Т.А. Ефимова, В.Ю. Сахаров

ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Санкт-Петербург 1997

Санкт-Петербургский государственный университет

Т.А. Ефимова, В.Ю. Сахаров

ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Издательство С.-Петербургского университета
Санкт-Петербург 1997

ББК 22.16
Е90

Р е ц е н з е н т ы :
канд.физ.-мат.наук, доц. А.К. Пономаренко (С.-Петерб. гос. ун-т),
канд.физ.-мат.наук, доц. В.М. Лебедева (Гос. морск. акад. им.адм. С.О. Макарова)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного университета

Ефимова Т.А., Сахаров В.Ю.
Е90 Числовые, функциональные и степенные ряды: Учебное пособие. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. — 100 с.
ISBN 5-288-01881-2

Учебное пособие составлено на основе опыта чтения лекций и проведения практических занятий авторами пособия по теме "Ряды" в курсах высшей математики и математического анализа на географическом, геологическом, экономическом, биолого-почвенном и химическом факультетах университета. От известных изданий отличается наличием контрольных заданий для проведения аудиторных и домашних контрольных работ. Теоретические положения сопровождаются большим количеством примеров.

Для преподавателей и студентов естественных факультетов университетов, технических вузов и академий.

ББК 22.16

ISBN 5-288-01881-2

© Т.А. Ефимова, В.Ю. Сахаров, 1997
© Издательство С.-Петербургского университета, 1997

П Р Е Д И С Л О В И Е

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучающих тему "Ряды". Оно составлено на основе опыта авторов чтения лекций и проведения практических занятий на географическом, геологическом экономическом, биолого-почвенном и химическом факультетах университета.

Учебное пособие состоит из трех глав: числовые ряды — глава I, функциональные ряды — глава II и степенные ряды — глава III. Включенный в него материал рассчитан на наиболее насыщенную программу курса математического анализа. В конкретной ситуации отдельные вопросы и даже целые главы могут быть исключены преподавателем из курса, особенно при малом количестве академических часов или при недостаточной математической подготовке студентов.

Пособие отличается элементарным изложением с сохранением необходимой строгости. Теоретический материал сопровождается большим количеством примеров, в том числе позволяющих повторить некоторые вопросы, изученные в предшествующих разделах математического анализа. В него включены тридцать вариантов контрольных заданий, которые могут быть использованы преподавателями для аудиторных и домашних контрольных работ.

С помощью этого пособия студенты смогут самостоятельно изучить соответствующие разделы математического анализа, усвоить стандартные приемы решения примеров и подготовиться к восприятию специальных курсов, читающихся на факультетах.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры общей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета Аркадию Кузьмичу Пономаренко за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных замечаний.

Глава I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§1. Основные определения

Определение. ***Пусть*** $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***числовая последовательность. Выражение вида***

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

называется числовым рядом, а a_i ***— его общим членом.*** В выражении (1) вычисляется сумма бесконечного числа слагаемых. Дадим точное определение этого понятия. Для этого рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\quad \ldots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.\\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Величина S_n ***называется частичной суммой ряда.*** Заметим, что

$$S_n = S_{n-1} + a_n.$$

Определение. ***Предел последовательности частичных сумм ряда называется суммой ряда. Если он конечен, то ряд называется сходящимся, а если не существует конечного предела, то расходящимся.***

Для сходящегося ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Для обозначения суммы сходящегося ряда часто используют запись $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \quad \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n\right)$, т.е. сумму сходящегося ряда обозначают тем же символом, что и сам ряд.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$.

Общий член ряда $a_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$. Последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 1 = 2, \quad \ldots, \quad S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\,\text{слагаемых}} = n$$

$$\text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} = 1 - 1 + 1 - \ldots$

Последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad \ldots,$$

Ясно, что подпоследовательность частичных сумм с четными номерами $S_{2k} = 0$, с нечетными $S_{2k-1} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1} = 1$. Отсюда следует, что последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела, так как в противном случае, по теореме о пределе подпоследовательности [9, *гл.* III, §5, 51], $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ имели бы одинаковые пределы, равные $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, что не так. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}$ расходится.

Пример 3. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \ldots, \quad q \in \mathbb{R}$.

При $q \neq 1 \quad S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ — сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом равным единице и со знаменателем q и, следовательно, $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

а) Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Это означает, что при $|q| < 1$ ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

б) Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \infty.$$

То есть при $|q| > 1$ ряд расходится.

в) Если $q = 1$, то имеем ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$, рассмотренный в примере 1. Он расходится.

г) Если $q = -1$, то имеем ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}$, рассмотренный в примере 2. Он также расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$ сходится только при $|q| < 1$, и его сумма $S = \frac{1}{1-q}$.

Пример 4. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

Найдем n-ю частичную сумму ряда

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Используя представление общего члена ряда $a_i = \frac{1}{i(i+1)}$ в виде $a_i = \frac{(i+1)-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, получаем

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

и ряд сходится.

Пример 5. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$

Выпишем сумму первых n членов ряда:

$$S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ слагаемых}}\,.$$

Каждое из слагаемых этой суммы не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому $S_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ слагаемых}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}$ расходится.

Пример 6. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$

Этот ряд называется ***гармоническим***. Докажем его расходимость. Рассмотрим частичные суммы ряда с номерами равными степеням двойки S_{2^k}.

$$S_{2^0}=S_1=1=1+0\cdot\frac{1}{2}\,,$$

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{2}=1+1\cdot\frac{1}{2}\,,$$

$$S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).$$

Поскольку $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, то

$$S_{2^2}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2\cdot\frac{1}{2}\,.$$

$$S_{2^3}=S_8=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right).$$

Поскольку $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\,,$$

то

$$S_{2^3}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>1+3\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Аналогично

$$S_{2^k}\geqslant 1+k\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2^k}=+\infty$. Следовательно, по теореме о пределе подпоследовательности [9, *гл.* III, §5, 51], последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ также не имеет конечного предела, поскольку в противном случае подпоследовательность $\{S_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ также имела бы конечный предел.

Итак, ***гармонический ряд расходится.***

Докажем некоторые свойства сходящихся рядов.

1°. ***Если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***сходится, то последовательность его частичных сумм*** $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***ограничена.***

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. А последовательность, имеющая конечный предел, ограничена [9, *гл.* III, §2, 36].

Отметим, что обратное не всегда верно. В примере 2 последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имела вид $1, 0, 1, 0, \ldots$ Она ограничена снизу нулем, а сверху единицей, но ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}$ расходится.

Итак, ограниченность последовательности частичных сумм ряда является необходимым условием его сходимости.

2°. **Свойство линейности.** ***Если ряды*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***и*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***сходятся, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i)$ ***тоже сходится. При этом, если*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = A$ ***и*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = B$***, то***

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha A + \beta B.$$

Иначе говоря, сходящиеся ряды можно почленно складывать и умножать на число.

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i)$ соответственно. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$.

Поскольку

$$\begin{aligned} S_n &= (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n) = \\ &= \alpha(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \beta(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \alpha A_n + \beta B_n, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n + \beta \lim_{n\to\infty} B_n = \alpha A + \beta B.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha a_i + \beta b_i)$ сходится и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha A + \beta B$.

Следствие 1. ***Если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***сходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c a_i$, $c \in \mathbb{R}$, ***тоже сходится. При этом если*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = S$, ***то*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c a_i = cS$.

Доказательство. Следствие очевидным образом вытекает из свойства линейности, если положить $\alpha = c, \quad \beta = 0$.

Если $c \neq 0$, ***то из сходимости ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c a_i$ ***следует сходимость ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, ***так как*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c}(c a_i)$. ***Если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***расходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c a_i$ ***при*** $c \neq 0$ ***тоже расходится.***

Следствие 2. ***Если ряды*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***и*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***сходятся, то ряды*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i)$ ***тоже сходятся. При этом если*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = A$ ***и*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = B$, ***то***

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \pm b_i) = A \pm B.$$

Доказательство. Следствие легко получить из свойства линейности, если положить сначала $\alpha = \beta = 1$, а потом $\alpha = 1, \quad \beta = -1$.

Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходятся, то из этого не вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha a_i + \beta b_i)$. Например, ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)$ расходятся (см. пример 1), а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 0$, являющийся их суммой, сходится.

Определение. ***Если в ряде*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***отбросить*** m ***первых членов, то получится ряд***

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots\,,$$

называемый остатком ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***после*** m***-го члена.***

Отметим свойства ряда и его остатка.

3°. ***Если сходится ряд, то сходится и любой его остаток. А если сходится какой–нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.***

Доказательство. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i$, тогда

$$S_{m+n} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{S_m} + \underbrace{a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n}}_{\sigma_n} = S_m + \sigma_n.$$

Поскольку S_m не изменяется с ростом n, то при $n \to \infty$ пределы последовательностей $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют или не существуют одновременно, что в сочетании с определением сходящегося ряда и означает доказываемое утверждение.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, то при фиксированном m $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{m+n} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_m + \sigma_n) = S_m + \sigma$.

Из этого свойства следует, что отбрасывание или приписывание к ряду конечного числа начальных членов не нарушает его сходимости. При этом сумма ряда изменяется на величину $S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$.

Итак, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то его остаток после m-го члена тоже сходится. Сумму остатка будем обозначать $R_m = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i$.

4°. ***Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то сумма ряда, являющаяся его остатком после m-го члена $R_m = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i$, стремится к нулю при $m \to \infty$.***

Доказательство. Используя обозначения из п.3°, имеем

$$S_{m+n} = S_m + \sigma_n.$$

Тогда $R_m = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$.

Следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{m+n} = \lim_{n\to\infty} (S_m + \sigma_n) = S_m + R_m,$$

или

$$R_m = S - S_m.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\lim_{m\to\infty} R_m = S - \lim_{m\to\infty} S_m = S - S = 0.$$

Свойство доказано.

Сформулируем и докажем один из важнейших признаков сходимости ряда.

5°. **Критерий Коши.** ***Для того чтобы ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого*** $\varepsilon > 0$ ***нашелся такой номер*** N***, что для всех номеров*** $n > N$ ***и любых*** $p \in \mathbb{N}$ ***выполнялось неравенство***

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ равносильна существованию конечного предела последовательности его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, а для этого, согласно принципу сходимости Больцано — Коши для последовательностей [9, *гл.* III, §5, 52], необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число N, что для всех номеров $n > N$ и любых чисел $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но

$$S_{n+p} - S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) -$$

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.$$

То есть $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Утверждение доказано.

6°. **Необходимый признак сходимости ряда.** ***Если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***сходится, то*** $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Доказательство. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, тогда его общий член можно представить в виде $a_n = S_n - S_{n-1}$. По условию ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится к сумме, которую обозначим S. Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что необходимый признак сходимости ряда не является достаточным. Рассмотренный в примере 6 гармонический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ расходится, хотя $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$. Если $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$, то это не дает никакой информации о его сходимости.

7°. **Достаточный признак расходимости ряда.** ***Если*** $\lim\limits_{i\to\infty} a_i \neq 0$***, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***расходится.***

Доказательство. Доказательство проведем методом "от противного". Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится. Тогда, по необходимому признаку сходимости (6°), $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$, что неверно по условию. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится. Теорема доказана.

В примерах 1 и 2 общие члены рядов $a_i = 1$ и $a_i = (-1)^{i-1}$ не стремятся к нулю при $n \to \infty$, отсюда можно сделать вывод, что эти ряды расходятся.

§2. Сходимость рядов с положительными членами

В этом параграфе будем рассматривать ряды с положительными членами, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, где $a_i > 0$.

Замечание. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ состоит из неотрицательных слагаемых, т.е. $a_i \geqslant 0$, то можно, опустив нулевые слагаемые и перенумеровав оставшиеся члены, получить ряд с положительными членами, фактически совпадающий с исходным.

Докажем некоторые достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

8°. **Достаточное условие сходимости (расходимости) рядов с положительными членами.** ***Если последовательность частичных сумм*** $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \quad (a_i > 0)$ ***ограничена сверху, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***сходится, если не ограничена — то расходится.***

Доказательство. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Поскольку $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ и $a_{n+1} > 0$, то

$S_{n+1} > S_n$. Следовательно, последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает. А возрастающая последовательность имеет конечный предел, если она ограничена сверху, и бесконечный, если не ограничена сверху [9, *гл.* III, §3, 44]. Существование конечного предела последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, а бесконечного — его расходимости. Теорема доказана.

Отметим, что если ряд с положительными членами расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

В п.1° показано, что ограниченность последовательности частичных сумм ряда является необходимым условием его сходимости. Для рядов с положительными членами это условие оказывается и достаточным.

9°. **Первая теорема сравнения.** ***Даны два ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***и*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$***, такие, что для любого номера*** i ***выполняется неравенство*** $0 < a_i \leqslant b_i$***. Тогда***

1) Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***сходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***тоже сходится.***

2) Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***расходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***тоже расходится.***

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$. Тогда

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n.$$

или

$$A_n \leqslant B_n. \tag{2}$$

1) Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, тогда последовательность его частичных сумм $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху (см.п.1°). Согласно неравенству (2) последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже ограничена сверху. Тогда, по достаточному условию сходимости рядов с положительными членами (п.8°), ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится. Предположим, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится. Тогда по 1) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, что не так. Следовательно,

неверно предположение, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится.

Теорема доказана полностью.

Отметим, что в условиях теоремы достаточно требовать, чтобы неравенство $a_i \leqslant b_i$ выполнялось не при всех i, а только начиная с некоторого номера, поскольку согласно утверждению п.3° отбрасывание нескольких начальных членов не изменяет сходимости рядов. Также в условиях теоремы достаточно требовать выполнение неравенства $a_i \leqslant cb_i$, где $c > 0$, так как согласно первому следствию свойства линейности (п.2°) умножение ряда на постоянный множитель, отличный от нуля, не изменяет его сходимости. Очевидно, что эти замечания справедливы одновременно.

Итак, сформулируем полученный результат: ***если начиная с некоторого номера выполняется неравенство*** $0 < a_i \leqslant cb_i$***, где*** $c > 0$***, тогда если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***сходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***тоже сходится, а если ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***расходится, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ***тоже расходится.***

Пример 7. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, где $\alpha < 1$.

Для общего члена ряда $a_i = \frac{1}{i^\alpha}$ справедлива оценка $\frac{1}{i^\alpha} \geqslant \frac{1}{i}$ при $i \geqslant 1$ и $\alpha < 1$. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ является гармоническим рядом, который расходится (см. пример 6). Следовательно, по первой теореме сравнения (п.9°) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ расходится при $\alpha < 1$.

Пример 8. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Вопрос о сходимости этого ряда равносилен вопросу о сходимости его остатка $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Положим $i = k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$, тогда

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\,.$$

Для общего члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ справедлива оценка $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится (см. пример 4), то по первой теореме сравнения (п.9°) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ сходится. Следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Пример 9. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, где $\alpha \geqslant 2$.

Для общего члена ряда $a_i = \frac{1}{i^\alpha}$ справедлива оценка $\frac{1}{i^\alpha} \leqslant \frac{1}{i^2}$ при $i \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant 2$. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ согласно примеру 8 сходится, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ при $\alpha \geqslant 2$ тоже сходится.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ называется обобщенным гармоническим. В примерах 6 – 9 установлено, что он сходится при $\alpha \geqslant 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Вопрос о поведении ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, при $\alpha \in (1, 2)$ будет исследован далее в п.13°.

Пример 10. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(i+1)}$.

Сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Докажем неравенство $\frac{1}{\ln(i+1)} > \frac{1}{i}$, равносильное неравенству $i > \ln(i+1)$. Для этого рассмотрим функцию $\mathrm{f}(x) = x - \ln(x+1)$ при $x \geqslant 1$. Ее производная равна $\mathrm{f}'(x) = \big(x - \ln(x+1)\big)' = 1 - \frac{1}{x+1}$. Поскольку при $x \geqslant 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{2}$, то $\mathrm{f}'(x) > 0$. А так как производная функции положительна, то сама функция возрастает на промежутке $[1, +\infty)$ [9, *гл.* VII, §1, 111]. Тогда для любого $x \geqslant 1$ справедливо неравенство $\mathrm{f}(x) \geqslant \mathrm{f}(1) = 1 - \ln 2 > 0$ $\big(\ln 2 < 1$, так как $1 = \ln e$ и $2 < e$ $(e \approx 2{,}718)\big)$. Следовательно, неравенство $\mathrm{f}(x) > 0 \Leftrightarrow x - \ln(x+1) > 0$ выполняется для всех $x \geqslant 1$ в том числе и для натуральных. Итак, $i - \ln(i+1) > 0 \Leftrightarrow i > \ln(i+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(i+1)} > \frac{1}{i}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ расходится, то по первой теореме сравнения (п.9°) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(i+1)}$ тоже расходится.

