y' = -\frac{6x\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right)}{6y\left((x^2 + y^2)^2 - 1\right)} = -\frac{x}{y}$.

Найдем y'', дифференцируя по x первую производную y' и учитывая, что $y = y(x)$.

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-\frac{x}{y'}\right)' = -\frac{x'y - xy'}{y^2} = \frac{xy' - y}{y^2}$$

(воспользовались формулой для производной частного)

Подставив в это выражение $y' = -\frac{x}{y}$, получим

$$y'' = \frac{x\left(-\frac{x}{y}\right) - y}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Пример 6.3

Найти частные производные z'_x и z'_y, если

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1 .$$

Решение

Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1

Пусть $F\left(x, y, z\right) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$. Находим частные производные первого порядка $F'_x = \cos y - z\sin x$, $F'_y = -x\sin y + \cos z$, $F'_z = -y\sin z + \cos x$.

По формулам (21) находим $z'_x = -\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z + \cos x}$, $z'_y = -\frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x}$.

Способ 2

Пусть $F\left(x, y, z\right) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$, тогда $F = 0$ и $dF = 0$. $dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz$. Частные производные найдены выше, поэтому

$$dF = \left(\cos y - z\sin x\right)dx + \left(-x\sin y + \cos z\right)dy + \left(-y\sin z + \cos x\right)dz .$$

Отсюда находим $dz = -\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z + \cos x}dx - \frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x}dy$

Сравнивая эту формулу с формулой $dz = z'_x dx + z'_y dy$ видим, что

$$z'_x = -\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z + \cos x},$$

$$z'_y = -\frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно

а. $xy - \ln x = 1$ **б.** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\,\frac{y}{x}$

2. Найти производные первого и второго порядка функции, заданной неявно.

а. $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$ **б.** $x + \ln y - y = 0$

в. $x + y - e^{x+y} = 0$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно

а. $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ **б.** $x^3 + 2y^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$

в. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$

Ответы

1. а. $y' = \frac{1 - xy}{x^2}$ **б.** $y' = \frac{x + y}{x - y}$

2. а. $y' = -\frac{y}{x}$, $y'' = \frac{2y}{x^2}$ **б.** $y' = \frac{y}{y-1}$, $y'' = \frac{y}{(1-y)^3}$

в. $y' = -1$, $y'' = 0$

3. а. $z'_x = \frac{2x - y}{2z}$, $z'_y = \frac{2y - x}{2z}$ **б.** $z'_x = \frac{x^2 - yz}{xy}$, $z'_y = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3xy}$

в. $z'_x = -\frac{4x - 8z}{2z - 8x - 1}$, $z'_y = -\frac{4y}{2z - 8x - 1}$

Глава 3. Приложения частых производных

§ 1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через точку M_0.

Нормалью к поверхности в точке M называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке M .

Если поверхность задана уравнением $F\left(x, y, z\right) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ имеет вид:

$$F_x^{'}\left(M_0\right)\left(x - x_0\right) + F_y^{'}\left(M_0\right)\left(y - y_0\right) + F_z^{'}\left(M_0\right)\left(z - z_0\right) = 0 , \qquad (22)$$

а уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F_x^{'}\left(M_0\right)} = \frac{y - y_0}{F_y^{'}\left(M_0\right)} = \frac{z - z_0}{F_z^{'}\left(M_0\right)} \qquad (23)$$

Пример 3.1

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M_0\left(1, -2, 2\right)$.

б) $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M_0\left(1, -2, 6\right)$.

Решение

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M_0\left(1, -2, 2\right)$.

Пусть $F\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$

Находим частные производные $F_x^{'} = 2x$, $F_y^{'} = 2y$, $F_z^{'} = 2z$.

Их значения в точке $M_0\left(1, -2, 2\right)$ равны $F_x^{'}\left(M_0\right) = 2$, $F_y^{'}\left(M_0\right) = -4$, $F_z^{'}\left(M_0\right) = 4$.

По формуле (22) уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$2(x-1)-4(y+2)+4(z-2)=0 \text{ или } x-2y+2z-9=0 .$$

По формуле (23) уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{4} \text{ или } \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{2} .$$

б) $z=1+x^2+y^2$ в точке $M_0(1,-2,6)$.

Уравнение поверхности в данном случае имеет вид $F(x,y,z)=x^2+y^2+1-z$

Находим частные производные $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$ и их значения в точке $M_0(1,-2,6)$ равны $F'_x(M_0)=2$, $F'_y(M_0)=-4$, $F'_z(M_0)=-1$.

По формуле (22) уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,-2,6)$ имеет вид $2(x-1)-4(y+2)-(z-6)=0$ или $2x-4y-z-4=0$.

По формуле (23) уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(1,-2,6)$ имеет вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-6}{-1} .$$

Задачи для самостоятельного решения

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанных точках

1. $z=x^2+y^2$ в точке $M(1,-2,5)$

2. $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M(3,4,12)$

3. $3xyz-z^3=1$ в точке $M(0,1,-1)$

4. $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ в точке $M(2,-1,1)$

Ответы

1. $2x-4y-z-5=0$ – касательная плоскость, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-5}{-1}$ – нормаль.

2. $3x+4y+12z-169=0$ – касательная плоскость, $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ – нормаль.

3. $x+z+1=0$ – касательная плоскость, $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{-3}$ – нормаль.

4. $2x+2y-z-1=0$ – касательная плоскость, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ – нормаль.

§ 2. Градиент. Производная по направлению

Градиентом функции $u=F(x,y,z)$ называется вектор

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\ , \tag{24}$$

где i, j, k – координатные орты.

Градиент функции $u=F(x,y,z)$ в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня (то есть к поверхности заданной уравнением $F(x,y,z)=c$), проходящей через эту точку.

Производной функции $u=F(x,y,z)$ в направлении вектора l в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ называется $\frac{\partial F}{\partial l}=\lim\limits_{M\to M_o}\frac{F(M)-F(M_0)}{MM_0}$, где точки M, M_0 лежат на прямой l.

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Если вектор l образует с осями координат углы α, β, γ, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{25}$$

(напомним, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$)

Производная по направлению и градиент связаны формулой $\frac{\partial u}{\partial l} = np_l grad(u) = |grad(u)| \cos\phi$, ($\phi$ – угол между l и $grad(u)$).

Если $l = grad(u)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad(u)|, \quad (26)$$

то есть в направлении градиента производная наибольшая.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ производная в направлении вектора l равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha \quad (27)$$

α – угол, образованный вектором l с осью x (рис 24).

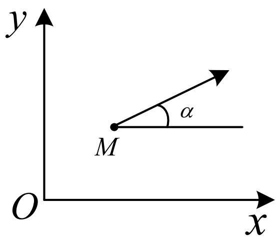

Рис.24.

