САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А Б И Т У Р И Е Н Т У С П б Г У

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2007

Представлено к изданию Центральной приемной комиссией Санкт-Петербургского государственного университета.

Пособие содержит условия задач, предлагавшихся в 2006 году на вступительных экзаменах в Санкт-Петербургский государственный университет. Приведены ответы, а также решения задач первого варианта. Пособие адресовано поступающим в СПбГУ, учителям и старшеклассникам.

Составители: *С. М. Ананьевский, А. Л. Громов, Ю. А. Ильин, Н. Ю. Нецветаев, А. К. Орлов, П. К. Черняев, Ю. В. Чурин (председатель предметной комиссии)*
Отв. редактор: *А. А. Семенов*
Рецензенты: *Ю. Н. Бибиков, А. В. Осипов*

Подписано в печать с оригинала-макета 13.03.2007.
Ф-т 60×84/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25.
Тираж 1570 экз. Заказ № 495.

Издательство СПбГУ.
199004, С. -Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21.
Типография Издательства СПбГУ.
199061, С. -Петербург, Средний пр. , 41.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБИТУРИЕНТУ СПбГУ

М А Т Е М А Т И К А

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ

Цель этой памятки — познакомить Вас с порядком проведения вступительных экзаменов по математике, с обязанностями абитуриентов во время экзаменов, а также с задачами, которые предлагались на вступительных экзаменах в СПбГУ в 2006 году.

Накануне экзамена узнайте в приемной комиссии факультета, в каком месте он будет проходить, как туда вовремя добраться.

На экзамен нужно приходить отдохнувшим, хорошо выспавшимся. В случае болезни не приходите на экзамен, а обратитесь в поликлинику СПбГУ, возьмите справку об освобождении и известите приемную комиссию факультета.

На экзамене Вам потребуется ручка, не помешает и запасная. Писать можно только синей, черной или фиолетовой пастой (чернилами). Разрешается иметь при себе карандаш.

Пропуском на экзамен служат экзаменационный лист и паспорт. Если их нет, то допустить Вас до экзамена могут только по письменному разрешению ответственного секретаря приемной комиссии факультета. Найти его Вам помогут дежурные у входа.

На экзамен рекомендуется приходить за 15–20 минут до его начала. Примерно в это время начинается впуск в аудиторию. Требования экзаменатора поменять место должны выполняться безоговорочно. Выходить из аудитории во время экзамена нельзя.

После окончания впуска в аудиторию экзаменаторы напомнят основные правила поведения на экзамене. Вы заполните титульный лист, на котором не следует делать никаких других записей. Затем Вам продиктуют тексты задач, объявят время окончания экзамена.

Варианты письменных экзаменов содержат по 5 задач, на решение которых отводится 4 часа.

Все предлагаемые на экзаменах задачи укладываются в рамки Программы вступительных экзаменов для поступающих в Санкт-Петербургский государственный университет.

Трудность вариантов обусловлена потребностями факультетов в определенном уровне математических знаний и реальными возможностями абитуриентов данного факультета. Обычно в каждом варианте имеется не менее двух несложных задач и по крайней мере одна трудная или нестандартная задача.

Начинайте решать ту задачу, которая кажется Вам проще. Доведите решение до конца, проверьте и перепишите в чистовик (ответ при этом рекомендуется выделить). Решения на чистовике можно располагать в любом порядке, необходимо лишь сохранить нумерацию задач. Не относящиеся к решению задач надписи и рисунки в работе делать нельзя.

Решенная задача придаст Вам уверенности в себе и успокоит. После этого принимайтесь за самую легкую из оставшихся задач. Если за 10–20 минут Вы не можете найти решения, отложите эту задачу и примитесь за следующую. Если задача нестандартная, имеет непривычную формулировку, не спешите сразу приниматься за выкладки, сперва обдумайте условие, наметьте план решения. Помните, что все предлагаемые задачи доступны, для их решения не требуются сведения, не входящие в программу вступительных экзаменов.

В конце экзамена не забудьте тщательно проверить решения, затем вложите все листы один в другой, а затем в титульный лист.

Ваш экзаменационный лист останется у экзаменаторов. Оценку Вам сообщат в приемной комиссии факультета накануне следующего экзамена.

Далее приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в университет в 2006 году, ответы ко всем задачам, а также краткие решения задач первого варианта.

Задачи для поступавших на дневное отделение

1. Математико-механический факультет

ВАРИАНТ I

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-a}(a^2+(a+1)x-x^2)=2$ имеет единственное решение.

2. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}}=1+x$.

3. Решить неравенство $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(3-2x)>\frac{\pi}{4}$.

4. К окружности проведены три различные касательные AB, BC и AC. Расстояние от точки A до прямой BC равно 1, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{5}$, $BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти радиус окружности.

5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB=15$, $BC=7$, $AC=20$. Найти радиус сечения сферы плоскостью A_1BC.

ВАРИАНТ II

1. Найти все значения параметра b, при которых уравнение $\log_{x+b}(b^2+4x)=2$ имеет единственное решение.

2. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x}}=1-x$.

3. Решить неравенство $\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(1-3x)>\frac{\pi}{4}$.

4. К окружности проведены три различные касательные AB, BC и AC. Расстояние от точки A до прямой BC равно 3, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{10}$, $BC=2$. Найти радиус окружности.

5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 4$. Найти расстояние от центра сферы до плоскости AB_1C.

2. Биолого-почвенный факультет

ВАРИАНТ I

1. При каких значениях x числа $2 - 4x$, $3 - 3x$ и $7 - 6x$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 3, и при этом $3 - 3x$ и $7 - 6x$ являются третьим и двадцать третьим ее членами соответственно?

2. Решить уравнение $\log^2_{x+6}(x+5) = \log^2_{8-x}(x+5)$.

3. Решить уравнение $2x + 5 = \sqrt{x^4 - 6x^3 - 22x^2 + 20x + 25}$.

4. Решить неравенство $\sin x + \sin 2x > 2 + 4\cos x$.

5. В остроугольном треугольнике ABC расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно 2, $AB = 4$. Найти радиус описанной окружности.

ВАРИАНТ II

1. При каких значениях x числа $3 - 3x$, $5 - 6x$ и $6 - 4x$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, разность которой больше 2, и при этом $3 - 3x$ и $5 - 6x$ являются третьим и двадцать вторым ее членами соответственно?

2. Решить уравнение $\log^2_{1-x}(x+3) = \log^2_{x+7}(x+3)$.

3. Решить уравнение $3x + 7 = \sqrt{x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 42x + 49}$.

4. Решить неравенство $\cos x + 4\sin x < 2 + \sin 2x$.

5. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 7, расстояние от вершины A до точки пересечения высот равно 6. Найти BC.

3. Факультет географии и геоэкологии

ВАРИАНТ I

1. Из пункта O выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по крайним дорогам отправились путники P и Q. Спустя 40 минут по средней дороге отправился путник R. В 13 часов 10 минут все трое одновременно вышли на автостраду. Скорости P и R были равны 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость Q. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)

2. Решить уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7x - 12 - x^2}{x^2 + x - 6} \geqslant \log_{x^2} \dfrac{1}{x}$.

4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найти площадь треугольника CMN, если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(2+y)\sqrt{x-1} \geqslant x+2y-1$.

ВАРИАНТ II

1. Из пункта O выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по средней дороге отправился пешеход P. За 15 минут до этого по крайним дорогам отправились пешеход Q и велосипедист R. В 12 часов 45 минут все трое одновременно оказались на автостраде. Скорости пешеходов P и Q были равны 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость R. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)

2. Решить уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x^2 - 7x}{11x - x^2 - 30} \geqslant \log_{x^2} x$.

4. Точки P и Q лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найти площадь треугольника CPQ, если известно, что $AP = BQ = 7$, $AQ = 4$, $CP = 5$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(3+x)\sqrt{y+1} \leqslant 1+3x+y$.

4. Геологический факультет

ВАРИАНТ I

1. Из пункта A выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по крайним дорогам отправились путники P и Q. Спустя 40 минут по средней дороге отправился путник R. В 13 часов 10 минут все трое одновременно вышли на автостраду. Скорости P и R были равны 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость Q. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)

2. Решить уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $3^{2x} + \sqrt{4+3^x} \leqslant 4$.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и E – прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найти площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14 + 8\sqrt{2}$, $AB = 2$, $BC = 5$, $DE = 4$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(2+y)\sqrt{x-1} = x + 2y - 1$.

ВАРИАНТ II

1. Из пункта A выходят три дороги. Средняя дорога образует с двумя крайними углы в $60°$. Все три дороги пересекаются автострадой. Ровно в полдень по средней дороге отправился пешеход P. За 15 минут до этого по крайним дорогам отправились пешеход Q и велосипедист R. В 12 часов 45 минут все трое одновременно оказались на автостраде. Скорости пешеходов P и Q были равны 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость R. (Все четыре дороги предполагаются прямолинейными.)

2. Решить уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $2^{2x} + \sqrt{9+2^x} \leqslant 9$.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах C и F – прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найти площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+4\sqrt{2}$, $AF=3$, $CD=1$, $EF=4$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(3+x)\sqrt{y+1} = 1+3x+y$.

5. Факультет международных отношений (прикладная информатика (в гуманитарной сфере))

ВАРИАНТ I

1. Первые три члена геометрической прогрессии, модуль суммы которых равен 196, являются соответственно двенадцатым, третьим и шестым членами некоторой убывающей арифметической прогрессии. Найти сумму всех положительных членов арифметической прогрессии.

2. Решить уравнение $\sin 5x + \sin 3x = \frac{1}{2} + \cos 2x - \sin x$.

3. Решить уравнение $(x-1)\sqrt{4+2x} = x - \sqrt{4-x^2}$.

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание AB в три раза больше основания CD. На боковой стороне AD выбрана точка K такая, что треугольники ABK и CBK равновелики. Найти площадь треугольника CDK.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y^2-4| = x^2+4x$.

ВАРИАНТ II

1. Первые три члена геометрической прогрессии, модуль суммы которых равен 143, являются соответственно вторым, тринадцатым и седьмым членами некоторой возрастающей арифметической прогрессии. Найти сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии.

2. Решить уравнение $\cos 3x - \cos 5x = \frac{1}{2} - \cos 2x + \cos x$.

3. Решить уравнение $(2x+1)\sqrt{1-x} = x + \sqrt{1-x^2}$.

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание BC в два раза меньше основания AD. На боковой стороне AB выбрана точка M такая, что треугольники ADM и BCM равновелики. Найти площадь треугольника CDM.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x^2 - 1| = 2y - y^2$.

6. Факультет менеджмента (государственное и муниципальное управление)

ВАРИАНТ I

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 15 больше, чем сумма членов с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 31, а предпоследний лежит в интервале $(4, 4\frac{1}{2})$?

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{4})$.

3. Решить уравнение $4 - x = 5\sqrt{|2+x|}$.

4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси ординат, вершина A имеет координаты $(2, 0)$, а абсцисса вершины B равна 8. Найти ее ординату, если известно, что площадь треугольника равна 34.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|2x - y| = |3 - x + |y||$.

ВАРИАНТ II

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 10 больше, чем сумма членов с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно,

что первый член равен 21, а предпоследний лежит в интервале $(4, 5)$?

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$.

3. Решить уравнение $2 + x = 5\sqrt{|4 - x|}$.

4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси абсцисс, вершина A имеет координаты $(0, 1)$, а ордината вершины B равна 8. Найти ее абсциссу, если известно, что площадь треугольника равна 17.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x - 3y| = |2 - y + |x||$.

7. Факультет менеджмента (финансовый менеджмент)

ВАРИАНТ I

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 15 больше, чем сумма членов с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 31, а предпоследний лежит в интервале $(4, 4\frac{1}{2})$?

2. Решить уравнение $\sin 4x + 2\cos 2x = (\sin x - \cos x)^4$.

3. Решить неравенство $4 - x < 5\sqrt{|2 + x|}$.

4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси ординат, вершина A имеет координаты $(2, 0)$, а абсцисса вершины B равна 8. Найти ее ординату, если известно, что площадь треугольника равна 34.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|2x - y| \leqslant |3 - x + |y||$.

ВАРИАНТ II

1. В конечной арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 10 больше, чем сумма членов с четными номерами. Чему равно число членов прогрессии, если известно, что первый член равен 21, а предпоследний лежит в интервале $(4, 5)$?

2. Решить уравнение $2\sin 4x - 4\cos 2x = (\sin x + \cos x)^4$.

3. Решить неравенство $2 + x < 5\sqrt{|4 - x|}$.

4. На координатной плоскости Oxy расположен прямоугольный треугольник ABC. Вершина C прямого угла лежит на положительной полуоси абсцисс, вершина A имеет координаты $(0, 1)$, а ордината вершины B равна 8. Найти ее абсциссу, если известно, что площадь треугольника равна 17.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - 3y| \geqslant |2 - y + |x||$.

8. Факультет психологии (специальность)

ВАРИАНТ I

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$, и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найти ее последний член.

2. Решить уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7x - 12 - x^2}{x^2 + x - 6} \geqslant \log_{x^2} \dfrac{1}{x}$.

4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найти площадь треугольника CMN, если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4\sqrt{2a - 2^x} = a^2 - 2^x$ имеет единственное решение.

ВАРИАНТ II

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{1}{2}$, и их на три меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найти ее последний член.

2. Решить уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x^2 - 7x}{11x - x^2 - 30} \geqslant \log_{x^2} x$.

4. Точки P и Q лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Найти площадь треугольника CPQ, если известно, что $AP = BQ = 7$, $AQ = 4$, $CP = 5$.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4\sqrt{2^x - 2a} = a^2 + 2^x$ имеет единственное решение.

9. Факультет психологии (направление)

ВАРИАНТ I

1. В 12 часов дня из A в B выехал мотоцикл. Спустя 24 минуты из B в A выехал автомобиль. Определить момент их встречи, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоцикла и что скорость автомобиля в два раза больше скорости мотоцикла.

2. Решить неравенство $\cos x < \sqrt{1 - \sin 2x}$.

3. Решить уравнение $\dfrac{\log_2(4x - x^2)}{3x + 2} = \dfrac{\log_7(4x - x^2)}{x + 1}$.

4. Стороны квадрата $ABCD$ равны 2. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек квадрата, для которых расстояние до середины стороны AB не больше расстояния до каждой вершины квадрата.

5. При каких a минимальное значение функции $f(x) = |x^2 + ax - 7|$ на отрезке $[1, 2]$ равно 0?

ВАРИАНТ II

1. В 6 часов утра из M в N выехал велосипед. Спустя 30 минут из N в M выехал мотоцикл. Определить момент их встречи, если известно, что в пункт назначения мотоцикл прибыл на 2 минуты позже велосипеда и что скорость мотоцикла в три раза больше скорости велосипеда.

