Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 480, 2019 г.

И. В. Виденский

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ЯДРОМ ШВАРЦА–ПИКА

§1. Введение

Цель этой работы – обобщить основные результаты заметки [6].

Пусть H – функциональное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, то есть элементами пространства H являются функции на некотором множестве X и для каждой точки $x,\ x \in X$, определен элемент k_x пространства H, для которого $f(x) = \langle f, k_x\rangle,\ f \in H$. Будем предполагать, что воспроизводящие ядра $k_x,\ k_y$, соответствующие различным точкам $x,\ y$, линейно независимы. Обозначим через $\widehat{k}_x = k_x/\|k_x\|$ нормированное воспроизводящее ядро. Пусть Z – подмножество множества X. Положим

$$H(Z) = \{f \in H \mid f(z) = 0,\ z \in Z\},$$
$$V(Z) = \overline{\operatorname{span}}\,\{k_z \mid z \in Z\}\,.$$

Определим величину

$$d(a, Z) = \inf\left\{\|\widehat{k}_a - h\| \mid h \in V(Z)\right\} = \|P_{H(Z)}(\widehat{k}_a)\|,$$

где P_L означает ортогональный проектор в пространстве H на подпространство L. Если в качестве множества Z выбрать точку b, то функция $d(a, b)$ задает метрику на множестве X (см. например, [2, стр. 128]). Для пространства Харди H^2 в единичном круге функция $d(a, b)$ задает псевдогиперболическую метрику, которая удовлетворяет усиленному неравенству треугольника:

$$\frac{|d(a,c) - d(c,b)|}{1 - d(a,c)d(c,b)} \leqslant d(a,b) \leqslant \frac{d(a,c) + d(c,b)}{1 + d(a,c)d(c,b)}. \tag{1}$$

Ключевые слова: воспроизводящее ядро, мультипликатор, усиленное неравенство треугольника.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта No. 17-51-150005.

Неравенство (1) выполняется и для метрики, порожденной пространством Друри–Арвесона $H^2_m(\mathbb{B}^m)$ в единичном шаре $\mathbb{B}^m$, $1 \leqslant m \leqslant +\infty$, то есть пространством с ядром

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \langle z, w\rangle}, \qquad z, w \in \mathbb{B}^m,$$

где $\langle z, w\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} z_j \overline{w}_j$. Для натурального m это следует из того, что метрика Бергмана (см. например, [7, стр. 563]) $\rho(a,b)$ в единичном шаре связана с метрикой $d(a,b)$ соотношением

$$\rho(a,b) = \sqrt{m+1}\log\frac{1+d(a,b)}{1-d(a,b)}.$$

Пространства Друри–Арвесона играют роль универсальных пространств в теории пространств с полным ядром Неванлинны–Пика (кратко (CNP)-ядро), теории этих пространств посвящена монография Аглера и Маккарти [2]. Справедлив следующий, весьма не тривиальный результат [1] (или [2, стр. 97]): для любого пространства H с (CNP)-ядром найдется m, $1 \leqslant m \leqslant +\infty$, и сохраняющее расстояние отображение Φ, $\Phi : X \to \mathbb{B}^m$, которое порождает изометрический изоморфизм между пространством H и сужением пространства $H^2_m(\mathbb{B}^m)$ на подмножество $\Phi(X)$. Отсюда следует, что метрика d в любом пространстве с (CNP)-ядром удовлетворяет усиленному неравенству треугольника (1). В [6] неравенство (1) доказано из других, более простых соображений для пространств с ядром Шварца–Пика (кратко (SP)-ядро, см. ниже определение 1), содержащих в себе пространства с (CNP)-ядром.

В §2 будет получено локальное достаточное условие для выполнения неравенства, обобщающего неравенство (1) на случай, когда вместо точки c рассматривается подмножество Z. Мы получим также условия, при которых это обобщенное неравенство превращается в равенство.

Определим пространство мультипликаторов $M(H)$ пространства H:

$$M(H) = \{\varphi \mid f \in H \Rightarrow \varphi f \in H\}.$$

Каждый мультипликатор порождает ограниченный оператор M_φ в пространстве H, $M_\varphi(f) = \varphi f$, $f \in H$. Положим $\|\varphi\| = \|M_\varphi\|$. Пусть a – точка множества X, Z– подмножество множества X. Если существует мультипликатор $\psi_{a,Z}$, такой что

$$\|\psi_{a,Z}\| \leqslant 1, \quad \psi_{a,Z}(a) = d(a,Z), \quad \psi_{a,Z}(z) = 0,\ z \in Z, \tag{2}$$

то будем его называть экстремальным мультипликатором.