Пример 2.1

Найти производную функции $z = x^2 - xy - 2y^2$ в направлении, составляющем с осью x угол 60^0. Вычислить ее значение в точке $M_0(1,2)$.

Решение

Находим частные производные $z'_x = 2x - y$, $z'_y = -x - 4y$. По формуле (27) производная по направлению в точке $M(x, y)$ равна $\frac{\partial u}{\partial l} = (2x - y)\cos 60^0 + (-x - 4y)\sin 60^0$.

Ее значение в точке $M_0(1,2)$ равно $\frac{\partial u}{\partial l}=(2-2)\cdot\frac{1}{2}+(-1-8)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-9\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.2

Найти величину и направление градиента функции $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точке $M_0(2,1,-1)$.

Решение

Находим частные производные функции $u_x^{'}=3x^2-3yz$, $u_y^{'}=3y^2-3xz$, $u_z^{'}=3z^2-3xy$.

Их значения в точке $M_0(2,1,-1)$ равны $u_x^{'}(M_0)=15$ $u_y^{'}(M_0)=9$, $u_z^{'}(M_0)=-3$, тогда $grad(u)(M_0)=15i+9j-3k$ и $|grad(u)(M_0)|=\sqrt{15^2+9^2+3^2}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$.

Пример 2.3

Найти производную функции $u=x^2y-3xyz+xy^2z^2$ в точке $M_0(1,2,-1)$, в направлении вектора l, образующего с осями координат острые углы α, β, γ, причем $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$

Решение

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(1,2,-1)$: $u_x^{'}=2xy-3yz+y^2z$, $u_x^{'}(M_0)=14$, $u_y^{'}=x^2-3xz+2xyz^2$, $u_y^{'}(M_0)=8$, $u_z^{'}=-3xy+2xy^2z$, $u_z^{'}(M_0)=-14$.

Из выражения $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ находим

$$\cos^2\alpha=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-\cos^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Так как угол α острый, то $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

По формуле (25) $\frac{\partial u}{\partial l}=14\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-14\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$, то функция возрастает в этом направлении.

Пример 2.4

Найти производную функции $u = xy + xz + yz$ в точке $M_0\left(2,3,4\right)$ в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M\left(3,5,6\right)$

Решение

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0\left(2,3,4\right)$:

$u_x^{'} = y + z$, $u_x^{'}\left(M_0\right) = 7$, $u_y^{'} = x + z$, $u_y^{'}\left(M_0\right) = 6$,

$$u_z^{'} = x + y \text{ , } u_z^{'}\left(M_0\right) = 5 \text{ .}$$

По известным формулам ([5], глава 7)

$$\overrightarrow{M_0M} = \left\{x_M - x_{M_0}, y_M - y_{M_0}, z_M - z_{M_0}\right\} = \left\{1,2,2\right\} \text{ ,}$$

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \text{ , тогда } \cos\alpha = \frac{x_M - x_{M_0}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{1}{3} \text{ ,}$$

$$\cos\beta = \frac{y_M - y_{M_0}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{2}{3} \text{ , } \cos\gamma = \frac{z_M - z_{M_0}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{2}{3} \text{ .}$$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 7\cdot\dfrac{1}{3} + 6\cdot\dfrac{2}{3} + 5\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{29}{3}$ формула (25).

Пример 2.5

Найти производную функции $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в произвольной точке $M\left(x,y,z\right)$ в направлении ее градиента.

Решение

Частные производные функции u равны:

$$u'_x = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x = -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3},$$

$$u'_y = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2y = -\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3},$$

$$u'_z = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2z = -\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}.$$

Тогда

$$grad\left(u\right) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\left(xi+yj+zk\right)$$

По формуле (26) производная в направлении $grad\left(u\right)$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|grad\left(u\right)\right| = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти $grad\left(u\right)$, его длину и производную функции u в направлении ее градиента.

2. Найти производную функции в точке M в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$

а. $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, если $M\left(3,1\right)$, $N\left(6,5\right)$

б. $u = xyz$, если $M\left(5,1,2\right)$, $N\left(9,4,14\right)$

3. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M\left(1,2,2\right)$ в направлении, составляющем с осями координат острые углы α , β , γ ($\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$).

4. Найти производную функции $u = x^2 - 3xz + 5$ в точке $M\left(1,2,-1\right)$ в направлении, составляющем равные углы с осями координат.

Ответы

1. $grad(u)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xi+yj+zk)$, $|grad(u)|=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial l}=1$.

2. **а.** 0, **б.** $\dfrac{98}{13}$.

3. 5.

4. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 3. Формула Тейлора

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывные частные производные до порядка $n+1$ включительно, тогда для любой $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(M)=f(M_0)+df(M_0)+\frac{d^2f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(M_0)}{n!}+\ ,\ +R_n(\tilde{M}), \tag{28}$$

где $R_n(\tilde{M})=\dfrac{d^{n+1}f(\tilde{M})}{(n+1)!}$, точка $\tilde{M}$ принадлежит окрестности точки M_0, dx и dy, входящие в $d^kf(M_0)$ ($k=1,\ldots,n+1$) равны Δx и Δy.

Пример 3.1

Функцию $z=f(x,y)=x^2y$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1,1)$.

Решение

Найдем последовательно значения функции и ее дифференциалов в точке $M_0(1,1)$ ($z(M_0)$, $dz(M_0)$, $d^2z(M_0)\ldots$) и подставим в формулу (28).

Имеем:

$$z(M_0)=z(1,1)=1,$$

$$dz(M)=z'_x(M)\Delta x+z'_y(M)\Delta y=\left(x^2y\right)'_x\Delta x+\left(x^2y\right)'_y\Delta y=$$

$$=2xy\Delta x+x^2\Delta y \text{ и } dz(M_0)=2\Delta x+\Delta y.$$

По символической формуле (14) дифференциал второго порядка равен

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}(dx)+\frac{\partial}{\partial y}(dy)\right)^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Находим частные производные второго порядка $z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=(2xy)'_x=2y$, $z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=(2xy)'_y=2x$, $z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(x^2\right)'_y=0$ и подставим их в формулу для дифференциала второго порядка.

Получим $d^2z(M)=2y(\Delta x)^2+4x(\Delta x\Delta y)+0\cdot(\Delta y)^2$ и $d^2z(M_0)=2(\Delta x)^2+4\Delta x\Delta y$.