2. Решить неравенство $\sin x < \sqrt{1+\sin 2x}$.

3. Решить уравнение $\dfrac{\log_2(2x-x^2)}{2x+3} = \dfrac{\log_5(2x-x^2)}{x+1}$.

4. Стороны ромба $ABCD$ равны 2, угол BAD равен $120°$. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек ромба, для которых расстояние до вершины A не больше расстояния до каждой из трех остальных вершин.

5. При каких a минимальное значение функции $f(x) = |x^2 - ax - 6|$ на отрезке $[1,3]$ равно 0?

10. Филологический факультет (лингвистика, прикладная информатика (в области искусств и гуманитарных наук))

ВАРИАНТ I

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали два велосипедиста. Расстояние между ними в этот момент было 13 км. Затем в течение получаса расстояние между велосипедистами уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость одного из велосипедистов равна 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость другого, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 12 км от перекрестка.

2. Решить неравенство $\log_{3x} \log_{4x^2} 8x \geqslant 0$.

3. Решить уравнение $(2\cos x - 1)\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \sin 2x$.

4. Прямая ℓ является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 3. Расстояние между точками касания равно 6, а расстояние между центрами окружностей равно $3\sqrt{13}$. Найти радиус окружности, касающейся прямой ℓ и каждой из двух данных окружностей.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y^2 - x + 1 = |\,x^2 - x + 2y|$.

ВАРИАНТ II

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали велосипедист и мотоциклист. Расстояние между ними в этот момент было 60 км. Затем в течение часа расстояние между ними уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость велосипедиста равна 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найти скорость мотоциклиста, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 48 км от перекрестка.

2. Решить неравенство $\log_{2x} \log_{9x} 3x^2 \geqslant 0$.

3. Решить уравнение $(2\sin x + 1)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{2}} = \sin 2x$.

4. Прямая ℓ является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 4. Расстояние между точками касания равно 10, а расстояние между центрами окружностей равно $5\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, касающейся прямой ℓ и каждой из двух данных окружностей.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 - y = |\,y^2 + y - 2x|$.

11. Химический факультет

ВАРИАНТ I

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$, и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найти ее последний член.

2. Решить уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $3^{2x} + \sqrt{4+3^x} \leqslant 4$.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и E – прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найти площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+8\sqrt{2}$, $AB=2$, $BC=5$, $DE=4$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(2+y)\sqrt{x-1} = x+2y-1$.

ВАРИАНТ II

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{1}{2}$, и их на три меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1. Найти ее последний член.

2. Решить уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$.

3. Решить неравенство $2^{2x} + \sqrt{9+2^x} \leqslant 9$.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах C и F – прямые, а остальные четыре угла равны между собой. Найти площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14+4\sqrt{2}$, $AF=3$, $CD=1$, $EF=4$.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $(3+x)\sqrt{y+1} = 1+3x+y$.

12. Экономический факультет (математические методы в экономике, прикладная информатика (в экономике))

ВАРИАНТ I

1. Девочки делили конфеты, а мальчики – пряники. Первая девочка взяла x конфет и $\frac{1}{5}$ остатка, вторая взяла $2x$ конфет и $\frac{1}{5}$ нового остатка, третья взяла $3x$ конфет и $\frac{1}{5}$ нового остатка, и т.д.. Первый мальчик взял y пряников и $\frac{1}{9}$ остатка, второй

взял $2y$ пряников и $\frac{1}{9}$ нового остатка, и т.д.. Когда последние девочка и мальчик взяли свои доли по тому же правилу, оказалось, что все конфеты разделены поровну и все пряники тоже разделены поровну. Во сколько раз пряников было больше, чем конфет, если известно, что $x : y = 2 : 3$?

2. Решить неравенство $2\sqrt{x+1} \leqslant x+1-\frac{3}{x}$.

3. Решить уравнение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x^2-x-1) = \frac{3\pi}{4}$.

4. Прямая, перпендикулярная AB, разбивает параллелограмм $ABCD$ на две фигуры, площадь одной из которых в два раза больше площади другой. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 11. Найти площади обеих фигур, если известно, что $AB=6$ и $BC=13$.

5. Найти наибольшее возможное значение произведения xy, если x и y удовлетворяют неравенству $3|x|+7|y| \leqslant 10$.

ВАРИАНТ II

1. Белки делили орехи, а ежи – грибы. Первая белка взяла x орехов и $\frac{1}{7}$ остатка, вторая взяла $2x$ орехов и $\frac{1}{7}$ нового остатка, третья взяла $3x$ орехов и $\frac{1}{7}$ нового остатка, и т.д.. Первый еж взял y грибов и $\frac{1}{13}$ остатка, второй взял $2y$ грибов и $\frac{1}{13}$ нового остатка, и т.д.. Когда последние белка и еж взяли свои доли по тому же правилу, оказалось, что все орехи разделены поровну и все грибы тоже разделены поровну. Найти отношение $x : y$, если исходное количество орехов и грибов было равным.

2. Решить неравенство $2\sqrt{x+2} \geqslant x+1+\frac{1}{x}$.

3. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(x^2-x) + \operatorname{arctg}(x-1) = \frac{3\pi}{4}$.

4. Прямая, перпендикулярная AB, разбивает параллелограмм $ABCD$ на две фигуры, отношение площадей которых равно $\frac{3}{5}$. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 7. Найти площади обеих фигур, если известно, что $AB=4$ и $BC=10$.

5. Найти наибольшее возможное значение произведения xy, если x и y удовлетворяют неравенству $5|x|+3|y| \leqslant 8$.

13. Экономический факультет (другие специальности)

ВАРИАНТ I

1. Мальчики делили пряники. Первый мальчик взял d пряников и $\frac{1}{16}$ остатка, второй взял $2d$ пряников и $\frac{1}{16}$ нового остатка, третий взял $3d$ пряников и $\frac{1}{16}$ нового остатка, и т.д.. Когда последний мальчик взял свою долю по тому же правилу, оказалось, что все пряники разделены поровну. Сколько было мальчиков?

2. Решить уравнение $2\sqrt{x+1} = x+1-\frac{3}{x}$.

3. Решить уравнение $\sin x - \sin 3x = (\sin x + \cos x)^3$.

4. Прямая, перпендикулярная AB, разбивает параллелограмм $ABCD$ на две фигуры, площадь одной из которых в два раза больше площади другой. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 11. Найти площади обеих фигур, если известно, что $AB = 6$ и $BC = 13$.

5. Найти наибольшее возможное значение произведения xy, если x и y удовлетворяют равенству $3|x| + 7|y| = 10$.

ВАРИАНТ II

1. Ежи делили грибы. Первый еж взял b грибов и $\frac{1}{17}$ остатка, второй взял $2b$ грибов и $\frac{1}{17}$ нового остатка, третий взял $3b$ грибов и $\frac{1}{17}$ нового остатка, и т.д.. Когда последний еж взял свою долю по тому же правилу, оказалось, что все грибы разделены поровну. Сколько было ежей?

2. Решить уравнение $2\sqrt{x+2} = x+1+\frac{1}{x}$.

3. Решить уравнение $\cos x + \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3$.

4. Прямая, перпендикулярная AB, разбивает параллелограмм $ABCD$ на две фигуры, отношение площадей которых равно $\frac{3}{5}$. Расстояние от самой удаленной вершины параллелограмма до прямой равно 7. Найти площади обеих фигур, если известно, что $AB = 4$ и $BC = 10$.

5. Найти наибольшее возможное значение произведения xy, если x и y удовлетворяют равенству $5|x| + 3|y| = 8$.

Задачи для поступавших на вечернее и заочное отделения

14. Математико-механический факультет

ВАРИАНТ I

1. Из A в B выехал велосипед. Спустя 30 минут из B в A выехал мотоцикл. Через 3 минуты после этого они встретились. Найти отношение их скоростей, если известно, что в пункт назначения мотоцикл прибыл на 2 минуты позже велосипеда.

2. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\cos x} = 2\sin y \\ y - x = \pi \end{cases}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{3x^2 - x - 4} > 3x - 4$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 6$ м и $BC = 5$ м. Найти SB, если известно, что $SC = 3$ м и объем пирамиды равен $15\,\text{м}^3$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2(3+4x+x^2) = \log_2(a-x)$ имеет единственное решение?

ВАРИАНТ II

1. Из M в N выехал мотоцикл. Спустя 24 минуты из N в M выехал автомобиль. Через 12 минут после этого они встретились. Найти отношение их скоростей, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоцикла.

2. Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\sin y} = 2\cos x \\ y + x = \pi \end{cases}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{6 + x - 2x^2} \leqslant 2x + 3$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 2$ м и $BC = 4$ м. Найти SA, если известно, что $SC = 9$ м и объем пирамиды равен $12\,\text{м}^3$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $\log_3(8-6x+x^2) = \log_3(a+x)$ имеет единственное решение?

15. Факультеты географии и геоэкологии, геологический, химический

ВАРИАНТ I

1. Из A в B выехал велосипед. Спустя 30 минут из B в A выехал мотоцикл. Через 3 минуты после этого они встретились. Найти отношение их скоростей, если известно, что в пункт назначения мотоцикл прибыл на 2 минуты позже велосипеда.

2. Решить систему $\begin{cases} x^2 + 2y = 2x \\ 3x^2 + 4y = 6x + 1 \end{cases}$.

3. Решить уравнение $\log_3(x^2 - 6x + 8) = \log_3(x - 3)$.

4. У параллелограмма, описанного около окружности радиуса 7, одна из диагоналей равна 20. Найти в радианах больший угол параллелограмма.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x-1| - |y| = 2y + 2$.

ВАРИАНТ II

1. Из M в N выехал мотоцикл. Спустя 24 минуты из N в M выехал автомобиль. Через 12 минут после этого они встретились. Найти отношение их скоростей, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоцикла.

2. Решить систему $\begin{cases} y^2 + 2y = 3x \\ 3y^2 + 6y = 6x + 2 \end{cases}$.

3. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(x - 2)$.

4. У параллелограмма, описанного около окружности радиуса 4, одна из диагоналей равна 10. Найти в радианах меньший угол параллелограмма.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y| - |x+2| = 2x + 5$.

16. Факультет психологии

ВАРИАНТ I

1. В 12 часов дня из A в B выехал мотоцикл. Спустя 24 минуты из B в A выехал автомобиль. Определить момент их встречи, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоцикла и что скорость автомобиля в два раза больше скорости мотоцикла.

2. Решить уравнение $\cos x = \sqrt{1 - \sin 2x}$.

3. Решить неравенство $\log_3(4x - x^2) \leqslant \log_x(4x - x^2)$.

4. Стороны квадрата $ABCD$ равны 2. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек квадрата, для которых расстояние до середины стороны AB не больше расстояния до каждой вершины квадрата.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству
   a) $3 - |y+2| = \big|x - |y+2|\big|$ (*вечерняя форма*).
   b) $1 - y = |x - y - 2|$ (*заочная форма*).

ВАРИАНТ II

1. В 6 часов утра из M в N выехал велосипед. Спустя 30 минут из N в M выехал мотоцикл. Определить момент их встречи, если известно, что в пункт назначения мотоцикл прибыл на 2 минуты позже велосипеда и что скорость мотоцикла в три раза больше скорости велосипеда.

2. Решить уравнение $\sin x = \sqrt{1 + \sin 2x}$.

3. Решить неравенство $\log_2(3x - x^2) \leqslant \log_x(3x - x^2)$.

4. Стороны ромба $ABCD$ равны 2, угол BAD равен $120°$. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек ромба, для которых расстояние до вершины A не больше расстояния до каждой из трех остальных вершин.

5. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству
   a) $2 - |x-3| = \big|y - |x-3|\big|$ (*вечерняя форма*).
   b) $5 - x = |y - x + 3|$ (*заочная форма*).

17. Экономический факультет

ВАРИАНТ I

1. Сумма первых девяти членов возрастающей арифметической прогрессии больше ее семнадцатого члена на 80%. На сколько процентов ее одиннадцатый член меньше четырнадцатого?

2. a) Решить неравенство $|x^2 + 3x - 1| > |3x^2 - x - 1|$ (*вечерняя форма*).
   b) Решить уравнение $|x^2 + 3x - 1| = |3x^2 - x - 1|$ (*заочная форма*).

3. a) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{4-x}{x^2 - 2x}}$ (*вечерняя форма*).
   b) Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 5 - x$ (*заочная форма*).

4. На плоскости Oxy точки A и B имеют координаты $(3,8)$ и $(2,-2)$. Найти координаты точки C, лежащей на оси ординат, такой, что сумма расстояний от нее до точек A и B минимальна.

5. Построить график функции $f(x) = \sin 2x \cdot |\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x|$.

ВАРИАНТ II

1. Сумма первых восьми членов возрастающей арифметической прогрессии меньше ее восемнадцатого члена на 20%. На сколько процентов ее пятнадцатый член больше одиннадцатого?

2. a) Решить неравенство $|2x^2 - 2x - 1| < |x^2 - 3x + 1|$. (*вечерняя форма*).
   b) Решить уравнение $|2x^2 - 2x - 1| = |x^2 - 3x + 1|$. (*заочная форма*).

3. a) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{2-x}}$.

(*вечерняя форма*).

b) Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} < 2+x$.

(*заочная форма*).

4. На плоскости Oxy точки A и B имеют координаты $(-1,3)$ и $(5,6)$. Найти координаты точки C, лежащей на оси абсцисс, такой, что сумма расстояний от нее до точек A и B минимальна.

5. Построить график функции $f(x) = \sin 2x \cdot |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x|$.

Ответы и решения

1.I.1. $a \in (-\infty,-1)\cup\{-\frac{1}{3}\}\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Решение: Ясно, что $x>a$ и $x\neq a+1$. При этих условиях уравнение $\Leftrightarrow a^2+(a+1)x-x^2=x^2-2ax+a^2 \Leftrightarrow 2x^2-(3a+1)x=0 \Leftrightarrow$ $x=0$ или $x=\frac{3a+1}{2}$. Первый корень удовлетворяет исходному уравнению в случае $\begin{cases}0>a\\ 0\neq a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<0\\ a\neq -1\end{cases}$, а второй — при условии $\begin{cases}\dfrac{3a+1}{2}>a\\ \dfrac{3a+1}{2}\neq a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>-1\\ a\neq 1\end{cases}$. В ответ входят все a, удовлетворяющие ровно одной из данных систем, то есть $a\in(-\infty,-1)\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$, а также $a=-\frac{1}{3}$, при котором корни совпадают.

1.I.2. $x=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$.

