САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБИТУРИЕНТУ СПбГУ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ

Санкт-Петербург, 2005

Представлено к изданию Центральной приемной комиссией С.-Петербургского государственного университета

Пособие содержит условия задач, предлагавшихся в 2004 году на вступительных экзаменах в С.-Петербургский государственный университет. Приведены ответы, а также решения задач первого варианта. Пособие адресовано поступающим в СПбГУ, учителям и старшеклассникам.

Составители: *С. М. Ананьевский, Б. М. Беккер, Ю. А. Ильин, В. В. Макеев, Н. Ю. Нецветаев, А. К. Орлов, А. В. Осипов, П. К. Черняев, Ю. В. Чурин* (председатель предметной комиссии).
Отв. редактор: *А. А. Семенов.*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001.

Подписано в печать с оригинала-макета 15.03.2005.
Формат 60 × 84$^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,65. Заказ № 171

Издательство СПбГУ.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.
Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

Цель этой памятки — познакомить Вас с порядком проведения вступительных экзаменов по математике, с обязанностями абитуриентов во время экзаменов, а также с задачами, которые предлагались на вступительных экзаменах в СПбГУ.

Накануне экзамена узнайте в приемной комиссии факультета, в каком месте он будет проходить, как туда вовремя добраться. На экзамен нужно приходить отдохнувшим, хорошо выспавшимся. В случае болезни не приходите на экзамен, а обратитесь в поликлинику СПбГУ, возьмите справку об освобождении и известите приемную комиссию факультета.

На экзамене Вам потребуется ручка, не помешает и запасная. Писать можно только синей, черной или фиолетовой пастой (чернилами). Разрешается иметь при себе карандаш. Пропуском на экзамен служат экзаменационный лист и паспорт. Если их нет, то допустить Вас до экзамена могут только по письменному разрешению ответственного секретаря приемной комиссии факультета. Найти его Вам помогут дежурные у входа.

На экзамен рекомендуется приходить за 15–20 минут до его начала. Примерно в это время начинается впуск в аудиторию. Требования экзаменатора поменять место должны выполняться безоговорочно. Выходить из аудитории во время экзамена нельзя. После окончания впуска в аудиторию экзаменаторы напомнят основные правила поведения на экзамене. Вы заполните титульный лист, на котором не следует делать никаких других записей. Затем Вам продиктуют тексты задач, объявят время окончания экзамена. Варианты письменных экзаменов содержат по 5 задач, на решение которых отводится 4 часа.

Все предлагаемые на экзаменах задачи укладываются в рамки «Программы вступительных испытаний по математике» для поступающих в Санкт-Петербургский государственный университет. Трудность вариантов обусловлена потребностями факультетов в определенном уровне математических знаний, реальными возможностями абитуриентов данного факультета, а также конкурсной ситуацией на данном факультете.

Обычно в каждом варианте имеется не менее двух несложных задач и по крайней мере одна трудная или нестандартная задача. Начинайте решать ту задачу, которая кажется Вам проще. Доведите решение до конца, проверьте и перепишите в чистовик (ответ при этом рекомендуется выделить). Решения на чистовике можно располагать в любом порядке, необходимо лишь сохранить нумерацию задач. Не относящиеся к решению задач надписи и рисунки в работе делать нельзя.

Решенная задача придаст Вам уверенности в себе и успокоит. После этого принимайтесь за самую легкую из оставшихся задач. Если за 10–20 минут Вы не можете найти решения, отложите эту задачу и примитесь за следующую. Если задача нестандартная, имеет непривычную формулировку, не спешите сразу приниматься за выкладки, сперва обдумайте условие, наметьте план решения. Помните, что все предлагаемые задачи доступны, для их решения не требуются сведения, не входящие в программу вступительных экзаменов.

В конце экзамена не забудьте тщательно проверить решения, затем вложите все листы один в другой, а затем в титульный лист. Ваш экзаменационный лист останется у экзаменаторов. После экзамена в приемной комиссии факультета и в месте проведения экзамена будут вывешены ответы к задачам. Оценку Вам сообщат в приемной комиссии факультета накануне следующего экзамена.

Далее приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в университет в 2004 и предшествующие годы, ответы ко всем задачам, а также краткие решения задач первого варианта.

Задачи для поступавших на дневное отделение в 2004 г.

1. Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления

ВАРИАНТ I

1. Определить число решений уравнения $\sqrt{\dfrac{14x^2 - ax - a}{x-1}} = \sqrt{2x+a}$ в зависимости от параметра a.
2. Решить неравенство $2\log_{x^2}\left(x - \dfrac{4}{x}\right) \le \log_{2-x}(2+x)$.
3. Решить уравнение $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos 3x = \sin x \sin\dfrac{\pi}{4}$.
4. Ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны, а луч AO, где O — центр вписанной в тетраэдр сферы, пересекает грань BCD в точке M. Найти площадь треугольника BMC, если $AB = 4$, $AC = 5$ и площадь треугольника BCD равна $\sqrt{141}$.
5. Точка пересечения биссектрис треугольника делит одну из них в отношении $1 : 3$. Наибольшая из его сторон равна 26. Радиус вписанной окружности равен 6. Найти радиус описанной окружности.

ВАРИАНТ II

1. Определить число решений уравнения $\sqrt{\dfrac{28x^2 + bx + 2b}{x-2}} = \sqrt{4x-b}$ в зависимости от параметра b.
2. Решить неравенство $\log_x\left(x - \dfrac{4}{x}\right) \le 2\log_{(2-x)^2}(2+x)$.
3. Решить уравнение $\cos\dfrac{\pi}{12}\sin 3x = \cos x \cos\dfrac{\pi}{4}$.
4. Ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны, а луч AO, где O — центр вписанной в тетраэдр сферы, пересекает грань BCD в точке K. Найти площадь треугольника BKD, если $AB = 2$, $AC = 4$ и площадь треугольника BCD равна $\sqrt{61}$.
5. Точка пересечения биссектрис треугольника делит одну из них в отношении $2 : 3$. Наименьшая из его сторон равна 25. Радиус вписанной окружности равен 6. Найти радиус описанной окружности.

2. Экономический факультет (математические методы в экономике, прикладная информатика)

ВАРИАНТ I

1. Несколько косцов подрядились выкосить луг и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в 7 раз дольше, чем последний?
2. Решить уравнение $\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{6}$.
3. Решить уравнение $\log_3^2 x + \log_x^2 27 = \sqrt{3}\log_3\left(2\cdot 3^{\sqrt{3}}x - x^2\right)$.
4. Решить неравенство $x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 1$.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны $120°$. Найти длины сторон AB и BC, если известно, что $CD = a$, $DE = b$, $EF = c$, $AF = d$.

ВАРИАНТ II

1. Бригада маляров взялась красить забор. Начав покраску одновременно и некоторое время проработав вместе, маляры один за другим через равные промежутки времени стали покидать работу. Через 10 часов, к моменту ухода последнего, половина забора была покрашена. За какое время маляры выкрасили бы весь забор, работая вместе, если известно, что ушедший последним проработал в 5 раз дольше ушедшего первым?
2. Решить уравнение $\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + \sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{6}$.
3. Решить уравнение $\log_2^2 x + \log_x^2 4 = \sqrt{2}\log_2\left(2\cdot 2^{\sqrt{2}}x - x^2\right)$.
4. Решить неравенство $1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} > x$.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны $120°$. Найти длины сторон AB и CD, если известно, что $BC = a$, $DE = b$, $EF = c$, $AF = d$.

3. Экономический факультет (экономическая теория, мировая экономика, экономика и управление на предприятии, финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит)

ВАРИАНТ I

1. Несколько косцов подрядились выкосить луг и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в 7 раз дольше, чем последний?
2. Решить уравнение $\cos x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x$.
3. Решить уравнение $\log_3^2 x + \log_x^2 27 = \sqrt{3} \log_3 \left(2 \cdot 3^{\sqrt{3}} x - x^2\right)$.
4. Решить неравенство $\sqrt{x+1}\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right) > \dfrac{1}{x} - x - 1$.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны 120°. Найти длины сторон AB и BC, если известно, что $CD = a$, $DE = b$, $EF = c$, $AF = d$.

ВАРИАНТ II

1. Бригада маляров взялась красить забор. Начав покраску одновременно и некоторое время проработав вместе, маляры один за другим через равные промежутки времени стали покидать работу. Через 10 часов, к моменту ухода последнего, половина забора была покрашена. За какое время маляры выкрасили бы весь забор, работая вместе, если известно, что ушедший последним проработал в 5 раз дольше ушедшего первым?
2. Решить уравнение $\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x = 1$.
3. Решить уравнение $\log_2^2 x + \log_x^2 4 = \sqrt{2} \log_2 \left(2 \cdot 2^{\sqrt{2}} x - x^2\right)$.
4. Решить неравенство $\sqrt{x+3}\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right) < \dfrac{1}{x} - x - 3$.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны 120°. Найти длины сторон AB и CD, если известно, что $BC = a$, $DE = b$, $EF = c$, $AF = d$.

4. Факультет менеджмента (государственное и муниципальное управление), химический факультет

ВАРИАНТ I

1. Отношение суммы первых трех членов бесконечной возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно 7:3. Найти разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\frac{7}{4}$.
2. Решите уравнение $\cos 4x = 1 - 3\cos x$.
3. Решите уравнение $\log_{(x-1)^2}(\sqrt{x+3}-1) = \frac{1}{4}$.
4. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y \le |x-y|$.
5. К вписанной окружности треугольника ABC проведены три касательные, не содержащие сторон $AB, BC,$ и AC, но параллельные им. Радиусы описанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника ABC, равны R_1, R_2, и R_3. Найти радиус описанной окружности треугольника ABC.