Отметим, что если выполняется неравенство $0 < a_i \leqslant b_i$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то первая теорема сравнения (п.9°) не приносит о ряде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ (ряде с бóльшими членами) никакой информации. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится, то о сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ (ряда с меньшими членами) на основании первой теоремы сравнения (п.9°) тоже ничего нельзя сказать. Поэтому в практических задачах удобнее пользоваться теоремой сравнения в предельной форме (п.10°), так как она при известной сходимости вспомогательного ряда всегда приносит информацию об исследуемом.

Перед следующей теоремой введем дополнительное понятие. ***Будем говорить, что два ряда имеют одинаковую сходимость, если они оба сходятся или оба расходятся.*** Например, одинаковую сходимость имеют ряд и его остаток.

10°. **Теорема сравнения в предельной форме.** ***Если*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***— ряды с положительными членами, и существует конечный отличный от нуля*** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$***, то тогда ряды*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***имеют одинаковую сходимость.***

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Так как $a_n > 0$ и $b_n > 0$, то $\frac{a_n}{b_n} > 0$, и по теореме о предельном переходе в неравенстве [9, *гл.* III, §2, 38] $L \geqslant 0$. Но по условию $L \neq 0$, следовательно, $L > 0$. Тогда по определению предела последовательности [9, *гл.* III, §1, 28], для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon < L$, существует такое число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \Leftrightarrow b_n(L-\varepsilon) < a_n < b_n(L+\varepsilon).$$

Отсюда следуют два неравенства:

$$a_n < (L+\varepsilon)b_n \tag{3}$$

и, поскольку $L - \varepsilon > 0$, то

$$(L-\varepsilon)b_n < a_n \Leftrightarrow b_n < \frac{a_n}{L-\varepsilon}\,. \tag{4}$$

Согласно неравенству (3), по замечаниям к первой теореме сравнения (п.9°), если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. А согласно неравенству (4), если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. А поскольку неравенства (3) и (4) выполняются одновременно, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеют одинаковую сходимость.

Следствие 1. ***Если*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***— ряды с положительными членами, и при*** $n \to \infty$ a_n ***эквивалентна*** b_n***, то ряды*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***имеют одинаковую сходимость.***

Доказательство. Эквивалентность $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (о понятии эквивалентности см. в [9, *гл.* III, §6, 56]. Таким образом, выполнены все условия теоремы сравнения в предельной форме при $L = 1$.

Теорема сравнения в предельной форме и первое следствие из нее позволяют вместо исходного ряда исследовать более простой ряд, что практически всегда удобнее.

Следствие 2. Заметим, что если в теореме сравнения в предельной форме $L = 0$, то неравенство (3) все равно выполняется, хоть и $\varepsilon > L$. Поэтому ***если*** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ***и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***сходится, то и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится, а если ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***расходится, то и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***расходится.***

Следствие 3. Если $L = +\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$. По следствию 2 имеем, что ***если*** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ***и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится, то и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***сходится, а если ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***расходится, то и ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***расходится.***

Пример 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$.

Преобразуем общий член ряда. При $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^2+n-1} = \frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{1}{n^2}\,.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{n^2}$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Тогда по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме (п.10°) первоначальный ряд имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ согласно примеру 8 сходится, следовательно, сходится и исходный ряд.

Пример 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

Преобразуем общий член ряда. При $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \sim \frac{1}{n}.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{n}$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1.$$

Тогда, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме (п.10°), первоначальный ряд имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ согласно примеру 6 расходится, следовательно, расходится и первоначальный ряд.

Пример 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}$.

Поскольку при $n \to \infty$ аргумент синуса $\frac{1}{n} \to 0$, то при $n \to \infty$ синус эквивалентен своему аргументу [9, *гл.* III, §6, 56]. Поэтому при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}.$$

По первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме (п.10°) исходный ряд имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ согласно примеру 9 сходится, поэтому сходится и исследуемый ряд.

11°. **Признак Даламбера.** ***Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (предел отношения последующего члена к предыдущему). Тогда, если $l < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а если $l > 1$ или $l = +\infty$, то расходится.***

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ и $l < 1$. Поскольку в этом случае $1 - l > 0$, то можно выбрать ε, такое что $0 < \varepsilon < 1 - l$. Для этого ε найдем номер N такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$. Если ввести обозначение $q = l + \varepsilon \quad (q = l + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0)$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ или $a_{n+1} < a_n q$. При $n = N + 1$ получим неравенство $a_{N+2} < q a_{N+1}$, при $n = N+2$ получаем $a_{N+3} < q a_{N+2} < q q a_{N+1} = q^2 a_{N+1}$ и т.д. Для любого k будем иметь неравенство $a_{N+k} < q^{k-1} a_{N+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$. Другими словами, общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$, являющийся остатком ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, меньше общего члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$, умноженного на постоянное число a_{N+1}. А ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ — сумма геометрической прогрессии, причем поскольку $\varepsilon < 1 - l$, ее знаменатель $q < 1$, и согласно примеру 3 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ сходится. А следовательно, по первой теореме сравнения (п.9°), сходится остаток $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$. Отсюда по свойству (п.$3^\circ$) сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ и $l > 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то независимо от того, конечный это предел или нет, найдется номер N такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ [9, *гл.* III, §2, 36]. Отсюда следует, что $a_{n+1} > a_n$. Последовательность с положительными членами $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с номера N возрастает и, следовательно, не может иметь предела, равного нулю. Так как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не стремится к нулю, то этот ряд по достаточному признаку расходимости (п.7°) расходится.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема Даламбера не приносит информации о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. При $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Для доказательства этого рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Из примеров 6 – 9 известно, что при $\alpha \leqslant 1$ он расходится, а по крайней мере при $\alpha \geqslant 2$ сходится. При любом α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ для ряда, который может как сходиться, так и расходиться в зависимости от α.

Признак Даламбера удобен для исследования сходимости рядов, содержащих факториалы. Напомним, что факториал — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

При этом по определению $0! = 1$. Полезно заметить, что $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Пример 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$, где $r > 0$.

Применим признак Даламбера (п.11°):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} n!}{(n+1)! r^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r n!}{(n+1) n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

Отметим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ на основании необходимого признака сходимости (п.6°) следует, что его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$.

Пример 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$, где $0 < r < 1$.

По признаку Даламбера (п.11°):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} r\left(1+\frac{1}{n}\right) = r.$$

Так как по условию $0 < r < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ сходится.

Пример 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$.

Применяя признак Даламбера (п.11°), получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!n^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{e(n+1)n!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot e = 1,$$

поскольку, согласно определению, $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Предел получился равным единице и признак Даламбера не принес никакой информации о сходимости ряда.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ и в примере присутствуют факториалы, то исследовать сходимость ряда можно с помощью теоремы сравнения пользуясь формулой Стирлинга, согласно которой при $n \to \infty$ $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ [8, *гл.* XI, §7, 393]. Другими словами:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Тогда для общего члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ при $n \to \infty$ получим:

$$\frac{n^n}{e^n n!} \sim \frac{n^n}{e^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\,.$$

Поэтому по первому следствию из теоремы сравнения рядов в предельной форме (п.10°), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, который с точностью до постоянного множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ совпадает с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд является обобщенным гармоническим со степенью $\frac{1}{2} < 1$. Согласно примерам 5 и 7 он расходится, и следовательно, расходится и первоначальный ряд.

12°. **Радикальный признак Коши — Маклорена.** ***Пусть*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***— ряд с положительными членами и*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$***. Тогда, если*** $l < 1$***, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится, а если*** $l > 1$ ***или*** $l = +\infty$***, то расходится.***

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ и $l < 1$. Поскольку $1 - l > 0$, то можно выбрать ε такое, что $0 < \varepsilon < 1 - l$. Для этого ε найдем номер N такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$. Пусть $r = l + \varepsilon$, тогда $\sqrt[n]{a_n} < r$ или $a_n < r^n$, и общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера, меньше общего члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ — сумма геометрической прогрессии, причем, поскольку $0 < \varepsilon < 1 - l$, ее знаменатель $0 < r < 1$, и согласно примеру 3 ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} r^n$ сходится. А следовательно, по первому признаку сравнения (п.10°) сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ и $l > 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то независимо от того конечный это предел или нет, найдется номер N такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Отсюда следует, что $a_n > 1$. Поэтому если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, то он не меньше единицы и, следовательно, не равен нулю. Так как общий член ряда не стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ по достаточному признаку расходимости (п.7°) расходится.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема Коши — Маклорена не приносит информации о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. При $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Радикальный признак Коши — Маклорена удобен для исследования сходимости рядов, общий член которых представляет собой n-ю степень. В остальных случаях проще пользоваться признаком Даламбера поскольку вычисление предела от выражения, содержащего корень n-й степени, затруднительно.

Пример 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Вычислим предел, требуемый для исследования по радикальному признаку Коши — Маклорена (п.12°):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

Предел меньше единицы и, следовательно, по радикальному признаку Коши — Маклорена ряд сходится.

Пример 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$.

Вычислим предел, требуемый для исследования по радикальному признаку Коши — Маклорена (п.12°):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Предел меньше единицы и, следовательно, по радикальному признаку Коши — Маклорена ряд сходится.

Если при попытке исследовать ряд по признаку Даламбера при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ получилась единица, то бесполезно исследовать ряд по радикальному признаку Коши — Маклорена, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ тоже окажется равным единице.

Это утверждение является следствием теоремы Штольца [4, Ч. 1, *отдел* I, § 2, 141, 143]. Теорема Штольца не изучается в традиционном курсе математического анализа и представляет собой аналог правила Лопиталя для пределов последовательностей. В этой теореме утверждается, что если последовательность b_n возрастает и стремится к бесконечности, и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

С помощью этой теоремы покажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Вычислим

$$\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln 1 = 0.$$

Логарифм исследуемой величины — нуль, и это означает, что сама величина равна единице, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. В этом рассуждении можно было воспользоваться теоремой Штольца, так как $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая и стремящаяся к бесконечности последовательность, а исследуемый предел, как выясняется в ходе вычислений, существует. Требуемое утверждение доказано.

Из предыдущих рассуждений следует, что иногда признаки Даламбера и Коши — Маклорена не дают ответа на вопрос о сходимости ряда. Подобного недостатка нет у интегрального признака Коши.

13°. **Интегральный признак Коши.** ***Пусть*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ***— ряд с положительными членами и функция*** $\mathrm{f}(x)$ ***определена на промежутке*** $[1, +\infty)$ ***и обладает следующими свойствами:***

1) $\mathrm{f}(x) \geqslant 0$***, при*** $x \in [1, +\infty)$***,***

2) $\mathrm{f}(x)$ ***убывает на*** $[1, +\infty)$ ***(т.е.*** $\mathrm{f}(x_1) \geqslant \mathrm{f}(x_2)$ ***при*** $x_1 < x_2$***),***

3) $\mathrm{f}(i) = a_i$***, при*** $i \in \mathbb{N}$.

Тогда:

а) если сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$***, то сходится и ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$***,***

б) если расходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$***, то расходится и ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$***.***

Перед доказательством теоремы напомним определение несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом:

$$\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \mathrm{f}(x)dx.$$

Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, а если конечного предела не существует, то — расходящимся [7, *гл.* XI, §7, 1].

Доказательство интегрального признака Коши. Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда. Сравним $\int\limits_1^n \mathrm{f}(x)dx$ с частичной суммой S_n. Для этого разобьем промежуток $[1,n]$ на части натуральными точками $2,3,\ldots,n-1$, и на каждом из $n-1$ промежутков $[1,2],[2,3],\ldots,[i,i+1],\ldots,[n-1,n]$ оценим интеграл. В силу монотонности функции $\mathrm{f}(x)$ имеем неравенства

$$a_i = \mathrm{f}(i) \geqslant \mathrm{f}(x) \geqslant \mathrm{f}(i+1) = a_{i+1},$$

для $i = 1,2,\ldots,n-1$, при $x \in [i,i+1]$. Тогда

$$\int\limits_i^{i+1} a_i dx \geqslant \int\limits_i^{i+1} \mathrm{f}(x)dx \geqslant \int\limits_i^{i+1} a_{i+1}dx$$

для $i = 1,2,\ldots,n-1$. Так как a_i — константы, а $\int\limits_i^{i+1} dx = 1$, то имеем неравенства

$$a_1 \geqslant \int\limits_1^2 \mathrm{f}(x)dx \geqslant a_2,$$

$$a_2 \geqslant \int\limits_2^3 \mathrm{f}(x)dx \geqslant a_3,$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} \geqslant \int\limits_{n-1}^{n} \mathrm{f}(x)dx \geqslant a_n.$$

Складывая эти $(n-1)$ неравенства, получаем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geqslant \int\limits_1^2 \mathrm{f}(x)dx + \int\limits_2^3 \mathrm{f}(x)dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^{n} \mathrm{f}(x)dx \geqslant$$
$$\geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Следовательно,

$$S_{n-1} \geqslant \int\limits_1^n \mathrm{f}(x)dx \geqslant S_n - a_1. \qquad (5)$$

а) Если $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$ сходится, то, учитывая положительность функции $\mathrm{f}(x)$, получаем $S_n \leqslant a_1 + \int\limits_1^n \mathrm{f}(x)dx \leqslant a_1 + \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$. Поэтому последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху числом $a_1 + \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$, и по достаточному признаку сходимости рядов с положительными членами (п.8°) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, более того, получена оценка суммы ряда: $S \leqslant a_1 + \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$.

б) Если $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$ расходится, то $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \mathrm{f}(x)dx = +\infty$ для вещественного b, и, следовательно, для натурального n имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n \mathrm{f}(x)dx = +\infty$, так как $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в левой части неравенства (5), имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. По определению ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

Теорема доказана.

Замечание 1. Неравенство (5) имеет простой геометрический смысл (рис. 1):

$\int\limits_1^n \mathrm{f}(x)dx$ — площадь криволинейной трапеции.

$S_{n-1} = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ — суммарная площадь прямоугольников между верхней ступенчатой линией и горизонтальной осью.

$S_n-a_1 = a_2+a_3+\ldots+a_n$ — суммарная площадь прямоугольников между нижней ступенчатой линией и горизонтальной осью.

С геометрической точки зрения для убывающей функции $\mathrm{f}(x)$ неравенство (5) очевидно.

Замечание 2. ***Если условия теоремы п.13°*** ***имеют место для промежутка*** $[N, +\infty) \subset [1, +\infty)$***, то можно использовать интеграл*** $\int\limits_N^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$ ***вместо*** $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx$***.***

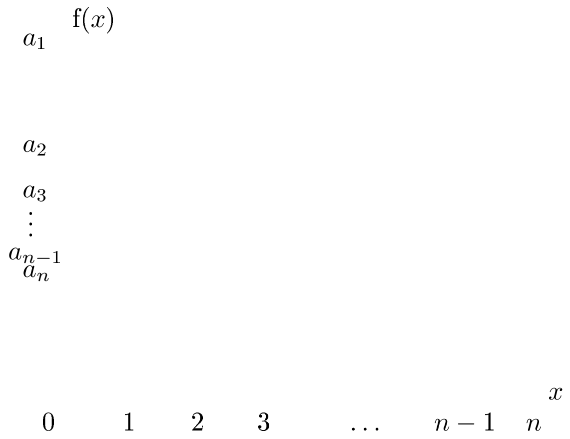

Рис. 1.

Действительно, по доказательству интегрального признака Коши это будет означать сходимость ряда $\sum\limits_{i=N}^{\infty} a_i$, являющегося остатком исходного ряда после $(N-1)$-го члена. А из этого, в свою очередь, согласно свойству остатка (п.3°) следует сходимость первоначального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Пример 19. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)\ln(i+1)}$.