По символической формуле (14) дифференциал третьего порядка равен

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy+$$

$$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^2}(dy)^3.$$

Находя частные производные третьего порядка

$$z'''_{xxx}=\left(z''_{xx}\right)'_x=(2y)'_x=0,\ z'''_{xxy}=\left(z''_{xx}\right)'_y=(2y)'_y=2,$$

$$z'''_{xyy}=\left(z''_{xy}\right)'_y=(2x)'_y=0\ z'''_{yyy}=\left(z''_{yy}\right)'_y=0$$

(воспользовались тем, что частные производные третьего порядка не зависят от порядка дифференцирования) и подставляя их в формулу для дифференциала третьего порядка, получим

$$d^3z(M_0)=d^3z(M)=6(\Delta x)^2\Delta y.$$

Отметим, что частные производные четвертого и более высоких порядков равны нулю, поэтому $d^4z(M_0)=d^5z(M_0)....=0$.

Подставляя найденные значения функции и ее дифференциалов в формулу (28) для любой точки $M\left(1+\Delta x,1+\Delta y\right)$, получим

$$z\left(1+\Delta x,1+\Delta y\right)=z\left(1,1\right)+dz\left(1,1\right)+\frac{d^2z\left(1,1\right)}{2}+\frac{d^3z\left(1,1\right)}{3!}=$$

$$=1+2\Delta x+\Delta y++\frac{2\left(\Delta x\right)^2+4\Delta x\Delta y}{2}+\frac{6\left(\Delta x\right)^2\Delta y}{6}=$$

$$=1+2\Delta x+\Delta y+\left(\Delta x\right)^2+2\Delta x\Delta y+\left(\Delta x\right)^2\Delta y \qquad (29)$$

Положим $x=1+\Delta x$, $y=1+\Delta y$, тогда $\Delta x=x-1$, $\Delta y=y-1$ и перепишем формулу (29) следующим образом:

$$z\left(x,y\right)=1+2\left(x-1\right)+\left(y-1\right)+\left(x-1\right)^2+2\left(x-1\right)\left(y-1\right)+$$
$$+\left(x-1\right)^2\left(y-1\right)$$

Это представление называется разложением функции по степеням $\left(x-1\right),\left(y-1\right)$ до членов третьего порядка в окрестности точки $M_0\left(1,1\right)$.

Пример 3.2

Разложить по формуле Тейлора до членов второго порядка в окрестности точки $M\left(x,y\right)$ функцию $z=x^y$.

Решение

Дифференциалы первого и второго порядка функции в точке равны $dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$,

$$d^2z=y\left(y-1\right)x^{y-2}\left(dx\right)^2+2\left(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right)dxdy+ x^y\ln^2 x\left(dy\right)^2$$

(см. пример 4.1 главы 2)

Подставляя $z\left(M\right)$, $dz\left(M\right)$, $d^2z\left(M\right)$ в формулу (28) и учитывая, что $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, получим

$$z\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(y\left(y-1\right)x^{y-2}\left(\Delta x\right)^2+2\left(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right)\Delta x\Delta y\Big)+x^y\ln^2 x\left(\Delta y\right)^2\Big).$$

(30)

Пример 3.3

Используя разложение по формуле Тейлора функции $z = x^y$, вычислить приближенно $0,95^{2,01}$.

Решение

Положим $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = -0,05$, $\Delta y = 0,01$. Подставляя эти значения в формулу (30), найдем

$$0,95^{2,01} = z(1-0,05,1+0,01) = 1^2 + \left(2\cdot 1(-0,05) + 1\cdot \ln 1\cdot 0,01\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(2(2-1)(-0,05)^2 + 2\cdot(1)(-0,05)\cdot 0,01\right) = 0,902$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Функцию $z = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1,2)$.

2. Функцию $z = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(-2,1)$ (по степеням $(x+2)$, $(y-1)$).

3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1,-1)$ функцию $z = e^{x+y}$ (до членов третьего порядка включительно)

4. Вычислить приближенно, используя разложение по формуле Тейлора до членов второго порядка указанных функций

а. $(1,1)^{1,02}$ (разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1,1)$ функцию $z = x^y$).

б. $\sqrt{1,03}\sqrt[3]{0,98}$ (разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1,1)$ функцию $z = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$).

Ответы

1. $z(1+\Delta x, 2+\Delta y) = -9 + 9\Delta x - 21\Delta y + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x\Delta y -$

$-12(\Delta y)^2 + (\Delta x)^3 - 2(\Delta y)^3$

2. $z(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$

3. $z\left(x,y\right)=1+\left(x-1\right)+\left(y+1\right)+$

$$+\frac{\left(\left(x-1\right)+\left(y+1\right)\right)^2}{2!}+\frac{\left(\left(x-1\right)+\left(y+1\right)\right)^3}{3!}$$

4. а. $1{,}1021$ **б.** $1{,}0081$

§ 4. Экстремум функции нескольких переменных

Точка $M_0\left(x_0,y_0\right)$ называется *точкой максимума* $\left(\max\right)$ функции $z=f\left(x,y\right)$, если $f\left(M_0\right)>f\left(M\right)$ для всех точек M, принадлежащих окрестности $S_\delta\left(M_0\right)$ точки M_0 и отличных от нее.

Точка $M_0\left(x_0,y_0\right)$ называется *точкой минимума* $\left(\min\right)$ функции $z=f\left(x,y\right)$, если $f\left(M_0\right)<f\left(M\right)$ для всех точек M, принадлежащих окрестности $S_\delta\left(M_0\right)$ точки M_0 и отличных от нее.

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума* функции.

Необходимым условием экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю частных производных первого порядка этой функции, то есть, если в точке M_0 функция имеет экстремум, то

$\begin{cases} z'_x\left(M_0\right)=0 \\ z'_y\left(M_0\right)=0 \end{cases}$, эта система равносильна равенству $dz\left(M_0\right)=0$.

Аналогично определяется точка экстремума и необходимое условие экстремума для функции m переменных $u=f\left(x_1,...,x_m\right)$, а именно, в точке экстремума $\begin{cases} u'_{x_1}\left(M_0\right)=0 \\ .... \\ u'_{x_m}\left(M_0\right)=0 \end{cases}$

или $du\left(M_0\right)=0$.

Отметим, что сформулированное условие не является достаточным.

Точки, в которых дифференциал первого порядка не существует или равен нулю, называются *критическими точками или точками подозрительными на экстремум*.

Сформулируем достаточное условие экстремума для функции m переменных (первое достаточное условие экстремума)

Пусть функция $u = f(x_1, ..., x_m)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0 и

1. в точке M_0 выполнено необходимое условие экстремума, то есть $du(M_0) = 0$ или $u'_{x_1}(M_0) = 0, ..., u'_{x_m}(M_0) = 0$,

2. дифференциал второго порядка $d^2u(M_0)$ как функция $\Delta x_1, ..., \Delta x_m$ в некоторой окрестности точки M_0 сохраняет знак.