В [6] для пространства с (SP)-ядром и для последовательности точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in X$, удовлетворяющих абстрактному условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - d^2(a, z_n)) < \infty,$$

исследована сходимость бесконечного произведения экстремальных мультипликаторов ψ_{a,z_n}. В §3 мы докажем обобщение этой теоремы на случай, когда в условии Бляшке вместо последовательности точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривается последовательность подмножеств $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Z_n \subset X$, а в произведении участвуют экстремальные мультипликаторы ψ_{a,Z_n}. Одна из трудностей, возникающих при исследовании бесконечного произведения, состоит в том, что в отличии от классического случая пространства Харди в единичном круге, экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$ может иметь дополнительные нули вне множества Z. Пример весового пространства Харди в единичном круге с (CNP)-ядром, для которого экстремальный мультипликатор $\psi_{a,b}$ имеет дополнительный ноль, построил Джури [2, стр. 139]. Обобщение этого примера содержится в [5].

§2. Обобщение усиленного неравенства треугольника

Заметим, что неравенство треугольника для метрики $d(a,b)$ в функциональном гильбертовом пространстве можно обобщить следующим образом. Если a, b – точки множества X, Z – подмножество множества X, то справедливо неравенство:

$$d(a,Z) \leqslant d(a,b) + d(b,Z).$$

Действительно, пусть L – подпространство пространства H, u, v – элементы пространства H, $\|u\| = \|v\| = 1$. Тогда

$$\|u - h\| \leqslant \|u - y\| + \|y - h\|, \quad y \in H, \quad h \in L.$$

Следовательно,

$$\operatorname{dist}(u, L) = \inf_{h \in L} \|u - h\| \leqslant \|u - y\| + \operatorname{dist}(y, L).$$

Выберем $y = \langle u, v\rangle v$, тогда

$$\operatorname{dist}(u, L) \leqslant \|u - \langle u, v\rangle v\| + |\langle u, v\rangle| \operatorname{dist}(v, L).$$

Если $u = \widehat{k}_a,\ v = \widehat{k}_b,\ L = V(Z)$, то получим требуемое неравенство.

Во всем дальнейшем существенную роль будет играть теорема Маршалла–Сандберга [3] (или [2, стр. 136]), где она доказана для пространств с ядром Неванлинны–Пика. Для удобства читателей приведем эту теорему в необходимой нам формулировке с доказательством, которое не требует новых соображений.

Теорема (Маршалл–Сандберг). *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X, $a \in X$, $Z \subset X$.*

1*. Пусть φ – мультипликатор пространства H, такой что $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(z) = 0$, $z \in Z$. Тогда*

$$|\varphi(a)| \leqslant d(a, Z). \tag{3}$$

2*. Если существует экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$, удовлетворяющий условию* (2)*, то справедливо равенство*:

$$d(a, Z) k_a \psi_{a,Z} = P_{H(Z)}(k_a). \tag{4}$$

Доказательство. 1. Легко видеть, что для любого мультипликатора φ и точки $x,\ x \in X$, выполняется равенство

$$(M_\varphi)^* k_x = \overline{\varphi(x)} k_x. \tag{5}$$

Пусть φ – мультипликатор, такой что $\|\varphi\| \leqslant 1,\ \varphi(z) = 0,\ z \in Z$. Тогда $(M_\varphi)^* k_z = 0,\ z \in Z,\ (M_\varphi)^*|_{V(Z)} = 0$. Если $d(a, Z) = 0$, то это означает, что $k_a \in V(Z)$. Следовательно, $(M_\varphi)^* k_a = 0$, тогда из (5) имеем $\varphi(a) = 0$.

Пусть $d(a, Z) > 0$. Рассмотрим подпространство $L = V(Z \bigcup a)$. Обозначим $T = (M_\varphi)^*|_L$. Тогда T – оператор ранга 1. Положим

$$u = P_{H(Z)}(\widehat{k}_a),$$

тогда $\|u\| = d(a, Z)$, оператор T имеет вид:

$$Tg = \langle g, \frac{u}{\|u\|}\rangle \widehat{k}_a \lambda,$$

где $\lambda \in \mathbb{C},\ \|T\| = |\lambda|$. Из условия $\|\varphi\| \leqslant 1$ следует, что $\|T\| \leqslant 1,\ |\lambda| \leqslant 1$. Применим оператор T к элементу $\widehat{k}_a$, получим $T\widehat{k}_a = \lambda d(a, Z)\widehat{k}_a$, значит, $|\varphi(a)| \leqslant d(a, Z)$.