Решение: Уравнение равносильно $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x}=(1+x)^2\\ x\geqslant -1\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}(x-1)(x-2)=(x^2+2x)(x^2+2x+1)\\ x\geqslant -1\end{cases}$. Пусть $a=x^2+2x$, $b=x-2$. Тогда $b(b+1)=a(a+1)\Leftrightarrow b^2-a^2+b-a=0\Leftrightarrow$ $(b-a)(b+a+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+x+2=0\\ x^2+3x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$. С учетом условия $x\geqslant -1$ получаем ответ.

1.I.3. $x\in\left(\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

Решение: Рассмотрим два случая.

1. $x\notin(0,\frac{3}{2})$. Так как арктангенсы лежат на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и имеют разные знаки, их сумма также лежит на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Поэтому неравенство $\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(3-2x))>1 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{1-x(3-2x)}>1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(2x-1)}<0$, откуда $x\in\left(\frac{1-\sqrt5}{2},0\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

2. $x\in(0,\frac{3}{2})$. В этом случае оба арктангенса положительны. Заметим, что при $x\geqslant 1$ $\operatorname{arctg}x\geqslant\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, а при $x<1$

$\operatorname{arctg}(3-2x) > \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Поэтому левая часть неравенства больше $\frac{\pi}{4}$ при всех $x \in (0, \frac{3}{2})$.

1.I.4. Радиус окружности равен $\frac{2}{9}$ или 1 или 2.

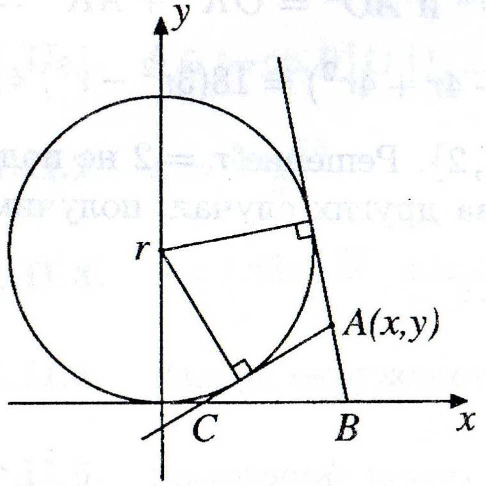

Рис. 1a

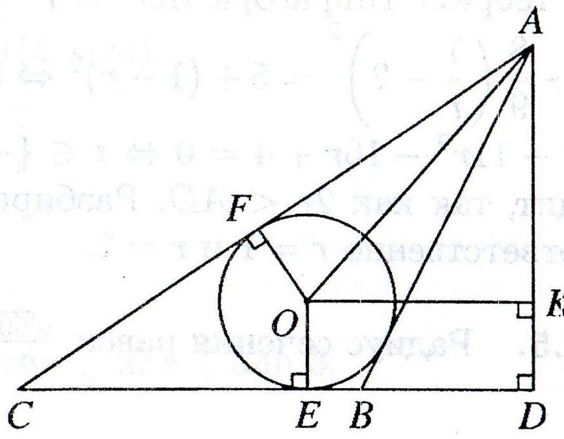

Рис. 1b

Решение 1: Введем систему координат так, как показано на рис. 1a. Пусть r — радиус окружности, $A = (x, y)$, $B = (a, 0)$. По условию $x^2 = 5$, $y^2 = 1$. Уравнение прямой AB имеет вид $\dfrac{X-a}{x-a} = \dfrac{Y}{y} \Leftrightarrow y(X-a) - Y(x-a) = 0$. Расстояние от центра окружности $(0, r)$ до AB равно $r \Leftrightarrow \left|\dfrac{-ya - r(x-a)}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}\right| = r \Leftrightarrow (ya + r(x-a))^2 = r^2(1+(x-a)^2) \Leftrightarrow a^2(1-2ry) + 2rxya - r^2 = 0$. Так как $(xy)^2 = 5$, корни уравнения $a_{1,2} = \dfrac{-rxy \pm \sqrt{6r^2 - 2yr^3}}{1-2ry}$. Заметим, что один из корней соответствует точке B, другой — точке C. Поэтому $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{|a_1 - a_2|}{2} = \dfrac{\sqrt{6r^2-2yr^3}}{|1-2ry|}$. Если $y = 1$, то $\dfrac{8}{9} = \dfrac{6r^2 - 2r^3}{1-4r+4r^2} \Leftrightarrow 9r^3 - 11r^2 - 16r + 4 = 0 \Leftrightarrow r \in \{-1, \frac{2}{9}, 2\}$. Если же $y = -1$, то $\dfrac{8}{9} = \dfrac{6r^2+2r^3}{1+4r+4r^2} \Leftrightarrow 9r^3 + 11r^2 - 16r - 4 = 0 \Leftrightarrow r \in \{-2, -\frac{2}{9}, 1\}$. В ответ входят все положительные значения r.

Решение 2: Необходимо разобрать три случая: окружность вписана в $\triangle ABC$, касается только отрезка BC или касается только отрезка AB. Рассмотрим подробно первый случай (рис. 1b). Пусть S — площадь $\triangle ABC$, p — его периметр. Тогда $S = \frac{1}{2}BC \times AD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $AF = \dfrac{p}{2} - BC = \dfrac{S}{r} - BC = \dfrac{2\sqrt{2}}{3r} - \dfrac{4\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{r} - 2\right)$. По теореме Пифагора $AO^2 = r^2 + AF^2$ и $AO^2 = OK^2 + AK^2 \Rightarrow$ $r^2 + \dfrac{8}{9}\left(\dfrac{1}{r} - 2\right)^2 = 5 + (1-r)^2 \Leftrightarrow 8(1 - 4r + 4r^2) = 18(3r^2 - r^3) \Leftrightarrow$ $9r^3 - 11r^2 - 16r + 4 = 0 \Leftrightarrow r \in \{-1, \frac{2}{9}, 2\}$. Решение $r = 2$ не подходит, так как $2r < AD$. Разбирая два других случая, получим соответственно $r = 1$ и $r = 2$.

1.I.5. Радиус сечения равен $\frac{\sqrt{60}}{5}$.

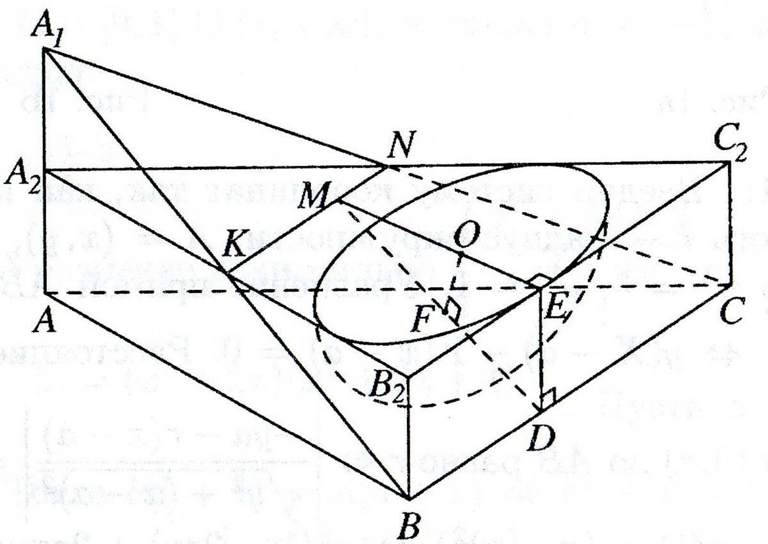

Рис. 2

Решение: Пусть сечение призмы $A_2B_2C_2$ проходит через центр сферы O параллельно ABC (см. рис. 2). Так как $ME \perp BC$ и $DE \perp BC$, то плоскости DEM и A_1BC перпендикулярны. Поэтому OF равно расстоянию от центра сферы до плоскости A_1BC. Полупериметр $\triangle A_2B_2C_2$ равен 21, откуда его площадь $S = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 14} = 42$ и $OE = 2$. Так как $\dfrac{A_2K}{A_2B_2} = \dfrac{A_1A_2}{A_1A} = \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{A_2N}{A_2C_2} = \dfrac{1}{2}$, то KN — средняя линия треугольника $A_2B_2C_2$.

Поэтому $ME = \dfrac{S}{BC} = 6$ и $OM = 4$. В силу подобия $\triangle MOF$ и

$\triangle MDE$ получаем $\dfrac{OF}{OM} = \dfrac{DE}{DM} \Rightarrow OF = \dfrac{OM \cdot OE}{\sqrt{ME^2 + OE^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Радиус сечения равен $\sqrt{OE^2 - OF^2} = \dfrac{\sqrt{60}}{5}$.

1.II.1. $b \in (-\infty, 0] \cup \{1, 2, 3\} \cup [4, +\infty)$.

1.II.2. $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

1.II.3. $x \in \left(\frac{-2-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)$.

1.II.4. Радиус окружности равен $\frac{1}{2}$ или 1 или 3.

1.II.5. Расстояние равно $\frac{9}{\sqrt{68}}$.

2.I.1. $x = -22$.

Решение: Пусть a_k — k-й член прогрессии, d — ее разность, n — номер элемента прогрессии $2 - 4x$. Тогда
$\begin{cases} a_{23} - a_3 = 20d \\ a_n - a_3 = (n-3)d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3x = 20d \\ -x - 1 = (n-3)d \end{cases}$. Исключив из системы x, получим $20d = 7 + d(3n - 9) \Leftrightarrow d = \dfrac{7}{29 - 3n}$. Тогда $d > 3 \Leftrightarrow \dfrac{9n - 80}{29 - 3n} > 0 \Leftrightarrow 8\frac{8}{9} < n < 9\frac{2}{3}$, откуда $n = 9$. Поделив первое уравнение системы на второе, получим $\dfrac{3x - 4}{x + 1} = \dfrac{20}{6} \Leftrightarrow$ $x = -22$.

2.I.2. $x = -4$, $x = 1$, $x = 1 + 4\sqrt{3}$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-5, 7) \cup (7, 8)$. На ОДЗ уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l} \log_{x+6}(x+5) = \log_{8-x}(x+5) \\ \log_{x+6}(x+5) = -\log_{8-x}(x+5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 5 = 1 \\ x + 6 = 8 - x \\ x + 6 = \dfrac{1}{8 - x} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 1 \\ x = 1 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$. Корень $1 - 4\sqrt{3}$ не подходит по ОДЗ.

2.I.3. $x = 0$, $x = 3 + \sqrt{35}$.

Решение: Уравнение равносильно

$$\begin{cases} 4x^2 + 20x + 25 = x^4 - 6x^3 - 22x^2 + 20x + 25 \\ 2x + 5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2(x^2 - 6x - 26) = 0 \\ x \geqslant -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 + \sqrt{35} \end{array}\right. .$$

2.I.4. $x \in (\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{4\pi}{3} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Неравенство $\Leftrightarrow$ $\sin x(1 + 2\cos x) > 2(1 + 2\cos x)$ $\Leftrightarrow$ $(2 - \sin x)(1 + 2\cos x) < 0 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2}$, так как $\sin x < 2$.

2.I.5. Радиус описанной окружности равен $\sqrt{5}$.

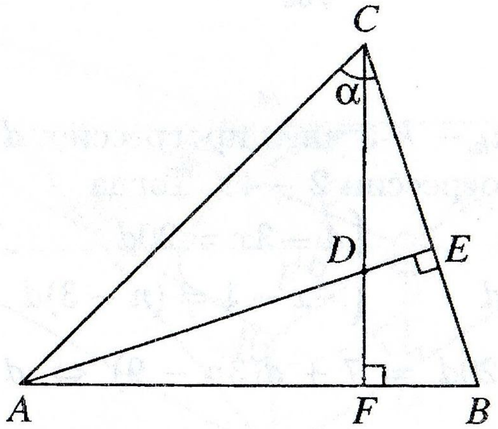

Рис. 3

Решение: Пусть $\alpha = \angle ACB$. Из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$ вытекает, что $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AB}{CD} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. По теореме синусов радиус равен $\dfrac{AB}{2\sin\alpha} = \sqrt{5}$.

2.II.1. $x = -\frac{43}{2}$.

2.II.2. $x = -2$, $x = \sqrt{15} - 3$.

2.II.3. $x = 0$, $x = 2 + \sqrt{23}$.

2.II.4. $x \in (-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.II.5. $BC = 4\sqrt{10}$.

3.I.1. Скорость Q равна $3\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

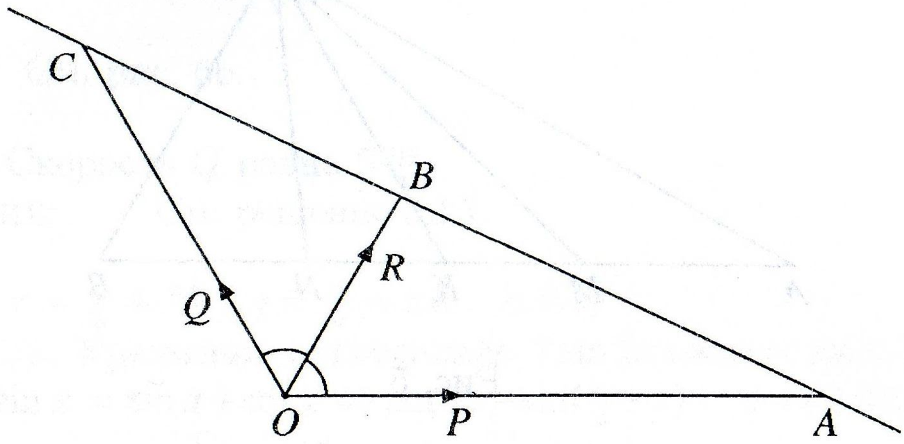

Рис. 4

Решение: Пусть A,B,C — точки выхода на автостраду P,R,Q (см. рис. 4), v — скорость Q. Тогда $OA = 4\cdot\frac{7}{6} = \frac{14}{3}$ км, $OB = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ км, $OC = \frac{7}{6}\cdot v$ км. Поэтому $S_{AOC} = S_{AOB} + S_{BOC} \Leftrightarrow OA\cdot OC\cdot\sin 120^\circ = OB\cdot(OA+OC)\sin 60^\circ \Leftrightarrow \frac{49}{9}v = 2(\frac{14}{3}+\frac{7}{6}v) \Leftrightarrow v = 3\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.I.2. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Уравнение равносильно $2\sin 2x\cos x - 2\cos 2x\cos x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \sin 3x + \sin x - \cos 3x - \cos x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x = 1$.

3.I.3. $x \in (0,1)\cup(1,\frac{5}{3}]\cup(3,4)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (0,1)\cup(1,2)\cup(3,4)$. На ОДЗ неравенство равносильно $-\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{7x-12-x^2}{x^2+x-6} \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7x-12-x^2}{x^2+x-6} \leqslant 2 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x(3x-5)}{(x+3)(x-2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-5}{x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\frac{5}{3}]\cup(2,+\infty)$. С учетом ОДЗ получаем ответ.