ВАРИАНТ II

1. Отношение суммы первых четырех членов бесконечной убывающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих шести членов равно 3:2. Найти разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\frac{9}{4}$.
2. Решите уравнение $\cos 4x = 1 + 3\sin x$.
3. Решите уравнение $\log_{x^2}(3-\sqrt{x+5}) = \frac{1}{4}$.
4. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 - y \ge |y-x|$.
5. К вписанной окружности треугольника ABC проведены три касательные, не содержащие сторон $AB, BC,$ и AC, но параллельные им. Радиусы вписанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника ABC, равны r_1, r_2, и r_3. Найти радиус вписанной окружности треугольника ABC.

5. Факультет менеджмента (финансовый менеджмент)

ВАРИАНТ I

1. Отношение суммы первых трех членов бесконечной возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно 7:3. Найти разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\dfrac{7}{4}$.
2. Решить уравнение $\quad 2\cos 2x + 2\cos x + \dfrac{5}{4} = \sin 2x.$
3. Решить уравнение $\quad \sqrt{\dfrac{1}{2} + x} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - x} = \sqrt[3]{x^2} - 1.$
4. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\quad x^2 + y \leq |x - y|.$
5. К вписанной окружности треугольника ABC проведены три касательные, не содержащие сторон $AB, BC,$ и AC, но параллельные им. Радиусы описанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника ABC, равны R_1, R_2, и R_3. Найти радиус описанной окружности треугольника ABC.

ВАРИАНТ II

1. Отношение суммы первых четырех членов бесконечной убывающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих шести членов равно 3:2. Найти разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\dfrac{9}{4}$.
2. Решить уравнение $\quad 2\cos 2x + 2\sin x - \dfrac{5}{4} = \sin 2x.$
3. Решить уравнение $\quad \sqrt{2 + \dfrac{x}{2}} - \sqrt{2 - \dfrac{x}{2}} = 2 - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2}.$
4. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\quad x^2 - y \geq |y - x|.$
5. К вписанной окружности треугольника ABC проведены три касательные, не содержащие сторон $AB, BC,$ и AC, но параллельные им. Радиусы вписанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника ABC, равны r_1, r_2, и r_3. Найти радиус вписанной окружности треугольника ABC.

6. Факультет международных отношений (прикладная информатика в гуманитарной сфере)

ВАРИАНТ I

1. Решить уравнение $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} - \dfrac{2\cos x}{1+\cos x} = 1.$
2. Решить неравенство $x + 7 > 6\sqrt[3]{x-2}.$
3. Решить неравенство $\log_{1-x} \dfrac{5-3x}{4x} > 0.$
4. Продолжения биссектрис углов при вершинах P и Q треугольника PQR пересекают описанную окружность в точках P' и Q' соответственно. Найти $P'Q'$, если $PQ = 6$, а радиус описанной окружности равен 5.
5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a \cdot 2^x - 2^{1-x} - 4a = 0$ имеет два различных положительных корня.

ВАРИАНТ II

1. Решить уравнение $\dfrac{2\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 1.$
2. Решить неравенство $x + 5 \leq 3\sqrt[3]{x+3}.$
3. Решить неравенство $\log_x \dfrac{5-2x}{1-x} < 0.$
4. Продолжения высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B, пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A' и B' соответственно. Найти AB, если $A'B' = 12$, а радиус описанной окружности равен 10.
5. Найти все значения параметра b, при которых уравнение $3b\sqrt{x+4} = bx + 4b + 1$ имеет два различных отрицательных корня.

7. Факультет географии и геоэкологии. Геологический факультет

ВАРИАНТ I

1. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 - y = |x| + |y|$.
2. Решить уравнение $x\sqrt{\dfrac{x+3}{x}} = (2-x)\sqrt{\dfrac{2x-6}{x-2}}.$

3. Решить уравнение $\sin\left(\pi\cos^2 x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi\cos 2x)$.
4. Решить уравнение $\log_{3x}(1-x)^4 - \log_{9x}(1-x)^6 = \log_9(1-x)^2$.
5. Прямая пересекает диагональ BD ромба $ABCD$ в точке M и стороны AD и BC в точках K и L соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABLK$, если известно, что $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$, $KM = 5$ и $BM : DM = 1 : 2$.

ВАРИАНТ II

1. Изобразить на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 + y = |x| - |y|$.
2. Решить уравнение $x\sqrt{\frac{x+1}{x}} = (4-x)\sqrt{\frac{2x-7}{x-4}}$.
3. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right) = \cos\left(\pi\cos 2x - \frac{\pi}{8}\right)$.
4. Решить уравнение $\log_x(2-x)^2 - \log_{4x}(2-x)^4 = \log_8(2-x)^2$.
5. Прямая пересекает диагональ AC ромба $ABCD$ в точке N и стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Найти площадь четырехугольника $APQD$, если известно, что $AB = 5$, $\angle BAD = 120°$, $PN = 4$ и $AN : CN = 3 : 2$.

8. Филологический факультет (теоретическая и прикладная лингвистика, прикладная информатика в области искусств и гуманитарных наук)

ВАРИАНТ I

1. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} ax^2 + 2y^2 = 1, \\ x^2 + (a+1)y^2 = a \end{cases}$ имеет решение.
2. Решить неравенство $\sqrt{2x - x^3} \geq \sqrt{x^2 - \frac{8}{x+1}}$.
3. Решить уравнение $\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = \sin^2 3x$.
4. Решить уравнение $\log_{3x}(1-x)^4 - \log_{9x}(1-x)^6 = \log_9(1-x)^2$.
5. Прямая пересекает диагональ BD ромба $ABCD$ в точке M и стороны AD и BC в точках K и L соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABLK$, если известно, что $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$, $KM = 5$ и $BM : DM = 1 : 2$.

ВАРИАНТ II

1. Найти все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} 3x^2+(2-b)y^2=4, \\ bx^2-y^2=b+1 \end{cases}$ имеет решение.
2. Решить неравенство $\sqrt{x^3-3x} \geq \sqrt{x^2+\dfrac{10}{x-1}}$.
3. Решить уравнение $\cos 4x - \cos 6x + \cos 8x = \cos^2 3x$.
4. Решить уравнение $\log_x (2-x)^2 - \log_{4x}(2-x)^4 = \log_8 (2-x)^2$.
5. Прямая пересекает диагональ AC ромба $ABCD$ в точке N и стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Найти площадь четырехугольника $APQD$, если известно, что $AB=5$, $\angle BAD = 120^\circ$, $PN=4$ и $AN:CN=3:2$.

9. Факультет психологии

ВАРИАНТ I

1. Найти все конечные целочисленные арифметические прогрессии, обладающие следующими свойствами: 1) число 252 является последним членом прогрессии; 2) сумма первых четырех членов равна сумме двух последних.
2. Решить уравнение $\sqrt{x^2+6} - \sqrt{x^2+16} - x = 0$.
3. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{\log_2(x+2)} \leq \dfrac{|x-1|}{3}$.
4. Решить уравнение $\cos 2x - \cos 4x = \dfrac{1}{2} + \sin x$.
5. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если известно, что $AB=AC=15$, $BD=13$, $CD=5$.

ВАРИАНТ II

1. Найти все конечные целочисленные арифметические прогрессии, у которых сумма первых десяти членов равна сумме пяти последних и равна 1000.
2. Решить уравнение $\sqrt{x^2-5} + \sqrt{10-x^2} + x = 0$.
3. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{\log_3(x+1)} \leq \dfrac{|x-2|}{2}$.
4. Решить уравнение $\cos 2x + \cos 4x = -\dfrac{1}{2} - \cos x$.
5. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если известно, что $AB=5$, $AC=CD=10$, $BD=11$.

10. Биолого-почвенный факультет (экология)

ВАРИАНТ I

1. Решить уравнение $\cos^2 2x - 2\sin 2x = \dfrac{2}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.
2. Решить уравнение $\log_5(2x+1) + 3 = \log_5(2x-29)^2$.
3. Сколько корней имеет уравнение $1 - a = |2 - |3 - |x|||$ в зависимости от параметра a?
4. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 9$, $BC = 11$, $AC = 8$. Вписанная окружность касается стороны AC в точке D. Найти длину BD.
5. В правильной треугольной пирамиде $SPQR$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а боковое ребро — $\sqrt{5}$. На боковых ребрах SP, SQ, SR взяты соответственно точки A, B, C так, что $SA/AP = 1/3$, $SB/BQ = 3/1$, $SC/CR = 1/1$. Найти площадь треугольника ABC.

ВАРИАНТ II

1. Решить уравнение $3\sin 2x - \cos^2 2x = \dfrac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$.
2. Решить уравнение $\log_7(2x-1) + 2 = \log_7(2x-9)^2$.
3. Сколько корней имеет уравнение $3 - b = ||2|x| - 1| - 2|$ в зависимости от параметра b?
4. Вписанная окружность касается стороны PQ треугольника PQR в точке F, причем $PF = 6$, $FQ = 10$, $\cos\angle QPR = 1/6$. Найти длины сторон треугольника.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 1, а боковое ребро — $\sqrt{5}$. На боковых ребрах SA, SB, SC взяты соответственно точки P, Q, R так, что $SP/PA = 1/2$, $SQ/QB = 2/1$, $SR/RC = 1/1$. Найти площадь треугольника PQR.

Задачи для поступавших на вечернее и заочное отделения в 2004 г.

11. Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления

ВАРИАНТ I

1. Построить график функции
$$y = \frac{1}{2} + 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin\frac{\pi}{3}}\,.$$
2. Косцы должны выкосить два луга. Выкосив большой луг площадью 42 га, косцы на 20% увеличили свою производительность, благодаря чему меньший луг площадью 36 га они выкосили на 40 мин быстрее. За какое время косцы выкосили большой луг?
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \dfrac{x-1}{3x+1}\right) \le 0\,.$
4. Решить уравнение $2\sqrt{3x-x^2-2}+4-2x=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}.$
5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка P является серединой ребра DD', а точка Q делит ребро BB' в отношении $1:3$ (считая от точки B). Найти угол наклона плоскости, проходящей через точки P, Q и A, к грани $ABB'A'$ куба.