2. Пусть $\psi_{a,Z}$ – экстремальный мультипликатор, то есть

$$\|\psi_{a,Z}\| \leqslant 1,\ \psi_{a,Z}(a) = d(a,Z),\ \psi_{a,Z}(z) = 0,\ z \in Z.$$

Если $d(a,Z)=0$, то $P_{H(Z)}(k_a)=0$ и формула (4) верна. Пусть $d(a,Z)>0$. Единственным решением следующей экстремальной задачи

$$\max\{h(a) \mid h \in H(Z),\ h(a) \geqslant 0,\ \|h\| \leqslant 1\}$$

является функция

$$f_a = \frac{1}{d(a,Z)} P_{H(Z)}(\widehat{k}_a).$$

Положим $g = \psi_{a,Z}\widehat{k}_a$. Тогда

$$\|g\| \leqslant 1,\ \ g \in H(Z),\ \ g(a) = d(a,Z)\|k_a\| = f_a(a).$$

Значит, $f_a = g$, то есть

$$\psi_{a,Z}\widehat{k}_a = \frac{1}{d(a,Z)} P_{H(Z)}(\widehat{k}_a). \qquad \square$$

Из доказательства теоремы видно, что если $d(a,Z)>0$, то $\|\psi_{a,Z}\|=1$.

Если Z – подмножество множества X, a,b – такие точки множества X, что $d(a,Z) < 1$, $d(b,Z) < 1$, то обозначим через $d_Z(a,b)$ расстояние, порожденное подпространством $V(Z)$, то есть

$$d_Z(a,b) = \sqrt{1 - |\langle \widehat{R}_a, \widehat{R}_b\rangle|^2},$$

где R_a – воспроизводящее ядро подпространства $V(Z)$. Ясно, что $R_a = P_{V(Z)}(k_a)$. Возможно, что $d_Z(a,b) = 0$ для некотрорых точек a,b.

Теорема 1. *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X, $a,b \in X$, $Z \subset X$, такие что $k_a(b) \neq 0$, $0 < d(a,Z) < 1$. Предположим, что существует экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\frac{d(a,Z) - d(b,Z)}{1 - d(a,Z)d(b,Z)}\right)^2 \leqslant \frac{d^2(a,b) - d_Z^2(a,b)}{1 - d_Z^2(a,b)} \leqslant \left(\frac{d(a,Z) + d(b,Z)}{1 + d(a,Z)d(b,Z)}\right)^2. \quad (7)$$

Доказательство. Перепишем формулу (4) в следующем виде:

$$d(a,Z)\psi_{a,Z}(b)\widehat{k}_a(b) = \widehat{k}_a(b) - P_{V(Z)}(\widehat{k}_a)(b). \quad (8)$$

Поскольку мы предположили, что $\widehat{k}_a(b) \neq 0$, равенство (8) эквивалентно равенству

$$\frac{P_{V(Z)}(\widehat{k}_a)(b)}{\widehat{k}_a(b)} = 1 - d(a,Z)\psi_{a,Z}(b). \tag{9}$$

Применим неравенство (3) к мультипликатору $\psi_{a,Z}$, тогда

$$|\psi_{a,Z}(b)| \leqslant d(b,Z). \tag{10}$$

Из (9) и (10) получим

$$1 - d(a,Z)d(b,Z) \leqslant \left|\frac{\langle P_{V(Z)}(\widehat{k}_a), \widehat{k}_b\rangle}{\langle \widehat{k}_a, \widehat{k}_b\rangle}\right| \leqslant 1 + d(a,Z)d(b,Z). \tag{11}$$