Тогда

1. если $d^2u(M_0) < 0$ в окрестности точки M_0, то в точке M_0 максимум;

2. если $d^2u(M_0) > 0$ в окрестности точки M_0, то в точке M_0 минимум;

3. если $d^2u(M_0) = 0$ в окрестности точки M_0, то требуются дополнительные исследования.

Для функции двух переменных справедливо второе достаточное условие экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0. В точке M_0 выполнено необходимое условие экстремума $\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0 \end{cases}$ или $dz(M_0) = 0$,

пусть далее $A = z''_{xx}(M_0)$, $B = z''_{xy}(M_0)$, $C = z''_{yy}(M_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Тогда

1. если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет,

2. если $\Delta > 0$, то в точке M_0 экстремум есть, а именно,

а) при $A < 0 (C < 0)$ – максимум,

б) при $A > 0 (C > 0)$ – минимум,

3. если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии экстремума требуются дополнительные исследования.

Пример 4.1

Пользуясь первым достаточным условием экстремума, найти экстремум функции

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ **б)** $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Решение

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Для нахождения стационарных точек вычислим частные производные первого порядка $z'_x = 2x + y - 3$, $z'_y = x + 2y - 6$ и приравняем их к нулю.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$.

Выражая из первого уравнения $y = -2x + 3$ и подставляя во второе уравнение, получим $x + 2(-2x + 3) - 6 = 0$.

Отсюда $x = 0$, $y = 3$. Следовательно, $M_0(0,3)$ – стационарная точка.

Для проверки наличия экстремума в точке $M_0(0,3)$ исследуем знак дифференциала второго порядка в этой точке.

По символической формуле (14)

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Находим частные производные второго порядка $z''_{xx} = (2x + y - 3)'_x = 2$, $z''_{xy} = (2x + y - 3)'_y = 1$, $z''_{yy} = (x + 2y - 6)'_y = 2$.

Тогда $d^2 z(M_0) = 2(dx)^2 + 2dxdy + 2(dy)^2$.

Представим $d^2 z(M_0)$ следующим образом

$$d^2 z(M_0) = \left((dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2\right) + (dx)^2 + (dy)^2 =$$
$$= (dx + dy)^2 + (dx)^2 + (dy)^2.$$

Из этого представления следует, что $d^2 z(M_0) > 0$. Поэтому в точке $M_0(0,3)$ минимум.

б) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$. Частные производные первого порядка найдены в примере 4.3 главы 2

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}\,,\ u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\,,\ u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\,.$$

Для нахождения стационарной точки приравняем их к нулю и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $(x > 0, y > 0, z > 0)$. Из первого уравнения находим $y = 2x$. Подставляя y во второе уравнение, получим $1 - \dfrac{z^2}{y^2} = 0$ или $y = z$. Подставляя y в третье уравнение, находим $2 - \dfrac{2}{z^2} = 0$ или $z = 1$. Тогда $y = z = 1$, $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $M_0\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение в этой точке первого достаточного условия экстремума. Дифференциал второго порядка равен

$$d^2u = \frac{y^2}{2x^3}(dx)^2 + \left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right)(dy)^2 + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)(dz)^2 +$$

$$+2\left(-\frac{y}{2x^2}\right)dxdy + 2\left(-\frac{2z}{y^2}\right)dydz \text{ (пример 4.3, глава 2).}$$

Тогда дифференциал второго порядка в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$ равен

$$d^2u(M_0) = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{8}}(dx)^2 + \left(\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} + 2\right)(dy)^2 + (2+4)(dz)^2 -$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{4}}dxdy-4dydz=4\left(dx\right)^2+3\left(dy\right)^2+6\left(dz\right)^2-4dxdy-4dydz$$

Представим $d^2u\left(M_0\right)$ следующим образом

$$d^2u\left(M_0\right)=\left(4\left(dx\right)^2-4dxdy+\left(dy\right)^2\right)+\left(\left(dy\right)^2-4dydz+4\left(dz\right)^2\right)+$$
$$+\left(dy\right)^2+2\left(dz\right)^2=\left(2dx-dy\right)^2+\left(dy-2dz\right)^2+\left(dy\right)^2+2\left(dz\right)^2.$$

Из полученного представления ясно, что $d^2u\left(M_0\right)>0$, поэтому в точке $M_0\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ минимум.

Пример 4.2

Пользуясь достаточным условием экстремума для функции двух переменных, найти экстремум функции

а) $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y\quad\left(x>0,y>0\right)$

б) $z=x^3+3xy^2-51x+24y$

Решение

а) $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$. Для нахождения стационарных точек вычислим частные производные первого порядка $z'_x=-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}+1$ и приравняем их к нулю. Получим систему уравнений: $\begin{cases}-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y}=0\\-\frac{x}{y^2}+1=0\end{cases}$. Найдя из второго уравнения $x=y^2$ и подставляя в первое уравнение, получим $-\frac{8}{y^4}+\frac{1}{y}=0$. Так как $y\neq0$, то отсюда следует, что $y^3=8$ или $y=2$.

Тогда $x = 4$. Следовательно, $M(4,2)$ – стационарная точка.

Проверим выполнение в точке M (4,2) второго достаточного условия экстремума. Находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \left(-\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}\right)'_x = \frac{16}{x^3},\ z''_{xy} = \left(-\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2},$$

$$z''_{yy} = \left(-\frac{x}{y^2} + 1\right)'_y = -\frac{2x}{y^3}.$$

В точке $M(4,2)$, находим

$A = z''_{xx}(M) = \frac{16}{4^3} = \frac{1}{4}$, $B = z''_{xy}(M) = -\frac{1}{4}$, $C = z''_{yy}(M) = \frac{2\cdot 4}{2^3} = 1$, тогда $\Delta = AC - B^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Поскольку $\Delta > 0$ и $A > 0(C > 0)$ в точке $M(4,2)$ минимум.

б) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$. Находим частные производные первого порядка $z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 51$, $z'_y = 6xy - 24$.

Для нахождения стационарных точек приравняем их к нулю и решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$. Из второго уравнения находим $y = \frac{4}{x}$ и подставим в первое уравнение, тогда $x^2 + \frac{16}{x^2} = 17$ или $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$. Отсюда $x^2 = 1$ или $x = 1$, $x = -1$ и $x^2 = 16$ или $x = 4$, $x = -4$. Получили четыре стационарные точки: $M_1(4,1)$, $M_2(-4,-1)$, $M_3(1,4)$, $M_3(-1,-4)$.

Для проверки выполнения второго достаточного условия экстремума находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \left(3x^2 + 3y^2 - 51\right)'_x = 6x,\ z''_{xy} = \left(3x^2 + 3y^2 - 51\right)'_y = 6y,$$

$$z''_{yy} = \left(3x^2 + 3y^2 - 51\right)'_y = \left(6xy - 24\right)'_y = 6x$$

и вычисляем их значения в стационарных точках.