В этом случае $a_i = \frac{1}{(i+1)\ln(i+1)}$. В качестве $\mathrm{f}(x)$ рассмотрим функцию $\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. При $x \geqslant 1$ для нее выполнены все условия интегрального признака Коши (п.13°). Вычислим интеграл, требуемый для исследования по интегральному признаку Коши:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{d\big(\ln(x+1)\big)}{\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big[\ln\big|\ln(x+1)\big|\Big]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \Big(\ln\big|\ln(A+1)\big| - \ln|\ln 2|\Big) = +\infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, и ряд расходится.

Пример 20. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)\ln^2(i+1)}$.

В этом случае $a_i = \frac{1}{(i+1)\ln^2(i+1)}$. В качестве $\mathrm{f}(x)$ примем функцию $\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. При $x \geqslant 1$ для нее выполнены все условия интегрального признака Коши (п.13°). Вычислим интеграл, требуемый для исследования по интегральному признаку Коши:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{d\big(\ln(x+1)\big)}{\ln^2(x+1)} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln(A+1)} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, и ряд сходится.

Пример 21. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, где $\alpha > 0$.

Выберем $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. При $\alpha > 0$ для нее выполнены все условия интегрального признака Коши (п.13°). Вычислим интеграл, требуемый для исследования по интегральному признаку Коши. При $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty.$$

В итоге имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

То есть $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ также сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Таким образом, стало ясным поведение обобщенного гармонического ряда при любых значениях степени α. По его сходимости часто определяют сходимость исследуемого ряда с помощью теоремы сравнения в предельной форме (п.10°), поскольку величину, эквивалентную общему члену исследуемого ряда, удобно выражать в виде степени.

Недостатком интегрального признака Коши является необходимость нахождения первообразной, которая может не выражаться в элементарных функциях.

§3. Знакочередующиеся ряды

Ряды вида

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots \tag{6}$$

или

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{7}$$

где $a_i > 0$, называются знакочередующимися. Очевидно, что различающиеся на постоянный множитель (-1) ряды (6) и (7) ведут себя одинаково, поэтому в дальнейшем будем исследовать ряд (7).

14°. **Признак Лейбница.** ***Дан знакочередующийся ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$***. Если*** a_i ***такие что*** $a_i \geqslant a_{i+1} > 0$ ***для любого*** $i \in \mathbb{N}$***, и*** $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$***, то ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i$ ***сходится.***

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм с четными номерами $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2k}, \ldots$ Эта последовательность монотонно возрастает, поскольку

$$S_{2k+2} = \underbrace{a_1 - a_2 + \ldots - a_{2k}}_{S_{2k}} + a_{2k+1} - a_{2k+2} =$$
$$= S_{2k} + \underbrace{a_{2k+1} - a_{2k+2}}_{\geqslant 0} \geqslant S_{2k}.$$

Отсюда следует, что что $S_{2k} \geqslant 0$, так как $S_{2k} \geqslant S_2 = a_1 - a_2 \geqslant 0$.

Эта же последовательность ограничена сверху. Действительно,

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} =$$
$$= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2k-2} - a_{2k-1})}_{\geqslant 0} - \underbrace{a_{2k}}_{>0} < a_1.$$

Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что она имеет конечный предел $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$. Докажем, что подпоследовательность частичных сумм с нечетными номерами $S_1, S_3, S_5, \ldots, S_{2k-1}, \ldots$ тоже имеет предел, равный S. Имеем

$$S_{2k+1} = \underbrace{a_1 - a_2 + \ldots - a_{2k}}_{S_{2k}} + a_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S,$$

поскольку оба предела в правой части существуют и конечны. Действительно $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$, а $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ по условию.

Из определения предела последовательности следует, что при бо́льших k точки числовой прямой, изображающие S_{2k} и S_{2k+1} $\big($т.е. все члены последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}\big)$, сгущаются около одной и той же точки S. Поэтому, независимо от четности или нечетности n, точки соответствующие S_n будут при бо́льших n сгущаться около точки S. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и конечен, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i$ сходится.

Замечание 1. При доказательстве теоремы установлено, что $0 \leqslant S_{2k} \leqslant a_1$, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $0 \leqslant S \leqslant a_1$. Таким образом, ***сумма ряда (7) неотрицательна и не превосходит первого члена.***

Замечание 2. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы, называется рядом типа Лейбница. Для такого ряда можно дать удобную оценку остатка.

Следствие (оценка остатка ряда типа Лейбница). Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + (-1)^n a_{n+1} + \ldots$$

— ряд типа Лейбница, тогда его остаток после n-го члена имеет вид

$$R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots = (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots].$$

Выражение в квадратных скобках — ряд типа Лейбница, поэтому по замечанию 1 его сумма $\tilde{R}_n$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \tilde{R}_n \leqslant a_{n+1}$. Тогда $|R_n| = \tilde{R}_n \leqslant a_{n+1}$. Отсюда следует, что ***остаток ряда типа Лейбница после n-го члена имеет знак первого отброшенного члена и не превосходит его по абсолютной величине.*** Так как $R_n = S - S_n$, то получаем оценку суммы всего ряда по его остатку после n-го члена

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1},$$

$$-a_{n+1} \leqslant S - S_n \leqslant a_{n+1},$$

$$S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1}.$$

Пример 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

Это знакочередующийся ряд. Очевидно, что $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$. Ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница (п.14°) и поэтому сходится.

Оценим сумму ряда, учитывая, что сумма ряда имеет знак первого отброшенного члена:

а) по остатку после первого члена

$$1 - \frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1 \Leftrightarrow 0{,}5 \leqslant S \leqslant 1;$$

б) по остатку после второго члена

$$1 - \frac{1}{2} \leqslant S \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0{,}5 \leqslant S \leqslant 0{,}833.$$

С каждым следующим шагом оценка получается точнее.

§4. Абсолютная и неабсолютная (условная) сходимость ряда

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого имеют произвольные знаки.

15°. **Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.** ***Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с членами произвольных знаков. Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.***

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Тогда, согласно критерию Коши (п.5°), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого номера $n > N$ и любого номера p выполняется неравенство

$$\big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|\big| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Так как модуль суммы не больше, чем сумма модулей, то

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Итак для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого номера $n > N$ и любого p выполняется неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится согласно критерию Коши (п.5°). Утверждение доказано.

Можно привести еще один вариант доказательства. Обозначим $b_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_n < 0, \end{cases}$ $c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \geqslant 0, \\ -a_n, & \text{если } a_n < 0. \end{cases}$ В этом случае $0 \leqslant b_n \leqslant |a_n|$ и $0 \leqslant c_n \leqslant |a_n|$, т.е. ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ положительные и мажорируемые сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. По первой теореме сравнения (п.9°) они сходятся. Кроме того $a_n = b_n - c_n$, и следовательно, по второму следствию свойства линейности (п.2°) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Признак доказан вторым способом.

Обратное не всегда верно. В примере 22 была доказана сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Ряд, составленный из абсолютных величин, имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, исследованный в примерах 6 и 21. Он расходится. Итак, сам ряд может сходиться, даже если ряд, составленный из абсолютных величин, расходится.

Определение. ***Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов. Если сам ряд сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится, то такой ряд называется неабсолютно сходящимся (или условно сходящимся).***

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — неабсолютно сходящийся.

Замечание. Независимо от того, как сходится ряд, абсолютно или неабсолютно, сходимость понимается, как и выше, в смысле определения из §1.

Докажем теоремы, позволяющие в некоторых случаях установить абсолютную сходимость ряда.

16°. **Признак Даламбера для знакопеременных рядов.** ***Пусть*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***— ряд с членами произвольных знаков*** $(a_n \neq 0)$***, и пусть*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$***. Тогда, если*** $l < 1$ ***, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится абсолютно, а если*** $l > 1$ ***или*** $l = +\infty$***, то расходится.***

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ и $l < 1$. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Для исследования его сходимости применим признак Даламбера (п.11°).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1.$$

Предел меньше единицы, и тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. Следовательно, по определению ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ и $l > 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, то, независимо от того конечный это предел или нет, найдется номер N такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Отсюда следует, что $|a_{n+1}| > |a_n|$. Последовательность

$\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ из положительных членов начиная с номера N возрастает и, следовательно, не может иметь предела равного нулю, значит и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Так как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не стремится к нулю, то этот ряд по достаточному признаку расходимости (п.7°) расходится.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Признак Даламбера для знакопеременных рядов не приносит информации о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. При этом ряд может как расходиться, так и сходиться, причем сходимость может быть как абсолютная, так и неабсолютная.

17°. **Признак Коши — Маклорена для знакопеременных рядов.** ***Пусть*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***— ряд с членами произвольных знаков, и пусть*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. ***Тогда, если*** $l < 1$ ***, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится абсолютно, а если*** $l > 1$ ***или*** $l = +\infty$***, то расходится.***

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ и $l < 1$. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Для исследования его сходимости применим признак Коши — Маклорена (п.12°). $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$. Предел меньше единицы, и тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Следовательно, по определению ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ и $l > 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, то независимо от того, конечный это предел или нет, найдется номер N такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Отсюда следует, что $|a_n| > 1$. Поэтому если последовательность $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, то он не меньше единицы и, следовательно, не равен нулю, значит и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Так как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не стремится к нулю, то этот ряд по достаточному признаку расходимости (п.7°) расходится.

Теорема доказана полностью.

Замечание. Признак Коши — Маклорена для знакопеременных рядов не приносит информации о сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ в случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. При этом ряд может как расходиться, так и сходиться, причем сходимость может быть как абсолютная, так и неабсолютная. В качестве примеров знакопеременных рядов, исследование которых с помощью признаков Даламбера и Коши — Маклорена бесполезно, формально подходят знакопостоянные ряды, обладающие тем же свойством, например обобщенные гармонические или ряд, рассмотренный в примере 16, а также любые знакопеременные, для которых указанные ряды являются рядами из абсолютных значений их членов (см. пример 22).

Кроме рассмотренных существуют и другие признаки для исследования сходимости как положительных так и знакопеременных рядов. Наиболее известные из них признаки Абеля и Дирихле ([8, *гл.* XI, §3, 372] или [5, *гл.* I, §2]).

Глава II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§5. Понятие о функциональном ряде

Определение. ***Пусть*** $\{\mathrm{u}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ***последовательность функций, заданных на множестве*** $\mathbb{X}$***. Выражение вида***

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \ldots + \mathrm{u}_n(x) + \ldots \quad ,$$

где $x \in \mathbb{X}$***, называется функциональным рядом.*** При $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{X}$, имеем числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x_0)$. Если этот ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда. ***Множество точек сходимости*** $\mathbb{X}_{\text{сх}}$ ***функционального ряда называется его областью сходимости.*** Очевидно, что $\mathbb{X}_{\text{сх}} \subset \mathbb{X}$.

По аналогии с числовыми рядами ***последовательность***

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{S}_1(x) = \mathrm{u}_1(x),\\
&\mathrm{S}_2(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x),\\
&\mathrm{S}_3(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \mathrm{u}_3(x),\\
&\qquad \ldots\\
&\mathrm{S}_n(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \mathrm{u}_3(x) + \ldots + \mathrm{u}_n(x),\\
&\qquad \ldots
\end{aligned}
$$

называется последовательностью частичных сумм ряда. В отличие от последовательности частичных сумм числового ряда, $\mathrm{S}_n(x)$ является не числовой последовательностью, а функциональной. Поэтому ее будем обозначать не курсивной буквой, а прямой. То же относится ко всем остальным величинам (сумме ряда, сумме остатка ряда). Из определения области сходимости следует, что для любого $x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$ существует конечный предел последовательности $\{\mathrm{S}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равный $\mathrm{S}(x)$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) = \mathrm{S}(x)$, если $x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$. Для сходящегося ряда его остаток после n-го члена сходится. Сумма остатка обозначается $\mathrm{R}_n(x) = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$. По свойству п.4° $\lim\limits_{n\to\infty} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = 0$. Это можно сформулировать так: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$ (области сходимости функционального ряда) существует такой номер N (вообще говоря разный для разных x), что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\big|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\big| < \varepsilon$, или $\big|\mathrm{R}_n(x)\big| < \varepsilon$. В некоторых случаях может существовать единый номер N для всех $x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$. Такие ряды будем рассматривать в следующем параграфе.

§6. Равномерная сходимость функционального ряда

Определение. ***Пусть ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***сходится при всех*** $x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$. ***Будем говорить, что ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***равномерно сходится на множестве*** $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}_{\text{сх}}$ ***, если для любого*** $\varepsilon > 0$ ***существует такое число*** N***, что для всех номеров*** $n > N$ ***и для любого*** $x \in \mathbb{E}$ ***выполняется неравенство*** $\big|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\big| < \varepsilon \Leftrightarrow \big|\mathrm{R}_n(x)\big| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что для равномерной сходимости номер N должен быть общим для всех $x \in \mathbb{E}$.

Отметим, что выполнение неравенств $\big|S(x) - S_n(x)\big| < \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow \big|R_n(x)\big| < \varepsilon$ одновременно для всех $x \in \mathbb{E}$ равносильно выполнению неравенств

$$\sup_{x\in\mathbb{E}}\big|S(x) - S_n(x)\big| < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{E}}\big|R_n(x)\big| < \varepsilon$$

соответственно.

Сопоставляя это замечание с определением предела последовательности, можно получить следующее утверждение.

18°. **Необходимый и достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда:** ***ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ ***равномерно сходится на множестве*** $\mathbb{E}$***, если*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{E}}\big|R_n(x)\big| = 0$**.**

Пример 23. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(x+i)(x+i+1)}$, где $x \in [0, +\infty)$.

Преобразуем общий член ряда

$$u_i(x) = \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{(x+i+1)-(x+i)}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+i+1}\,.$$

Найдем n-ю частичную сумму ряда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) =$$
$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\,.$$

Устремляя n к бесконечности, получим

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}\,.$$

Тогда

$$\big|\,R_n(x)\big| = \big|\,S(x) - S_n(x)\big| =$$
$$= \left|\frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right)\right| = \frac{1}{x+n+1}\,,$$

для любого $x \in [0,+\infty)$. В этом случае

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\mathrm{R}_n(x)\right| = \frac{1}{n+1}\,,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\mathrm{R}_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

По необходимому и достаточному признаку равномерной сходимости (п.18°) функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)}$ сходится на $[0,+\infty)$ равномерно.

Пример 24. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i(1-x)\,,$ где $x \in [0,1]$.

Преобразуем общий член ряда

$$\mathrm{u}_i(x) = x^i(1-x) = x^i - x^{i+1}.$$

Найдем n-ю частичную сумму ряда

$$\mathrm{S}_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \ldots + (x^n - x^{n+1}).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$S_n = x - x^{n+1}.$$

Тогда

$$\mathrm{S}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x - x^{n+1}) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1); \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

$$\left|\mathrm{R}_n(x)\right| = \left|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| =$$

$$= \begin{cases} \left|x - (x - x^{n+1})\right|, & \text{если } x \in [0,1); \\ |0-0|, & \text{если } x = 1. \end{cases} = \begin{cases} x^{n+1}, & \text{если } x \in [0,1); \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\mathrm{R}_n(x)\right| = 1$ и при $n \to \infty$ он не стремится к нулю. Следовательно, по необходимому и достаточному признаку равномерной сходимости (п.18°) исследуемый ряд сходится неравномерно. Отметим, что если сузить промежуток изменения x до $[0,a]$, где $0 < a < 1$, то на нем сходимость будет равномерной, так как $\sup\limits_{x\in[0,a]} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = a^{n+1}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,a]} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = \lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$.