ВАРИАНТ II

1. Построить график функции
$$y = \frac{1}{2} + 2\,\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{6}}\,.$$
2. Автомашина прошла 200 км и затем снизила скорость на 20% на втором участке длиной в 120 км. При этом она на втором участке потратила на 25 минут меньше. Какова скорость автомобиля на первом участке?
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3x+1}{x-1}\right) \le 0\,.$
4. Решить уравнение $2\sqrt{3x-x^2-2}+2x-2=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}.$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка P является серединой ребра $A'D'$, а точка Q — серединой ребра CC'. Найти угол наклона плоскости, проходящей через точки P, Q и B, к основанию $ABCD$ куба.

12. Факультет психологии

ВАРИАНТ I

1. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2}{3x^2-4x-4}} \le \dfrac{1}{2}$.
2. Решить уравнение $\cos 2x + \sin 2x + 1 = |\cos x|$.

2′ *(для заочного отделения)*. Решить уравнение $\cos 2x + \sin 2x + 1 = \cos x$.

3. Решить уравнение $\log_2(x-2) = \log_3(2-x)^2$.
4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали делятся точкой их пересечения в отношении $1:2$ и $1:3$, считая от вершин B и C соответственно. Найти AB, если известно, что $\angle B = 120°$, $\angle C = 90°$ и $CD = 9$.
5. Найти квадратичный многочлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 2x + 6$, а второй корень в два раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$, и $Q(4) = 3$.

ВАРИАНТ II

1. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2-6x+9}{2-x}} \le 2$.
2. Решить уравнение $1 - \sin 2x - \cos 2x = |\sin x|$.

2′ *(для заочного отделения)*. Решить уравнение $1 - \sin 2x - \cos 2x = \sin x$.

3. Решить уравнение $\log_3(3-x) = \log_2(x-3)^2$.
4. В треугольнике ABC с углом $B = 150°$ медиана BD продолжена до точки M так, что $BD : DM = 1 : 3$. Найти угол BCM, если известно, что $AB = CM$.
5. Найти квадратичный многочлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$, и $Q(3) = -3$.

13. Экономический факультет (вечернее отделение)

ВАРИАНТ I

1. Найти значения параметра a, при которых максимальное значение функции $f(x) = ax + 1 - |1 + x|$ на отрезке $[-3, 2]$ равно 1.
2. Решить уравнение $(\sin 3x + \cos x)(\cos 3x + \sin x) = \cos 6x$.

2′ *(для заочного отделения)*. Решить уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{\cos x}$.

3. Решить уравнение $6 + \log_2 x \cdot \log_3 \sqrt{x+2} = \log_3 x^3 + \log_2(x+2)$.
4. Решить неравенство $\sqrt{2x+4} - x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} > 0$.

4′ *(для заочного отделения)*. Решить неравенство $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x+1}$.

5. В четырехугольник вписана окружность. Найти ее радиус, если известно, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, одна из его сторон равна a, площадь равна S и его можно вписать в окружность.

ВАРИАНТ II

1. Найти значения параметра b, при которых минимальное значение функции $f(x) = bx - 2 + |2 - x|$ на отрезке $[-2, 3]$ равно -2.
2. Решить уравнение $(\sin 2x - \cos x)(\sin x - \cos 2x) = \cos 5x$.

2′ *(для заочного отделения)*. Решить уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x}$.

3. Решить уравнение $6 + \log_2 x = \log_3 \sqrt{x} \cdot \log_2(x+3) + \log_3(x+3)^3$.
4. Решить неравенство $\sqrt{x+2} + x\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}} < 0$.

4′ *(для заочного отделения)*. Решить неравенство $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2x-1}$.

5. Четырехугольник вписан в окружность. Найти ее радиус, если известно, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, одна из его сторон равна b, площадь равна S и в него можно вписать окружность.

Ответы и решения

1.I.1. При $a<0$ решений нет, при $a\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right)\cup\{1\}\cup\{7\}$ решение одно, при $a\in\left[\dfrac{1}{4},1\right)\cup(1,7)\cup(7,+\infty)$ — два решения.

Решение: Данное уравнение эквивалентно уравнению $14x^2-ax-a=(x-1)(2x+a)$ при дополнительном условии $2x+a\geq 0$, $x\neq 1$. В свою очередь это уравнение преобразуется к виду $x(6x-(a-1))=0$, то есть либо $x=0$ (при $a\geq 0$), либо $x=\dfrac{a-1}{6}$ (при условии, что $4a\geq 1$, $a\neq 7$). Совпадают корни при $a=1$. Отсюда получаем ответ.

1.I.2. $x\in(-2,-\sqrt{3}]\cup(-1,0)$;

Решение: ОДЗ: $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$. На ОДЗ неравенство эквивалентно следующему: $\log_{-x}\left(\dfrac{4-x^2}{-x}\right)\leq\log_{2-x}(2+x)\;\Leftrightarrow\;\log_{-x}(2+x)+\log_{-x}(2-x)-1\leq\dfrac{\log_{-x}(2+x)}{\log_{-x}(2-x)}$.

Введя обозначения $a=\log_{-x}(2-x)$, $b=\log_{-x}(2+x)$, получим неравенство $a+b-1\leq\dfrac{b}{a}\;\Leftrightarrow\;\dfrac{(a+b)(a-1)}{a}\leq 0$. Рассмотрим теперь два случая.

I) $\underline{-2<x<-1.}$ В этом случае $a>1\;\Rightarrow\;a+b\leq 0\;\Leftrightarrow\;\log_{-x}(4-x^2)\leq 0\;\Leftrightarrow\;4-x^2\leq 1\;\Leftrightarrow\;x^2\geq 3\;\Rightarrow\;-2<x\leq-\sqrt{3}$.

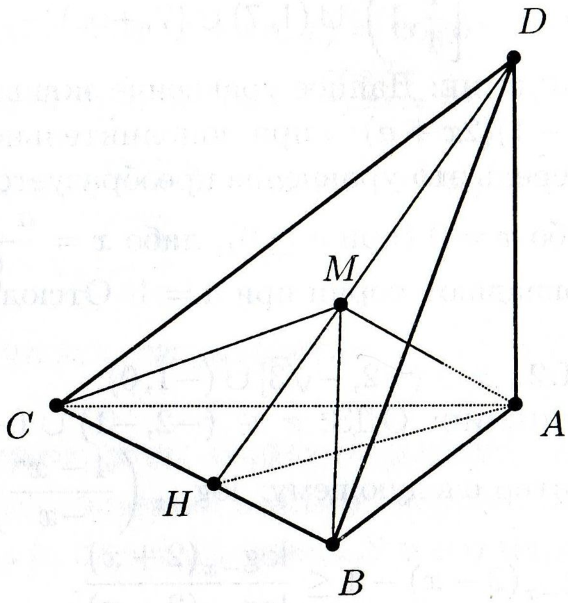
II) $\underline{-1<x<0.}$ В этом случае $a<0$, $a-1<0$, $a+b=\log_{-x}(4-x^2)<0$ и неравенство выполняется на всем рассматриваемом промежутке.

1.I.3. $\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$.

Решение: Используя известные тождества, запишем уравнение в виде $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+3x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{12}-3x\right)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Обозначим $t=x-\dfrac{\pi}{12}$ и заметим, что $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}$. Уравнение примет вид $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+3t\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+3t\right)=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\;\Leftrightarrow\;\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3t\right)-\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-3t\right)-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\;\Leftrightarrow\;-\sin(t)\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2t\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)$. Таким образом, либо $t=\pi k$, $k\in Z$, либо $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2t\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2t\right)\;\Leftrightarrow\;\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2t\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2t\right)=$

$\sin\dfrac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; 2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\left(2t-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; \cos\left(2t-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{12}}$. Последнее уравнение решений не имеет, так как правая часть больше 1.

1.I.4. $S_{BMC} = \dfrac{10}{19}\sqrt{141}$.



Решение: Положим $AD = x$. Пусть AH — высота $\triangle ABC$. Тогда DH является высотой $\triangle BCD$. Согласно условию, $DH\cdot BC = 2\sqrt{141} \Rightarrow DH^2\cdot BC^2 = 4\cdot 141 \Rightarrow DH^2 = \dfrac{4\cdot 141}{4^2+5^2} = \dfrac{4\cdot 141}{41} \Rightarrow x^2 + AH^2 = \dfrac{4\cdot 141}{41}$. Но $AH\cdot BC = AB\cdot AC$. Отсюда $AH = \dfrac{4\cdot 5}{\sqrt{41}}$. Следовательно, $x^2 = \dfrac{4\cdot 141}{41} - \dfrac{4^2\cdot 5^2}{41} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4(141-100)}{41} = 4 \Rightarrow x = 2$.