В точке $M_1(4,1)$

$$A = z''_{xx}(M_1) = 24\,,\; B = z''_{xy}(M_1) = 6\,,$$
$$C = z''_{yy}(M_1) = 24\,, \Delta = AC - B^2 = 24 \cdot 24 - 36 > 0\,.$$

Поскольку $\Delta > 0$ и $A > 0(C > 0)$, в точке M_1 *минимум*.

В точке $M_2(-4,-1)$

$$A = z''_{xx}(M_2) = -24\,,\; B = z''_{xy}(M_2) = -6\,,\; C = z''_{yy}(M_2) = -24\,,$$
$$\Delta = AC - B^2 = (-24)\cdot(-24) - (-6)^2 > 0$$

Поскольку $\Delta > 0$ и $A < 0(C < 0)$, в точке M_2 максимум.

В точке $M_3(1,4)$

$$A = z''_{xx}(M_3) = 6\,,\; B = z''_{xy}(M_3) = 24\,,$$
$$C = z''_{yy}(M_3) = 6\,, \Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 24^2 < 0\,.$$

Поскольку $\Delta < 0$ в точке M_3 экстремума нет.

В точке $M_4(-1,-4)$

$$A = z''_{xx}(M_4) = -6\,, B = z''_{xy}(M_4) = -24\,, C = z''_{yy}(M_4) = -6\,,$$
$$\Delta = AC - B^2 = (-6)(-6) - (-24)^2 < 0\,.$$

Поскольку $\Delta < 0$ в точке M_4 экстремума нет.

Следовательно, в точке $M_2(-4,-1)$ максимум, в точке $M_1(4,1)$ минимум,в стационарных точках $M_3(1,4)$, $M_4(-1,-4)$ экстремума нет.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь первым достаточным условием экстремума, найти экстремум функции

а. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ б. $z = x^3 + y^3 - 6xy$

в. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

г. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 6z + 10$

2. Используя достаточное условие экстремума для функции двух переменных , найти экстремум функции

а. $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12$ б. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$,

в. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ г. $z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y$,

д. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ **е.** $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$.

Ответы

1. а. в точке $M(-1,1)$ минимум б. в точке $M(2,2)$ минимум

в. в точке $M\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ минимум г. в точке $M(6,-4,3)$ минимум

2. а. в точке $M(2,0)$ минимум б. в точке $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ минимум

в. в точках $M_1\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ минимум

г. в точке $M_1(1,3)$ минимум, в точке $M_2(-1,-3)$ максимум

д. в точке $M(5,6)$ максимум **е.** в точке $M(6,4)$ максимум.

§ 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция $z = f(x,y)$ непрерывная на ограниченном замкнутом множестве достигает своего наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса).

Понятие наибольшее и наименьшее значение надо отличать от понятия экстремума (в точках экстремума значение наибольшее или наименьшее для точек, лежащих в окрестности данной точки).

Если функция разрывна или определена на неограниченном или незамкнутом множестве, то она может не достигать на этом множестве наибольшего и наименьшего значения.

Чтобы найти *наибольшее и наименьшее значения функции* на ограниченном замкнутом множестве D надо:

1. найти критические точки функции, лежащие внутри D и вычислить значение функции в этих точках,
2. найти наибольшее и наименьшее значение функции на линиях, образующих границы,
3. из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее

Пример 5.1

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ в области $D: x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$.

Решение

Данная область представляет собой треугольник, ограниченный прямой $x + y = 4$ и осями координат (рис. 25)

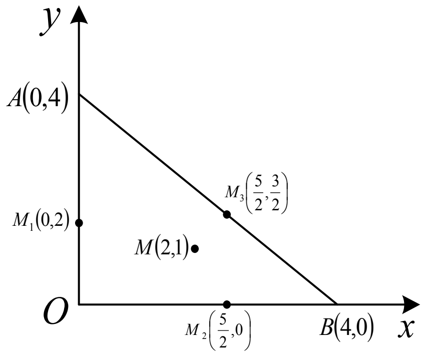

Рис.25

Найдем *стационарные точки* функции, лежащие внутри треугольника. Вычислим частные производные первого порядка

$$z'_x = \left(x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10\right)'_x = 2x + y - 5,$$

$$z'_y = \left(x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10\right)'_y = 2y + x - 4$$

и приравняем их к нулю.

Получим систему уравнений;

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 2y + x - 4 = 0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем $y = -2x + 5$ и подставим во второе, тогда $2(-2x + 5) + x - 4 = 0$ или $-3x + 6 = 0$, отсюда $x = 2$, $y = 1$. Стационарная точка $M(2,1)$ лежит внутри треугольника (рис. 25).

Значение функции в этой точке равно

$$z(M) = z(2,1) = 4 + 1 + 2 - 10 - 4 + 10 = 3$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции *на границе области*. Граница состоит из трех отрезков OA, OB, AB.

1. *на отрезке* OA имеем $x = 0$, $y \in [0,4]$.

Подставив $x = 0$ в выражение $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, получим функцию одной переменной $\psi(y) = y^2 - 4y + 10 \quad y \in [0,4]$.

Функция одной переменной достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках (то есть в точках, в которых производная не существует или обращается в нуль (стационарных)), лежащих внутри промежутка, либо на его концах (Приложение, §2) .

Найдя производную $\psi'(y) = 2y - 4$ и приравняв ее к нулю, получим стационарную точку функции одной переменной $y = 2 \in [0,4]$ или точку $M_1(0,2)$. Вычислим значение функции в точке $M_1(0,2)$ и на концах отрезка, то есть в точках $O(0,0)$ и

$$A(0,4):\ z(M_1) = \psi(2) = 4 - 8 + 10 = 6,\ z(O) = \psi(0) = 10,$$
$$z(A) = \psi(4) = 16 - 16 + 10 = 10.$$

2. *на отрезке* OB имеем $y = 0$, $x \in [0,4]$. Подставим $y = 0$ в выражение $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, получим функцию одной переменной $\phi(x) = x^2 - 5x + 10$. Производная $\phi'(x) = 2x - 5$ обращается в нуль при $x = \frac{5}{2} \in [0,4]$ или в точке $M_2\left(\frac{5}{2},0\right)$. Вычислим значение функции в точке $M_2\left(\frac{5}{2},0\right)$ и на концах отрезка, то есть в точках $O(0,0)$ и $B(4,0)$: $z(M_1) = \phi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 10 = 3\frac{3}{4}$,

$z(O)=\phi(0)=10$ (вычислено выше)

$z(B)=\phi(4)=16-20+10=6$.

3. *на отрезке* AB имеем $x+y=4$ или $y=4-x$, $x\in[0,4]$.