Пример 25. $\quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

Этот ряд — сумма геометрической прогрессии рассмотренная в примерах 1 – 3. При $|x| < 1$ ряд сходится, при $|x| \geqslant 1$ расходится. Выясним вопрос о его равномерной сходимости. Сумма первых n членов геометрической прогрессии, первый член и знаменатель которой равны x, вычисляется по формуле $\mathrm{S}_n(x) = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$. А сумма всего ряда $\mathrm{S}(x) = \frac{x}{1-x}$. Очевидно, что абсолютная величина остатка

$$\big|\mathrm{R}_n(x)\big| = \big|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\big| = \left|\frac{x(1-x^n)}{1-x} - \frac{x}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|.$$

Тогда $\sup\limits_{x\in(-1,1)} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = +\infty$ и к нулю не стремится. Это означает, что на интервале $(-1,1)$ ряд сходится неравномерно. В то же время на любом промежутке $[a,b] \subset (-1,1)$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i$ сходится равномерно. Действительно,

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{\big(\max\{|a|,|b|\}\big)^{n+1}}{1-b},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = \lim_{n\to\infty} \frac{\big(\max\{|a|,|b|\}\big)^{n+1}}{1-b} = 0,$$

что по необходимому и достаточному признаку равномерной сходимости (п.18°) и означает равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i$ на любом промежутке $[a,b] \subset (-1,1)$.

Пример 26. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Чтобы воспользоваться результатами, полученными в примере 25, сделаем замену переменной $y = e^{-x}$. Теперь исследуемый ряд примет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n$, т.е. совпадает с рядом из примера 25. Следовательно, при $|y| \geqslant 1$ он расходится, при $|y| < 1$ сходится абсолютно, а при $|y| < r$, где $0 < r < 1$, сходится равномерно. Возвращаясь к переменной x, получим окончательный ответ: при $|e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow x > 0$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ сходится абсолютно, при $|e^{-x}| \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ расходится, а при $x \geqslant a$ для любого $a > 0$ сходится равномерно.

19°. **Критерий Коши равномерной сходимости ряда.** ***Для того чтобы ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***равномерно сходился на множестве*** $\mathbb{E}$***, необходимо и достаточно, чтобы для любого*** $\varepsilon > 0$ ***нашелся такой номер*** N***, что для всех номеров*** $n > N$ ***и любых*** $p \in \mathbb{N}$ ***для произвольного*** $x \in \mathbb{E}$ ***выполнялось неравенство***

$$\left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{E}$ к функции $\mathrm{S}(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого $n > N$ и для любого $x \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство $\left|\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что для любого p справедливо неравенство $\left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| = \left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}(x) - \big(\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)\big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}(x)\right| + \left|\mathrm{S}_n(x) - \mathrm{S}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

поскольку модуль разности не больше суммы модулей. Но

$$\left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| = \left|\mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \ldots + \mathrm{u}_n(x) + \mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x) - \mathrm{u}_1(x) - \mathrm{u}_2(x) - \ldots - \mathrm{u}_n(x)\right| =$$
$$= \left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right|.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех номеров $n > N$ и любых $p \in \mathbb{N}$ для произвольного $x \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство $\left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть для любых $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ существует номер N такой, что для любого номера $n > N$, любого $p \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство

$$\left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow \left|\mathrm{S}_{n+p}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| < \varepsilon_1. \quad (8)$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{E}$. В силу (8) по принципу сходимости Больцано — Коши для последовательностей [9, *гл.* III, §5, 52] существует конечный предел последовательности $\{\mathrm{S}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) = \mathrm{S}(x)$ для любого $x \in \mathbb{E}$. Переходя к пределу в неравенстве (8) при $p \to \infty$, получим $\left|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{E}$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любого номера $n > N$, любого $p \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство $\left|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}_n(x)\right| < \varepsilon$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{E}$.

Теорема доказана.

20°. **Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.** ***Дан функциональный ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$***, где*** $x \in \mathbb{E}$ ***, и существует сходящийся числовой ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ ***(называемый мажорантным рядом), такой, что для любого номера*** $n > N$ ***и любого*** $x \in \mathbb{E}$ ***справедливо неравенство*** $\left|\mathrm{u}_i(x)\right| \leqslant c_i$***. Тогда ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***сходится на множестве*** $\mathbb{E}$ ***равномерно и абсолютно.***

Доказательство. Согласно критерию Коши (п.5°) для сходящегося числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любого номера $n > N$ и для любого номера p справедливо неравенство

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}| < \varepsilon \Leftrightarrow c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$$

(модуль можно опустить, так как из условия следует, что $c_i \geqslant 0$). Поскольку модуль суммы не больше суммы модулей имеем неравенство

$$\begin{gathered}\left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\mathrm{u}_{n+1}(x)\right| + \left|\mathrm{u}_{n+2}(x)\right| + \ldots + \left|\mathrm{u}_{n+p}(x)\right| < c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon,\end{gathered}$$

верное для любого $x \in \mathbb{E}$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что для любого номера $n > N$, любого номера p и любого $x \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство

$$\left|\mathrm{u}_{n+1}(x) + \mathrm{u}_{n+2}(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Тогда по критерию Коши равномерной сходимости ряда (п.19°) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{E}$.

Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ следует из выполнения неравенства $\big| |\mathrm{u}_{n+1}(x)| + |\mathrm{u}_{n+2}(x)| + \ldots + |\mathrm{u}_{n+p}(x)| \big| < \varepsilon$ при тех же условиях на n, p и x по критерию Коши (п.19°). Более того, можно утверждать, что из последнего неравенства вытекает равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big|\mathrm{u}_i(x)\big|$. Такая сходимость называется абсолютно равномерной. Отметим еще, что если сходится числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{E}} \big|\mathrm{u}_i(x)\big|$, то тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ называется мажорируемым или нормально сходящимся (норма для вещественных чисел совпадает с модулем). В этом случае в качестве членов мажорантного ряда c_i можно взять $\sup\limits_{x\in\mathbb{E}} \big|\mathrm{u}_i(x)\big|$.

Пример 27. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

Так как множество значений синуса есть промежуток $[-1, 1]$, то $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. примеры 8 и 21), и следовательно, по признаку Вейерштрасса (п.20°) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно, равномерно и абсолютно равномерно на всей числовой оси.

Пример 28. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$.

Сначала отметим, что при $x < 0$ общий член ряда не стремится к нулю (более того, стремится к бесконечности), и, следовательно, по достаточному признаку расходимости (п.7°) ряд расходится. Теперь с помощью признака Вейерштрасса (п.20°) докажем, что при $x \geqslant 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ сходится равномерно (если этот ряд сходится при $x \geqslant 0$, то сходимость будет обязательно и абсолютная, так как он — ряд с положительными членами).

Найдем наибольшее значение функции $\mathrm{u}_n(x) = x^2 e^{-nx}$ при $x \geqslant 0$. Для этого вычислим производную

$$\mathrm{u}_n^{'}(x) = 2xe^{-nx} + x^2 e^{-nx}(-n) = xe^{-nx}(2 - nx).$$

При $x < \frac{2}{n}$ $\quad \mathrm{u}_n^{'}(x) > 0$ и $\mathrm{u}_n(x)$ возрастает. При $x > \frac{2}{n}$ $\quad \mathrm{u}_n^{'}(x) < 0$

и $\mathrm{u}_n(x)$ убывает. Следовательно, функция $\mathrm{u}_n(x) = x^2e^{-nx}$ имеет максимум в точке $x = \frac{2}{n}$, а так как она непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$, где этот экстремум единственный, то вместе с ним и наибольшее значение. А само наибольшее значение равно

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \mathrm{u}_n(x) = \mathrm{u}_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{4}{e^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ с точностью до постоянного множителя $\frac{4}{e^2}$ совпадает с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится (см. примеры 8 и 21). Следовательно, мажорантный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2}$ сходится. Это означает, что по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ сходится равномерно на промежутке $[0,+\infty)$.

Замечание. Мажорируемые ряды согласно признаку Вейерштрасса сходятся равномерно и абсолютно. Не следует думать, что эти два вида сходимости следуют один из другого. Сходятся абсолютно, но не равномерно ряды, рассмотренные в примерах 24 – 26. Любой ряд с положительными членами, если сходится, то абсолютно, но он может сходиться неравномерно. Приведем пример функционального ряда, сходящегося равномерно, но не абсолютно.

Пример 29. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$, где $x\in[0,+\infty)$.

Ряд из абсолютных значений членов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x+k}$ расходится. Действительно, его общий член при $k\to\infty$ эквивалентен $\frac{1}{k}$, так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{x+k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{x+k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{k}+1} = 1.$$

Следовательно, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме (п.10°), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x+k}$ имеет одинаковую сходимость с гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который расходится (см. примеры 6 и 21). Сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$ сходится по признаку Лейбница (п.14°) $\big($для любого $x \in [0,+\infty)$ он знакочередующийся, $a_k = \frac{1}{x+k} > \frac{1}{x+k+1} = a_{k+1} > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x+k} = 0\big)$. Докажем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. По следствию из теоремы Лейбница можно оценить остаток ряда

$$\big|\mathrm{R}_n(x)\big| \leqslant \big|\mathrm{u}_{n+1}(x)\big| = \frac{1}{x+n+1}\,,$$

если $x \in [0,+\infty)$. Поэтому $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| \leqslant \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \big|\frac{1}{x+n+1}\big| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ и $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| \geqslant 0$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \big|\mathrm{R}_n(x)\big| = 0$. Это и означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$ сходится на $[0,+\infty)$ равномерно.

Отметим еще, что существуют функциональные ряды, сходящиеся абсолютно и равномерно, но при этом не сходящиеся абсолютно равномерно, а также ряды сходящиеся абсолютно равномерно, но при этом не мажорируемые. Примеры таких рядов приведены в [5, *гл.* I, §4, 148, 149].

§7. Свойства равномерно сходящихся рядов

21°. **Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x)$ ***— сумма функционального ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$***, где*** $x \in \langle a,b\rangle$****. Пусть ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***сходится равномерно на промежутке*** $\langle a,b\rangle$ ***и функции*** $\mathrm{u}_i(x)$ ***непрерывны в*** $\langle a,b\rangle$***. Тогда функция*** $\mathrm{S}(x)$ ***непрерывна в*** $\langle a,b\rangle$***. То есть сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.***

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \langle a,b\rangle$ и докажем непрерывность функции $\mathrm{S}(x)$ в этой точке (определение непрерывности см. в [9, *гл.* IV, §1, 60]. Поскольку ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ сходится равномерно на $\langle a,b\rangle$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что для любого номера n, такого что $n > N$, и для любого

* Угловые скобки обозначают, что границы промежутка могут как принадлежать ему, так и нет.

$x \in \langle a, b\rangle$ справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{R}_n(x)\bigr| < \varepsilon/3$. В том числе оно верно при $x = x_0$: $\bigl|\mathrm{R}_n(x_0)\bigr| < \varepsilon/3$. Зафиксируем номер $n_0 > N$. Представим $\mathrm{S}(x)$ в виде $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}_{n_0}(x) + \mathrm{R}_{n_0}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\bigl|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(x_0)\bigr| = \bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) + \mathrm{R}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0) - \mathrm{R}_{n_0}(x_0)\bigr| \leqslant \\ \leqslant \bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0)\bigr| + \bigl|\mathrm{R}_{n_0}(x)\bigr| + \bigl|\mathrm{R}_{n_0}(x_0)\bigr| < \\ < \bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0)\bigr| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0)\bigr| + \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (9)\end{aligned}$$

Функция $\mathrm{S}_{n_0}(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \ldots + \mathrm{u}_{n_0}(x)$ непрерывна как сумма конечного числа непрерывных функций, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $\bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0)\bigr| < \varepsilon/3$. Тогда неравенство (9) можно переписать так:

$$\bigl|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(x_0)\bigr| = \bigl|\mathrm{S}_{n_0}(x) - \mathrm{S}_{n_0}(x_0)\bigr| + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при $|x - x_0| < \delta$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что для любых x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(x_0)\bigr| < \varepsilon$. Поэтому функция $\mathrm{S}(x)$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, и следовательно, во всем промежутке $\langle a, b\rangle$.

Из теоремы вытекает, что ***если сумма ряда разрывна на*** $\langle a, b\rangle$***, то на*** $\langle a, b\rangle$ ***ряд сходится неравномерно.***

Действительно, в противном случае, если бы ряд сходился равномерно, то по теореме о непрерывности суммы функционального ряда (п.21°) сумма ряда была бы непрерывна.

В примере 24 сумма ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i(1 - x)$ равна

$$\mathrm{S}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1); \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

т.е. разрывна. Отсюда следует, что на промежутке $[0, 1]$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i(1 - x)$ сходится неравномерно $\bigl($в примере 24 это было доказано на основе необходимого и достаточного признака равномерной сходимости (п.18°)$\bigr)$.

22°. **Теорема о почленном интегрировании функционального ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x)$ — ***сумма функционального ряда***

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$***, где*** $x \in [a,b]$. ***Ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***сходится равномерно на*** $[a,b]$ ***и функции*** $\mathrm{u}_i(x)$ ***непрерывны на*** $[a,b]$. ***Тогда для любого промежутка*** $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ ***справедливо равенство***

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{S}(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_i(x)dx,$$

т.е. равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно интегрировать почленно в любом промежутке входящим в интервал равномерной сходимости.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то по определению равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что для всех номеров $n > N$ и любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $\left|\mathrm{R}_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Зафиксируем $n > N$ и представим $\mathrm{S}(x)$ в следующем виде

$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}_n(x) + \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{u}_1(x) + \mathrm{u}_2(x) + \ldots + \mathrm{u}_n(x) + \mathrm{R}_n(x), \qquad (10)$$

причем $\left|\mathrm{R}_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Проинтегрировав равенство (10) по произвольному промежутку $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{S}(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_1(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_2(x)dx + \ldots + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_n(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{R}_n(x)dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_i(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{R}_n(x)dx. \qquad (11)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{R}_n(x)dx = 0$. Поскольку $\left|\mathrm{R}_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ для любого номера $n > N$, то

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{R}_n(x)dx \right| \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\mathrm{R}_n(x)\right| dx <$$
$$< \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\, x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\varepsilon}{b-a}(\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon, \quad \text{если } n > N.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{R}_n(x)dx = 0$. Переходя в равенстве (11) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{S}(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{u}_i(x)dx.$$

Теорема доказана.

23°. **Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x)$ ***— сумма функционального ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$***, где*** $x \in [a,b]$***,*** $\mathrm{G}(x)$ ***— сумма функционального ряда*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i^{'}(x)$***, где*** $x \in [a,b]$***. Ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)$ ***сходится на*** $[a,b]$***, ряд*** $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i^{'}(x)$ ***сходится равномерно в*** $[a,b]$***, и функции*** $\mathrm{u}_i^{'}(x)$ ***непрерывны на*** $[a,b]$***. Тогда справедливо равенство***

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x)\right)^{'} = \mathrm{S}^{'}(x) = \mathrm{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i^{'}(x)$$

для любого $x \in (a,b)$***.***

То есть функциональный ряд можно дифференцировать почленно, если производные членов ряда непрерывны, и ряд, составленный из производных, сходится равномерно.

Доказательство.

Поскольку $\mathrm{u}_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ непрерывны в $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(t)$ сходится равномерно в $[a,b]$ то, по теореме о почленном интегрировании функционального ряда (п.22°), ряд $\mathrm{G}(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(t)$ можно интегрировать почленно в любом промежутке $[a,x] \subset [a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{x} \mathrm{G}(t)dt = \int\limits_{a}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i^{'}(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{a}^{x} \mathrm{u}_i^{'}(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(t)\Big|_{a}^{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \big(\mathrm{u}_i(x) - \mathrm{u}_i(a)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{u}_i(a) = \mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(a).$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$\left(\int_a^x \mathrm{G}(t)dt\right)_x' = \big(\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(a)\big)_x' = \mathrm{S}'(x) - 0 = \mathrm{S}'(x).$$

Вместе с тем, по теореме Барроу ([9], *гл.* XI, §2, 183)

$$\left(\int_a^x \mathrm{G}(t)dt\right)_x' = \mathrm{G}(x).$$

А это означает, что $\mathrm{G}(x) = \mathrm{S}'(x)$.

Глава III

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§8. Область сходимости степенного ряда

Определение. ***Ряд вида***

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где x, a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ ***— вещественные числа, называется степенным рядом, а*** a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ ***— его коэффициентами.*** Степенной ряд — частный случай функционального ряда.