3.I.4. Площадь треугольника CMN равна $\frac{3}{2}\sqrt{39}$.

Решение: Пусть K — середина стороны AB (см. рис. 5). Заметим, что $MN = AN - AM = 4$, $AB = AN + BN = 10$. Тогда $CK = AK = 5$, $MK = AK - AM = 2$. По формуле Герона

$$S_{CMN} = 2S_{CMK} = 2\sqrt{\tfrac{13}{2}\cdot\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{39}.$$

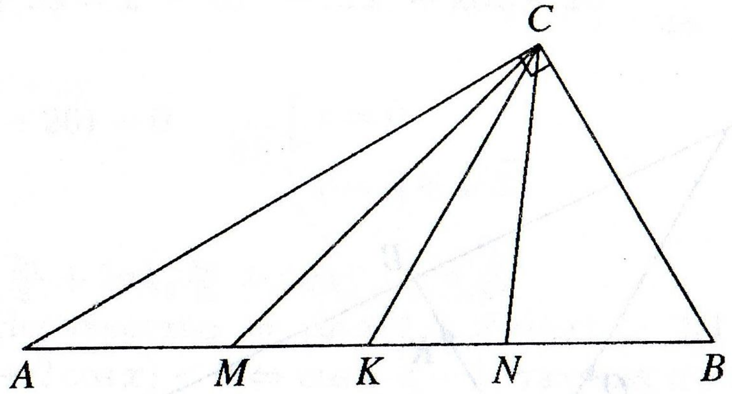

Рис. 5

3.I.5. См. рис. 6а.

Решение: Неравенство $\Leftrightarrow (2+y)\sqrt{x-1} - \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2y \geqslant 0 \Leftrightarrow (2-\sqrt{x-1})\sqrt{x-1} + y(\sqrt{x-1}-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (y-\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (y-\sqrt{x-1})(x-5) \geqslant 0$. Отсюда либо $y \geqslant \sqrt{x-1}$ при $x \geqslant 5$, либо $y \leqslant \sqrt{x-1}$ при $1 \leqslant x \leqslant 5$.

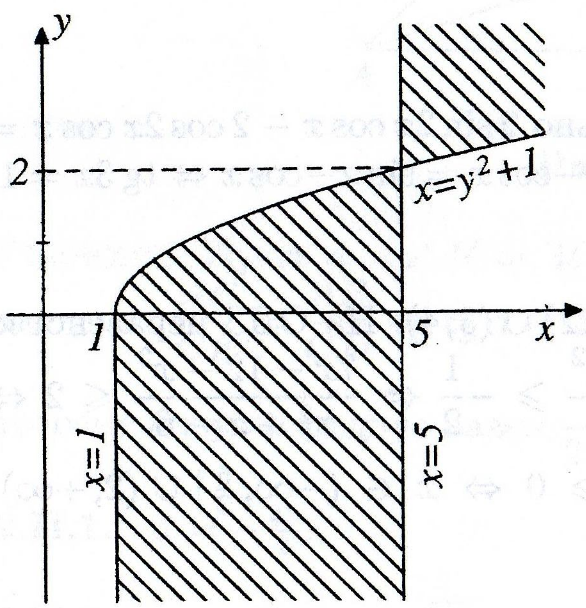

Рис. 6a

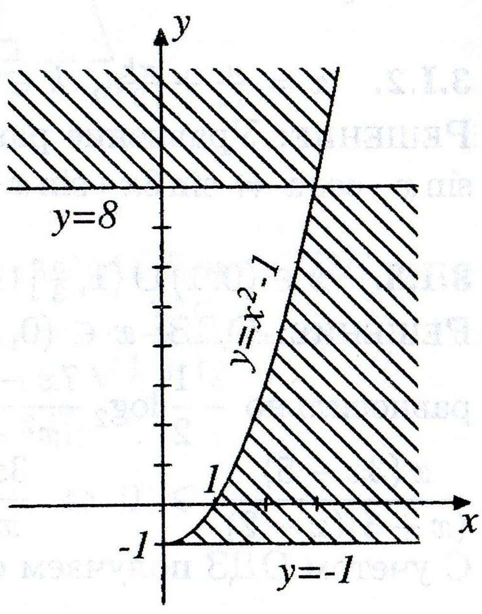

Рис. 6b

3.II.1. Скорость R равна $12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.II.2. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.II.3. $x \in (0,1) \cup (1,2] \cup [3, \frac{7}{2})$.

3.II.4. Площадь треугольника CPQ равна $3\sqrt{6}$.

3.II.5. См. рис. 6b.

4.I.1. Скорость Q равна $3\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
Решение: См. решение 3.I.1.

4.I.2. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Решение: Уравнение равносильно $2\sin 2x \cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \sin 3x + \sin x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \times \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \pi k \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

4.I.3. $x \in (-\infty, \log_3 \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$.
Решение: Пусть $t = 3^x$. Так как $t > 0$, неравенство равносильно $t^2 + \sqrt{t+4} \leqslant 4 \Leftrightarrow t^2 - (t+4) + t + \sqrt{t+4} \leqslant 0 \Leftrightarrow (t + \sqrt{t+4})(t - \sqrt{t+4} + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow t + 1 \leqslant \sqrt{t+4} \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 \leqslant t + 4 \Leftrightarrow t^2 + t - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{2} \Leftrightarrow 3^x \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{2} \Leftrightarrow x \leqslant \log_3 \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

4.I.4. Площадь шестиугольника равна 39.

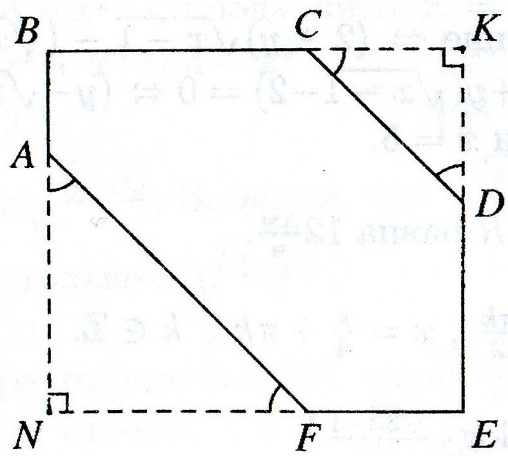

Рис. 7

Решение: Сумма всех углов шестиугольника кроме B и E равна

$720° - 180° = 540°$, поэтому каждый из этих углов равен $135°$. Достроим $ABCDEF$ до прямоугольника $NBKE$ (см. рис. 7). Пусть $AN = x$. Тогда $CK = DK = KE - DE = BN - 4 = x - 2$, а $EF = EN - x = BC + CK - x = 3$. Вычисляя периметр $ABCDEF$, получим $14 + 8\sqrt{2} = 14 + (x + CK)\sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x-1) \Leftrightarrow x = 5$, откуда $BN = 7$, $BK = 8$, $CK = 3$. Площадь шестиугольника равна $56 - \frac{1}{2}(x^2 + CK^2) = 39$.

4.I.5. См. рис. 8a.

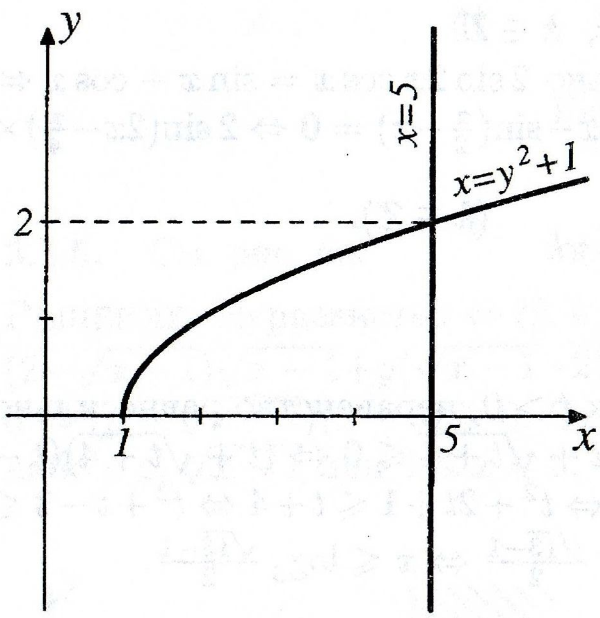

Рис. 8a

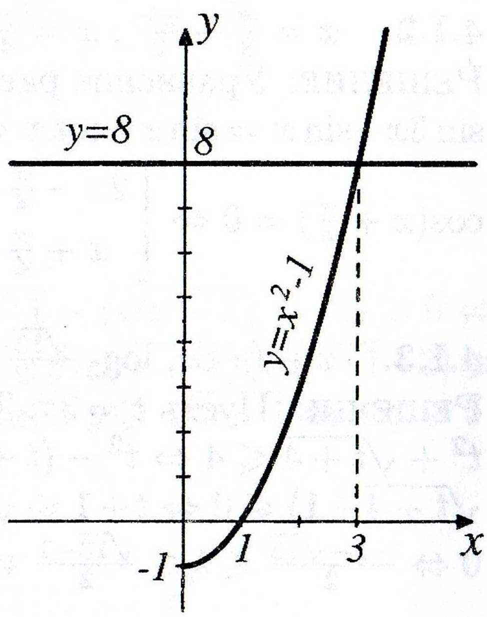

Рис. 8b

Решение: Уравнение $\Leftrightarrow (2 + y)\sqrt{x-1} - \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (2 - \sqrt{x-1})\sqrt{x-1} + y(\sqrt{x-1} - 2) = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x-1}$ или $x = 5$.

4.II.1. Скорость R равна $12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

4.II.2. $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.II.3. $x \in (-\infty, \log_2 \frac{\sqrt{33}-1}{2}]$.

4.II.4. Площадь шестиугольника равна 23.

4.II.5. См. рис. 8b.

5.I.1. Сумма положительных членов прогрессии равна 420.
РЕШЕНИЕ: Пусть a_n — n-й член арифметической прогрессии, d — ее разность. По свойству геометрической прогрессии получим $a_3^2 = a_6 \cdot a_{12} \Leftrightarrow (a_1+2d)^2 = (a_1+5d)(a_1+11d) \Leftrightarrow 4a_1d+4d^2 = 16a_1d+55d^2 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{17}{4}d$. Кроме того, $196 = |a_{12}+a_3+a_6| = |3a_1+18d| = \frac{21}{4}|d|$, откуда $d = -|d| = -\frac{112}{3}$ и $a_1 = -\frac{17}{4}d = \frac{476}{3}$. Заметим, что $a_n > 0 \Leftrightarrow a_1 + d(n-1) > 0 \Leftrightarrow n < 1 - \dfrac{a_1}{d} = 5\frac{1}{4}$, поэтому положительными будут первые 5 членов арифметической прогрессии. Их сумма равна $(a_1+2d)\cdot 5 = 420$.

5.I.2. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
РЕШЕНИЕ: Уравнение $\Leftrightarrow$ $\sin 5x + \sin x + \sin 3x = \cos 2x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x + \sin 3x = \frac{1}{2}(2\cos 2x + 1) \Leftrightarrow \sin 3x\,(2\cos 2x + 1) = \frac{1}{2}(2\cos 2x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

5.I.3. $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.
РЕШЕНИЕ: ОДЗ: $x \in [-2, 2]$. Заметим, что $(x-1)\sqrt{4+2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$, а $x - \sqrt{4-x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$. Решениями могут быть только те x, для которых знаки обеих частей уравнения одинаковы, то есть $x \in (-2, 1] \cup [\sqrt{2}, 2]$. При этом условии уравнение равносильно $(x^2-2x+1)(4+2x) = 4 - 2x\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = -2x\sqrt{4-x^2}$. Отсюда либо $x = 0$, либо $3 - x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6x^2 + x^4 = 4 - x^2 \\ x^2 \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 5 = 0 \\ x^2 \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Заметим, что $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \in (1, 2)$, поэтому решением будет только $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

5.I.4. Площадь треугольника CDK равна $\frac{S}{10}$.
РЕШЕНИЕ: Проведем отрезок $CE \parallel AD$ (см. рис. 9). Пусть h — высота трапеции, $x = CD$, $t = \frac{AK}{AD}$. Тогда $AB = 3x$, а $MN = (1-t)BE = 2x(1-t)$, откуда $KN = x(3-2t)$. Заметим, что $2xh = S$, поэтому $S_{ABK} = t \cdot S_{ABD} = t \cdot \frac{1}{2} \cdot 3xh = \frac{3}{4}tS$, $S_{CKB} = \frac{1}{2}KN \cdot h = \frac{3-2t}{4}S$. Приравнивая площади, получим $\frac{3t}{4} = \frac{3-2t}{4} \Leftrightarrow$

$t = \frac{3}{5}$. Отсюда $S_{CDK} = \frac{2}{5}S_{ADC} = \frac{1}{5}xh = \frac{1}{10}S$.

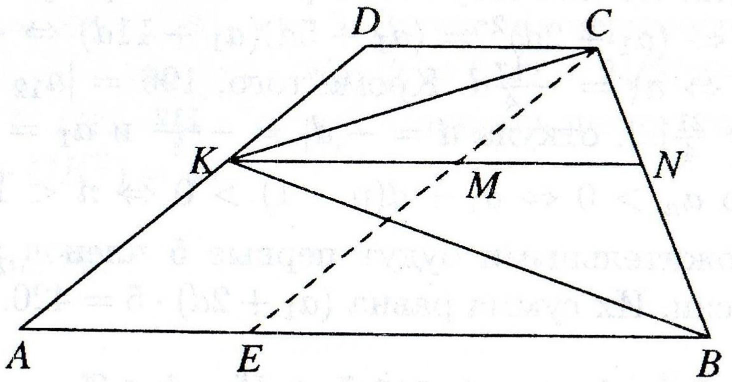

Рис. 9

5.I.5. См. рис. 10а.