Учитывая, что точки луча AM равноудалены от плоскостей ABC, ABD и ACD, получаем, что высоты пирамид $ABCM$, $ABDM$ и $ACDM$ одинаковы. Из формул для объема для указанных пирамид следует тогда, что

$$\frac{S_{BCM}}{S_{BCA}} = \frac{S_{BDM}}{S_{BDA}} = \frac{S_{CDM}}{S_{CDA}}$$

(это отношение равно отношению указанных выше высот к высоте, опущенной из точки A. Отсюда получаем

$$\frac{S_{BCM}}{S_{BCA}} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCA}+S_{BDA}+S_{CDA}} \;\Rightarrow\; S_{BCM} = \frac{10\sqrt{141}}{19}.$$

Замечание. Для нахождения $AD = x$ можно воспользоваться также формулой

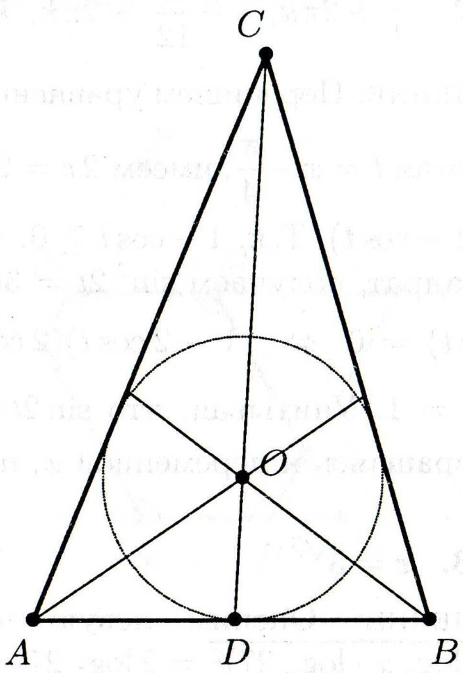
$$S^2_{BCA} + S^2_{BDA} + S^2_{CDA} = S^2_{BCD}.$$

1.I.5. $R = \dfrac{325}{24}$.

Решение: Пусть O — точка пересечения биссектрис и пусть O делит биссектрису CD в указанном отношении и $BC \le AC$. Из свойств биссектрис AO и BO для треугольников ACD и BCD следует $\dfrac{OD}{OC} = \dfrac{AD}{AC} =$

$\dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC+BC} = \dfrac{OD}{OC}$. Отсюда, учитывая неравенство треугольника $AC + BC > AB$, получаем $AB = \dfrac{1}{3}(AC + BC)$. Таким образом, $AB \le \dfrac{2}{3} AC$. Следовательно, AC является наибольшей стороной $\triangle ABC$, то есть $AC = 26$. Пусть $BC = x$. Тогда $AB = \dfrac{1}{3}(x + 26)$, $x \le 26$.

Отсюда $AB + BC + AC = \dfrac{1}{3}(x + 26) + x + 26 = \dfrac{4}{3}(x + 26)$ и, следовательно, $S_{ABC} = pr = 4(x + 26) \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{x \cdot 26(x+26)}{3 \cdot 4 \cdot 4(x+26)} = \dfrac{13x}{24}$. Для нахождения x воспользуемся формулой Герона: $4^2(x + 26)^2 = \dfrac{2}{3}(x + 26) \cdot \dfrac{1}{3}(x + 26) \cdot \dfrac{2x - 26}{3} \cdot \dfrac{(2 \cdot 26 - x)}{3} \Leftrightarrow 4 \cdot 9^2 = (x - 13)(52 - x) \Leftrightarrow x^2 - 65x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 25$, $x_2 = 40$. Учитывая, что $x \le 26$, получим $x = 25$. Следовательно, $R = \dfrac{13 \cdot 25}{21} = \dfrac{325}{24}$.



Замечание. Так как $AB = \dfrac{1}{3}(AC + BC) = \dfrac{26 + 25}{3} = 17$ и $17 + 25 > 26$, то такой треугольник существует.

1.II.1. При $b > 0$ решений нет, при $b \in \{-28\} \cup \{-4\} \cup (-1, 0]$ решение одно, при $b \in (-\infty, -28) \cup (-28, -4) \cup (-4, -1]$ — два решения.

1.II.2. $x \in (2, \sqrt{5}] \cup (3, +\infty)$;

1.II.3. $\dfrac{\pi}{12} + \pi k$, $-\dfrac{\pi}{24} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k$, $k \in Z$.

1.II.4. $S_{BKD} = \dfrac{3}{13}\sqrt{61}$. **1.II.5.** $R = \dfrac{565}{6}$.

2.I.1. За 14 часов.

Решение: Пусть n — количество косцов, участвовавших в работе, t — время работы последнего косца и τ — промежуток премени, через который косцы приступали к работе. Тогда искомое время x совпадает с временем работы 1-го косца: $x = t + (n-1)\tau$. Согласно условию, $x = 7t$, то есть $6t = (n-1)\tau$.

Так как все n косцов, работая одновременно, выкосили бы луг за 8 часов, то за 1 час один человек выкашивает $\dfrac{1}{8n}$ часть луга.

Таким образом, $\dfrac{t}{8n}+\dfrac{t+\tau}{8n}+\ldots+\dfrac{t+(n-1)\tau}{8n}=1 \Leftrightarrow \dfrac{2t+(n-1)\tau}{16}=1.$

Учитывая, что $(n-1)\tau = 6t$, получаем $t = 2$. Следовательно, $x = 7t = 14$.

2.I.2. $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \quad -\dfrac{\pi}{12}+2\pi k,\ k \in Z.$

Решение: Перепишем уравнение в виде $\sqrt{6}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{6}$. Полагая $t = x-\dfrac{\pi}{4}$, имеем $2x = 2t+\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 2t = 1 \ \Leftrightarrow\ -\sin 2t = \sqrt{3}(1-\cos t)$. Т.к. $1-\cos t \geq 0$, то, полагая $\sin 2t \leq 0$ и возводя обе части в квадрат, получаем $\sin^2 2t = 3(1-\cos t)^2 \ \Leftrightarrow\ \cos^2 t(1-4\cos^2 t)-3(1-2\cos t) = 0 \ \Leftrightarrow\ (1-2\cos t)(2\cos^3 t+\cos^2 t-3) = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos t = \dfrac{1}{2}$ или $\cos t = 1$. Учитывая, что $\sin 2t \leq 0$, получаем $t = 2\pi k$; $t = -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$. Возвращаясь к переменной x, получаем ответ.

2.I.3. $x = 3^{\sqrt{3}}$.

Решение: Оценим левую часть уравнения: $\log_3^2 x + \log_x^2 27 \geq 2\sqrt{(\log_3 x\cdot\log_x 27)^2} = 2\log_3 27 = 6$.

С другой стороны, $2\cdot 3^{\sqrt{3}}x - x^2 = 3^{2\sqrt{3}} - \left(x-3^{\sqrt{3}}\right)^2 \leq 3^{2\sqrt{3}}$. Следовательно, правая часть меньше или равна числу $\sqrt{3}\cdot\log_3 3^{2\sqrt{3}} = 6$, т. о. равенство возможно лишь в случае $x = 3^{\sqrt{3}}$. Проверкой убеждаемся, что $3^{\sqrt{3}}$ — решение.

2.I.4. $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},\, 1\right)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-1,\,1)$. При $x \in (-1,0)$ неравенство не выполняется. При $x \in [0,1)$ функция, стоящая слева, возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому решения неравенства заполняют интервал вида $(x_0,1)$, где x_0 — корень уравнения $x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$. Положим $y = \sqrt{1-x^2}$. Тогда $y > 0$ и

$$\begin{cases} (y-x)^2 = 1-2xy, \\ y-x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ((xy)^2+2xy-1=0, \\ y-x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx = -1+\sqrt{2}, \\ y-x = -1+\sqrt{2} \end{cases}.$$

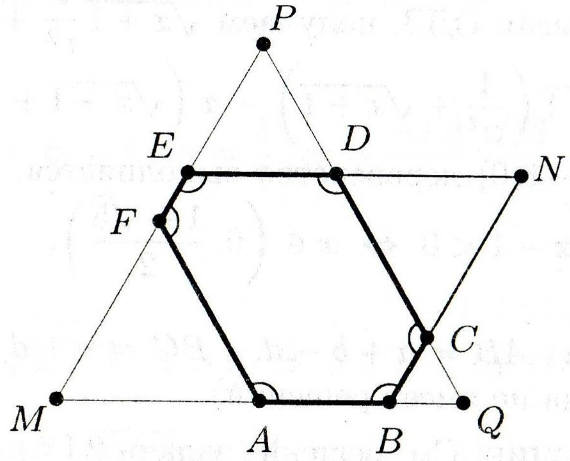
(Равенство $yx = -1-\sqrt{2}$ не может выполняться, так как $yx > 0$.)

Следовательно, y и $-x$ являются соответственно положительным и отрицательным корнями уравнения $t^2-(-1+\sqrt{2})t+(1-\sqrt{2})=0 \Rightarrow$ $-x=\dfrac{-1+\sqrt{2}-\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2}$.

Замечание. Из указанного метода следует, что решать уравнение можно используя подстановку: $u=\sqrt{1-x^2}-x$.

2.I.5. $AB=a+b-d$, $BC=c+d-a$ (при $d\geq a+b$ или $a\geq c+d$ задача не имеет решений).

Решение: Пусть M — точка пересечения лучей BA и EF, а N — точка пересечения лучей BC и ED. Из условия следует, что треугольники AFM и CDN являются равносторонними со сторонами d и a соответственно и что четырехугольник $BMEN$ является параллелограммом. Из равенств его сторон следует $AB+d=a+b$ и $BC+a=c+d$.



2.II.1. За 12 часов.

2.II.2. $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $\dfrac{\pi}{12}+2\pi k$, $k\in Z$.

2.II.3. $x=2^{\sqrt{2}}$.

2.II.4. $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},1\right)$

2.II.5. $AB=b+c-a$, $CD=c+d-a$ (при $a\geq b+c$ или $a\geq c+d$ задача не имеет решений).

3.I.1. За 14 часов.

Решение: См. решение задачи 2.I.1.

3.I.2. $2\pi k$, $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $\sin 2x=\sqrt{3}(\cos x-1)$. Т.к. $\cos x-1\leq 0$, полагая $\sin 2x\leq 0$ и возводя обе части в квадрат, получаем $\sin^2 2x=3(\cos x-1)^2 \Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x=3(\cos x-1)^2 \Leftrightarrow 3(\cos x-1)^2+$

$4(\cos^2 x-1)\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x-1)(2\cos^2 x+3\cos x+3) = 0 \Leftrightarrow$ $\cos x = 1$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Учитывая условие $\sin 2x \le 0$, получаем ответ.

3.I.3. $x = 3^{\sqrt{3}}$.
Решение: См. решение задачи 2.I.3.