Очевидно, что при $x = 0$ этот ряд сходится и его сумма равна a_0, поскольку все его члены, кроме первого равны нулю. Следующие теоремы будут посвящены исследованию области сходимости степенного ряда.

24°. **Первая лемма Абеля.** ***Если степенной ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***сходится при*** $x = x_0$***, то он сходится абсолютно при любом*** x***, удовлетворяющем неравенству*** $|x| < |x_0|$***.***

Доказательство. То что степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится при $x = x_0$, означает, что сходится числовой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$. Отсюда, по необходимому признаку сходимости (п.6°) следует, что его общий член стремится к нулю, и следовательно, ограничен [9, *гл.* III, §2, 36]. То есть существует такое число M, что выполняется неравенство $\left|a_i x_0^i\right| < M$ для любого номера i. Рассмотрим теперь степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ при $|x| < |x_0|$. При таких x для абсолютной величины общего члена такого ряда справедлива оценка

$$\left|a_i x^i\right| = \left|a_i x_0^i \left(\frac{x}{x_0}\right)^i\right| = \left|a_i x_0^i\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^i < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^i .$$

А так как $|x| < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^i$ сходится как сумма геометрической прогрессии со знаменателем, по модулю меньшим единицы (пример 3). Тогда, по первой теореме сравнения рядов с положительными членами (п.9°), сходится и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left|a_i x^i\right|$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится абсолютно при $|x| < |x_0|$.

Замечание. В первой лемме Абеля установлено, что ***если ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***сходится при*** $x = x_0$***, то он сходится абсолютно в интервале*** $\big(-|x_0|, |x_0|\big)$**.**

Следствие. ***Если степенной ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***расходится в точке*** $\tilde{x} \neq 0$***, то он расходится в любой точке*** x***, удовлетворяющей неравенству*** $|x| > |\tilde{x}|$**.**

Доказательство проведем методом "от противного". Пусть ряд сходится в некоторой точке x, для которой справедливо неравенство $|x| > |\tilde{x}|$. Тогда, по первой лемме Абеля (п.24°), он сходится в точке $|\tilde{x}|$, что неверно по условию. Следовательно, в любой точке x, для которой справедливо неравенство $|x| > |\tilde{x}|$, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ расходится.

25°. **Теорема о структуре области сходимости степенного ряда.** ***Для любого степенного ряда*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***существует такое*** $R \geqslant 0$ ***(в частности*** R ***может равняться*** $+\infty$***), что ряд сходится абсолютно при*** $|x| < R$ ***и расходится при*** $|x| > R$ **.**

Доказательство. Было показано, что степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится в точке $x = 0$. Если это единственная точка сходимости ряда, то положим $R = 0$, тогда точек, где $|x| < 0$, нет, а во всех точках, где $|x| > 0$, ряд расходится.

Если ряд сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то составим множество $\mathbb{X}_{\text{сх}}$ таких x, при которых ряд сходится. Если это множество не ограничено, то в качестве R можно выбрать $+\infty$. Это будет означать, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится в любой точке $x \quad \big(|x| < +\infty\big)$. Действительно, для любого x в неограниченном множестве $\mathbb{X}_{\text{сх}}$ найдется точка $x_{\text{сх}}$, превосходящая x по модулю $\big(|x_{\text{сх}}| > |x|\big)$, в которой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится. Тогда, по первой лемме Абеля (п.24°), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ будет сходиться и в точке x.

Если множество $\mathbb{X}_{\text{сх}}$ ограничено, то в качестве R можно выбрать $\sup\limits_{x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}} |x|$. Действительно, если $|x| > R$, то $x \notin \mathbb{X}_{\text{сх}}$, и при таких x ряд расходится. А если $|x| < R$, то, так как $R = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}} |x|$, найдется такое число $x_1 \in \mathbb{X}_{\text{сх}}$, что $|x| < |x_1|$ $\big($иначе $|x|$ было бы точной верхней границей множества $\big\{|x| \big| x \in \mathbb{X}_{\text{сх}}\big\}$, что не так$\big)$, и из сходимости ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ в точке x_1 по первой лемме Абеля (п.24°) будет вытекать абсолютная сходимость ряда в точке x.

Теорема доказана.

Определение. ***Число*** $R > 0$***, такое что степенной ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***сходится абсолютно при*** $|x| < R$ ***и расходится при*** $|x| > R$***, называется радиусом сходимости степенного ряда. Если ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***сходится только в одной точке*** $x = 0$***, то радиусом сходимости будем считать число нуль, а если*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ***сходится во всех точках числовой прямой, будем говорить, что*** $R = +\infty$ ***.***

В теореме о структуре области сходимости степенного ряда (п.25°) установлено, что такое R существует для любого степенного ряда. Область сходимости степенного ряда представляет собой собой сплошной промежуток $\langle -R, R\rangle$ (он может вырождаться в точку или совпадать со всей числовой осью). В открытом промежутке $(-R, R)$ степенной ряд сходится абсолютно, во всех точках объединения $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ расходится, а на их границах, т.е.

в точках $x = \pm R$, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ может как сходиться (причем как абсолютно, так и неабсолютно!), так и расходиться (рис. 2).

расходится $\overset{?}{\cdot}$ **сходится абсолютно** $\overset{?}{\cdot}$ **расходится**

$-R$ $\quad$ 0 $\quad$ R $\quad\quad$ x

Рис. 2.

Изученный степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ является степенным рядом по степеням x. ***Ряд***

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

также называется степенным рядом, но по степеням $(x-x_0)$***.*** Сделав замену переменной $y = x - x_0$, получим ряд по степеням y. Для ряда по степеням y существует радиус сходимости R, т.е. ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} y^i$ сходится абсолютно при $|y| < R$ и расходится при $|y| > R$. Отсюда следует, что исходный ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ сходится абсолютно при $|x - x_0| < R \Leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$ и расходится при $|x - x_0| > R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_0 - R, \\ x > x_0 + R \end{array}\right.$. Таким образом, область сходимости ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$ — симметричный относительно точки x_0 промежуток $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$, т.е. интервал сходимости смещается по числовой оси на величину x_0 вправо. Внутри промежутка сходимость абсолютная, а на концах промежутка может быть как сходимость (абсолютная или неабсолютная), так и расходимость.

Следующие теоремы дают удобные формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

26°. **Формула для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.** ***Дан степенной ряд*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ***и существует конечный или нет предел*** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$***, тогда этот предел равен радиусу сходимости степенного ряда.***

Доказательство. При $x = x_0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно. Для случая $x \neq x_0$ применим признак Даламбера для знакопеременных рядов (п.16°)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| = \frac{|x - x_0|}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если } R = 0; \\ \frac{|x-x_0|}{R}, & \text{если } 0 < R < +\infty; \\ 0, & \text{если } R = +\infty. \end{cases}$$

Итак, если $R = 0$, то при $x \neq x_0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ расходится; если R конечно и отлично от нуля, то при $\frac{|x-x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$ ряд сходится абсолютно, при $\frac{|x-x_0|}{R} > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_0 - R, \\ x > x_0 + R \end{array} \right.$ расходится; наконец, если $R = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно при любых значениях x. Это означает, что R — действительно радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

27°. **Теорема Коши — Адамара.** ***Дан степенной ряд*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ***и существует конечный или нет предел*** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$***, тогда этот предел равен радиусу сходимости степенного ряда.***

Доказательство. При $x = x_0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно. Для случая $x \neq x_0$ применим признак Коши — Маклорена для знакопеременных рядов (п.17°)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \frac{|x - x_0|}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если } R = 0; \\ \frac{|x-x_0|}{R}, & \text{если } 0 < R < +\infty; \\ 0, & \text{если } R = +\infty. \end{cases}$$

Итак, если $R = 0$, то при $x \neq x_0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ расходится; если R конечно и отлично от нуля, то при $\frac{|x-x_0|}{R} < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$ ряд сходится абсолютно, при $\frac{|x-x_0|}{R} > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_0 - R \\ x > x_0 + R \end{array}\right.$ расходится; и наконец, если $R = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно при любых значениях x. Это означает, что R — действительно радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Из теорем следует, что радиус сходимости можно вычислить по формулам $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (если эти пределы существуют). Если эти пределы не существуют, то это не означает, что радиуса сходимости нет, поскольку он существует всегда согласно теореме о структуре области сходимости степенного ряда (п.25°). В этих случаях радиус сходимости следует вычислять другими способами.

Пример 30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Этот ряд был подробно исследован в примере 25. Согласно сделанным выводам, при $|x| < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится абсолютно, а при при $|x| \geqslant 1$ расходится. Это означает, что радиус сходимости этого ряда равен единице. Убедимся, что формулы, выведенные для вычисления R, дают тот же результат. Для этого ряда $a_n = 1$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1.$$

Пример 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

В этом случае $a_n = \frac{1}{n}$. Вычислим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Как уже было отмечено, знание радиуса сходимости R не дает полной картины об области сходимости степенного ряда. Необходимо еще исследовать сходимость ряда в точках $x = -R = -1$ и $x = R = 1$. Для этого надо исследовать два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Первый из них сходится неабсолютно по признаку Лейбница (п.14°, пример 22), а второй расходится (см. примеры 6 и 21). Итак, исследуемый ряд сходится при $x \in [-1, 1)$, абсолютно сходится при $x \in (-1, 1)$ и расходится при $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Пример 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

В этом случае $a_n = \frac{1}{n^2}$. Вычислим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Теперь исследуем сходимость ряда в точках $x = -R = -1$ и $x = R = 1$. Для этого надо исследовать два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Второй из этих рядов представляет собой ряд из абсолютных величин первого и он сходится (см. примеры 8 и 21). Это означает, что в точках $x = -1$ и $x = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится абсолютно. Итак, исследуемый ряд сходится абсолютно сходится при $x \in [-1, 1]$ и расходится при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Примеры 30 – 32 показывают, что в точках $x = -R$ и $x = R$ сходимость степенного ряда никак не связана между собой и может оказаться произвольной.

Пример 33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$.

В этом случае $a_n = n!$. Вычислим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Радиус сходимости равен нулю. Это означает, что степенной ряд сходится только в одной точке $x = 2$, в центре интервала сходимости. Итак, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ сходится абсолютно при $x \in \{2\}$ и расходится при $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Пример 34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

В этом случае $a_n = \frac{1}{n!}$. Вычислим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Радиус сходимости равен бесконечности. Это означает, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится абсолютно на всей числовой оси, т.е. при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

В этом случае $a_n = n^n$. Для вычисления радиуса сходимости удобно использовать теорему Коши — Адамара (п.27°):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Радиус сходимости равен нулю. Это означает, что степенной ряд сходится только в одной точке $x = 0$, в центре интервала сходимости. Итак, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ сходится абсолютно при $x \in \{0\}$ и расходится при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Пример 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + 0x^2 + \frac{x^3}{3} + 0x^4 + \frac{x^5}{5} + \dots$

В этом случае $a_n = 0$ при четных n и $a_n = \frac{1}{n}$ при нечетных n. Поскольку a_n бывает равно нулю, то нельзя составить отношение $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ не существует.

Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ признак Даламбера для знакопеременных рядов (п.16°):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\right|}{\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)|x|^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = x^2.$$

Если $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, то по признаку Даламбера для знакопеременных рядов ряд сходится. Если $x^2 > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ расходится. Следовательно, $R = 1$. Теперь исследуем сходимость ряда при $x = \pm 1$. В этом случае имеем ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}$. Эти ряды различаются лишь знаком, так как $(-1)^2 = 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

и по признаку сравнения в предельной форме (п.10°) он имеет одинаковую сходимость с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (см. примеры 6 и 21). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n-1}$ также расходится. Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ при $x \in (-1, 1)$ сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ расходится.

§9. Теоремы о непрерывности суммы и почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов

28°. **Вторая лемма Абеля.** ***Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом промежутке, принадлежащем интервалу сходимости.***

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ — степенной ряд, и R — его радиус сходимости. Возьмем произвольный замкнутый промежуток $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$. Обозначим $r = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Так как $r < R$, то при $x = r$ степенной ряд сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| r^i$. Если $x \in [-r, r]$, то общий член ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ можно оценить так $\left|a_i x^i\right| \leqslant |a_i| r^i$. Тогда, по признаку Вейерштрасса (п.20°), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится абсолютно и равномерно на $[-r, r]$ и, следовательно, на сегменте $[\alpha, \beta] \subset [-r, r]$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы был использован признак Вейерштрасса, а это означает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится на $[\alpha, \beta]$

не только равномерно, но также и абсолютно равномерно и даже является мажорируемым.

29°. **Теорема о непрерывности суммы степенного ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad x \in (-R, R)$***, где*** R ***— радиус сходимости степенного ряда*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$***. Тогда функция*** $\mathrm{S}(x)$ ***непрерывна на*** $(-R, R)$***.***

Доказательство. Для доказательства непрерывности функции $\mathrm{S}(x)$ в $(-R, R)$ необходимо согласно определению функции непрерывной на промежутке [9, *гл.* IV , §1, 60], показать ее непрерывность в произвольной точке $x_0 \in (-R, R)$. Так как x_0 — внутренняя точка промежутка $(-R, R)$, то существует некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$, содержащий точку x_0 и содержащийся в $(-R, R)$. На этом промежутке $[\alpha, \beta]$ степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится равномерно по второй лемме Абеля (п.28°), и поскольку члены ряда $a_i x^i$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ непрерывны, то по общей теореме о непрерывности суммы функционального ряда (п.21°), сумма степенного ряда $\mathrm{S}(x)$ непрерывна в точке x_0 и, следовательно, на всем промежутке $(-R, R)$. Теорема доказана.

30°. **Теорема о почленном интегрировании степенного ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad x \in (-R, R)$***, где*** R ***— радиус сходимости степенного ряда*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$***. Тогда ряд можно почленно интегрировать в любом промежутке*** $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$***, т.е. справедлива формула***

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{S}(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_i x^i dx.$$

Доказательство. Поскольку $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, то по второй лемме Абеля (п.28°) ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ сходится равномерно в $[\alpha, \beta]$. Его члены, т.е. функции $\mathrm{u}_i(x) = a_i x^i$ непрерывны. Тогда, по общей теореме о почленном интегрировании функционального ряда (п.22°), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ можно интегрировать почленно в $[\alpha, \beta]$. Следовательно, справедлива формула $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{S}(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_i x^i dx$. Теорема доказана.

Следствие. ***Ряд составленный из первообразных*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$***, имеет радиус сходимости не меньший, чем исходный ряд*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$***.***

Доказательство. Возьмем произвольное $x_0 \in (-R, R)$ и найдем r, такое что $|x_0| < r < R$. Тогда, по доказанной теореме, ряд можно почленно интегрировать по сегменту $[0, r]$, который лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$. Получим равенство $\int\limits_0^r \mathrm{S}(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \int\limits_0^r x^i dx = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \frac{r^{i+1}}{i+1}$. Этот ряд сходится. Следовательно, по первой лемме Абеля (п.24°), ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$ сходится абсолютно при $x = x_0$. А так как x_0 было произвольное число из интервала $(-R, R)$, то это означает, что радиус сходимости не уменьшился.

31°. **Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда.** ***Пусть*** $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad x \in (-R, R)$***, где*** R ***— радиус сходимости степенного ряда*** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$***. Тогда ряд можно почленно дифференцировать, т.е. при*** $x \in (-R, R)$ ***справедлива формула***

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i x^i)'.$$

Доказательство. Для использования общей теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда (п.23°) необходимо выполнение следующих условий:

а) непрерывность функций $\mathrm{u}_i(x) = a_i x^i$ и их производных $\mathrm{u}_i'(x) = \left(a_i x^i\right)' = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0, \\ i a_i x^{i-1}, & \text{если } i > 0, \end{cases}$ и

б) равномерная сходимость ряда из производных $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ в каком-нибудь сегменте, содержащем внутри себя точку x.

Условие а) справедливо, поскольку функции $\mathrm{u}_i(x)$ и $\mathrm{u}_i'(x)$ — полиномы. Докажем условие б).