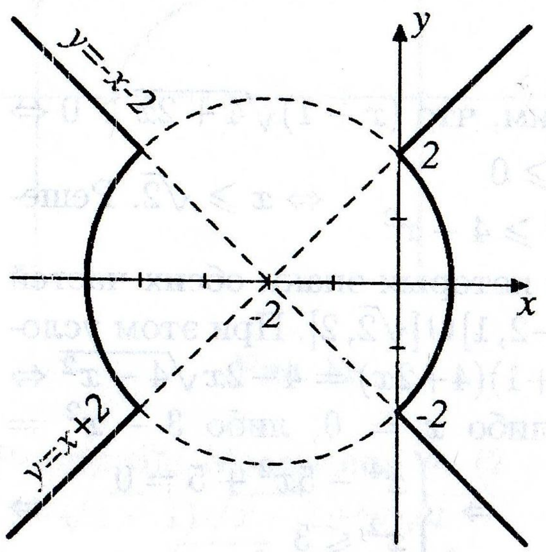

Рис. 10а

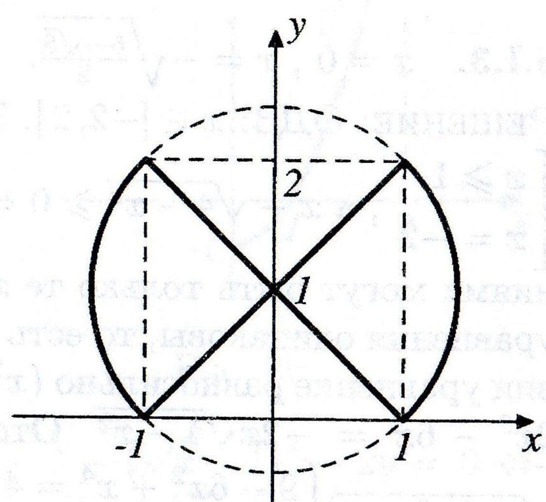

Рис. 10b

Решение: Очевидно, что $x^2 + 4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

При этом условии уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l} y^2 - 4 = x^2 + 4x \\ y^2 - 4 = -x^2 - 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y^2 = (x+2)^2 \\ (x+2)^2 + y^2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 2 \\ y = -x - 2 \\ (x+2)^2 + y^2 = 8 \end{array}\right.$. Первые два равенства определяют прямые, третье — окружность с центром в $(-2, 0)$

радиуса $2\sqrt{2}$. С учетом ограничения на x получаем ответ.

5.II.1. Сумма отрицательных членов прогрессии равна -990.

5.II.2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.II.3. $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

5.II.4. Площадь треугольника CDM равна $\frac{5S}{9}$.

5.II.5. См. рис. 10b.

6.I.1. Число членов прогрессии равно 7 или 18.

Решение: Пусть n — число членов прогрессии, d — ее разность, $S_ч$ и $S_н$ — сумма соответственно четных и нечетных ее членов. Возможны два случая.

1. n четно, то есть $n = 2m$. Тогда $S_н = S_ч - md \Rightarrow md = -15$. Поэтому $31+d(2m-2) \in (4, 4\frac{1}{2}) \Leftrightarrow 1-2d \in (4, 4\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \frac{30}{m} \in (3, \frac{7}{2}) \Leftrightarrow \frac{60}{7} < m < 10$, откуда $m = 9$ и $n = 18$.

2. n нечетно, то есть $n = 2m + 1$. Тогда $S_н - 31 = S_ч + md \Rightarrow md = -16$. Поэтому $31 + d(2m - 1) \in (4, 4\frac{1}{2}) \Leftrightarrow -1 - d \in (4, 4\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \frac{16}{m} \in (5, \frac{11}{2}) \Leftrightarrow \frac{32}{11} < m < \frac{16}{5}$, откуда $m = 3$ и $n = 7$.

6.I.2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Уравнение равносильно $\operatorname{tg} x = \cos 2x + \sin 2x \Leftrightarrow \sin x = \cos 2x \cos x + \sin 2x \cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos 2x \cos x + \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x - \sin 3x) = \cos 2x \cos x \Leftrightarrow -\sin x \cos 2x = \cos 2x \cos x \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0.$$

6.I.3. $x = -11$, $x = -6$, $x = -1$.

Решение: Ясно, что $x \leqslant 4$. При этом условии уравнение равносильно $16 - 8x + x^2 = 25 \cdot |2 + x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 16 = 25x + 50 \\ x^2 - 8x + 16 = -25x - 50 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 33x - 34 = 0 \\ x^2 + 17x + 66 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-11, -6, -1, 34\}$. С учетом условия $x \leqslant 4$ последний корень отпадает.

6.I.4. Ордината вершины B равна 10 или $\frac{65}{2}$.

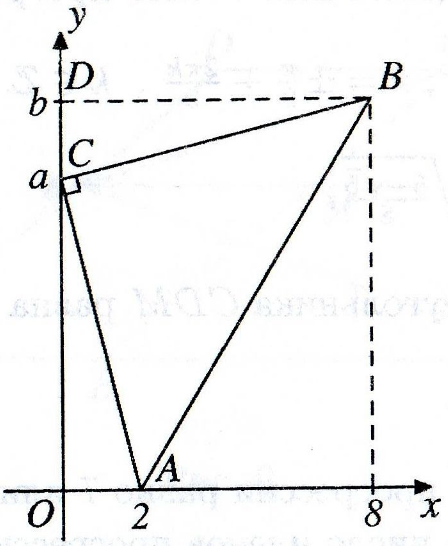

Рис. 11

Решение: Пусть a, b — ординаты точек C, B соответственно. Площадь $\triangle ABC$ есть площадь прямоугольника за вычетом площадей трех треугольников (см. рис. 11), то есть $8b-a-4(b-a)-3b$. Поэтому $34 = b+3a \Leftrightarrow b = 34-3a$. Из подобия $\triangle CDB$ и $\triangle AOC$ получаем $\frac{a}{2} = \frac{8}{b-a} \Leftrightarrow a(34-4a) = 16 \Leftrightarrow 2a^2 - 17a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 8$ или $a = \frac{1}{2}$, что дает $b = 10$ или $b = \frac{65}{2}$.

6.I.5. См. рис. 12a.

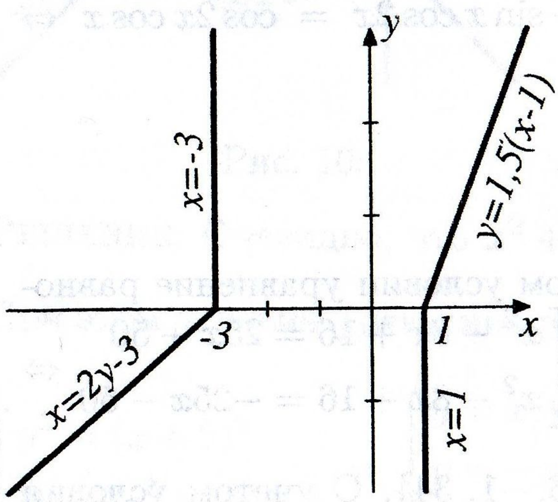

Рис. 12a

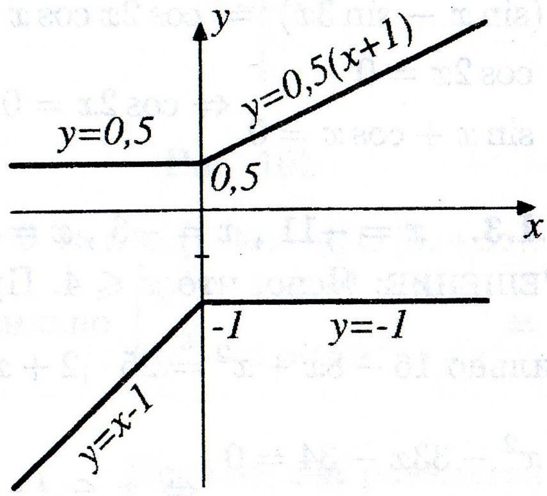

Рис. 12b

Решение: Если $y \geqslant 0$, то уравнение $\Leftrightarrow |2x-y| = |3-x+y| \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 2x-y=3-x+y \\ 2x-y=-3+x-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{3}{2}(x-1) \\ x=-3 \end{array}\right.$. При $y<0$ получаем $|2x-y| = |3-x-y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=3-x-y \\ 2x-y=x+y-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2y-3 \end{array}\right.$.

6.II.1. Число членов прогрессии равно 5 или 12.

6.II.2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.II.3. $x=3$, $x=8$, $x=13$.

6.II.4. Абсцисса вершины B равна 6 или $\frac{129}{4}$.

6.II.5. См. рис. 12b.

7.I.1. Число членов прогрессии равно 7 или 18.
Решение: См. решение 6.I.1.

7.I.2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt[3]{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Решение: Пусть $x = t + \frac{\pi}{4}$. Уравнение $\Leftrightarrow \sin 4x + 2\cos 2x = \left(\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right)^4 \Leftrightarrow -\sin 4t - 2\sin 2t = 4\sin^4 t \Leftrightarrow -2\sin 2t \cdot (1 + \cos 2t) = 4\sin^4 t \Leftrightarrow -8\sin t\cos^3 t = 4\sin^4 t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \operatorname{tg}^3 t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t=\pi k \\ t=-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{2}+\pi k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

7.I.3. $x \in (-11,-6) \cup (-1,+\infty)$.

Решение: Неравенство равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2-8x+16<25|x+2| \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2-8x+16<25x+50 \\ x^2-8x+16<-25x-50 \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)(x-34)<0 \\ (x+6)(x+11)<0 \\ x>4 \end{array}\right.$. Применяя метод интервалов, получаем ответ.

7.I.4. Ордината вершины B равна 10 или $\frac{65}{2}$.

Решение: См. решение 6.I.4.

7.I.5. См. рис. 13a.

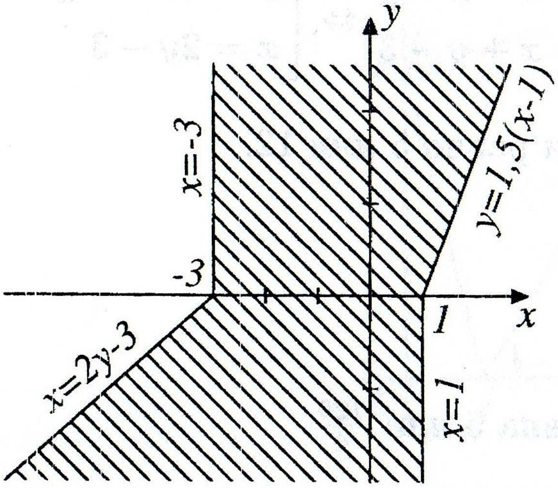

Рис. 13a

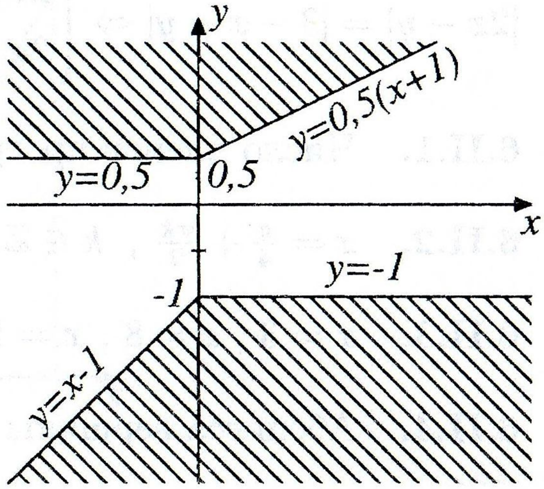

Рис. 13b

Решение: Если $y \geqslant 0$, то неравенство $\Leftrightarrow |2x-y|^2 \leqslant |3-x+y|^2 \Leftrightarrow (3x-3-2y)(x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 1+\frac{2}{3}y$. Если же $y<0$, то $|2x-y|^2 \leqslant |3-x-y|^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+3-2y) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2y-3 \leqslant x \leqslant 1$.

7.II.1. Число членов прогрессии равно 5 или 12.

7.II.2. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.II.3. $x \in (-\infty, 3) \cup (8, 13)$.

7.II.4. Абсцисса вершины B равна 6 или $\frac{129}{4}$.

7.II.5. См. рис. 13b.

8.I.1. Последний член прогрессии равен $\frac{59}{110}$.

Решение: Пусть a_k — k-й член прогрессии, d — ее разность, n — число ее положительных членов. Ясно, что $d>0$. Возможны два случая.

1. $a_{n+5}=0$, то есть $d=\frac{1}{n+4}$. Тогда $a_5+\ldots+a_{n+4}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-2+d(n+7)}{2} \cdot n=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow n(n+7)=(2n-3)(n+4) \Leftrightarrow n^2-2n-12=0$, что невозможно при целых n.

2. $a_{n+5} > 0$. Сумма положительных членов равна $\dfrac{a_{n+5} + a_{2n+4}}{2} \cdot n$, откуда $3 = (-2 + d(3n+7)) \cdot n \Leftrightarrow d = \frac{2n+3}{n(3n+7)}$. Тогда

$$\begin{cases} a_{n+4} < 0 \\ a_{n+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + d(n+3) < 0 \\ -1 + d(n+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2n+3)(n+3) < n(3n+7) \\ (2n+3)(n+4) > n(3n+7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2n - 9 > 0 \\ n^2 - 4n - 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$1 + \sqrt{10} < n < 6$, откуда $n = 5$ и $d = \frac{13}{110}$. Последний член равен $a_{14} = -1 + 13d = \frac{59}{110}$.

8.I.2. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: См. решение 3.I.2.

8.I.3. $x \in (0,1) \cup (1, \frac{5}{3}] \cup (3,4)$.

Решение: См. решение 3.I.3.

8.I.4. Площадь треугольника CMN равна $\frac{3}{2}\sqrt{39}$.

Решение: См. решение 3.I.4.

8.I.5. $a \in [2, \sqrt[3]{32}] \cup \{\sqrt{5} + 1\}$.

Решение: Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда $4\sqrt{2a - t} = a^2 - t \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 32a - 16t = a^4 - 2a^2t + t^2 \\ t \leqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2(a^2 - 8)t + a^4 - 32a = 0 \\ t \leqslant a^2 \end{cases}.$$

Задача сводится к нахождению тех a, при которых $f(t) = t^2 - 2(a^2 - 8)t + a^4 - 32a$ имеет единственный корень на $(0, a^2]$. Ясно, что $a \neq 0$, иначе промежуток пуст. Возможны два случая.

1. f имеет единственный корень. Тогда $(a^2 - 8)^2 = a^4 - 32a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{5}$. В этом случае корень равен $a^2 - 8$, поэтому $a^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{8}$. По данному условию подходит $a = 1 + \sqrt{5}$.

2. f имеет два различных корня, из которых ровно один лежит на $(0, a^2]$. Если 0 — корень f, то $a^4 - 32a = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{32}$. Тогда $a^2 = 2^{10/3}$, и второй корень равен $2(2^{10/3} - 8) \in (0, 2^{10/3}]$. Поэтому $a = \sqrt[3]{32}$ входит в ответ. Пусть 0 не является корнем f. Так как вершина параболы $a^2 - 8$ лежит левее a^2, то задача равносильна

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(a^2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 32a < 0 \\ 16a^2 - 32a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [2, \sqrt[3]{32}).$$ Объединяя

все случаи, получаем ответ.