3.I.4. $x \in [-1,0) \cup \left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение: ОДЗ: $x \ge -1$, $x \ne 0$. Преобразуя исходное неравенство и учитывая ОДЗ, получаем $\sqrt{x+1}\dfrac{1}{x^2} + (\sqrt{x+1})^2 - x\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{x+1}\left(\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x+1}\right) - x\left(\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > x$. При $x \in [-1,0)$ неравенство выполняется. При $x > 0$ имеем $x+1 > x^2 \Leftrightarrow$ $x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.I.5. $AB = a+b-d$, $BC = c+d-a$ (при $d \ge a+b$ или $a \ge c+d$ задача не имеет решений).

Решение: См. решение задачи 2.I.5.

3.II.1. За 12 часов.

3.II.2. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3.II.3. $x = 2^{\sqrt{2}}$.

3.II.4. $x \in \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$.

3.II.5. $AB = b+c-a$, $CD = c+d-a$ (при $a \ge b+c$ или $a \ge c+d$ задача не имеет решений).

4.I.1. $d = 4$.

Решение: Пусть a, $a+d$, $a+2d, \ldots$ — рассматриваемая арифметическая прогрессия. Сумма ее первых трех членов равна $S_3 = 3a+3d$. Сумма ее первых десяти членов равна $S_{10} = \dfrac{(a+a+9d)\cdot 10}{2} = 5(2a+9d)$. Согласно условию, $S_3 : (S_{10} - S_3) = 7:3 \Leftrightarrow 3S_3 = 7(S_{10} - S_3) \Leftrightarrow 10S_3 = 7S_{10} \Leftrightarrow$ $10(3a+3d) = 7\cdot 5\cdot(2a+9d) \Leftrightarrow 6a+6d = 14a+63d \Leftrightarrow -8a = 57d \Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{-57} = \dfrac{d}{8}$.

Таким образом, прогрессия имеет вид $-\frac{57}{8}d, -\frac{49}{8}d, -\frac{41}{8}d, \ldots, -\frac{1}{8}d,$ $\frac{7}{8}d, \ldots$ и второе условие задачи превращается в уравнение $-\frac{1}{8}d \cdot \frac{7}{8}d = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow d^2 = 16$. Поскольку прогрессия возрастающая, то есть $d > 0$, то $d = 4$.

4.I.2. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{13}}{4} + 2\pi n, \ n \in Z.$

Решение: Рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$1 - 2\sin^2 2x = 1 - 3\cos x \ \Leftrightarrow \ 3\cos x = 8\sin^2 x \cos^2 x \ \Leftrightarrow \ 3c = 8c^2(1-c^2),$$

где $c = \cos x$. Отсюда получаем

$$c(2c-1)(4c^2+2c-3) = 0 \ \Leftrightarrow \ c_1 = 0, \ c_2 = \frac{1}{2}, \ c_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}.$$

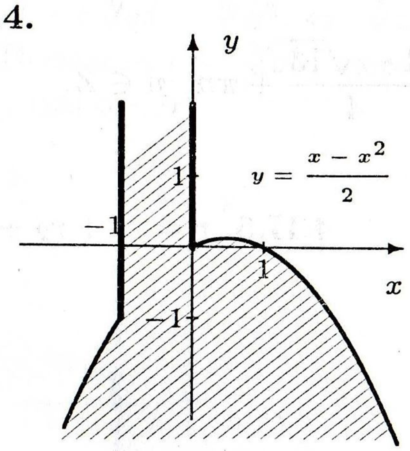
4.I.3. $\frac{13}{4}, \ \frac{-2+\sqrt{7}}{2}.$

Решение: ОДЗ: $x \neq 1, \neq 0, \neq 2, \ \sqrt{x+3} - 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ x \in (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup [2, +\infty)$.

В ОДЗ уравнение примет вид $(\sqrt{x+3} - 1)^4 = (x-1)^2$. Откуда $(\sqrt{x+3} - 1)^2 = x - 1$ или $(\sqrt{x+3} - 1)^2 = 1 - x$.

В первом случае $x + 4 - 2\sqrt{x+3} = x - 1 \ \Leftrightarrow \ 2\sqrt{x+3} = 5 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{13}{4}$. Во втором случае $2\sqrt{x+3} = 2x + 3$. Считая $2x + 3 \geq 0$, получаем $4(x+3) = (2x+3)^2 \ \Leftrightarrow \ 4x^2 + 8x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-2+\sqrt{7}}{2}$.

4.I.4.

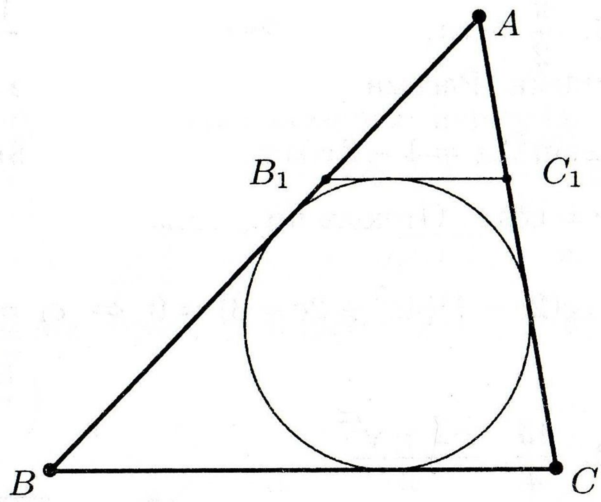


Решение: $x^2 + y \leq |x - y| \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x^2 + y \leq x - y, \\ x^2 + y \leq y - x, \end{array}\right. \ \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + y \leq x - y, \\ x^2 + y \leq y - x, \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} y \leq \frac{x - x^2}{2}, \\ x^2 + x \leq 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, искомой областью будет объединение части плоскости, лежащей под графиком функции $y = \dfrac{x - x^2}{2}$, и вертикальной полосы $-1 \le x \le 0$.

4.I.5. $R = R_1 + R_2 + R_3$.



Решение: Пусть AB_1C_1 — треугольник, отсекаемый касательной, параллельной стороне BC. Ясно, что он подобен основному треугольнику. Обозначим через k_1 коэффициент подобия. Тогда $k_1 = \dfrac{R_1}{R}$, где R — искомый радиус. С другой стороны $k_1 = \dfrac{-a+b+c}{a+b+c}$, где $a = BC, b = AC, c = AB$.

Проводя аналогичные рассуждения для двух других треугольников, отсекаемых касательными, и обозначив их коэффициенты подобия через k_2 и k_3, получим:

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R} = k_1 + k_2 + k_3,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = \frac{-a+b+c}{a+b+c} + \frac{a-b+c}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = 1.$$

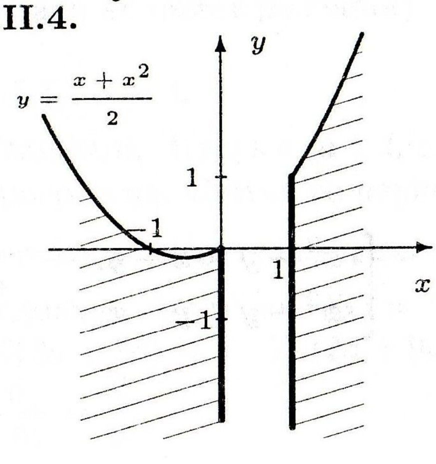
Отсюда следует, что $R = R_1 + R_2 + R_3$.

4.II.1. $d = -3$.

4.II.2. $\pi n, \quad (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad (-1)^n \arcsin\dfrac{1-\sqrt{13}}{4} + \pi n, \ n \in Z$.

4.II.3. $\dfrac{4}{9}$, -4.

4.II.4.



4.II.5. $r = r_1 + r_2 + r_3$.

5.I.1. $d = 4$.

Решение: См. решение задачи 4.I.1.

5.I.2. $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{10}} + \pi n$, $n \in Z$.

Решение: Преобразуя уравнение, имеем $2(2\cos^2 -1) + 2\cos x + \frac{5}{4} = 2\sin x \cos x \;\Leftrightarrow\; 4\cos^2 x + 2\cos x + \frac{1}{4} = 1 + 2\sin x \cos x \;\Leftrightarrow\; \left(2\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 = (\sin x + \cos x)^2$.

Последнее уравнение распадается на два. 1) $\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

2) $\sin x + 3\cos x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin(x + \varphi) = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$, где $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

Отсюда получаем ответ.

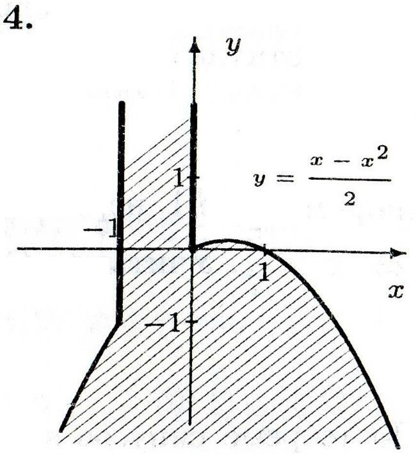
5.I.3. $x = -\sqrt[4]{(\sqrt{5} - 2)^3}$.

Решение: ОДЗ: $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

На $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ решений нет! Пусть $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Тогда обе части отрицательны и можно возвести в квадрат: $\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} - x - 2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} = \sqrt[3]{x^4} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} = 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4} \;\Leftrightarrow\; 4\left(\frac{1}{4} - x^2\right) = 4\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^8} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{x^8} + 4\sqrt[3]{x^4} - 1 = 0.$

Положив $t = \sqrt[3]{x^4}$, имеем уравнение $t^2 + 4t - 1 = 0$, решив которое получим ответ.

5.I.4.



Решение: См. решение задачи 4.I.4.