Выберем числа r_0 и r, такие что $|x| < r_0 < r < R$. Тогда

$x \in [-r_0, r_0]$. Поскольку $r < R$, то степенной ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ при $x = r$ сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| r^i$. Следовательно, по необходимому признаку сходимости ряда (п.6°), его общий член стремится к нулю, что означает его ограниченность, т.е. существование такого числа L, что при любом $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|a_i| r^i < L$. Теперь при любом $x \in (-r_0, r_0)$ и $i > 0$ члены ряда составленного из производных можно оценить так:

$$\left|\mathrm{u}_i'(x)\right| = \left|i a_i x^{i-1}\right| \leqslant i|a_i| r_0^{i-1} = i|a_i| \left(\frac{r_0}{r}\right)^{i-1} r^{i-1} =$$
$$= |a_i| r^i \frac{1}{r} i \left(\frac{r_0}{r}\right)^{i-1} \leqslant L \frac{1}{r} i \left(\frac{r_0}{r}\right)^{i-1} = L \frac{1}{r} i q^{i-1},$$

где $q = \frac{r_0}{r} < 1$. Докажем сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i q^{i-1}$. По признаку Даламбера (п.11°) имеем:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{(i+1)q^i}{i q^{i-1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i+1}{i} q = q < 1.$$

Поскольку этот предел меньше единицы, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i q^{i-1}$ сходится, а так как умножение всех членов ряда на число отличное от нуля не изменяет его сходимости (первое следствие свойства линейности (п.2°)), то сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{L}{r} i q^{i-1}$. Тогда, по признаку Вейерштрасса (п.20°), ряд, составленный из производных $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$, сходится равномерно на $[-r_0, r_0]$. Отсюда следует справедливость формулы

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} a_i i x^{i-1}.$$

Следствие. В процессе доказательства теоремы установлено, что если $x \in (-R, R)$, то ряд из производных $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i i x^{i-1}$ сходится. Иначе говоря, ***при почленном дифференцировании радиус сходимости не уменьшается.***

Итак, радиус сходимости не уменьшается при интегрировании и дифференцировании степенных рядов. А поскольку эти операции взаимно обратные, то это означает, что ***при интегрировании и дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не изменяется.*** Действительно, если есть два степенных ряда, получаемых друг из друга дифференцированием и интегрированием и если $R^{'}$ — радиус сходимости одного из рядов, а $R^{''}$ — другого, то одновременно $R^{'} \leqslant R^{''}$ и $R^{'} \geqslant R^{''}$, что означает равенство $R^{'} = R^{''}$.

Пример 37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

В подробно исследованном в примерах 1 – 3, 25 и 30 ряде

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{12}$$

сделаем замену переменной $t = -x$. Получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\,,$$

который сходится при $|x| = |-t| < 1 \Leftrightarrow t \in (-1, 1)$. Его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \frac{1}{1+t}\,.$$

Интегрируя этот ряд в промежутке $[0, x] \subset (-1, 1)$, получим:

$$\int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t}\,,$$

$$\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots\right)\Bigg|_0^x = \ln(1+t)\Bigg|_0^x,$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \ln(1+x)\,,$$

где $x \in (-1, 1)$, так как радиус сходимости при интегрировании ряда не изменился, и следовательно, остался равен единице. Заметим, что при $x = 1$ ряд сходится по признаку Лейбница (п.14°, пример 22, доказательство того, что при $x = 1$ его сумма равна $\ln 2$ будет приведено в §10), а при $x = -1$ это гармонический ряд (см. примеры 6 и 21), который расходится. Таким образом, область сходимости этого ряда $(-1, 1]$.

Пример 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

Как и в предыдущем случае, возьмем изученный ранее ряд (12), и сделаем замену $x = -t^2$. Получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots\,,$$

который сходится при $|x| = |-t^2| < 1 \Leftrightarrow t \in (-1, 1)$. Его сумма равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

Проинтегрируем полученный степенной ряд в промежутке $[0, x] \subset (-1, 1)$:

$$\int\limits_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots\right)\Bigg|_0^x = \operatorname{arctg} t\Bigg|_0^x,$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \operatorname{arctg} x,$$

где $x \in (-1, 1)$, так как радиус сходимости при замене переменной и интегрировании не изменился и, следовательно, остался равным единице. Заметим, что при $x = \pm 1$ ряд сходится по признаку Лейбница (п.14°). В [8 *гл.* XI, §7, 392] показано, что при $x = \pm 1$ его сумма равна $\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}$. Таким образом, область сходимости этого ряда $[-1, 1]$.

§10. Разложение функции в степенной ряд

Определение. ***Будем говорить, что функция*** $\mathrm{f}(x)$ ***представима в точке*** x ***в виде степенного ряда по степеням*** $(x - x_0)$***, если существует степенной ряд*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$***, сходящийся в***

точке x***, сумма которого равна*** $\mathrm{f}(x)$. В этом параграфе будем изучать условия разложимости функции в степенной ряд.

Определение. ***Если функция*** $\mathrm{f}(x)$ ***имеет в окрестности точки*** x_0 ***производные всех порядков, то ряд вида***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{\mathrm{f}'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots,$$

где нулевой производной считается сама функция, называется рядом Тейлора функции $\mathrm{f}(x)$. Название сохраняется независимо от того, сходится данный ряд или нет.

32°. **Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд.** ***Если функция*** $\mathrm{f}(x)$ ***представима в виде степенного ряда*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ***во всех точках*** $x \in (\alpha, \beta)$***, где*** $x_0 \in (\alpha, \beta)$***, то это разложение единственно, и этим рядом является ее ряд Тейлора, т.е. коэффициенты ряда*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ***равны*** $a_n = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Доказательство. Пусть функция $\mathrm{f}(x)$ представима в окрестности точки x_0 в виде степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, т.е. при $x \in (\alpha, \beta)$ этот ряд сходится к порождающей его функции:

$$\mathrm{f}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots,$$

где $x \in (\alpha, \beta)$. Полагая в этом равенстве $x = x_0$, получим $a_0 = \mathrm{f}(x_0)$. Поскольку внутри интервала сходимости (промежуток (α, β) является его частью) ряд можно дифференцировать почленно, то

$$\mathrm{f}'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots$$

Полагая $x = x_0$, находим $a_1 = \mathrm{f}'(x_0)$. Дифференцируя этот ряд в интервале (α, β), получим $\mathrm{f}''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-x_0) + \ldots$ Полагая $x = x_0$, находим коэффициент $a_2 = \frac{\mathrm{f}''(x_0)}{2!}$. Продолжая этот процесс, найдем все коэффициенты $a_n = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}$. Теорема доказана.

В примере 38 получено разложение функции $\operatorname{arctg} x$ по степеням x в интервале $(-1,1)$.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

То есть $a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}}{n}, & \text{если } n = 2k-1; \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$ Из доказательства теоремы следует, что $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Поэтому

$$\operatorname{arctg}^{(n)}(0) = n!a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}n!}{n}, & \text{если } n = 2k-1; \\ 0, & \text{если } n = 2k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k-1}(n-1)!, & \text{если } n = 2k-1; \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, зная разложение функции в степенной ряд по степеням $(x-x_0)$, можно определить значения производных этой функции в точке x_0.

Будем исследовать достаточные условия разложимости функции в степенной ряд. Докажем формулу Тейлора.

33°. **Формула Тейлора.** ***Пусть функция*** $f(x)$ ***имеет в промежутке*** $\langle\alpha,\beta\rangle$ ***производные всех порядков. Тогда для любых*** $x_0, x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ ***существует точка*** c***, принадлежащая отрезку, определяемому точками*** x_0 ***и*** x***, такая что справедливо равенство***

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$. По формуле Ньютона — Лейбница [7, *гл.* XI, §4] $\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$, тогда

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt. \qquad (13)$$

По формуле интегрирования по частям $\left(\int \mathrm{u}\, d\mathrm{v} = \mathrm{u}\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\, d\mathrm{u}\right)$ [9, *гл.* X, §1, 162], полагая $\mathrm{u} = \mathrm{f}'(t)$, $d\mathrm{v} = d(x-t)$, получим

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}'(t)d(x-t) = -\left(\mathrm{f}'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}''(t)(x-t)dt\right) =$$

$$= \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}''(t)(x-t)dt.$$

Тогда формула (13) примет вид

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}''(t)(x-t)dt. \qquad (14)$$

Интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{f}''(x-t)dt$ находим с помощью интегрирования по частям, полагая $\mathrm{u} = \mathrm{f}''(t)$, $d\mathrm{v} = (x-t)dt$, тогда формула (14) примет вид

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}'''(t)(x-t)^2 dt.$$

Продолжая этот процесс, получим формулу

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \qquad (15)$$

Обозначим $\mathrm{r}_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{f}^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ и преобразуем этот интеграл. На основании обобщенной теоремы о среднем [9, *гл.* XI, §2, 182], существует точка $c \in [x_0, x]$ $\big($или $[x, x_0]$, если $x < x_0\big)$, такая что

$$\mathrm{r}_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{f}^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(c)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt =$$

$$= \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(c)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Тогда формулу (15) можно переписать в виде

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}^{'}(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Утверждение доказано.

Замечание. Формула Тейлора позволяет заменить значение функции в точке x значением многочлена по степеням $(x - x_0)$. При этом погрешность вычисления равна $\mathrm{r}_n(x)$.

34°. **Теорема о сходимости ряда Тейлора к исходной функции.** ***Для того чтобы функцию*** $\mathrm{f}(x)$ ***можно было разложить в точке*** $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$ ***в степенной ряд по степеням*** $(x - x_0)$ $\big(x_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle\big)$***, необходимо и достаточно, чтобы она имела производные всех порядков в*** $\langle\alpha, \beta\rangle$ ***и остаточный член в формуле Тейлора*** $\mathrm{r}_n(x)$ ***стремился к нулю при*** $n \to \infty$***.***

Доказательство. Если функция $\mathrm{f}(x)$ имеет производные всех порядков, то справедлива формула Тейлора (п.33°)

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}^{'}(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathrm{r}_n(x).$$

Первые $(n + 1)$ слагаемых представляют собой частичную сумму ряда Тейлора $\mathrm{S}_n(x)$. То есть $\mathrm{f}(x) = \mathrm{S}_n(x) + \mathrm{r}_n(x)$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) = \mathrm{f}(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{r}_n(x) = 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{r}_n(x) \neq 0$, и ряд Тейлора сходится, то не к функции $\mathrm{f}(x)$.

35°. **Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд .** ***Для того чтобы функцию*** $\mathrm{f}(x)$ ***можно было разложить во всех точках промежутка*** $\langle\alpha, \beta\rangle$ ***(где*** $x_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$***)***

в степенной ряд достаточно, чтобы она имела производные всех порядков и существовала константа M такая, что $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$ для любого $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и любого $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$, т.е. чтобы производные всех порядков были равномерно ограничены на промежутке $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Доказательство. По теореме о сходимости ряда Тейлора к исходной функции (п.34°) для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в ряд по степеням $x - x_0$, достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора $r_n(x)$ стремился к нулю при $n \to \infty$. По доказанному выше остаточный член формулы Тейлора (п.33°) имеет вид $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $c \in [x_0, x]$ $\big($или $[x, x_0]$, если $x < x_0\big)$ и, следовательно, $c \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Для него справедлива оценка

$$\left|r_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \leqslant \frac{M(\beta - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\big($поскольку $|x - x_0| \leqslant \beta - \alpha\big)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (см. пример 14), следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ для любого $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$. По изложенному в п.34° функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд в любой точке $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Требуемое утверждение доказано.

С помощью интегрирования геометрической прогрессии в примере 37 было получено разложение в ряд функции

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

при $x \in (-1, 1)$. По признаку Лейбница (п.14°) этот ряд сходится при $x = 1$. Докажем, что функция $f(x) = \ln(1 + x)$ представима в виде ряда и при $x = 1$. С помощью многократного дифференцирования можно получить, что $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Это означает, что остаточный член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n n! x^{n+1}}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}$$

$$r_n(1) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+c)^{n+1}}$$

$$\left|r_n(1)\right| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}\,,$$

так как в этом случае $c \in [0,1]$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{r}_n(1) = 0$. По теореме о сходимости ряда Тейлора к исходной функции (п.34°) $\ln(1+x)$ может быть представлен в виде ряда в точке $x = 1$, т.е. в промежутке $(-1,1]$. Таким образом, получена сумма числового ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots = \ln 2.$$

В примере 38 было получено разложение в степенной ряд функции

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

при $x \in (-1,1)$. По признаку Лейбница (п.14°) этот ряд сходится при $x = \pm 1$. В [8, *гл.* XI, §7, 392] доказано, что функция $\operatorname{arctg} x$ представима в виде ряда и в этих точках. Таким образом,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Разложим еще несколько функций в ряды по степеням x ($x_0 = 0$).

Пример 39. $\mathrm{f}(x) = e^x$.

Так как $\left(e^x\right)' = e^x$, то $\mathrm{f}^{(n)}(x) = e^x$ для любого n. Поскольку e^x — функция положительная и возрастающая, то $\left|\mathrm{f}^{(n)}(x)\right| \leqslant e^R$, если $x \in [-R,R]$. Следовательно, функция e^x представима в виде степенного ряда на любом сегменте $[-R,R]$, т.е. ее ряд Тейлора сходится к исходной функции на всей числовой оси. Поскольку $\mathrm{f}^{(n)}(0) = e^0 = 1$ для любого n, то

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{16}$$

Пример 40. $\mathrm{f}(x) = \sin x$.

Известно, что производная синуса n-го порядка равна $\mathrm{f}^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\left|\mathrm{f}^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, функция $\sin x$ представима в виде степенного ряда на всей числовой оси. Вычислим значения производных в точке $x = 0$,

$$\mathrm{f}^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k; \\ (-1)^{k+1}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \tag{17}$$

Пример 41. $\mathrm{f}(x) = \cos x$.

Воспользуемся теоремой о почленном дифференцировании степенного ряда (п.31°), согласно которой степенной ряд для синуса (17), полученный в примере 40, можно дифференцировать внутри интервала сходимости, т.е. на всей числовой оси:

$$\cos x = (\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots\right)' =$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots \tag{18}$$

Пример 42. $\mathrm{f}(x) = (1+x)^\alpha$.

Вычислим производные функции $\mathrm{f}(x)$ и их значения в точке $x = 0$:

$$\mathrm{f}^{(0)}(x) = \mathrm{f}(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow \mathrm{f}^{(0)}(0) = 1,$$

$$\mathrm{f}'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow \mathrm{f}'(0) = \alpha,$$

$$\mathrm{f}''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow \mathrm{f}''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$\mathrm{f}'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow \mathrm{f}'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2),$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\mathrm{f}^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1).$$

Тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

В [2, *гл.* VIII, §4, пр. 5] доказано, что это разложение справедливо на интервале $(-1, 1)$.

Рассмотрим полученную формулу при некоторых значениях параметра α:

а) Пусть $\alpha = n$ (натуральное число). Тогда

$$\mathrm{f}^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots(n-n+1)(1+x)^{n-n} = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

Это константа, и все следующие производные равны нулю:

$$\mathrm{f}^{(n+1)}(x) = \mathrm{f}^{(n+2)}(x) = \ldots = 0.$$

Так как $\mathrm{R}_{n+1}(x) = 0$, то разложение в ряд справедливо для любого $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n!}{n!}x^n.$$

Эта формула — частный случай формулы бинома Ньютона [1, *справочный материал*].

б) Пусть $\alpha = -1$. Тогда

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} =$$

$$= 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!}x^n + \ldots =$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Получена сумма геометрической прогрессии, изученная ранее (см. примеры 1 – 3, 25 и 30). Ряд сходится при $x \in (-1, 1)$.

Приведем пример функции, которую невозможно представить в виде степенного ряда.

Пример 43. $\quad \mathrm{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Несмотря на то, что эта функция задана не единой формулой, она непрерывна и даже имеет производные всех порядков:

$$\mathrm{f}'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, так как по теореме о пределе производной [9, *гл.* VI, §2, 103]

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

(сделаем замену переменной $y = \frac{1}{x}$ (ясно, что если $x \to 0$, то $y \to \infty$))

$$= \lim_{y\to\infty} e^{-y^2} \cdot 2y^3 = \lim_{y\to\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} =$$

(применим правило Лопиталя [9, *гл.* VII, §3, 121])

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{6y^2}{2ye^{y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{3y}{e^{y^2}} =$$

(повторно применим правило Лопиталя)

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{3}{2ye^{y^2}} = 0.$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} - e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{6}{x^4}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$f''(0) = 0$ аналогично. Все следующие производные в нуле тоже будут равны нулю. Поэтому $a_n = 0$ для любого n, и ряд Тейлора для данной функции — ряд из нулей:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0.$$

Такой ряд сходится на всей числовой оси, но не к функции $f(x)$. Точнее говоря, он сходится к функции $f(x)$ только в одной точке $x = 0$.