8.II.1. Последний член прогрессии равен $\frac{4}{11}$.

8.II.2. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.II.3. $x \in (0,1) \cup (1,2] \cup [3, \frac{7}{2})$.

8.II.4. Площадь треугольника CPQ равна $3\sqrt{6}$.

8.II.5. $a \in (-\sqrt[3]{32}, 0] \cup \{\sqrt{5} - 1\}$.

9.I.1. Встреча состоялась в 12 часов 36 минут.

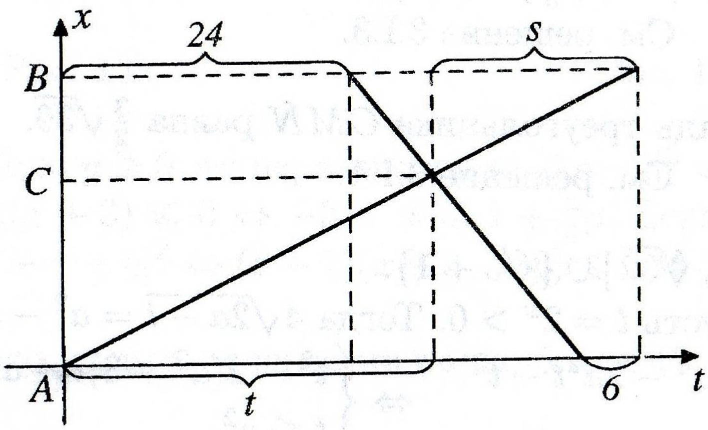

Рис. 14

Решение: Пусть v — скорость мотоцикла, C — место встречи, t и s — время, затраченное мотоциклом на путь AC и CB соответственно (см. рис. 14). Вычислим AC и CB двумя способами:

$$\begin{cases} AC = vt = 2v(s-6) \\ CB = 2v(t-24) = vs \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2s - 12 \\ s = 2t - 48 \end{cases}.$$

Исключая s, получим $t = 4t - 108 \Leftrightarrow t = 36$.

9.I.2. $x \in (\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Уравнение $\Leftrightarrow \cos x < \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \Leftrightarrow$

$$\cos x < |\cos x - \sin x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x > \cos x \\ \cos x - \sin x < -\cos x \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x < 0\\ \sin x - 2\cos x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x < 0\\ \sqrt{5}\sin(x - \operatorname{arctg} 2) > 0\end{array}\right. .$$

9.I.3. $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Решение: ОДЗ: $x \in (0,4)$. На ОДЗ уравнение равносильно

$$\frac{\log_2(4x - x^2)}{3x+2} = \frac{\log_2(4x - x^2)}{(x+1)\log_2 7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x - x^2 = 1\\ 3x + 2 = (x+1)\log_2 7\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x + 1 = 0\\ x(3 - \log_2 7) = \log_2 7 - 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2 \pm \sqrt{3}\\ x = \dfrac{\log_2 7 - 2}{3 - \log_2 7}\end{array}\right. .$$ Так как

$$\frac{\log_2 7 - 2}{3 - \log_2 7} - 4 = \frac{5\log_2 7 - 14}{3 - \log_2 7} = \frac{\log_2 16807 - \log_2 16384}{3 - \log_2 7} > 0\ ,$$

последний корень не подходит по ОДЗ.

9.I.4. Площадь фигуры равна $\frac{9}{8}$.

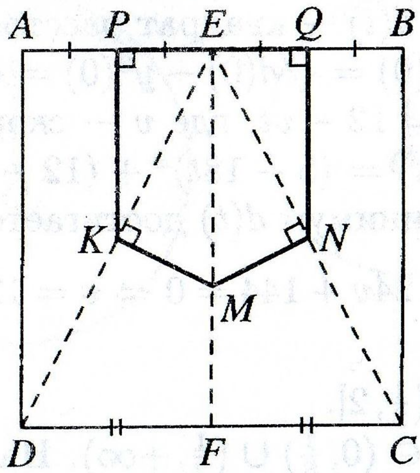

Рис. 15

Решение: Искомой фигурой является пятиугольник $PKMNQ$ (см. рис. 15). Заметим, что $\triangle EKM$ подобен $\triangle EFD$ с коэффициентом $\frac{KE}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, а $\triangle EPK$ подобен $\triangle EFD$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому $S_{PKMNQ} = 2(S_{EPK} + S_{EKM}) = 2\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{4}\right) \cdot S_{EFD} = \frac{9}{8}$.

9.I.5. $a \in [\frac{3}{2}, 6]$.

Решение: Условие задачи равносильно существованию на $[1,2]$ корня $g(x) = x^2 + ax - 7$. Так как $g(0) = -7 < 0$, то g имеет два корня, один из которых отрицательный, а другой — положительный, и он лежит на $[1,2]$ при условии $\begin{cases} g(1) \leqslant 0 \\ g(2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6 \leqslant 0 \\ 2a-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 6$.

9.II.1. Встреча состоялась в 6 часов 33 минуты.

9.II.2. $x \in (\operatorname{arctg} 2 - \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

9.II.3. $x = 1$.

9.II.4. Площадь фигуры равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

9.II.5. $a \in [-5, 1]$.

10.I.1. Скорость второго велосипедиста равна $12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решение: Направим координатные оси вдоль дорог. Пусть $(x(t), 0)$ — положение в момент времени t первого велосипедиста, $(0, y(t))$ — второго, а $d(t)$ — квадрат расстояния между ними. По теореме Пифагора $x(0) = \sqrt{d(0) - y^2(0)} = \sqrt{169-144} = 5$. Тогда $x(t) = 5 - 18t$, $y(t) = 12 - vt$, где v — скорость второго велосипедиста. Поэтому $d(t) = (5-18t)^2 + (12-vt)^2 = t^2(324+v^2) - 2t\,(90+12v) + 169$. Минимум $d(t)$ достигается при $t = \frac{1}{2}$ ч, откуда $\dfrac{90+12v}{324+v^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow v^2 - 24v + 144 = 0 \Leftrightarrow v = 12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

10.I.2. $x \in (0, \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{2}, 2]$.

Решение: ОДЗ: $x \in (0, \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. На ОДЗ неравенство $\Leftrightarrow$ $(3x-1)(\log_{4x^2} 8x - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow (3x-1)\left(\dfrac{\log_2 x + 3}{2\log_2 x + 2} - 1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{(3x-1)(1-\log_2 x)}{1+\log_2 x} \geqslant 0$. Применяя метод интервалов и учитывая ОДЗ, получаем ответ.

10.I.3. $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{7} + 2\pi k$,
$x = \frac{5\pi}{7} + 2\pi k$, $x = \frac{11\pi}{7} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: После возведения уравнения в квадрат мы получим $(4\cos^2 x - 4\cos x + 1)(1+\cos x) = 2\sin^2 2x \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin^2 2x - 1 \Leftrightarrow \cos 3x = -\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi+2\pi k}{7}$,

$k \in \mathbb{Z}$. Решениями будут только те x, при которых знаки левой и правой частей исходного уравнения одинаковы. Они соответствуют целым k, дающим при делении на 7 остатки 0, 2, 3, 5.

10.I.4. Радиус равен $\frac{1}{3}$ или $\frac{3}{4}$ или 3.

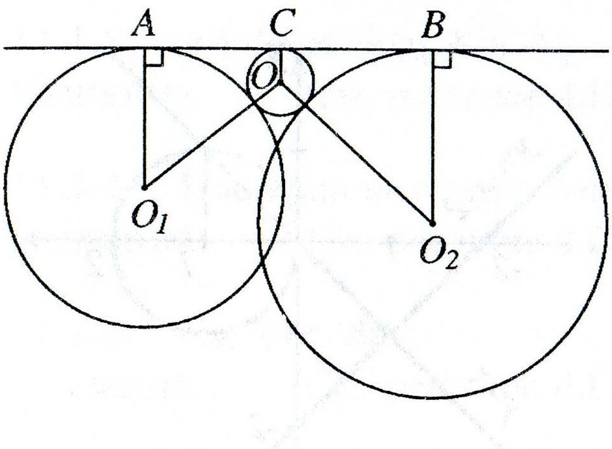

Рис. 16a

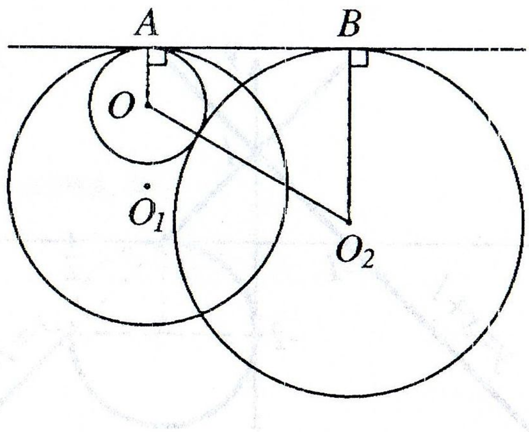

Рис. 16c

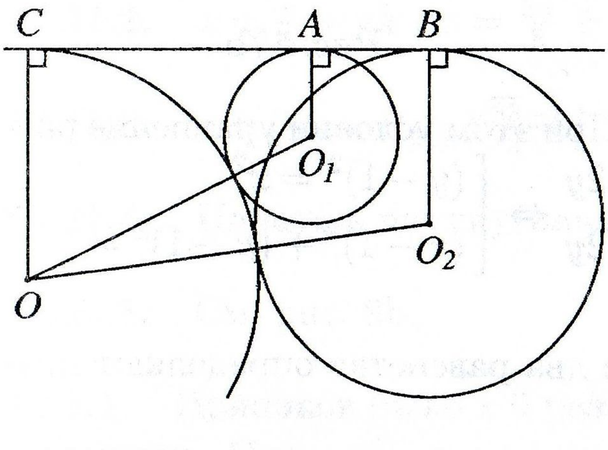

Рис. 16b

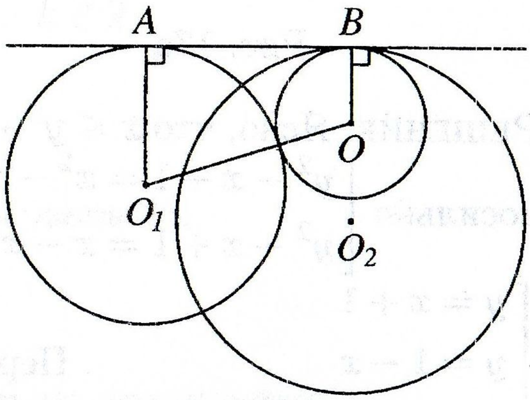

Рис. 16d

Решение: Пусть O_1 и O_2 — центры соответственно первой и второй окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы, A и B — точки их касания с прямой ℓ. По теореме Пифагора $(r_1 - r_2)^2 = O_1O_2{}^2 - AB^2 = 81 \Rightarrow r_2 = r_1 + 9 = 12$. Пусть O и r — центр и радиус третьей окружности. Возможны четыре варианта ее расположения (см. рис. 16).

Случаи a и b. Пусть $x = AC$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + (r_1 - r)^2 = (r_1 + r)^2 \\ (6 - x)^2 + (r_2 - r)^2 = (r_2 + r)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12r \\ (6 - x)^2 = 48r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 12r \\ 4x^2 = (6 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -6 \\ r = 3 \end{cases}$$

. Первое решение

соответствует рис. 16a, второе — рис. 16b.
Случай c. $(r_2 - r)^2 + 36 = (r_2 + r)^2 \Leftrightarrow 36 = 48r \Leftrightarrow r = \frac{3}{4}$.
Случай d. $(r_1 - r)^2 + 36 = (r_1 + r)^2 \Leftrightarrow 36 = 12r \Leftrightarrow r = 3$.

10.I.5. См. рис. 17a.

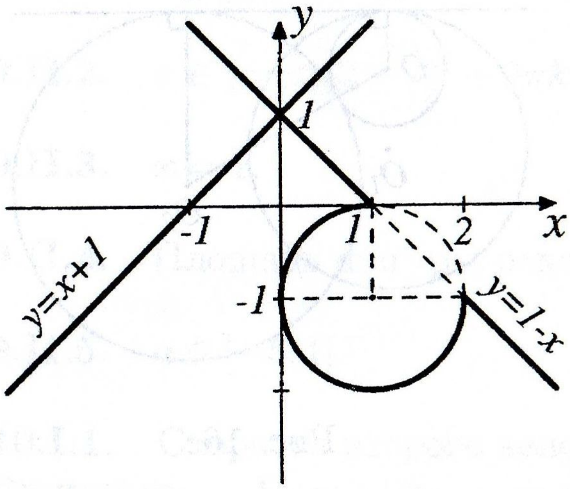

Рис. 17a

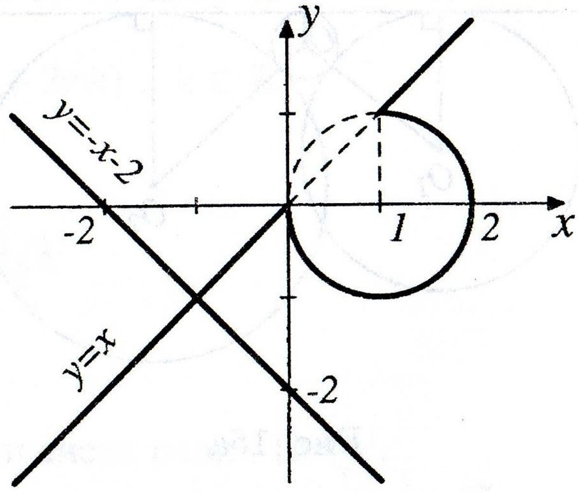

Рис. 17b

Решение: Ясно, что $x \leqslant y^2+1$. При этом условии уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l} y^2 - x + 1 = x^2 - x + 2y \\ y^2 - x + 1 = x - x^2 - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (y-1)^2 = x^2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = 1 - x \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{array}\right.$. Первые два равенства определяют прямые, третье — единичную окружность с центром в $(1, -1)$. Из ответа нужно удалить точки, лежащие правее параболы $x = y^2 + 1$.

10.II.1. Скорость мотоциклиста равна $54\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

10.II.2. $x \in [3, +\infty)$.

10.II.3. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{14} + 2\pi k$,
$x = \frac{15\pi}{14} + 2\pi k$, $x = \frac{23\pi}{14} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

10.II.4. Радиус равен 1 или $\frac{25}{9}$ или $\frac{25}{4}$ или 25.

10.II.5. См. рис. 17b.

11.I.1. Последний член прогрессии равен $\frac{59}{110}$.
РЕШЕНИЕ: См. решение 8.I.1.

11.I.2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
РЕШЕНИЕ: См. решение 4.I.2.