Подставив это значение в выражение $z=x^2+y^2+xy-5x-4y+10$, получим

$$\gamma(x)=x^2+(4-x)^2+x(4-x)-5x-4(4-x)+10=x^2-5x+10.$$

Найдя производную $\gamma'(x)=2x-5$ и приравняв ее к нулю, получим стационарную точку $x=\dfrac{5}{2}\in[0,4]$ или точку $M_3\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

Значение функции в этой точке

$$z(M_3)=\gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+10=3\frac{3}{4}.$$

При $x=0$ и $x=4$ получим точки $O(0,0)$ $B(4,0)$. Значения функции в этих точках найдены выше.

Итак, получены точки, в которых функция может принимать наибольшее и наименьшее значение: $M(2,1)$, $z(M)=3$; $M_1(0,2)$, $z(M_1)=6$; $M_2\left(\dfrac{5}{2},0\right)$, $z(M_2)=3\dfrac{3}{4}$; $M_3\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, $z(M_3)=3\dfrac{3}{4}$; $O(0,0)$, $z(0)=10$; $A(0,4)$, $z(A)=10$; $B(4,0)$, $z(B)=3\dfrac{3}{4}$.

Отсюда следует, что $z_{наиб.}=10$ достигается в точках $A(0,4)$ и $O(0,0)$. $z_{наим.}=3$ достигается в точке $M(2,1)$.

Пример 5.2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-2x-2y+4$ в круге $x^2+y^2\le 4$ (рис. 26).

Решение

Найдем набольшее и наименьшее значение функции в точках, лежащих внутри круга.

Найдя частные производные первого порядка $z'_x=2x-2$, $z'_y=2y-2$ и приравняв их к нулю, получим стационарную точку $M(1,1)$. Она лежит внутри круга. Значение функции в этой точке $z(M) = z(1,1) = 1+1-2-2 = 2$.

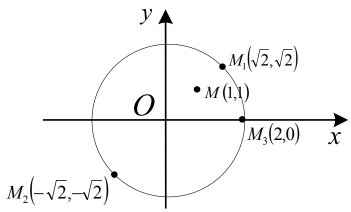

Рис. 26

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции на границе, то есть на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Запишем уравнение окружности в параметрической форме $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi)$ и подставим в $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$. Получим функцию одной переменной $\phi(t) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 4\sin t - 4\cos t + 4 = = 8 - 4\cos t - 4\sin t$.

Производная $\phi'(t) = 4\sin t - 4\cos t$ обращается в нуль, если $\sin t = \cos t$, то есть при $t = \dfrac{\pi}{4}$ и $t = \dfrac{5\pi}{4}$. При $t = \dfrac{\pi}{4}$ имеем $x = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $y = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ или точку $M_1\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. При $t = \dfrac{5\pi}{4}$ имеем $x = 2\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$, $y = 2\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$ или точку $M_2\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Вычислим значение функции в этих точках, а также в точке $M_3(2,0)$ соответствующей $t = 0$ и $t = 2\pi$ получим.

$$z(M_1) = \phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 - 4\cos\frac{\pi}{4} - 4\sin\frac{\pi}{4} = 8 - 8\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,3$$

$$z(M_2) = \phi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8 - 4\cos\frac{5\pi}{4} - 4\sin\frac{5\pi}{4} = 8 + 8\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 13,6 .$$

$$z(M_3) = \phi(0) = \phi(2\pi) = 8 - 4\cos 0 - 4\sin 0 = 8 - 4 = 4$$

Итак, наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться в точках $M(1,1)$, $z(M_1)=2$; $M_1\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $z(M_1)=2,3$; $M_2\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $z(M_2)=13,6$; $M_3(2,0)$, $z(M_3)=4$.

Отсюда следует, что $z_{наиб}=13,6$ достигается в точке $M_2\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $z_{наим}=2$ достигается в точке $M(1,1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанных областях

1. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в области D: $x+y\geq -3$, $x\leq 0$, $y\leq 0$

2. $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в области D: $y=x^2$, $y=4$

3. $z=1+x+2y$ в области D: $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 0$

4. $z=x^2y$ в области D: $x^2+y^2\leq 1$

5. $z=x^3+y^3-3xy$ в области D: $0\leq x\leq 2$, $-1\leq y\leq 2$

Ответы

1. $z_{наиб}=6$ достигается в точках $M_1(0,-3)$ и $M_2(-3,0)$; $z_{наим}=-1$ достигается в точке $M(-1,-1)$.

2. $z_{наиб}=32$ достигается в точках $M_1(-2,4)$ и $M_2(2,4)$; $z_{наим}=0$ достигается в точке $M_3(0,0)$.

3. $z_{наиб}=3$ достигается в точках $M_1(0,1)$; $z_{наим}=2$ достигается в точке $M_2(1,0)$.

4. $z_{наиб}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ достигается в точках $M_1\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $M_2\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $z_{наим}=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ достигается в точках $M_3\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $M_4\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5. $z_{наиб}=13$ достигается в точке $M_1(2,-1)$; $z_{наим}=-1$ достигается в точках $M_2(1,1)$ и $M_3(0,-1)$.

§ 6. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа

Требуется найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением $\phi(x, y) = 0$ (уравнение связи).
Приведем необходимые определения.

В точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет *условный максимум (минимум)* при условии $\phi(x, y) = 0$, если $f(M_0) > f(M)$ $\left(f(M_0) < f(M)\right)$ для всех точек M отличных от M_0, лежащих в окрестности точки M_0 и удовлетворяющих условию $\phi(x, y) = 0$.

Точки условного минимума и максимума называются точками *условного экстремума*.

Геометрически задача сводится к нахождению экстремума функции $z = f(x, y)$ на линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с цилиндрической поверхностью $\phi(x, y) = 0$ (рис.27)

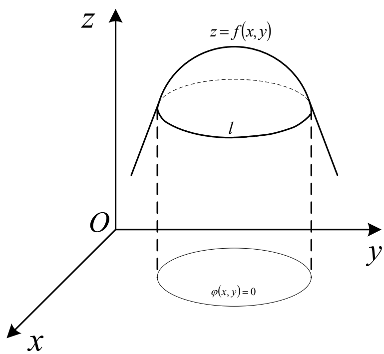

Рис. 27

Точки экстремума, рассмотренные в § 4, будем называть точками *абсолютного экстремума*.

Для нахождения экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\phi(x, y) = 0$ составляют функцию Лагранжа $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$ (λ – неопределенный постоянный множитель) и находят ее экстремум.

Необходимое условие экстремума имеет вид $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \phi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \phi'_y = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Из этой системы находят точку возможного экстремума $M_0(x_0, y_0)$ и $\lambda = \lambda_0$.