§11. Некоторые приложения степенных рядов

11.1. Приближенное вычисление значений функции

Зная разложение функции в ряд, можно вычислить ее приближенное значение. Например:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

для любого x. Поэтому можно вычислить $\sin x$ при любом значении аргумента x. При этом можно оценить погрешность, так как ряд является рядом типа Лейбница, и его остаток после n-го члена не превосходит по абсолютной величине первый отброшенный член.

Пример 44. Найдем $\sin 10^\circ$ с точностью 0,0001. Поскольку 10° — это $\frac{\pi}{18}$ радиан, то

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \ldots \approx$$
$$\approx \underbrace{0{,}17453 - 0{,}00089}_{\approx 0{,}1736} + 0{,}000001 - \ldots$$

Итак, $\sin 10^\circ \approx 0{,}1736$.

С помощью разложения в ряд функции

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots, \qquad x \in (-1, 1),$$

можно приближенно вычислять корни.

Пример 45. $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8+2} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}}$. Вычислим это выражение с точностью 0,0001.

$$(1+x)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{24}x^4 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{120}x^5 \approx$$
$$\approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \ldots$$

Полагая в этой формуле $x = \frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[3]{10} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/3} \approx$$
$$\approx 2\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{16} + \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{64} - \frac{10}{243}\cdot\frac{1}{256} + \frac{22}{729}\cdot\frac{1}{1024} - \ldots\right) \approx$$
$$\approx \underbrace{2 + 0{,}16667 - 0{,}01389 + 0{,}00193 - 0{,}00032}_{\approx 2{,}1544} + 0{,}00006 - \ldots$$

Окончательно имеем $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}1544$.

Обратим внимание на то, что в разных примерах для достижения одинаковой точности требуется брать различное число членов ряда.

11.2. Интегрирование функций

Известно, что первообразная не всякой элементарной функции есть функция элементарная. В этом случае иногда возможно разложить функцию в степенной ряд и проинтегрировать его почленно. При этом получится разложение первообразной в степенной ряд.

Пример 46. $\mathrm{f}(t) = e^{-t^2}$.

Эта функция непрерывна и, следовательно, имеет первообразную. Эта первообразная $\mathrm{F}(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ не является элементарной функцией. Известно, что

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

для любого y. Полагая в этом равенстве $y = -t^2$, получим

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \dots = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

Тогда

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \int\limits_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\right) dt =$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots\right]_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (n-1)!}\,.$$

11.3. Раскрытие неопределенностей

При вычислении пределов иногда удобно представлять некоторые функции в виде степенных рядов, сохраняя необходимое число членов.

Пример 47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{e^{3x}-1-3x}$.

Это неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Воспользовавшись известными разложениями косинуса (18) и экспоненты (16), разложим функции $\cos 2x$ и e^{3x} в ряды по степеням x:

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\ldots = 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\ldots,$$

$$e^{3x} = 1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\ldots = 1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\ldots$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{e^{3x}-1-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\ldots-1}{1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\ldots-1-3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\ldots}{\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+\frac{2}{3}x^2+\ldots}{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}x+\ldots}=-\frac{4}{9}.$$

11.4. Суммирование рядов

Иногда с помощью интегрирования или дифференцирования возможно свести функциональный ряд к известному разложению некоторой функции. Далее обратным дифференцированием или интегрированием (если оно возможно в элементарных функциях) этой функции получается искомая сумма ряда.

Пример 48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x+2x^2+3x^3+\ldots$.

Это степенной ряд. Его радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,$$

следовательно, искомая функция $\mathrm{S}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ определена при $x\in(-1,1)$ $\big($при $x=\pm 1$ ряд расходится по достаточному признаку расходимости (п.7°)$\big)$. Разделим ряд на x считая $x\neq 0$ (если $x=0$, то $\mathrm{S}(0)=0$, что очевидно). Будем иметь $\frac{\mathrm{S}(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Интегрируя это равенство по сегменту $[0,t]\in(-1,1)$, получим

$$\int\limits_0^t\frac{\mathrm{S}(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^n}{n}\bigg|_0^t=\sum_{n=1}^{\infty} t^n=t+t^2+t^3+\ldots$$

Поскольку это — сумма геометрической прогрессии с первым членом и знаменателем равными t то

$$\int\limits_0^t \frac{\mathrm{S}(x)}{x}dx = \frac{t}{1-t}\,.$$

Дифференцируя последнее равенство по t, получим

$$\left(\int\limits_0^t \frac{\mathrm{S}(x)}{x}dx\right)'_t = \left(\frac{t}{1-t}\right)'_t,$$

$$\frac{\mathrm{S}(t)}{t} = \frac{t'(1-t)-t(1-t)'}{(1-t)^2} = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2}\,.$$

Или

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad \text{если } |x|<1.$$

Пример 49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\,.$

Область сходимости этого степенного ряда была найдена в примере 31. Его радиус сходимости равен единице. Искомая функция $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ определена при $x \in [-1,1)$. Так как при $x \in (-1,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится равномерно, продифференцируем его почленно:

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x} \quad \big(x \in (-1,1)\big),$$

так как это — сумма геометрической прогрессии с первым членом равным единице и знаменателем x (см. примеры 1 – 3, 25 и 30). Для нахождения функции $\mathrm{S}(x)$ проинтегрируем полученное выражение:

$$\mathrm{S}(x) = \int \mathrm{S}'(x)dx = \int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{d(1-x)}{1-x} = \\ = -\ln|1-x| + C = -\ln(1-x) + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. C можно найти, если принять во внимание, что $\mathrm{S}(0) = 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} + \ldots = 0$. Поэтому

$$C = \mathrm{S}(0) + \ln(1+0) = 0 + 0 = 0.$$

Итак,

$$\mathrm{S}(x) = -\ln(1-x) \quad \text{при } x \in (-1, 1).$$

Было показано, что разложение $\ln(1+x)$ справедливо и при $x = 1$. Поэтому полученное значение $\mathrm{S}(x)$ верно и при $x = -1$, т.е. во всем промежутке сходимости $[-1, 1)$.

Кроме описанных существуют и другие приложения степенных рядов, выходящие за рамки данного пособия. Так, например, с помощью разложения в степенные ряды можно численно решать дифференциальные уравнения [6, *гл.* 3, п. 3.2].

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 50. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3+3}$.

Вычислим предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^3}} = 1 \neq 0.$$

Предел общего члена ряда отличен от нуля, и следовательно, по достаточному признаку расходимости ряд расходится.

Пример 51. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

Преобразуем общий член ряда при $n \to \infty$:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \frac{1}{n^{3/2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{n^{3/2}}$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Тогда, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме, первоначальный ряд имеет одинаковую сходимость с рядом

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ — обобщенный гармонический с показателем степени большим единицы, он сходится. По теореме сравнения в предельной форме первоначальный ряд имеет ту же сходимость.

Пример 52. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$.

Преобразуем общий член ряда при $n\to\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}=\frac{1}{n\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}}\sim\frac{1}{n}.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{n}$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Тогда, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме, первоначальный ряд имеет одинаковую сходимость с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Итак, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2-1)}}$ расходится.

Пример 53. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}$.

Вычислим предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{e^0}=1\neq 0.$$

Предел оказался отличным от нуля и, следовательно, по достаточному признаку расходимости ряд расходится.

Пример 54. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$.

Проведем исследование по интегральному признаку Коши. Составим функцию $\mathrm{f}(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ в целых точках, совпадающую с общими членами исследуемого ряда. Найдем ее участки убывания с помощью достаточного признака убывания:

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\sqrt{\ln x}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2\sqrt{\ln x}},$$

$\mathrm{f}(x)$ убывает там, где $\mathrm{f}^{'}(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$. То есть, при $n \geqslant 3$. Итак, по интегральному признаку можно исследовать ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$, являющийся остатком исходного ряда и, следовательно, имеющий тот же характер сходимости:

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \mathrm{f}(x)dx = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}\, dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{3}^{A} \frac{\sqrt{\ln x}\, dx}{x} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{3}^{A} \sqrt{\ln x}\, d\ln x = \lim_{A \to +\infty} \frac{2}{3} \sqrt{\ln x}^{3} \Big|_{3}^{A} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\ln A}^{3} - \frac{2}{3} \sqrt{\ln 3}^{3} \right) = +\infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, и ряд, являющийся остатком исходного ряда, расходится. А поэтому расходится и первоначальный ряд.

Пример 55. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n}}$.

Для исследования этого ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)e^{n}}{ne^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{e} < 1.$$

Предел получился меньше единицы, следовательно, ряд сходится.

Пример 56. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln^{3} n}}$.

Сравним исследуемый ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Вычислим предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{\ln^{3} n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{\ln^{3} n}}{n}.$$

Чтобы применить правило Лопиталя, заменим натуральный аргумент n на вещественный x:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\ln^{3} x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\ln^{3} x} \right)^{'}}{x^{'}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{2} \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} =$$

(повторно применим правило Лопиталя)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{\ln x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3\sqrt{\ln x}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = 0.$$

Поскольку этот предел существует, то и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n} = 0.$$

Итак, предел отношения общих членов рядов $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln^3 n}}$ равен нулю. Следовательно, по второму следствию из теоремы сравнения в предельной форме, из расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ следует расходимость первоначального $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln^3 n}}$.

Пример 57. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{(3n)!}$.

Для исследования этого ряда применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(3(n+1))!}}{\frac{e^n n!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}(n+1)!(3n)!}{\big(3(n+1)\big)!e^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{en!(n+1)(3n)!}{(3n+3)!n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e(n+1)(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(3n+1)(3n+2)3} = 0 < 1.$$

Предел получился меньше единицы, следовательно, ряд сходится.

Пример 58. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!-n}$.

Преобразуем общий член ряда при $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n!-n} = \frac{1}{n!\left(1-\frac{1}{(n-1)!}\right)} \sim \frac{1}{n!}.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{n!}$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!\left(1-\frac{1}{(n-1)!}\right)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{(n-1)!}} = 1.$$

Тогда, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме, первоначальный ряд имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ исследуем по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Предел меньше единицы, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. А по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме сходится и первоначальный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!-n}$.

Пример 59. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^n$.

Вычислим предел модуля общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|(-2)^n\right| = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty \neq 0.$$

Предел модуля оказался отличным от нуля и, следовательно, предел общего члена без модуля тоже не может быть равным нулю. По достаточному признаку расходимости ряд расходится.

Пример 60. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Данный ряд знакочередующийся и модуль его общего члена, равный $\frac{1}{\sqrt{n}}$, — монотонно убывающая, стремящаяся к нулю последовательность. Согласно признаку Лейбница ряд сходится. Для проверки того, какая это сходимость, абсолютная или неабсолютная, исследуем ряд, составленный из абсолютных членов исходного: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд — обобщенный гармонический с показателем степени меньшим единицы, и он расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится неабсолютно.

Пример 61. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Данный ряд знакочередующийся, и модуль его общего члена, равный $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$, — монотонно убывающая стремящаяся к нулю последовательность. Согласно признаку Лейбница ряд сходится. Для проверки того, какая это сходимость, абсолютная или неабсолютная, исследуем ряд, составленный из абсолютных членов исходного: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$. Общий член ряда $\operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ поскольку тангенс эквивалентен своему аргументу при стремлении последнего к нулю. Поэтому по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ имеет одинаковую сходимость с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, т.е. расходится.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ сходится неабсолютно.

Пример 62. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-n}{1+n}\right)^{n^2}$.

Для исследования этого ряда применим признак Коши — Маклорена для знакопеременных рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2-n}{1+n}\right|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{1+n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-3}{1+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-3}{1+n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{1+n}\right)^{\frac{n+1}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3}{1+\frac{1}{n}}} = e^{-3} < 1.$$

Предел получился меньше единицы, следовательно, ряд сходится абсолютно.

Пример 63. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3n+1}$.

Это степенной ряд. Его коэффициенты $a_n = \frac{2^n}{3n+1}$. Найдем его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3n+1}}{\frac{2^{n+1}}{3(n+1)+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(3n+4)}{2^{n+1}(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{2\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что при $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ расходится. Осталась неизвестной сходимость ряда в точках $x = \pm\frac{1}{2}$.

При $x = \frac{1}{2}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$. Это ряд с положительными членами. Преобразуем его общий член при $n \to \infty$:

$$\frac{1}{3n+1} = \frac{1}{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)} \sim \frac{1}{3n}\,.$$

Он эквивалентен $\frac{1}{3n}$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}}{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{3n}} = 1.$$

Тогда, по первому следствию из теоремы сравнения в предельной форме, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ имеет одинаковую сходимость с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ с точностью до постоянного сомножителя совпадает с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и, следовательно, имеет с ним одинаковую сходимость, т.е. расходится. В итоге, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ тоже расходится.

При $x = -\frac{1}{2}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$. Это ряд знакочередующийся, модуль его общего члена $\frac{1}{3n+1}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому ряд сходится. Ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{3n+1}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$, расходится, как было установлено при определении сходимости ряда в точке $x = \frac{1}{2}$. Итак, при $x = -\frac{1}{2}$ ряд сходится неабсолютно. Таким образом, если $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3n+1}$ сходится абсолютно; если $x = -\frac{1}{2}$, то неабсолютно; если $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, то расходится.

Пример 64. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x+7)^n}{e^n}$.

Это степенной ряд. Его коэффициенты $a_n = \frac{n!}{e^n}$. Найдем его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{e^n}}{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^{n+1}}{(n+1)!e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0.$$

Это означает, что ряд сходится абсолютно только в центре сходимости при $x \in \{7\}$, а при $x \in (-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$ расходится.

Пример 65. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{4n}}{4^n}$.

Хотя этот ряд и так является степенным, удобнее заменой $y = (2x-1)^4$ свести его к более простому степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{4^n}$ с коэффициентами $a_n = \frac{1}{4^n}$. Найдем его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4.$$

Это означает, что при $y \in (-4, 4)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{4^n}$ сходится абсолютно, а при $y \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ расходится.

Сходимость ряда в точке $y = -4$ выяснять нет необходимости, поскольку y является четной степенью, следовательно, $y \geqslant 0$. При $y = 4$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$. Этот ряд расходится по достаточному признаку расходимости, так как его общий член не стремится к нулю. Итак, при $y \geqslant 4$ ряд расходится, а при $0 \leqslant y < 4$ сходится абсолютно: Найдем область значений переменной x, соответствующую области значений y, при которых ряд сходится абсолютно.

$$0 \leqslant (2x-1)^4 < 4,$$

$$-\sqrt{2} < 2x - 1 < \sqrt{2},$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, при $x \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ расходится.

Пример 66. Найти разложение функции $\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{3+x}\right)$ в ряд по степеням x.

Сведем разложение функции $\mathrm{f}(x)$ к известному разложению функции $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$. Тогда

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{3+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(3+x) =$$
$$= \ln\bigl(1+(-x)\bigr) - \ln\left(3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right) = \ln\bigl(1+(-x)\bigr) - \ln 3 - \ln\left(1+\frac{x}{3}\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} - \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n} =$$
$$= -\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)x^n}{n}.$$

Разложение $\ln\bigl(1+(-x)\bigr)$ справедливо при

$$-1 < -x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 1,$$

а разложение $\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$ — при

$$-1 < \frac{x}{3} \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 3.$$

Это означает, что полученное разложение функции $\mathrm{f}(x)$ справедливо при $x \in [-1,1) \cap [-3,3) = [-1,1)$.

Пример 67. Найти разложение функции $\mathrm{f}(x) = x\sin x\cos x$ в ряд по степеням x.