11.I.3. $x \in (-\infty, \log_3 \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$.
РЕШЕНИЕ: См. решение 4.I.3.

11.I.4. Площадь шестиугольника равна 39.
РЕШЕНИЕ: См. решение 4.I.4.

11.I.5. См. рис. 8a.
РЕШЕНИЕ: См. решение 4.I.5.

11.II.1. Последний член прогрессии равен $\frac{4}{11}$.

11.II.2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

11.II.3. $x \in (-\infty, \log_2 \frac{\sqrt{33}-1}{2}]$.

11.II.4. Площадь шестиугольника равна 23.

11.II.5. См. рис. 8b.

12.I.1. Пряников было в 6 раз больше, чем конфет.
РЕШЕНИЕ: Пусть m и n — число конфет и пряников, a и b — доля девочки и мальчика соответственно. Выразив доли первой и второй девочки, получим

$$\begin{cases} a = x + \frac{1}{5}(m-x) \\ a = 2x + \frac{1}{5}(m-a-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = m + 4x \\ 6a = m + 8x \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{m+8x}{m+4x} \Leftrightarrow$$

$m = 16x$. Выразив доли первого и второго мальчика, получим

$$\begin{cases} b = y + \frac{1}{9}(n-y) \\ b = 2y + \frac{1}{9}(n-b-2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b = n + 8y \\ 10b = n + 16y \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{n+16y}{n+8y} \Leftrightarrow$$

$n = 64y$. Поэтому $\dfrac{n}{m} = \dfrac{64y}{16x} = 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 6.$

12.I.2. $x \in [-1, 0) \cup [\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$.

РЕШЕНИЕ: ОДЗ: $x \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$. На ОДЗ неравенство равносильно $\dfrac{x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x - 3}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x+1} - x)^2 - 4}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{(\sqrt{x+1} - x - 2)(\sqrt{x+1} - x + 2)}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+1} - x + 2}{x} \leqslant 0$, так как $\sqrt{x+1} < x + 2$ при $x \geqslant -1$. Корнем числителя является $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$, а корнем знаменателя — $x = 0$. Применяя метод интервалов и учитывая ОДЗ, получим ответ.

12.I.3. $x = 1 + \sqrt{2}$.

РЕШЕНИЕ: Пусть $y = x^2 - x - 1$. Неравенство $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > \frac{\pi}{2}$ возможно лишь при положительных x и y. В этом случае $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (0, \pi)$ и $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$, поэтому уравнение равносильно $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{1-xy} = -1 \Leftrightarrow x + y = xy - 1 \Leftrightarrow$ $x^2 - 1 = x^3 - x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1 \pm \sqrt{2}$. По условиям $x > 0$ и $y > 0$ подходит только $x = 1 + \sqrt{2}$.

12.I.4. Площади фигур равны 20 и 10.

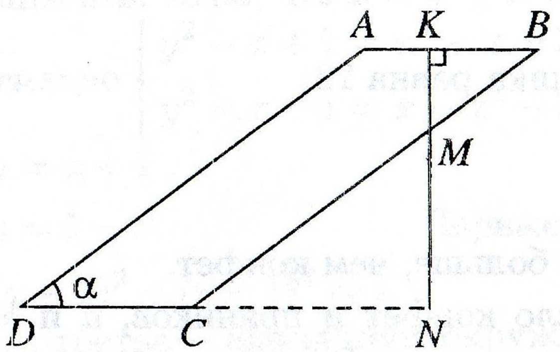

Рис. 18a

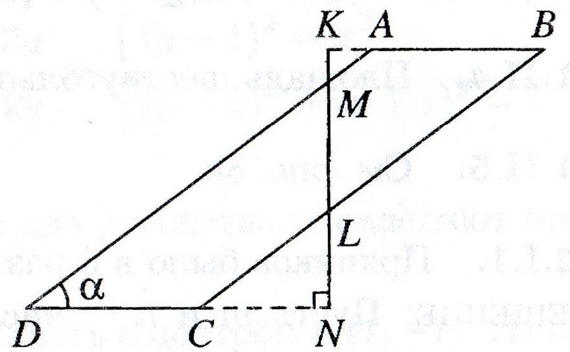

Рис. 18b

РЕШЕНИЕ: Пусть α — острый угол $ABCD$. Будем считать, что D — самая удаленная от прямой вершина. Возможны два случая.

1. Прямая пересекает AB и BC (рис. 18a). Тогда $BK = BC\cos\alpha - CN = 13\cos\alpha - 5$. Поэтому $S_{ABCD} = 3S_{BKM} \Leftrightarrow$ $AB \cdot BC \sin\alpha = \frac{3}{2}BK^2 \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow 52\cos\alpha = BK^2 \Leftrightarrow 4BK + 20 = BK^2$, откуда $BK = 2 + \sqrt{24} > 6$, что невозможно.

2. Прямая пересекает AD и BC (рис. 18b). Тогда $S_{DCLM} = S_{DNM} - S_{CNL} = \frac{1}{2}(DN^2 - CN^2)\operatorname{tg}\alpha = 48\operatorname{tg}\alpha$. По предположению $DN > BK$, откуда $S_{DCLM} > S_{ABLM}$. Поэтому

$S_{DCLM} = \frac{2}{3}S_{ABCD} \Leftrightarrow 48\operatorname{tg}\alpha = 52\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \frac{5}{12}$. Заметим, что $BK = 13\cos\alpha - 5 = 7 > 6$. Тогда $S_{DCLM} = 48 \cdot \frac{5}{12} = 20$ и $S_{ABLM} = 10$.

12.I.5. Наибольшее значение xy равно $\frac{25}{21}$.

Решение: При нахождении максимума xy достаточно рассматривать x и y одного знака, а так как неравенство не зависит от знаков x и y, можно считать $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Кроме того, максимум достигается лишь в случае $3x + 7y = 10$, иначе можно увеличить x и y, не нарушая условия $3x + 7y \leqslant 10$. Поэтому задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $f(x) = \dfrac{x(10-3x)}{7}$ на $[0, \frac{10}{3}]$. Оно достигается при $x = \frac{5}{3}$ и равно $\frac{25}{21}$.

12.II.1. $x : y = 4$.

12.II.2. $x \in [-2, 0) \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}+3}{2}]$.

12.II.3. $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

12.II.4. Площади фигур равны 9 и 15.

12.II.5. Наибольшее значение xy равно $\frac{16}{15}$.

13.I.1. 15 мальчиков.

Решение: Пусть n — количество пряников, x — доля каждого мальчика. Выразив доли первого и второго мальчиков, получим

$$\begin{cases} x = d + \frac{1}{16}(n-d) \\ x = 2d + \frac{1}{16}(n - x - 2d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - n = 15d \\ 17x - n = 30d \end{cases} \Rightarrow 32x - 2n =$$

$17x - n \Leftrightarrow n = 15x$. Число мальчиков равно $\dfrac{n}{x} = 15$.

13.I.2. $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Решение: Уравнение равносильно $x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(\sqrt{x+1} - x)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = x+2 \\ \sqrt{x+1} = x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x^2+4x+4 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$$

или $\begin{cases} x+1 = x^2 - 4x + 4 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$. Первая система не имеет решений, а из второй получаем $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

13.I.3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

РЕШЕНИЕ: Заметим, что левая часть равна $-2\sin x \cos 2x = -2\sin x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = (-\sin 2x + 2\sin^2 x)(\cos x + \sin x) = (1 - \sin 2x - \cos 2x)(\sin x + \cos x)$, а правая часть есть $(\sin x + \cos x)(1 + \sin 2x)$. Поэтому уравнение равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - \sin 2x - \cos 2x = 1 + \sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

13.I.4. Площади фигур равны 20 и 10.

РЕШЕНИЕ: См. решение 12.I.4.

13.I.5. Наибольшее значение xy равно $\frac{25}{21}$.

РЕШЕНИЕ: При нахождении максимума xy достаточно рассматривать x и y одного знака, а так как равенство не зависит от знаков x и y, можно считать $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Поэтому задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $f(x) = \dfrac{x(10-3x)}{7}$ на $[0, \frac{10}{3}]$. Оно достигается при $x = \frac{5}{3}$ и равно $\frac{25}{21}$.

13.II.1. 16 ежей.

13.II.2. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$.

13.II.3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.II.4. Площади фигур равны 9 и 15.

13.II.5. Наибольшее значение xy равно $\frac{16}{15}$.

14.I.1. Скорости велосипеда и мотоцикла относятся как 1 : 3.

РЕШЕНИЕ: Пусть v_1, v_2 — скорости соответственно велосипеда и мотоцикла, $a = \dfrac{v_2}{v_1}$, t — время, за которое велосипед доехал от места встречи C до пункта B (см. рис. 19). Тогда

$$\begin{cases} BC = tv_1 = 3v_2 \\ AC = 33v_1 = (t+2)v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3a \\ 33 = (t+2)a \end{cases} \Rightarrow 3a^2 + 2a - 33 = 0,$$

откуда $a = 3$.

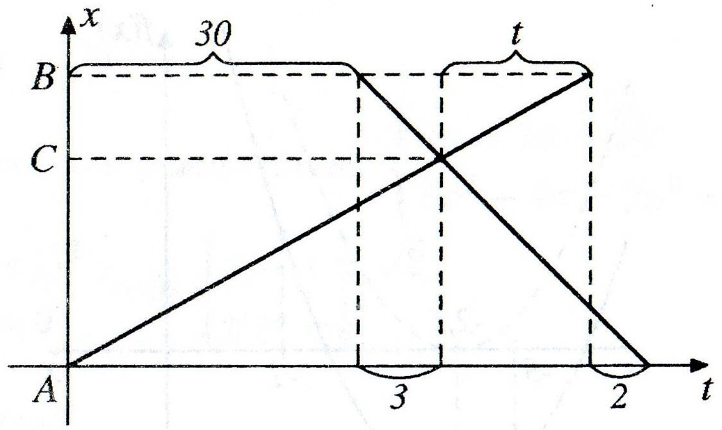

Рис. 19

14.I.2. $x = -\arccos\frac{\sqrt{65}-1}{8} + 2\pi k,$

$y = \pi - \arccos\frac{\sqrt{65}-1}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Решение: Исключая из систему y, получим $\sqrt{\cos x} = -2\sin x \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos x = 4\sin^2 x \\ \sin x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + \cos x - 4 = 0 \\ \sin x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{65}}{8} \\ \sin x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\arccos\frac{\sqrt{65}-1}{8} + 2\pi k \\ \sin x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = -\arccos\frac{\sqrt{65}-1}{8} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$

14.I.3. $x \in (-\infty, -1] \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right).$

Решение: ОДЗ: $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$. На ОДЗ неравенство

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3x-4)} > 3x - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4 < 0 \\ (x+1)(3x-4) > (3x-4)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x < \frac{4}{3} \\ (3x-4)(2x-5) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x \neq \frac{4}{3} \end{cases}.$$ Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

14.I.4. $SB = \sqrt{34}$.

Решение: Пусть h — высота пирамиды. Тогда $h = \dfrac{3V_{\text{пир.}}}{S_{\text{осн.}}} = 3$, то есть $h = SC$. Поэтому SC является высотой пирамиды, откуда $SC \perp BC$. По теореме Пифагора $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \sqrt{34}$.

14.I.5. $a \in (-3, 1]$.

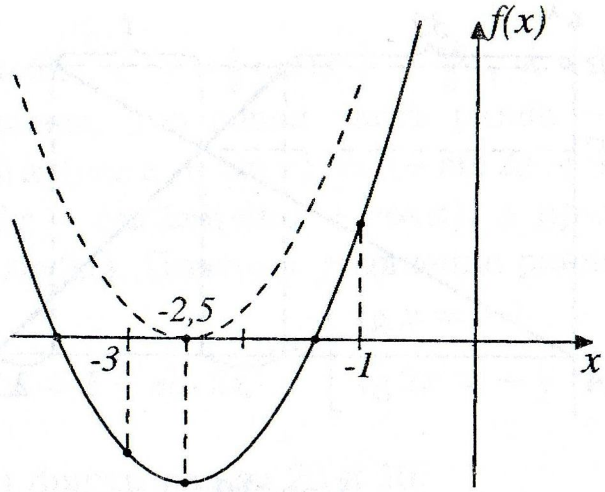

Рис. 20

Решение: Уравнение равносильно $\begin{cases} x^2+4x+3=a-x \\ x^2+4x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2+5x+3-a=0 \\ x \notin [-3,-1] \end{cases}$. Обозначим $f(x)=x^2+5x+3-a$. Возможны два случая (см. рис. 20).

1. f имеет единственный корень. Тогда он равен $-\frac{5}{2} \in [-3,-1]$, что нам не подходит.

2. f имеет два корня, из которых ровно один лежит на $[-3,-1]$. Это эквивалентно системе $\begin{cases} f(-3)<0 \\ f(-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-a<0 \\ -1-a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $-3<a \leqslant 1$.

14.II.1. Скорости мотоцикла и автомобиля относятся как $1:2$.

14.II.2. $x=\arcsin\frac{\sqrt{65}-1}{8}+2\pi k$,
$y=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{65}-1}{8}-2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

14.II.3. $x \in \{-\frac{3}{2}\} \cup [-\frac{1}{3}, 2]$.

14.II.4. $SA=\sqrt{85}$.

14.II.5. $a \in (-4,-2]$.

15.I.1. Скорости велосипеда и мотоцикла относятся как $1:3$.

РЕШЕНИЕ: См. решение 14.I.1.

15.I.2. $x = 1 \pm \sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

РЕШЕНИЕ: Система равносильна $\begin{cases} 2y = 2x - x^2 \\ 3x^2 + 4x - 2x^2 = 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2y = 1 - (x-1)^2 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

15.I.3. $x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$.

РЕШЕНИЕ: Уравнение равносильно $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = x - 3 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x^2 - 7x + 11 = 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$.

15.I.4. Бо́льший угол параллелограмма равен $\arccos(-\frac{1}{50})$.

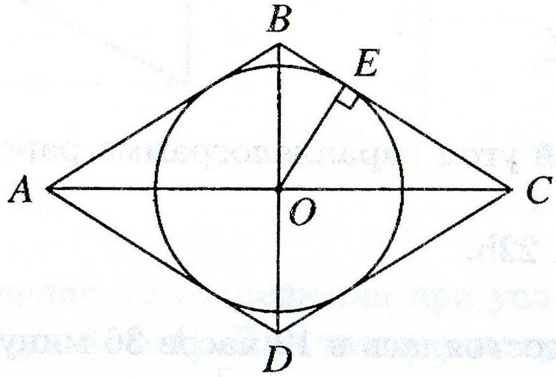

Рис. 21

РЕШЕНИЕ: Пусть $OB = x$. Тогда $AC \cdot OB = S_{ABCD} = 2BC \cdot OE \Rightarrow$ $10x = 7\sqrt{100 + x^2} \Leftrightarrow 100x^2 = 4900 + 49x^2 \Leftrightarrow x = \frac{70}{\sqrt{51}}$. Так как $\frac{70}{\sqrt{51}} < 10$, то $OB < OC$, и бо́льшим является угол B. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} = \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{51}}{7}$, и $\cos\angle B = \dfrac{1 - \frac{51}{49}}{1 + \frac{51}{49}} = -\frac{1}{50}$.