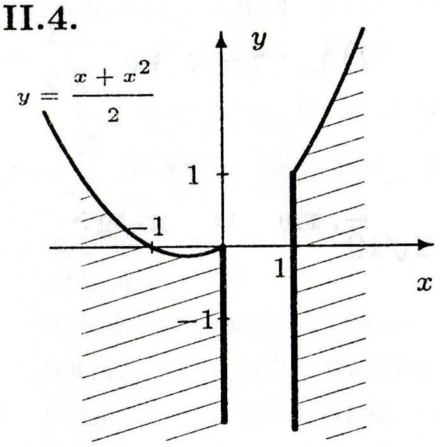
5.I.5. $R = R_1 + R_2 + R_3$.
РЕШЕНИЕ: См. решение задачи 4.I.5.

5.II.1. $d = -3$.

5.II.2. $-\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n,\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3} + (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{2\sqrt{10}} + \pi n,$ $n \in Z$.

5.II.3. $x = 8\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^3}$.

5.II.4.



5.II.5. $r = r_1 + r_2 + r_3$.

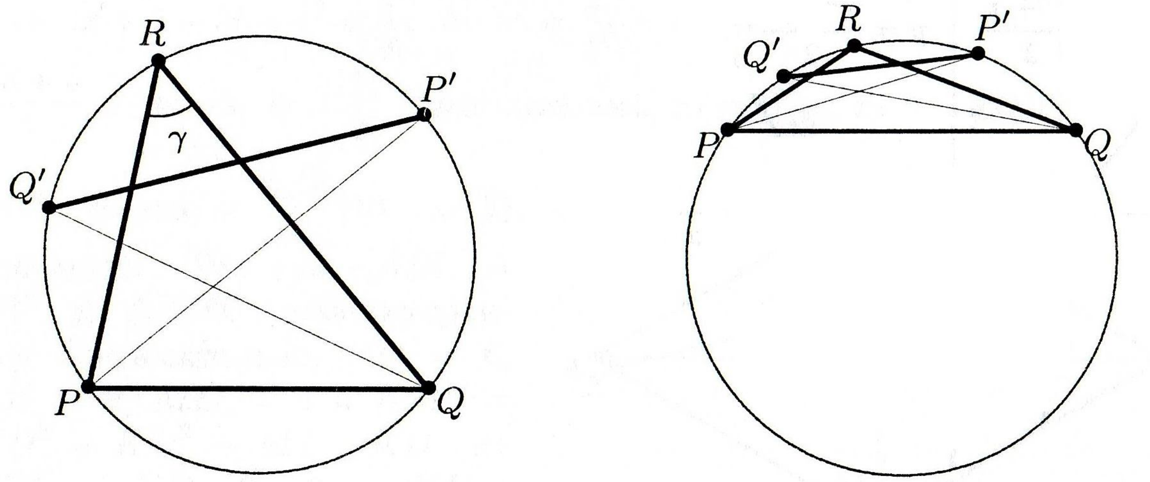
6.I.1. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\quad \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.
РЕШЕНИЕ: После умножения на знаменатель приведем уравнение к виду $(\sin x - 2\cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

6.I.2. $x \in (-25, +\infty)$.
РЕШЕНИЕ: Сделаем замену $t = \sqrt[3]{x-2}$. Тогда $x + 7 = t^3 + 9$ и неравенство примет вид $t^3 + 9 > 6t \ \Leftrightarrow\ t^3 - 6t + 9 > 0$. Один из корней легко угадывается: $t_1 = -3$. Разделив на $(t+3)$ левую часть, получим квдратный трехчлен $(t^2 - 3t + 3)$, который всегда положителен. Следовательно, неравенство принимает вид $t > -3 \ \Leftrightarrow\ x - 2 > -27$, откуда следует ответ.

6.I.3. $\dfrac{5}{7} < x < 1$.
РЕШЕНИЕ: ОДЗ: $0 < x < 1$. Поскольку основание меньше 1, неравенство принимает вид $\dfrac{5-3x}{4x} < 1 \ \Leftrightarrow\ 5 - 3x < 4x \ \Leftrightarrow\ x > \dfrac{5}{7}$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

6.I.4. $P'Q' = 3\sqrt{10}$ или $\sqrt{10}$
РЕШЕНИЕ: Обозначим угол PRQ через γ. По теореме синусов $\sin\gamma = \dfrac{6}{2R} = \dfrac{3}{5}$. Тогда $\cos\gamma$ равен либо $\dfrac{4}{5}$, либо $-\dfrac{4}{5}$ в случае, если угол γ —

тупой. Заметим, что в любом случае хорда $P'Q'$ соединяет концы дуги длиной $\pi-\gamma$ и, следовательно, ее длина равна $2R\sin\dfrac{\pi-\gamma}{2} = 2R\cos\dfrac{\gamma}{2} = 10\sqrt{\dfrac{1+\cos\gamma}{2}}$. Подставляя два значения $\cos\gamma$, получаем два варианта ответа.



6.I.5. $a \in \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение: Сделаем замену $t = 2^x$. Уравнение примет вид $at - \dfrac{2}{t} - 4a = 0 \Leftrightarrow at^2 - 4at - 2 = 0$. Согласно теореме Виета $t_1t_2 = \dfrac{-2}{a}$ и, следовательно, $a < 0$. Условие положительности дискриминанта имеет вид $4a^2 + 2a > 0$ и, следовательно, $a < -\dfrac{1}{2}$. Поскольку $t_1 + t_2 = 4$, оба корня положительны. Поскольку условие $x > 0$ влечет условие $t > 1$, необходимо, чтобы оба корня были больше 1. Т. к. вершина параболы находится справа от точки $t = 1$ (а именно, $t_0 = 2$) и ветви параболы направлены вниз, то достаточно условие $f(1) < 0$, где $f(t)$ — левая часть неравенства. Подставляя 1, получим $a - 4a - 2 < 0 \Leftrightarrow 3a > -2 \Leftrightarrow a > -\dfrac{3}{2}$. Это дает ответ.

6.II.1. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k, \quad \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

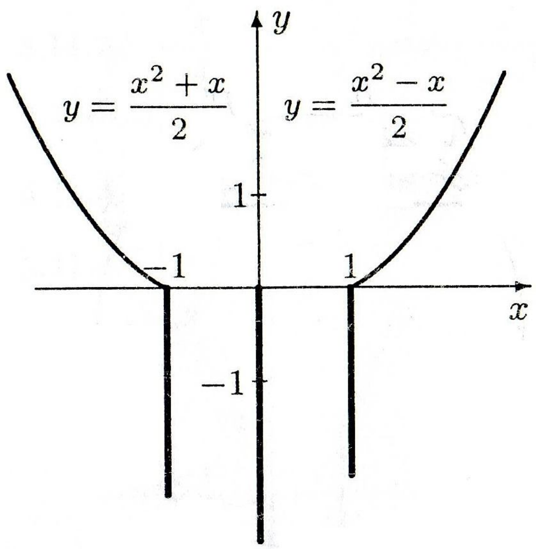
6.II.2. $x \in (-\infty, -11] \cup \{-2\}$.

6.II.3. $x \in (0, 1) \cup (5/2, 4)$.

6.II.4. $AB = 6\sqrt{10}$ или $2\sqrt{10}$.

6.II.5. $b \in \left(\frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right)$.

7.I.1.



Решение: Раскрывая модули в зависимости от знака, получим искомую картинку.

7.I.2. $x = 1$.
Решение: Возведя в квадрат, получаем

$$x(x+3) = (x-2)(2x-6) \;\Rightarrow\; x^2+3x = 2x^2-10x+12 \;\Rightarrow\; x^2-13x+12 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = 12$. После проверки получаем ответ.

7.I.3. $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \pm\arccos\sqrt{\frac{7}{12}} + \pi k,\ k \in Z.$

Решение: Приведем уравнение к виду $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\cos^2 x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi\cos 2x)$. Последнее равенство распадается на два:

1) $\frac{3}{4} - \cos^2 x = \cos 2x + 2k \;\Leftrightarrow\; 3\cos^2 x = \frac{7}{4} + 2k \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x = \frac{7}{12}$;

2) $\frac{3}{4} - \cos^2 x = -\cos 2x + 2k \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{4} + 2k \;\Leftrightarrow\; \cos^2 x = \frac{1}{4}$;

Отсюда получаем ответ.

7.I.4. $x = \frac{1}{243}$, $x = 2$.

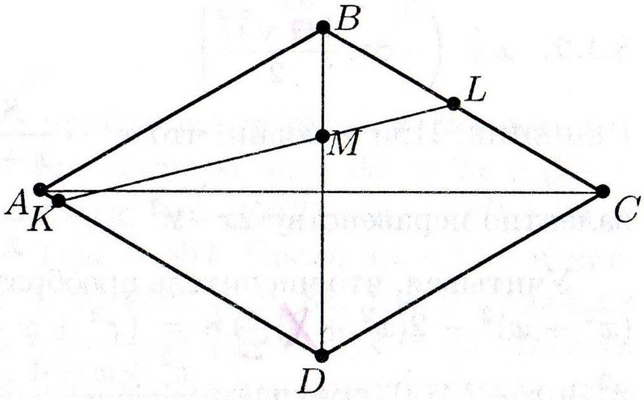
Решение: ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{9}, \neq \frac{1}{3}, \neq 1$. Исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$2\log_{3x} 9 \cdot \log_9(1-x)^2 - 3\log_{9x} 9 \cdot \log_9(1-x)^2 = \log_9(1-x)^2.$$

Таким образом, либо $\log_9(1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ($x = 0 \notin$ОДЗ), либо $\dfrac{2}{\log_9 3x} - \dfrac{3}{\log_9 9x} = 1$.

Полагая $t = \log_9 3x$, имеем $\log_9 9x = t + \frac{1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{2}{t} - \dfrac{3}{t+\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow 2t + 1 - 3t = t^2 + \frac{1}{2}t \Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \mp \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \dfrac{-3 \mp 5}{4}$. $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $x_1 = \dfrac{1}{243}$, $x_2 = 1 \notin$ОДЗ.