Так как $R_a = P_{V(Z)}(k_a)$, то

$$\begin{aligned}
&\bigl|\bigl\langle P_{V(Z)}(k_a), k_b\bigr\rangle\bigr|^2 = \bigl|\bigl\langle R_a, R_b\bigr\rangle\bigr|^2 = \bigl(1 - d_Z^2(a,b)\bigr)\bigl\|R_a\bigr\|^2\bigl\|R_b\bigr\|^2,\\
&\Bigl\|P_{V(Z)}(\widehat{k}_a)\Bigr\|^2 = 1 - \Bigl\|P_{H(Z)}(\widehat{k}_a)\Bigr\|^2 = 1 - d^2(a,Z),\\
&\bigl\|R_a\bigr\|^2 = \bigl(1 - d^2(a,Z)\bigr)\|k_a\|^2.
\end{aligned}$$

Кроме того, $\bigl|\langle \widehat{k}_a, \widehat{k}_b\rangle\bigr|^2 = 1 - d^2(a,b)$. Получим

$$\left|\frac{\langle P_{V(Z)}(\widehat{k}_a), \widehat{k}_b\rangle}{\langle \widehat{k}_a, \widehat{k}_b\rangle}\right|^2 = \frac{\bigl(1 - d_Z^2(a,b)\bigr)\bigl(1 - d^2(a,Z)\bigr)\bigl(1 - d^2(b,Z)\bigr)}{1 - d^2(a,b)}. \tag{12}$$

По предположению $d(a,Z) < 1$. Значит, $1 - d(a,Z)d(b,Z) > 0$. Из неравенства (11) следует, что выражение в формуле (12) положительно. Значит, $d(b,Z) < 1$, $d_Z(a,b) < 1$. Подставим формулу (12) в неравенство (11), получим

$$\frac{\bigl(1-d^2(a,Z)\bigr)\bigl(1-d^2(b,Z)\bigr)}{\bigl(1 + d(a,Z)d(b,Z)\bigr)^2} \leqslant \frac{1-d^2(a,b)}{1-d_Z^2(a,b)} \leqslant \frac{\bigl(1-d^2(a,Z)\bigr)\bigl(1-d^2(b,Z)\bigr)}{\bigl(1 - d(a,Z)d(b,Z)\bigr)^2}. \tag{13}$$

Вычтем из каждой части неравенства (13) единицу и получим (7). □

Заметим, что если в качестве множества Z выбрать одну точку c, то $d_Z(a,b) = 0$ и неравенство (7) превращается в усиленное неравенство треугольника (1).

Найдем условия, при которых в неравенстве (7) достигается равенство.

Следствие 1. *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X, $a, b \in X$, $Z \subset X$. Предположим, что $d(a, Z) > 0$, $d(b, Z) > 0$, воспроизводящие ядра k_a, k_b не обращаются в ноль на множестве X, существует экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. $\frac{d^2(a,b)-d_Z^2(a,b)}{1-d_Z^2(a,b)} = \left(\frac{d(a,Z)-d(b,Z)}{1-d(a,Z)d(b,Z)}\right)^2$.
2. $\psi_{a,Z}(b) = d(b, Z)$.
3. *Существует экстремальный мультипликатор $\psi_{b,Z}$ и выполняется равенство*

$$\psi_{a,Z}(x) = \psi_{b,Z}(x), \quad x \in X.$$

4. *Существует экстремальный мультипликатор $\psi_{b,Z}$ и выполняется равенство $\psi_{a,Z}(b) = \psi_{b,Z}(b)$.*

Доказательство. Отметим, что из предположения $k_a(x) \neq 0$, $x \in X$, и формулы (4) следует, что мультипликатор $\psi_{a,Z}$ определен на множестве X однозначно.

1. $\Leftrightarrow$ 2. Из доказательства теоремы 1 видно, что равенство из пункта 1 эквивалентно равенству $|1 - \psi_{a,Z}(b)d(a, Z)| = 1 - d(a, Z)d(b, Z)$, а это, учитывая неравенство (10), возможно тогда и только тогда, когда $\psi_{a,Z}(b) = d(b, Z)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Из условия $\psi_{a,Z} = d(b, Z)$ следует, что мультипликатор $\psi_{a,Z}$ удовлетворяет всем свойствам, которым должен удовлетворять экстремальный мультипликатор $\psi_{b,Z}$. Поскольку $k_b(x) \neq 0$, $x \in X$, то $\psi_{b,Z}$ определен однозначно на X. Следовательно, $\psi_{a,Z} = \psi_{b,Z}$.

3. $\Rightarrow$ 4. Очевидно.

4. $\Rightarrow$ 2. По определению $\psi_{b,Z}(b) = d(b, Z)$, значит $\psi_{a,Z}(b) = d(b, Z)$. $\square$

Приведенное ниже утверждение доказывается аналогично.