15.I.5. См. рис. 22а.

РЕШЕНИЕ: Если $y \geqslant 0$, то $|x-1| - y = 2y + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(|x-1| - 2)$, а в случае $y < 0$ $\quad |x-1| + y = 2y + 2 \Leftrightarrow y = |x-1| - 2.$

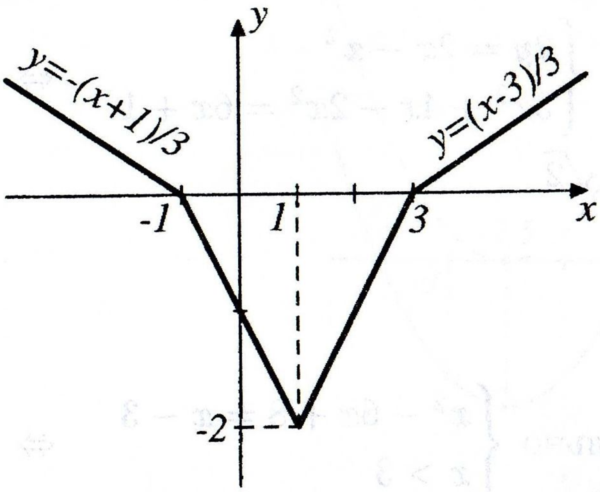

Рис. 22a

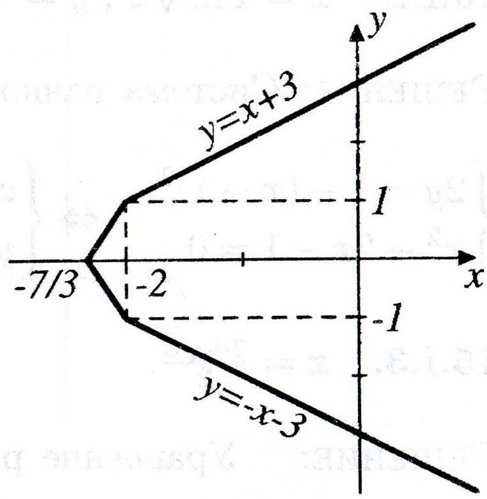

Рис. 22b

15.II.1. Скорости мотоцикла и автомобиля относятся как 1 : 2 .

15.II.2. $x = \frac{2}{3}$, $y = -1 \pm \sqrt{3}$.

15.II.3. $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

15.II.4. Меньший угол параллелограмма равен $\arccos \frac{7}{25}$.

15.II.5. См. рис. 22b.

16.I.1. Встреча состоялась в 12 часов 36 минут.

Решение: См. решение 9.I.1.

16.I.2. $x = 2\pi k$, $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Уравнение $\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \Leftrightarrow \cos x = |\cos x - \sin x|$, откуда $\cos x \geqslant 0$ и $\cos x - \sin x = \pm \cos x \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 2\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k \end{array}\right. .$$

По условию $\cos x \geqslant 0$ в обеих сериях подходят только четные k.

16.I.3. $x \in (0, 2-\sqrt{3}] \cup (1,3] \cup [2+\sqrt{3}, 4)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (0,1) \cup (1,4)$. Неравенство равносильно

$$\log_3(4x-x^2)-\frac{\log_3(4x-x^2)}{\log_3 x}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(4x-x^2)\cdot(\log_3 x-1)}{\log_3 x}\leqslant 0.$$

Корнями числителя являются $2\pm\sqrt{3}$ и 3, а корень знаменателя равен 1. Применяя метод интервалов и учитывая ОДЗ, получаем ответ.

16.I.4. Площадь фигуры равна $\frac{9}{8}$.

Решение: См. решение 9.I.4.

16.I.5a. См. рис. 23a .

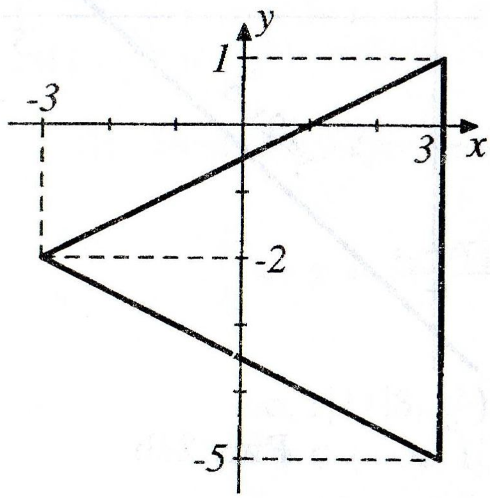

Рис. 23a

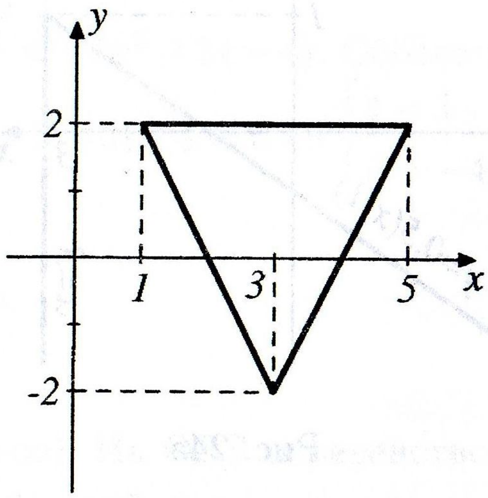

Рис. 23b

Решение: Уравнение имеет решения при условии $|y+2|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant y+2\leqslant 3 \Leftrightarrow y\in[-5,1]$. Для таких y получаем

$$\left[\begin{array}{l} 3-|y+2|=x-|y+2| \\ 3-|y+2|=|y+2|-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2|y+2|-3 \end{array}\right..$$

16.I.5b. См. рис. 24a .

Решение: Уравнение $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y\leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} 1-y=x-y-2 \\ 1-y=y+2-x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y\leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ y=\frac{x-1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right..$

16.II.1. Встреча состоялась в 6 часов 33 минуты.

16.II.2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

16.II.3. $x \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup (1, 2] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$.

16.II.4. Площадь фигуры равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16.II.5a. См. рис. 23b.

16.II.5b. См. рис. 24b.

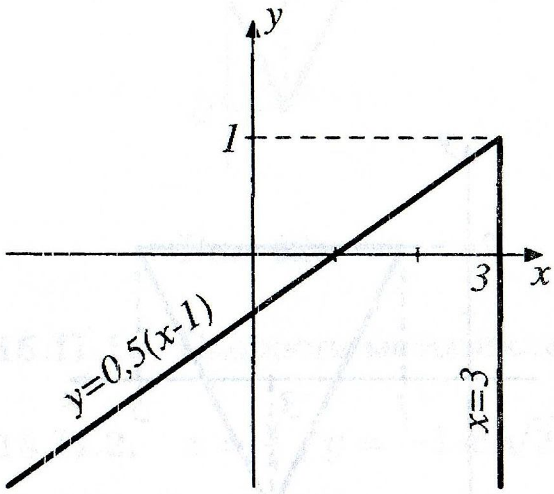

Рис. 24a

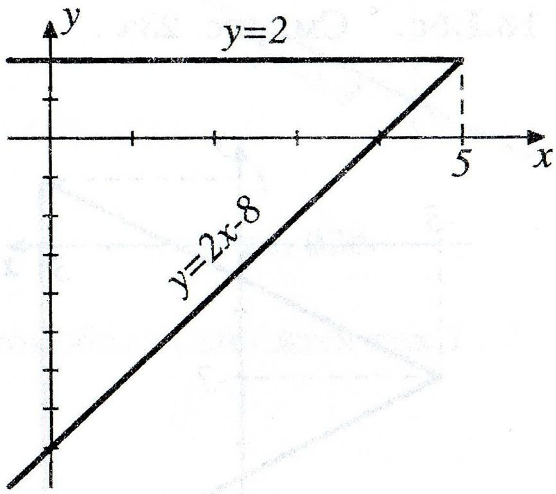

Рис. 24b

17.I.1. На 25%.

Решение: Пусть a_n — n-й член прогрессии, d — ее разность. Тогда $\dfrac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = 1,8 \cdot (a_1 + 16d) \Leftrightarrow (a_1 + 4d) \cdot 5 = a_1 + 16d \Leftrightarrow$ $a_1 = -d$. Отсюда $\dfrac{a_{11}}{a_{14}} = \dfrac{a_1 + 10d}{a_1 + 13d} = \dfrac{9d}{12d} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{a_{14} - a_{11}}{a_{14}} \cdot 100\% =$ $(1 - \frac{3}{4}) \cdot 100\% = 25\%$.

17.I.2a. $x \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

Решение: Неравенство $\Leftrightarrow (3x^2 - x - 1)^2 - (x^2 + 3x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow$ $(4x^2 + 2x - 2)(2x^2 - 4x) < 0 \Leftrightarrow 8(x+1)(x - \frac{1}{2})x(x-2) < 0$. Применяя метод интервалов, получаем ответ.

17.I.2b. $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

Решение: Уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 1 = 3x^2 - x - 1 \\ x^2 + 3x - 1 = x + 1 - 3x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{array}\right..$$

17.I.3a. $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Решение: Уравнение равносильно $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x+1}=\dfrac{4-x}{x^2-2x} \\ \dfrac{4-x}{x^2-2x}\geqslant 0 \end{cases}$.

Неравенство $\dfrac{4-x}{x(x-2)}\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,4]$. С учетом этого условия $\dfrac{(x-3)(x-1)}{x+1}=\dfrac{4-x}{x(x-2)} \Leftrightarrow x(x-3)(x-1)(x-2)=(4-x)(x-1) \Leftrightarrow (x^2-3x)(x^2-3x+2)=-(x^2-3x-4)$. Обозначим $t=x^2-3x$. Тогда $t(t+2)+t-4=0 \Leftrightarrow t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x-1=0 \\ x^2-3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\tfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

17.I.3b. $x\in(-\infty,1]\cup[3,\frac{11}{3})$.

Решение: ОДЗ: $x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$. На ОДЗ неравенство $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-4x+3<x^2-10x+25 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x<22 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow x<\tfrac{11}{3}.$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

17.I.4. Точка C имеет координаты $(0,2)$.

Решение: Пусть $C=(0,a)$, $D=(-2,-2)$. Так как $CB=CD$, ломаные ACB и ACD имеют равную длину. Длина ACD минимальна, если точка C лежит на отрезке AD (см. рис. 25). Для такой C выполняется $\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{8-a}{3}$, откуда $a=2$.

17.I.5. См. рис. 26a.

Решение: Заметим, что $f(x)$ не определена при $x=\frac{\pi k}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ и $|\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x|=\left|\dfrac{\cos 2x}{2\sin x\cos x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right|=\left|\dfrac{\cos 2x-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}\right|=$ $\dfrac{1}{|\sin 2x|}$. Поэтому $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k) \\ -1, & x\in(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi(k+1)) \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

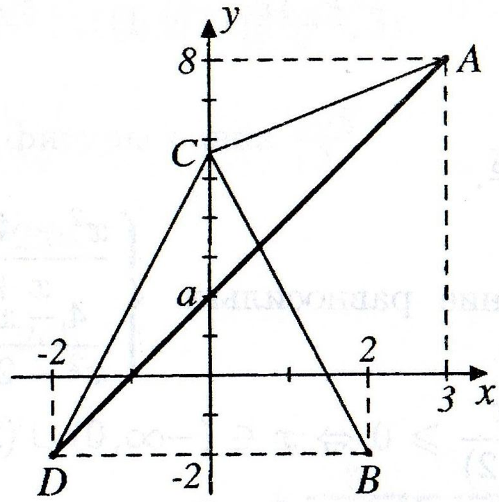

Рис. 25

17.II.1. На 50%.

17.II.2a. $x \in (-2, 0) \cup (1, \frac{5}{3})$.

17.II.2b. $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{5}{3}$.

17.II.3a. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

17.II.3b. $x \in (\frac{2}{9}, 2] \cup [3, +\infty)$.

17.II.4. Точка C имеет координаты $(1, 0)$.

17.II.5. См. рис. 26b.

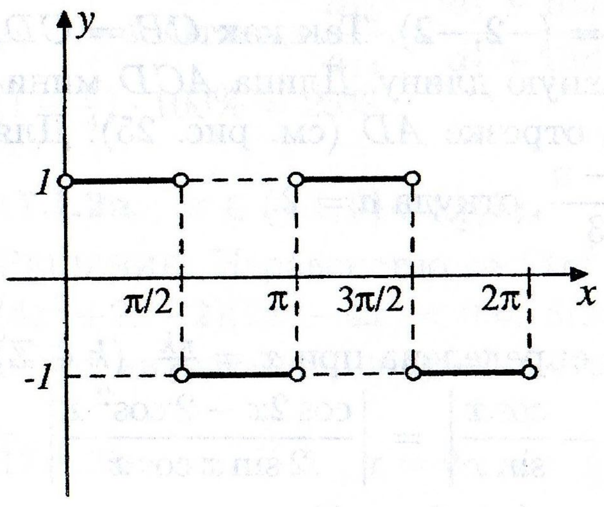

Рис. 26a

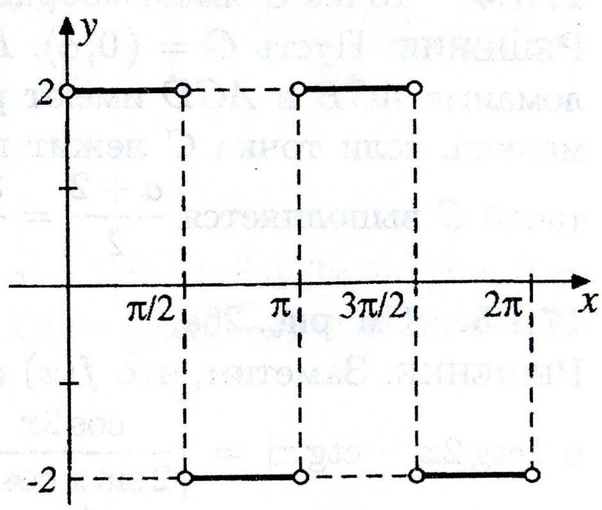

Рис. 26b

СОДЕРЖАНИЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБИТУРИЕНТУ СПбГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2007