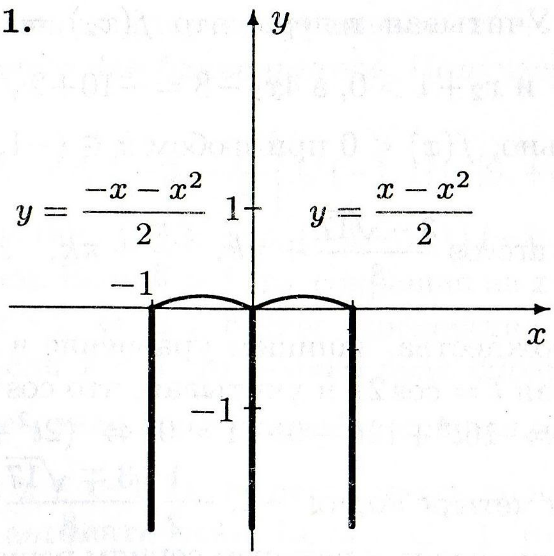
7.I.5. $S_{ABLK} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(10 - \sqrt{13})$.



Решение: Так как $\angle ABC = 120°$, то $\triangle ABD$ — равносторонний. Следовательно, $BD = 6$, $BM = 2$, $MD = 4$ и $KM^2 = MD^2 + KD^2 - MD \cdot KD \Leftrightarrow KD^2 - 4 \cdot KD - 9 = 0 \Rightarrow KD = 2 + \sqrt{13} \Rightarrow AK = AD - KD = 4 - \sqrt{13}$.

Так как $\dfrac{BL}{KD} = \dfrac{BM}{MD} = \dfrac{1}{2}$, то $BL = \dfrac{2+\sqrt{13}}{2}$. Следовательно, средняя линия трапеции $ABLK$ равна $m = \dfrac{10-\sqrt{13}}{4}$. Учитывая, что высота трапеции $h = 6 \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}$, приходим к ответу.

7.II.1.



7.II.2. $x = 2$.

7.II.3. $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $\pm\arccos\dfrac{3}{\sqrt{20}} + \pi k$, $k \in Z$.

7.II.4. $x = \dfrac{1}{64}$, $x = 3$.

7.II.5. $S_{APQD} = \dfrac{5\sqrt{3}}{24}(33 + \sqrt{37})$.

8.I.1. $a \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$.

Решение: Исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} (a^2 + a - 2)x^2 = 1 - a, \\ (a^2 + a - 2))y^2 = a^2 - 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $a^2+a-2 = (a-1)(a+2)$, убеждаемся, что при $a = 1$ система имеет решение. При $a = -2$ оно решений не имеет. При остальных a получаем $x^2 = -\dfrac{1}{a+2}$, $y = \dfrac{a+1}{a+2}$. Следовательно, решение существует, если $a + 2 < 0$ и $a + 1 \leq 0$, то есть $a < -2$.

8.I.2. $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]$.

Решение: При условии, что $x^2 - \dfrac{8}{x+1} \geq 0$, исходное неравенство эквивалентно неравенству $2x-x^3 \geq x^2-\dfrac{8}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{(x^3+x^2-2x)(x+1)-8}{x+1} \leq 0$.

Учитывая, что числитель преобразуется к виду $x^4+2x^3-x^2-2x-8 = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 8 = (x^2 + x - 4)(x^2 + x + 2)$, и учитывая, что $x^2 + x + 2 > 0$, получаем $\dfrac{x^2+x-4}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1] \cup (-1, x_2]$, где $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Остается проверить условие $f(x) = x^2 - \dfrac{8}{x+1} \geq 0$. На $(-\infty, x_1]$ оно очевидно выполняется.

На $(-1, 0]$ имеем $f(x) < 0$. Причем $f(0) = -8$. На интервале $[0. + \infty)$ функция $f(x)$ строго возрастает. Учитывая теперь, что $f(x_2) = x_2^2 - \dfrac{8}{x_2+1} = \dfrac{x_2(x_2^2+x_2)-8}{x_2+1} = \dfrac{4x_2-8}{x_2+1}$ и $x_2+1 > 0$, а $4x_2-8 = -10+2\sqrt{17} < 0$, получаем $f(x_2) < 0$. Следовательно, $f(x) < 0$ при любом $x \in (-1, x_2]$.

8.I.3. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3+\sqrt{17}}{8} + \pi k$, $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3-\sqrt{17}}{8} + \pi k$, $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Решение: Используя известные тождества, запишем уравнение в виде $4\cos 2x \cdot \cos 6x + 3\cos 6x = 1$. Полагая $t = \cos 2x$ и учитывая, что $\cos 6x = 4t^3-3t$, имеем $(4t+3)(4t^3-3t) = 1 \Leftrightarrow 16t^4+12t^2-9t-1 = 0 \Leftrightarrow (2t^2+3t+1)(8t^2-6t-1) = 0$. Уравнение имеет четыре корня -1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{8}$. Все они лежат на отрезке $[-1, 1]$, что и приводит к четырем сериям решений, указанным в ответе.

8.I.4. $x = \dfrac{1}{243}$, $x = 2$.

Решение: См. решение задачи 7.I.4.

8.I.5. $S_{ABLK} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(10 - \sqrt{13})$.
Решение: См. решение задачи 7.I.5.

8.II.1. $b \in (-\infty, -2] \cup \{3\}$.

8.II.2. $x \in \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$.

8.II.3. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-3-\sqrt{17}}{8} + \pi k$, $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{17}-3}{8} + \pi k$, πk, $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

8.II.4. $x = \dfrac{1}{64}$, $x = 3$.

8.II.5. $S_{APQD} = \dfrac{5\sqrt{3}}{24}(33 + \sqrt{37})$.

9.I.1. $a_1 = 28$, $d = 56$, $n = 5$; $a_1 = 84$, $d = 24$, $n = 8$.
Решение: Обозначим первый член прогрессии через a, а разность через d. Условия задачи приобретут вид системы $4a + 6d = 2a + (2n - 3)d$, $a + (n-1)d = 252$. Отсюда следует, что $2(252 - (n-1)d) + 9d = 2nd \Rightarrow 504 + 11d = 4nd \Rightarrow (4n - 11)d = 504$. Число $4n - 11$ — нечетное. Следовательно, d делится на 8, то есть $d = 8k$, где k — один из сомножителей числа 63. Получаем равенство $(4n - 11)k = 63$. То есть k может равняться 1, 3, 7, 9, 21, 63. Перебирая эти варианты и учитывая, что $n \geq 4$, получаем, что возможны лишь два значения для k : $k = 3 \Rightarrow n = 8, d = 24, a = 84$ и $k = 7 \Rightarrow n = 5, d = 56, a = 28$.

9.I.2. $x = -\sqrt{2}$.
Решение: Запишем уравнение в виде $\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+6} = -x$ и возведем обе части в квадрат при дополнительном условии $x \leq 0$. После упрощения получим уравнение $x^2 + 22 = 2\sqrt{(x^2+6)(x^2+16)}$, которое решается как биквадратное. Получаем, что $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$.

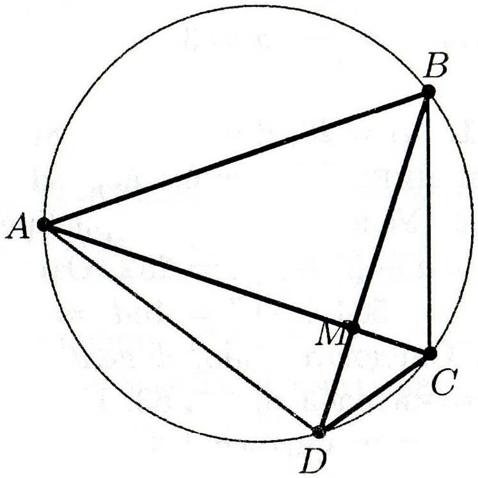
9.I.3. $x \in \left(-2, -\dfrac{15}{8}\right] \cup (-1, 1] \cup [6, +\infty)$.
Решение: ОДЗ: $x \in (-2, -1) \cup (-1, \infty)$. Заметим, что $x = 1$ является корнем. Если $x > 1$, то, сокращая на $x - 1$, получим, что $3 \leq \log_2(x+2) \Leftrightarrow 8 \leq x + 2 \Leftrightarrow x \geq 6$. Это неравенство определяет часть ответа.

Если $x < 1$, то меняем знак справа при раскрытии модуля, и затем меняем знак неравенства, сокращая на $x - 1$. Получим $\dfrac{1}{\log_2(x+2)} \geq -\dfrac{1}{3}$. Если $x \in (-1, 1)$, то левая часть положительна и неравенство выполняется автоматически. Если $x < -1$, то, меняя еще раз знак неравенства, получим $-3 \geq \log_2(x+2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \geq x + 2 \Leftrightarrow x \leq -1\dfrac{7}{8}$. Это неравенство определяет оставшуюся часть ответа.

9.I.4. $(-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{14} + \pi k$, $(-1)^k\dfrac{3\pi}{14} + \pi k$, $(-1)^{k+1}\dfrac{5\pi}{14} + \pi k$, $k \in Z$.

Решение: Умножим обе части уравнения на $2\cos x$, отметив, что $\frac{\pi}{2}+\pi k$, не является решением. Получим уравнение $2\cos x\cos 2x - 2\cos x\cos 4x = \cos x + 2\sin x\cos x$. Раскладывая произведение косинусов в сумму, получим $-\cos 5x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2}+2x+2\pi k$ или $5x = -\frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k,\ k \in Z$. Отсюда получаем ответ.

9.I.5. $S = 195/2$.