Следствие 2. *В условиях следствия 1 следующие утверждения равносильны.*

1. $\frac{d^2(a,b)-d_Z^2(a,b)}{1-d_Z^2(a,b)} = \left(\frac{d(a,Z)+d(b,Z)}{1+d(a,Z)d(b,Z)}\right)^2$.
2. $\psi_{a,Z}(b) = -d(b, Z)$.
3. *Существует экстремальный мультипликатор $\psi_{b,Z}$ и выполняется равенство*

$$\psi_{a,Z}(x) = -\psi_{b,Z}(x), \quad x \in X.$$

4. *Существует экстремальный мультипликатор $\psi_{b,Z}$ и выполняется равенство $\psi_{a,Z}(b) = -\psi_{b,Z}(b)$.*

§3. Сходимость бесконечного произведения экстремальных мультипликаторов

В этом параграфе будем предполагать, что гильбертово пространство H обладает ядром Шварца–Пика. Напомним его определение [4].

Определение 1. *Пусть n – натуральное число. Гильбертово пространство H функций на множестве X обладает $(SP)_{n+1}$-ядром, если для любого набора точек $Z = \{z_j\}_{j=1}^{n}$, $z_j \in X$, и любой точки a, $a \in X$, существует экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$, то есть $\|\psi_{a,Z}\| \leqslant 1$, $\psi_{a,Z}(a) = d(a,Z)$, $\psi_{a,Z}(z_j) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Гильбертово пространство H функций на множестве X обладает (SP)-ядром, если оно обладает $(SP)_{n+1}$-ядром для любого натурального n.

Отметим, что если пространство H обладает (SP)-ядром, то для любого подмножества Z, $Z \subset X$, и любой точки a, $a \in X$, существует экстремальный мультипликатор $\psi_{a,Z}$. Действительно, для любого конечного подмножества E, $E \subset Z$, по определению существует мультипликатор φ_E, такой что $\|\varphi_E\| \leqslant 1$, $\varphi_E(z) = 0$, $z \in E$, $\varphi_E(a) = d(a,Z)$, так как $d(a,Z) \leqslant d(a,E)$. Тогда из теоремы Куроша (см., например, [2, стр. 30]) следует существование мультипликатора $\psi_{a,Z}$.

В [6] доказано, что из условия $(SP)_2$ следует, что соотношение $k_a(b) \neq 0$ является отношением эквивалентности на множестве X. Следовательно, X разбивается на классы эквивалентности, на каждом из которых воспроизводящие ядра не обращаются в ноль. Поэтому естественно ограничиться рассмотрением пространства функций на одном из этих классов эквивалентности. Впредь будем предполагать, что $k_a(b) \neq 0$, $a \in X$, $b \in X$. Тогда для подмножества Z, $Z \subset X$, и точки a, $a \in X$, таких что $d(a,Z) > 0$, из формулы (4) следует единственность экстремального мультипликатора $\psi_{a,Z}$. Из условия $k_a(b) \neq 0$ следует также, что $d(a,Z) < 1$ для любых пар (a,Z), $a \in X$, $Z \subset X$.

Определение 2. *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X с (SP)-ядром, $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность подмножеств, $Z_j \subset X$. Последовательность $\{Z_j\}$ удовлетворяет условию Бляшке в точке a, $a \in X$, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - d^2(a, Z_j)) < +\infty. \tag{B}$$

Предложение 1. *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X с (SP)-ядром, $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность подмножеств, $Z_j \subset X$, удовлетворяющих условию Бляшке* (B) *в точке a. Тогда условие* (B) *выполнено в любой точке b, $b \in X$.*

Доказательство. Пусть Z – подмножество множества X, $Z \subset X$, $a, b \in X$, и пусть $d(a, Z) > 0$. Мы можем воспользоваться теоремой 1. Применим неравенство (13):

$$1 - d^2(a,b) \leqslant \frac{1-d^2(a,b)}{1-d_Z^2(a,b)} \leqslant \frac{\big(1-d^2(a,Z)\big)\big(1-d^2(b,Z)\big)}{\big(1-d(a,Z)d(b,Z)\big)^2}$$
$$\leqslant \frac{\big(1-d^2(a,Z)\big)\big(1-d^2(b,Z)\big)}{\big(1-d(b,Z)\big)^2} \leqslant 4\frac{1-d^2(a,Z)}{1-d^2(b,Z)}.$$