Сведем разложение функции $\mathrm{f}(x)$ к известному разложению функции $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$. Тогда

$$\mathrm{f}(x) = x\sin x\cos x = \frac{x}{2}\sin 2x = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-2}x^{2n}}{(2n-1)!}.$$

Разложение $\sin x$ справедливо при любом x, поэтому и разложение функции $\mathrm{f}(x)$ тоже справедливо при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 68. Найти разложение функции $\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в ряд по степеням $(x-2)$.

Для удобства сделаем замену переменной

$$x - 2 = y \Leftrightarrow x = y + 2$$

и сведем разложение функции $\mathrm{f}(x)$ к известному разложению функции $(1+x)^{\alpha}$, которое при $\alpha = \frac{2}{3}$ имеет вид:

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Тогда

$$\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{(2+y)^2} = (2+y)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{y}{2} + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \dots\right) =$$

$$= 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\cdot\frac{y}{2} + 2^{\frac{2}{3}}\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2^{\frac{2}{3}}\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \dots =$$

$$= 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{x-2}{3} + 2^{\frac{2}{3}}\frac{\left(\frac{2}{3}-1\right)}{3\cdot 2!}\frac{(x-2)^2}{2} + 2^{\frac{2}{3}}\frac{\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3\cdot 3!}\frac{(x-2)^3}{2^2} + \dots .$$

Разложение $(1+x)^{\alpha}$ справедливо при $x \in (-1,1)$, поэтому разложение функции $\mathrm{f}(x)$ справедливо при

$$-1 < \frac{y}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < y < 2 \Leftrightarrow -2 < x-2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Пример 69. Найти разложение функции $\mathrm{f}(x) = x^3 - 3x + 1$ в ряд по степеням $(x+3)$.

Чтобы воспользоваться формулой $\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}^{(n)}(-3)}{n!}(x+3)^n$ найдем все производные функции $\mathrm{f}(x)$ и вычислим их значения в точке $x_0 = -3$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{f}(x) = x^3 - 3x + 1, && \mathrm{f}(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 1 = -17,\\
&\mathrm{f}'(x) = 3x^2 - 3, && \mathrm{f}'(-3) = 3(-3)^2 - 3 = 24,\\
&\mathrm{f}''(x) = 6x, && \mathrm{f}''(-3) = 6\cdot(-3) = -18,\\
&\mathrm{f}'''(x) = 6, && \mathrm{f}'''(-3) = 6,\\
&\mathrm{f}^{(n)}(x) = 0, && \mathrm{f}^{(n)}(-3) = 0, \quad \text{при} \quad n = 4,5,6,\dots
\end{aligned}$$

В итоге, разложение функции $\mathrm{f}(x)$ в ряд по степеням $x+3$ имеет вид

$$\mathrm{f}(x) = -17 + 24(x+3) - \frac{18}{2}(x+3)^2 + \frac{6}{3!}(x+3)^3 =$$
$$= -17 + 24(x+3) - 9(x+3)^2 + (x+3)^3.$$

Это представление верно при $x \in (-\infty, +\infty)$, так как получена конечная сумма.

Отметим, что этот пример можно было решить и сделав замену $t = x + 3 \Leftrightarrow x = t - 3$.

Пример 70. Вычислить с точностью 0,0001 определенный интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Соответствующий неопределенный интеграл не является элементарной функцией, тем не менее с помощью разложения в ряд подынтегральной функции и последующим интегрированием этого ряда можно вычислить значение выражения с любой заранее заданной точностью. Воспользуемся разложением в ряд арктангенса, справедливым при $x \in (-1, 1)$:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{2n-1},$$

$$\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-2}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 0{,}5^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Вычислим сумму полученного ряда с точностью 0,0001. Поскольку этот ряд является рядом типа Лейбница, точность расчета можно оценить по первому отброшенному члену. Итак, будем вычислять все члены ряда, до тех пор пока модуль очередного слагаемого не будет меньше 0,0001.

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \underbrace{0{,}5 - 0{,}02778 + 0{,}0025 - 0{,}00032}_{\approx 0{,}4744} + 0{,}00005 + \ldots$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0{,}4744.$$

Пример 71. Вычислить с точностью 0,0001 определенный интеграл $\int\limits_{-0,5}^{1} x^6 \cos 2x\, dx$.

Такой интеграл можно вычислить точно, но для этого пришлось бы шесть раз воспользоваться формулой интегрирования по частям. Если изменить в условии задачи шестую степень на значительно бóльшую, то интегрирование не представляется технически осуществимым. В то же время, с помощью разложения в ряд подынтегральной функции и последующего интегрирования этого ряда, можно вычислить значение выражения с любой, заранее заданной точностью. Зная представление косинуса в виде степенного ряда $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots$, получим разложение

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!},$$

$$x^6 \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+6}}{(2n)!},$$

$$\int\limits_0^x x^6 \cos 2t\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{(-1)^n 2^{2n} t^{2n+6} dt}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+7}}{(2n+7)(2n)!},$$

$$\int\limits_{-0,5}^{1} x^6 \cos 2x\, dx = \int\limits_0^1 x^6 \cos 2x\, dx - \int\limits_0^{-0,5} x^6 \cos 2x\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n 1^{2n+7}}{(2n+7)(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n (-0,5)^{2n+7}}{(2n+7)(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n (1 + 0,5^{2n+7})}{(2n+7)(2n)!}.$$

Вычислим сумму полученного ряда с точностью 0,0001. Поскольку этот ряд является рядом типа Лейбница, то хотя, как выясняется при счете, абсолютные величины его членов начинают убывать не с нулевого, а с первого слагаемого, точность расчета можно оценить по первому отброшенному члену. Вычислим слагаемые ряда, до первого, у которого модуль будет меньше 0,0001:

$$\int\limits_{-0,5}^{1} x^6 \cos 2x\, dx =$$
$$= \underbrace{0{,}14397 - 0{,}22266 + 0{,}06064 - 0{,}00684 + 0{,}00042}_{\approx -0{,}0245} - 0{,}00002 + \ldots$$

Итак,

$$\int\limits_{-0,5}^{1} x^6 \cos 2x\, dx \approx -0{,}0245.$$

Пример 72. Вычислить сумму степенного ряда $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

Прежде всего установим область сходимости ряда. Вычислим его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1.$$

При $x = \pm 1$ общий член ряда не стремится к нулю (даже стремится к бесконечности), и по достаточному признаку расходимости ряд расходится. Итак, область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ есть открытый промежуток $(-1, 1)$.

При $x \neq 0$

$$\frac{\mathrm{S}(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n \right)'.$$

Если обозначить $\mathrm{S}_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n$, то $\frac{\mathrm{S}(x)}{x} = \mathrm{S}_1'(x)$,

$$x\,\mathrm{S}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \right)' = \left(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots \right)' =$$
$$= \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' = \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2},$$

$$\mathrm{S}_1(x) = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2}\,,$$

$$\mathrm{S}_1'(x) = \frac{(3-4x)(1-x)^2 + 2(1-x)(3x-2x^2)}{(1-x)^4} =$$
$$= \frac{(3-4x)(1-x) + 2(3x-2x^2)}{(1-x)^3} = \frac{3-x}{(1-x)^3}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \mathrm{S}(x) = x\,\mathrm{S}_1'(x) = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}\,.$$

При $x = 0$ имеем $\mathrm{S}(0) = 0$, что соответствует действительности и, следовательно, выведенная формула справедлива и в этом случае.

Пример 73. Вычислить сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot n!}$.

Прежде всего установим область сходимости ряда. Вычислим его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot n!}}{\frac{1}{(n+1)(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)!}{n\cdot n!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

Это означает, что ряд сходится на всей числовой оси. Пусть $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$, тогда при $x \neq 0$

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x}\big(e^x - 1\big),$$

поскольку $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$. По теореме о пределе производной [9, *гл.* VI, §2, 103]

$$\mathrm{S}'(0) = \lim_{x\to 0}\mathrm{S}'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^2}{2} + \ldots}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x}{2} + \ldots = 1.$$

Первообразная от $S^{'}(x)$ по теореме Барроу [9, *гл.* XI, §2, 183] может быть выражена в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$$S(x) = \int\limits_{x_0}^{x} S^{'}(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{e^t - 1}{t}dt.$$

Значение x_0 может быть найдено, исходя из того, что при $x = 0$ $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 = 0$. То есть $0 = \int\limits_{x_0}^{0} S^{'}(t)dt$, а это означает, что $x_0 = 0$. Итак,

$$S(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{e^t - 1}{t}dt.$$

К сожалению, полученный интеграл не является элементарной функцией. Этот пример показывает, что далеко не всегда возможно найти сумму даже везде сходящегося и везде почленно интегрируемого ряда.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Этот раздел является дополнением к сборнику контрольных работ [3], предназначенному для тех факультетов университета, где обучение математике ведется по сокращенным программам. В то же время на некоторых специальностях тема "Ряды" изучается более углубленно. Контрольное задание N° 13 из главы 5 сборника [3] содержит задачи только по теме "Числовые ряды". В настоящем пособии эти задачи перепечатаны без изменений, и к ним добавлены новые задачи по теме "Степенные ряды." Ниже предлагается 30 вариантов контрольных работ, которые могут быть использованы для аудиторных и домашних контрольных работ.

Контрольная работа состоит из восьми заданий. В первых трех заданиях каждого варианта нужно исследовать сходимость числовых рядов. В четвертом задании для исследования сходимости предложен знакопеременный ряд; в случае, если он сходится, нужно указать какая именно это сходимость — абсолютная или неабсолютная. В пятом задании нужно указать при каких значениях x предложенный степенной ряд сходится абсолютно, при каких неабсолютно, и при каких расходится. В шестом задании нужно найти разложение функции f(x) по степеням $(x - x_0)$. В седьмом задании требуется вычислить указанный определенный интеграл с точностью 0,0001. В восьмом задании предлагается найти сумму степенного ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(\sqrt{3})^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$; $\mathrm{f}(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{x}{4}}{x} dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{n^2}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+1}$; $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2, x_0 = 4$;

$\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n^2+n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$; $\mathrm{f}(x) = e^x, x_0 = 4$; $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{dx}{x^2 e^x}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^{n-1}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^{2n}}{2n}$; $\mathrm{f}(x) = x\cos 3x, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{0,8} x^{10} \sin x \, dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n!}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[n]{2}\right)^{n}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$; $\mathrm{f}(x)=x\sqrt{1+x}, x_0=0$;

$\int\limits_{0}^{0,2}\frac{dx}{1+x^4}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n^2+1)n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^{n/2}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\sqrt{n}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n}$; $\mathrm{f}(x)=x^2\operatorname{arctg}x, x_0=0$;

$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^{n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+1)^2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}n!}{3^{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n^2+1}\right)^{n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln^2 n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$; $\mathrm{f}(x)=\ln x, x_0=3$;

$\int\limits_{0}^{1/4}e^{-x^2}dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2(n+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3-1}{n^2+n}\right)^{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n+1}}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$; $\mathrm{f}(x)=x\ln(2+x), x_0=0$;

$\int\limits_{0,1}^{1}\frac{dx}{xe^{x}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{1/n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-n+1}{3^n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^3 n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$; $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}, x_0 = 0$; $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lg n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n+1}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n n!}{n^n}$; $\mathrm{f}(x) = \ln(10+x), x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{0,1} \dfrac{dx}{1+x^2}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{4n-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{2n-1}}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{n+\sqrt{n}}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-7)^n}{n^2}$; $\mathrm{f}(x) = \sqrt{1+x^2}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{1} e^{-x^2}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-n-1}{2n^2+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n-1}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2-n-1}{2n^2-n+1}\right)^n$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1-n}{2n}\right)^n$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)(3x)^{n-1}$;

$\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{1+x}, x_0 = 0$; $\int\limits_{-2}^{0} e^{x^2}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3-x)^n}{3^{n+1}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^3 3^n}$; $\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1+x^2}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(\sqrt{5})^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1-3n}\right)^n$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n^2}$; $\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\frac{n^2}{2} - n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n-1}{3n+1}\right)^n$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-x)^n n 2^{2n}$; $\mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{8-x^3}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{2} \frac{\sin x}{x} dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{2^n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{n!}$; $\mathrm{f}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, x_0 = 0$;

$\int\limits_0^{1/9} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+\sqrt{n}}{2n+\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n^2+1}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{\frac{1}{n}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{n^4}$; $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x}{2-x}, x_0=0$;

$\int\limits_{0}^{0,2}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4+n^2}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$; $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x}, x_0=3$;

$\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{\sin x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^{2n-1}}{n7^n}$; $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}, x_0=0$;

$\int\limits_{-1}^{0}e^{-x^2}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-2n+1}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1+4n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!(x-3)^n$; $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{1-x}, x_0=2$;

$\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3n+1)x^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big((-1)^n+1\big)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(\sqrt{3})^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+9n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{n!}$; $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}, x_0=1$;

$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}(-x)^n$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{2^n}$; $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{4/3}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\big(\sqrt[n]{2}-1\big)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n}}{n(2^n+1)}$;

$\mathrm{f}(x)=\cos^2 x, x_0=0$; $\int\limits_0^{0,25}\ln\big(1+\sqrt{x}\big)\,dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^2+2n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-n}{2n^2+n}\right)^n$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\ln n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$; $\mathrm{f}(x)=x\sin^2 x, x_0=0$;

$\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{\operatorname{arctg} x}{2x}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n-1}$.

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\ln n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(3x)^n$; $\mathrm{f}(x)=x^4+2x^3-5x^2+2x+4, x_0=-3$;

$\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n-1}$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n-1)^2 n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-n}{(\sqrt{2})^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4+9n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\dfrac{3^n}{n!}}$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^{2n}$; $\mathrm{f}(x)=x^5-7x^4+6x^3-10x^2+4x+1, x_0=1$;

$\int\limits_{-0,2}^{-0,1}\dfrac{e^x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{(\sqrt{3})^n}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^5}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n5^n}$; $\mathrm{f}(x)=\sqrt{7+x^2}, x_0=0$;

$\int\limits_{0}^{0,1}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{2n^3+1}\right)^{n/2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n^2-1)}{2^n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{x^n}{2^n}$; $\mathrm{f}(x)=2^x, x_0=0$;

$\int\limits_{0,1}^{0,2}\dfrac{\cos^2 x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}}$;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{3n-1}}{n^3}$;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n^2+2n}\right)^{n/3}$;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^n}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$; $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^3}, x_0=1$; $\int\limits_{0}^{0,1}\dfrac{\sin^2 2x}{x}dx$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{4n-1}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n^2-n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n} \ ; \quad \mathrm{f}(x) = x\sqrt{1+x^2}, x_0 = 0 \ ;$$

$$\int\limits_{-0,1}^{0,1} e^{-x^2} dx \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2n} \ .$$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n+n}{n!-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n3^{1/n}-n\right)^{n/2}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n} \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n3^{2n}x^n \ ; \quad \mathrm{f}(x) = \sqrt[3]{8+x}, x_0 = 0 \ ;$$

$$\int\limits_{0,2}^{0,8} \frac{dx}{xe^x} \ ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)x^n \ .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Башмаков М.И.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 – 11 классов средней школы. 2-е изд. М., 1992.
2. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М., 1965.
3. *Волков В.А., Ижболдин О.Т., Фесенко И.Б., Халин В.Г.* Учебные и контрольные задания по математическому анализу. СПб., 1992.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1969.
5. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Киев, 1979.
6. *Матвеев Н.М.* Высшая математика. Ряды: Учебное пособие. Л., 1972.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Для втузов. Т. 1. М., 1970.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1951.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 1. М., 1968.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Ефимова Татьяна Александровна
Сахаров Вадим Юрьевич

Числовые, функциональные и степенные ряды

Учебное пособие

Зав. редакцией Г.Чередниченко

Лицензия ЛР N°040050 от 15.08.1996 г.

Подписано в печать с оригинала-макета 27.03.97. Формат 60×84/16. Печать офсетная. Усл.печ.л. 5,81. Уч.-.изд.л. 5,0.
Тираж 650 экз. Заказ N°201

Редакция оперативной подготовки учебно-методических и научных изданий Издательства С.-Петербургского университета.
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Центр оперативной полиграфии С.-Петербургского университета.
199034, Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6.