Вопрос о существовании и характере экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ находится на основании изучения знака дифференциала второго порядка $d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при $\lambda = \lambda_0$, при этом dx и dy связаны уравнением $\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0$.

Пример 6.1

Найти экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии $x^2 + y^2 = 25$.

Решение

Геометрически находим экстремум аппликаты точки плоскости $z = 9 - 8x - 6y$ на линии ее пересечения с цилиндром $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 28)

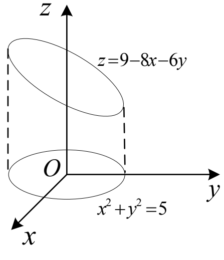

Рис. 28

Запишем функцию Лагранжа

$$F\left(x,y,\lambda\right)=9-8x-6y+\lambda\left(x^2+y^2-5\right).$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} F'_x=-8+2\lambda x=0 \\ F'_y=-6+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-25=0 \end{cases}$$

Для решения системы из первого уравнения выразим $x=\dfrac{4}{\lambda}$, из второго $y=\dfrac{3}{\lambda}$ и подставим в третье уравнение $\dfrac{16}{\lambda^2}+\dfrac{9}{\lambda^2}=25$.

Отсюда находим $\lambda=\pm 1$.

При $\lambda=1$ получим точку $M_1\left(4,3\right)$, а при $\lambda=-1$ точку $M_2\left(-4,-3\right)$.

Для проверки выполнения достаточного условия экстремума находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\left(-8+2\lambda x\right)'_x=2\lambda\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\left(-8+2\lambda x\right)'_y=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\left(-3+2\lambda x\right)'_y=2\lambda\,,$$

тогда дифференциал второго порядка имеет вид $d^2F=2\lambda\left(\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2\right)$.

Отсюда следует, что $d^2F<0$ при $\lambda=-1$. Следовательно, в точке $M_2\left(-4,-3\right)$ – максимум, $d^2F>0$ при $\lambda=1$. Следовательно, в точке $M_1\left(4,3\right)$ – минимум.

Пример 6.2

Найти экстремум функции $z=x^2+y^2$ при условии $x+y=1$.

Решение

$z=x^2+y^2$ параболоид (рис.29) . Ясно, что $O\left(0,0\right)$ – точка абсолютного минимума.

$x + y = 1$ – плоскость, параллельная оси z. Линия пересечения параболоида и плоскости – парабола. На рис. 29 видно, что в точке M функция имеет условный минимум.

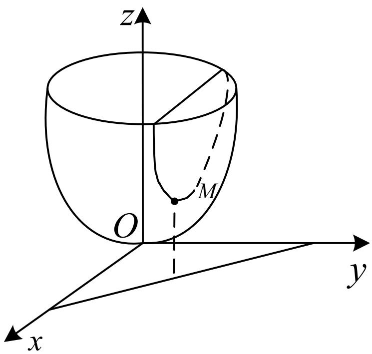

Рис. 29

Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1

Из уравнения плоскости $x + y = 1$ выразим $y = 1 - x$ и подставим в уравнение поверхности $z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Получим функцию одной переменной. Для исследования функции на экстремум найдем производную $z' = 4x - 2$ и приравняем ее к нулю. $z' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – стационарная точка. Производная второго порядка $z'' = 4 > 0$.

По достаточному условию экстремума для функции одной переменной (Приложение, §2) при $x = \frac{1}{2}$ (или в точке $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$) условный минимум.

Способ 2

Функция Лагранжа равна $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda = 0 \\ F'_y = 2y + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases} .$$

Из первого уравнения находим $x = -\dfrac{\lambda}{2}$, из второго находим $y = -\dfrac{\lambda}{2}$. Подставляя найденные x и y в третье уравнение, получим $-\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{\lambda}{2} - 1 = 0$. Отсюда $\lambda = -1$.

Следовательно, $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ – стационарная точка при $\lambda = -1$. Для проверки достаточного условия экстремума исследуем знак дифференциала второго порядка в точке $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (2x + \lambda)'_x = 2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (2x + \lambda)'_y = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (2y + \lambda)'_y = 2$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2 F = 2\left((dx)^2 + (dy)^2\right)$

Ясно, что $d^2 F > 0$, поэтому в точке $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ – условный минимум.

Пример 6.3

Представить положительное число a представить в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение

Пусть $x > 0$ – первое слагаемое, $y > 0$ – второе слагаемое. Из условия задачи следует, что $x + y = a$, произведение $z = xy$. Задача свелась к нахождению условного максимума функции $z = xy$ при условии $x + y = a$. Функция Лагранжа равна

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-a).$$

Необходимое условие экстремума имеет вид $\begin{cases} F_x' = y+\lambda=0 \\ F_x' = x+\lambda=0 \\ F_\lambda' = x+y-a=0 \end{cases}$

Из первого уравнения находим $y=-\lambda$, из второго $x=-\lambda$. Подставляя x и y в третье уравнение получим $-\lambda-\lambda-a=0$ или $\lambda=-\dfrac{a}{2}$, тогда $x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$. Следовательно, $M\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ – стационарная точка, при $\lambda=-\dfrac{a}{2}$. Исследуем знак дифференциала второго порядка. Частные производные второго порядка равны $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=(y+\lambda)_x'=0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=(y+\lambda)_y'=1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=(x+\lambda)_y'=0$, тогда дифференциал второго порядка $d^2F=2dxdy$.

Из уравнения связи $x+y-a=0$ находим $dx+dy=0$. Подставляя $dx=-dy$ в выражение для дифференциала второго порядка , получим $d^2F=-2dydy=-2(dy)^2<0$. Поэтому в точке $M\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ условный максимум. Итак, произведение двух чисел, имеющих постоянную сумму, наибольшее, если они равны.

Задачи для самостоятельного решение

1. Найти условный экстремум функции

а. $z=8-2x-4y$ при условии $x^2+2y^2=12$

б. $z=x^2+y^2$ при условии $x-2y-5=0$

в. $z=x^2-y^2$ при условии $x+2y-6=0$

г. $z=x+2y$ при условии $x^2+y^2=5$

д. $z=x^2+y^2$ при условии $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$.

2. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

Ответы

1. а. в точке $M_1\left(2,2\right)$ условный минимум, в точке $M_2\left(-2,-2\right)$ условный максимум

б. в точке $M\left(1,-2\right)$ условный минимум **в.** в точке $M\left(-2,4\right)$ условный минимум

г. в точке $M\left(1,2\right)$ условный максимум, в точке $M\left(-1,-2\right)$ условный минимум

д. в точке $M\left(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\right)$ условный минимум.

2. Стороны равны $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$, $2\sqrt{S}$.