Следовательно,

$$1 - d^2(b,Z) \leqslant \frac{4}{1-d^2(a,b)}(1-d^2(a,Z)). \tag{14}$$

Из условия Бляшке (B) в точке a следует, что только для конечного числа слагаемых возможно равенство $d(a, Z_j) = 0$. Если же $d(a, Z_j) > 0$, то, применяя неравенство (14) к множеству Z_j, просуммируем по j и получим условие Бляшке в точке b. □

Теорема 2. *Пусть H – гильбертово пространство функций на множестве X с (SP)-ядром, $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ –последовательность подмножеств, удовлетворяющих условию Бляшке в точке a, $d(a,Z_j)>0$, $1 \leqslant j < \infty$. Положим*

$$\Psi = \prod_{j=1}^{\infty} \psi_{a,Z_j}. \tag{15}$$

Тогда верны следующие утверждения.

1. *Произведение* (15) *сходится равномерно и абсолютно на любом шаре $D_R(a) = \{y \mid d(a,y) \leqslant R\}$ при $0 < R < 1$.*

2. *Произведение* (15) *сходится к мультипликатору Ψ в сильной операторной топологии пространства операторов, действующих в пространстве H, $\|\Psi\| \leqslant 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $0 < R < 1$. Проверим, что только конечное число множителей ψ_{a,Z_j} могут обращаться в ноль в шаре $D_R(a)$.

Пусть Z−подмножество множества X, $y \in D_R(a)$, $\psi_{a,Z}(y) = 0$. Воспользуемся неравенством (3), имеем: $\psi_{a,Z}(a) \leqslant d(a,y)$. Значит, $d(a,Z) \leqslant$

$d(a,y) \leqslant R$. Из условия Бляшке следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} d(a,Z_j) = 1$. Значит, если $d(a,Z_j) > R$, то $\psi_{a,Z_j}(y) \neq 0$ при $y \in D_R(a)$.

Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся формулами (9) и (12), имеем:

$$\bigl|1 - d(a,Z)\psi_{a,Z}(y)\bigr|^2 = \frac{\bigl(1 - d^2(a,Z)\bigr)\bigl(1 - d^2(y,Z)\bigr)\bigl(1 - d_Z^2(a,y)\bigr)}{1 - d^2(a,y)}.$$

Для оценки $1 - d^2(y,Z)$ применим неравенство (14):

$$\bigl|1-d(a,Z)\psi_{a,Z}(y)\bigr|^2 \leqslant 4\frac{\bigl(1-d^2(a,Z)\bigr)^2}{\bigl(1-d^2(a,y)\bigr)^2} \leqslant \frac{4}{(1-R^2)^2}\bigl(1-d^2(a,Z)\bigr)^2. \quad (16)$$

Подставим $Z = Z_j$ в неравенство (16). Тогда из условия Бляшке следует, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bigl|1 - d(a,Z_j)\psi_{a,Z_j}(y)\bigr|$$

равномерно сходится на шаре $D_R(a)$.

2. Рассмотрим частичные произведения

$$\Phi_n = \prod_{j=1}^{n} \psi_{a,Z_j}.$$

Сходимость произведения (15) в сильной операторной топологии означает, что $M_\Psi = s\text{-}\lim M_{\Phi_n}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n f - \Psi f\| = 0, \quad f \in H. \quad (17)$$

Проверим выполнение условия (17) для функции $f = k_a$. Установим, что последовательность $\bigl\{\Phi_n k_a\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пусть $n > m \geqslant 1$. Воспользуемся тем, что $\bigl\|\Phi_n\bigr\| \leqslant 1$, $\bigl\|\psi_{a,Z_j}\bigr\| \leqslant 1$. Тогда

$$\|\Phi_n k_a - \Phi_m k_a\|^2 = \left\|\Phi_m\left(\prod_{j=m+1}^{n}\psi_{a,Z_j}k_a - k_a\right)\right\|^2$$
$$\leqslant \left\|\prod_{j=m+1}^{n}\psi_{a,Z_j}k_a - k_a\right\|^2 = \left\|\prod_{j=m+1}^{n}\psi_{a,Z_j}k_a\right\|^2 + \|k_a\|^2$$
$$- 2\operatorname{Re}\left\langle \prod_{j=m+1}^{n}\psi_{a,Z_j}k_a, k_a\right\rangle \leqslant 2\|k_a\|^2 - 2\prod_{j=m+1}^{n}\psi_{a,Z_j}(a)\|k_a\|^2$$
$$= 2\|k_a\|^2\left(1 - \prod_{j=m+1}^{n}d(a,Z_j)\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

так как сходится произведение $\prod\limits_{j=1}^{\infty} d(a,Z_j)$. Значит, существует функция g, $g \in H$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n k_a = g$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)k_a(x) = g(x)$, $x \in X$. В доказательстве пункта 1 мы уже установили, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x) = \Psi(x)$. Следовательно, $g = \Psi k_a$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi_n k_a - \Psi k_a\| = 0. \tag{18}$$

Пусть c – точка множества X. Воспользуемся формулой (9) для множества Z, состоящего из одной точки c. Имеем:

$$\frac{P_{V(c)}(\widehat{k}_a)(z)}{\widehat{k}_a(z)} = 1 - d(a,c)\psi_{a,c}(z). \tag{19}$$

Так как $P_{V(c)}(\widehat{k}_a) = \langle\widehat{k}_a,\widehat{k}_c\rangle\widehat{k}_c$, то из (19) вытекает, что

$$\frac{k_c(z)}{k_a(z)} = \frac{k_c(c)}{k_a(c)}\left(1 - d(a,c)\psi_{a,c}(z)\right).$$

Следовательно, $\frac{k_c}{k_a}$ – мультипликатор. Умножим $\frac{k_c}{k_a}$ на равенство (18), получим

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi_n k_c - \Psi k_c\| = 0.$$

Поскольку $\{k_c\}_{c\in X}$ – полное семейство в пространстве H и $\|\Phi_n\| \leqslant 1$, равенство (17) выполнено для любой функции f, $f \in H$; Ψ – мультипликатор, $\|\Psi\| \leqslant 1$. Отметим, что Ψ – нетривиальный мультипликатор, так как $\Psi(a) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} d(a, Z_j) > 0$. $\square$

Список литературы

1. J. Agler, J. E. McCarthy, *Complete Nevanlinna–Pick kernels.* — J. Funct. Anal. **175**, No. 1 (2000), 111–124.
2. J. Agler, J. E. McCarthy, *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics 44, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2002.
3. D. E. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space*, Preprint 1993. Available at `http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html/`
4. И. В. Виденский, *Об аналоге произведения Бляшке для гильбертова пространства с ядром Неванлинны–Пика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **424** (2014), 126–140.
5. И. В. Виденский, *Произведения Бляшке для гильбертова пространства с ядром Шварца–Пика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **434** (2015), 68–81.
6. И. В. Виденский, *Аналог гиперболической метрики, порожденной гильбертовым пространством с ядром Шварца–Пика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **447** (2016), 20–32.
7. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Москва, Наука, 1969.

Videnskii I. V. An infinite product of extremal multipliers of a Hilbert space with Schwarz–Pick kernel.

In a functional Hilbert space H on a set X with reproducing kernel $k_x(y)$, define the distance between a point a, $a \in X$, and a subset Z, $Z \subset X$, as follows:

$$d(a, Z) = \inf \left\{ \left\| \frac{k_a}{\|k_a\|} - h \right\| \,\middle|\, h \in \overline{\operatorname{span}}\{k_z \,|\, z \in Z\} \right\}.$$

A function $\psi_{a,Z}$ is called an extremal multiplier of H if $\|\psi_{a,Z}\| \leqslant 1$, $\psi_{a,Z}(a) = d(a, Z)$, $\psi_{a,Z}(z) = 0$, $z \in Z$. A space H has the Schwarz–Pick kernel if for every pair (a, Z) there exists an extremal multiplier. This definition generalizes the well-known concept of a Nevanlinna–Pick kernel.

For a space H with Schwarz–Pick kernel, an inequality for the function $d(a, Z)$ is proved. This inequality generalizes the strong triangle inequality for the metric $d(a, b)$. For a sequence of subsets $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Z_n \subset X$, such

that $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(1-d^2(a,Z_n)\big) < \infty$, it is shown that an infinite product of extremal multipliers ψ_{a,Z_n} converges uniformly and absolutely on any ball with radius strictly less than one in the metric d, and also converges in the strong operator topology of the multiplier space.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский просп. 28,
Петергоф,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: ilya.viden@gmail.com

Поступило 5 августа 2019 г.