Глава 4. Варианты контрольных работ

В этой главе приведены четыре варианта контрольных работ. Студенты могут использовать их для проверки своих знаний, а преподаватели для аудиторных и домашних контрольных заданий. Контрольные рассчитаны на наиболее насыщенную программу курса, поэтому в некоторых случаях отдельные примеры (особенно примеры 4) можно исключить из заданий.

Каждая контрольная работа состоит из четырех заданий нахождение области определения функции, вычисление пределов функций, нахождение частных производных первого и высших порядков, дифференцирование сложных функций (примеры 1 и 2), нахождение абсолютного экстремума функции (пример 3), нахождение условного экстремума или наибольшего и наименьшего значения функции (пример 4).

Вариант 1.

1. Найти и построить область определения функции $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$.

2. Доказать, что смешанные частные производные второго порядка z''_{xy} и z''_{yx}. функции $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$ равны.

3. Пользуясь первым достаточным условием, найти экстремум функции $z=x^2+y^2-2x-6y+14$.

4. Найти экстремум функции $z=x^2+y^2$ при условии $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$.

Вариант 2.

1. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=u^v$, где $u=\sin x$, $v=\cos x$.

2. Вычислить приближенно $1{,}003\left(1{,}998\right)^2\left(3{,}005\right)^3$.

3. Пользуясь первым достаточным условием, найти экстремум функции $u=x^2+y^2+z^2-12x+8y-6z+40$.

4. Найти экстремум функции $z = x + 2y$, при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Вариант 3.

1. Доказать, что функция $z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y = xy + z$.

2. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $M(1,2,-1)$ в направлении, составляющем с осями координат равные углы.

3. Пользуясь достаточным условием экстремума для функции двух переменных найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

Вариант 4.

1. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 4}} \frac{\sin\left(x^2 y\right)}{x^2}$.

2. $z = \sin(xy)$. Найти z'''_{xyy} .

3. Пользуясь достаточным условием экстремума для функции двух переменных найти экстремум функции $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области D : $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

Приложение

Функции одной переменной

§ 1. Функция одной переменной, ее предел и непрерывность

Функцией одной переменной $y = f(x)$ называется отображение множества $D \subset R^1$ в пространство R^1, то есть правило, по которому каждому вещественному числу из множества D ставится в соответствие единственное вещественное число.

Определение 1. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность. Число a называется пределом $\{x_n\}$ ($\lim x_n = a$ или $x_n \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ (то есть члены последовательности с номерами большими n_0 попадают в $\varepsilon-$ окрестность $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ точки a).

Определение 2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset R^1$, a - точка сгущения множества (a может не принадлежать D). Число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to a}{\to} A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, и удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для того, чтобы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to a$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ стремилась к A .

Справедливы теоремы о пределе суммы, произведения и частного. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, тогда

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A\pm B,\ \lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}\ \ (B\neq 0).$$

Дробь, у которой числитель и знаменатель стремятся к нулю, называется неопределенностью типа $\frac{0}{0}$.

*Определение 3.*Функция определена на множестве $D\subset R^1$, $x_0\in D$ — точка сгущения D. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в некоторой точке не выполнено условие непрерывности, то будем говорить, что функция разрывна в этой точке.

Функция непрерывна на множестве D, если она непрерывна в каждой его точке.

§2. Производная

Пусть функция $y=f(x)$ задана на интервале (a,b). Выражение вида $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется приращением функции (Δx – приращение аргумента, точки x и $x+\Delta x$ принадлежат (a,b)).

Определение 4. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to 0$. Для производной принято обозначение y', $\frac{dy}{dx}$.

Итак,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если функция имеет производную, то она называется дифференцируемой, операция нахождения производной называется дифференцированием.

Запишем таблицу производных основных элементарных функций.

Таблица производных

	Функция	Производная	Примечание
1	C	0	
2	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	
3	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$x>0$
3.a	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x>0$
4	a^x	$a^x \ln a$	$a>0,\ a\neq 1$
4.a	e^x	e^x	
5	$sinx$	$cos(x)$	
6	$cosx$	$-sin(x)$	
7	tgx	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, k– целое
8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x\neq\pi k$, k– целое
9	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
10	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
11	$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
12	$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими операциями над функциями

$u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции, тогда

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ (1)

$(uv)' = u'v + v'u$ (2)

$(cu)' = cu'$ (3)

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ (4)

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = u(x)$ дифференцируемые функции, тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема, и ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Экстремум функции одной переменной

Точка x_0 называется *точкой максимума (*$\max$*)* функции $y = f(x)$, если $f(x_0) > f(x)$ для всех точек $x \neq x_0$ принадлежащих ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$).

Точка x_0 называется *точкой минимума (*$\min$*)* функции $y = f(x)$, если $f(x_0) < f(x)$ для всех точек $x \neq x_0$ принадлежащих ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$).

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума* функции.

Сформулируем необходимое условие экстремума.

В точке экстремума производная равна нулю (если она существует).

Условие *не является достаточным*.

Точки в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими*. В этих точках функция может иметь экстремум.

Сформулируем *одно из достаточных условий экстремума*.

Пусть функция дифференцируема в окрестности точки x_0 и существует $f''(x_0)=0$. Пусть далее $f'(x_0)=0$

Тогда

1. если $f''(x_0)<0$, то в точке x_0 максимум,
2. если $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 минимум,
3. если $f''(x_0)=0$, то требуются дополнительные исследования.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса). Наибольшее и наименьшее значение может достигаться либо в критических точках, лежащих внутри промежутка, либо на его концах.

Итак, чтобы найти *наибольшее и наименьшее значение* функции на промежутке $[a,b]$, надо вычислить значение функции в критических точках, лежащих в (a,b) и на концах промежутка (то есть в точках $x=a$ и $x=b$). Среди вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Список литературы

1. *Фихтенгольц Г. М*. Основы математического анализа. Т.1., М., 1968.
2. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М., 1986.
3. *Шипачев В. С.* Высшая математика. М., 1990.
4. *Ильин В. А., Поздняк Э. Г.* Основы математического анализа М., 1965.
5. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. М., 1962.
6. *Шипачев В. С.* Сборник задач по высшей математике. М., 1994.
7. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1971.
8. *Гусак А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике, ч.2. Минск, 1973.
9. *Андрианова Т. Н., Волков В. А., Ефимова Т. А., Коломойцева З. Д.* и др. Задачник практикум по высшей математике. Функции многих переменных. СПб., 1994.

Содержание

Учебное издание

Ефимова
Татьяна Александровна

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Компьютерная верстка: В. В. Мещерин

Подписано к печати 01.05.2010.
Формат бумаги $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 5,87. Тираж 300 экз. Заказ 4793.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии Химического факультета СПбГУ.
198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр. 26.