Решение: Обозначим через M точку пересечения отрезков AC и BD и заметим, что треугольники ABM и CDM подобны. Коэффициент подобия легко находится: $k = \frac{AB}{CD} = 3$. Обозначим $x = CM$, $y = DM$. Тогда $BM = 3x$, $AM = 3y$.

Получаем равенства $3x+y = 13$, $x + 3y = 15 \Leftrightarrow x = 3$, $y = 4$. Таким образом, треугольник MCD — прямоугольный. Поскольку диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, его площадь равна половине произведения диагоналей, то есть $S_{ABCD} = \frac{AC\cdot BD}{2}$. Отсюда следует ответ.

9.II.1. $a_1 = -80,\ d = 40,\ n = 20;\ a_1 = 64,\ d = 8,\ n = 10$.

9.II.2. $x_1 = -3,\ x_2 = -\sqrt{5}$.

9.II.3. $x \in \left(- \ ,-\frac{8}{9}\right] \cup (0,2] \cup [8,+\infty)$.

9.II.4. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{7}+2\pi k,\ \pm\frac{4\pi}{7}+2\pi k,\ \pm\frac{6\pi}{7}+2\pi k,\ k \in Z$.

9.II.5. $S = 55$.

10.I.1. $x = -\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in Z$.

Решение: Преобразуем левую часть уравнения: $\cos^2 2x - 2\sin 2x = -\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1 = 2 - (1+\sin 2x)^2 = 2 - (\sin x + \cos x)^4 = 2 - 4\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Таким образом, левая часть уравнения находится в промежутке $[0,2]$, а правая часть по абсолютной величине не меньше двух. Следовательно, обе части равны 1, то есть $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда получаем ответ.

10.I.2. $x_1 = 2,\ x_2 = 89{,}5.$

Решение: Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$125(2x+1) = (2x-29)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 183x + 358 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 179/2.$$

10.I.3. При $a > 1$ — 0 решений,

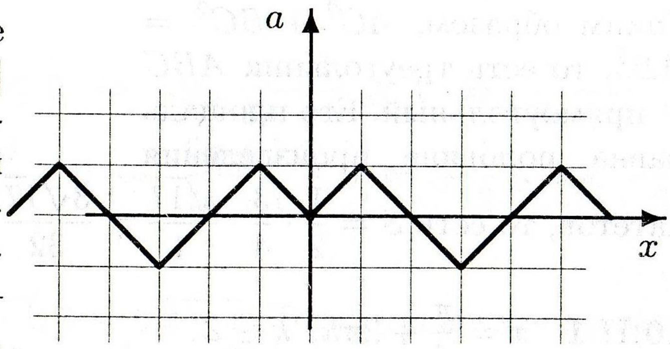
$a < -1$ — 2 решения,

$a = \pm 1$ — 4 решения,

$-1 < a < 0$ — 6 решений,

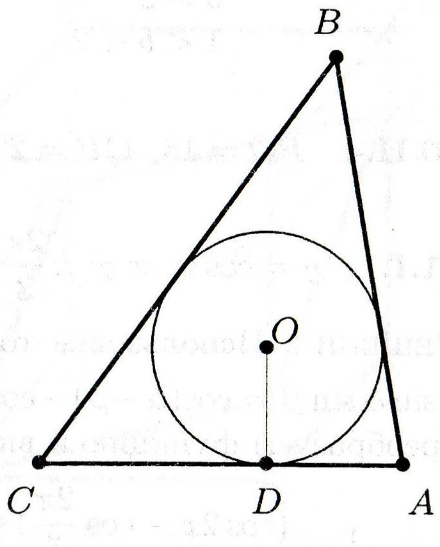
$a = 0$ — 7 решений,

$0 < a < 1$ — 8 решений.



Решение: Запишем уравнение в виде $a = 1 - |2 - |3 - |x|||$ и обозначим правую часть через $f(x)$. Построим график этой функции. Заметим, что она, во-первых, кусочно-линейная, во-вторых, — четная, в-третьих — при $x > 5$ не имеет изломов. Кроме того, все изломы происходят в целочисленных точках. Подставляя все целые значения аргумента от нуля до шести, получаем график.

10.I.4. $BD = 9.$



Решение: Из свойств касательных следует, что $CD - AD = CB - AB = 2$. Учитывая, что $CD + AD = 8$, находим, $AD = 3$, $CD = 5$. Применяя дважды теорему косинусов, получаем

$11^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{6}$,

$BD^2 = 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \cos A \Rightarrow BD^2 = $
$= 9^2 \Rightarrow BD = 9.$

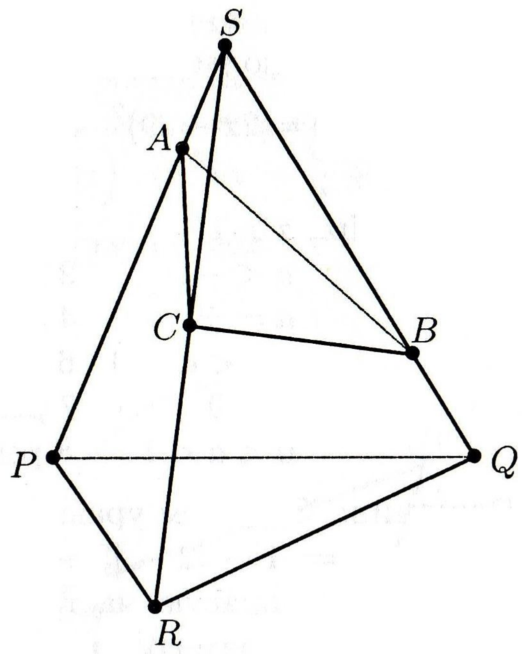
10.I.5. $S = \dfrac{3\sqrt{17}}{32}.$

Решение: По теореме косинусов находим косинус плоского угла при вершине: $2 = 5 + 5 - 2 \cdot 5 \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{4}{5}$. Далее находим стороны треугольника ABC :

$AB^2 = \frac{5\cdot 9}{16} + \frac{5}{16} - 2\cdot\frac{5\cdot 3}{16}\cdot\frac{4}{5} =$
$= \frac{26}{16} = \frac{13}{8}.$

$AC^2 = \frac{5}{16}+\frac{5}{4}-2\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5} = \frac{25}{16}-1 =$
$= \frac{9}{16}.$

$BC^2 = \frac{5\cdot 9}{16} + \frac{5}{4} - 2\cdot\frac{5\cdot 3}{8}\cdot\frac{4}{5} =$
$= \frac{65}{16} - 3 = \frac{17}{16}.$



Таким образом, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то есть треугольник ABC — прямоугольный. Его площадь равна половине произведения катетов, то есть $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{32}$.

10.II.1. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

10.II.2. $x_1 = 1,\ x_2 = 32{,}5.$

10.II.3. При $b < 1,\ b = 3$ — 2 решения,
$b = 1,\ 2 < b < 3$ — 4 решения,
$b = 2$ — 5 решений,
$1 < b < 2$ — 6 решений.

10.II.4. $PQ = 16,\ QR = 22,\ PR = 18.$

10.II.5. $S = \frac{\sqrt{187}}{10}.$

11.I.1. $y = \cos x,\ x \neq \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z.$

Решение: Использовав тождества $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, и $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, преобразуем функцию к виду

$$y = \frac{1}{2} + \frac{(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x + \frac{1}{2}}{2\cos x + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2\cos^2 x - \frac{1}{2}}{2\cos x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\cos x - 1) = \cos x.$$

При этом ОДЗ: $\cos x \neq -\frac{1}{2}$.

11.I.2. 2 часа 20 мин.

Решение: Обозначим производительность косцов (га в час) через v. Тогда $\frac{42}{v}$ — время, за которое они выкосили 1-й луг, а $\frac{36}{1{,}2v}$ — время работы на втором лугу. По условию

$$\frac{42}{v} = \frac{2}{3} + \frac{36}{1{,}2v} \Leftrightarrow \frac{42}{v} = \frac{2}{3} + \frac{30}{v} \Leftrightarrow \frac{12}{v} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow v = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{42}{v} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

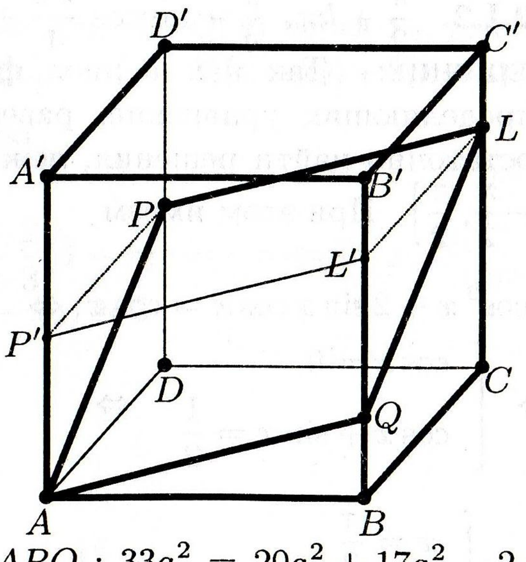
11.I.3. $[-1/2, -1/3)$.

Решение: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x-1}{3x+1}\right) \le 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x-1}{3x+1} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+1} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+1} - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-8x-4}{3x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x+1} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < -\frac{1}{3}$.

11.I.4. $7/4$.

Решение: Обозначим $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{2-x}$. Тогда уравнение примет вид: $2ab + 2b^2 = a + b \Leftrightarrow a + b = 0$ или $2b = 1$. Поскольку $a + b > 0$, первое уравнение решений не имеет. Уравнение $2b = 1$ имеет один корень $x = \frac{7}{4}$.

11.I.5. $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{21}}$.



Решение: Обозначим через L точку пересечения плоскости сечения с прямой CC'. Четырехугольник $APLQ$ является параллелограммом, поскольку $AP \parallel QL$, $AQ \parallel PL$. Найдем его стороны и диагональ PQ, предполагая, что ребро куба равно $4a$. По теореме Пифагора $AP^2 = 20a^2$, $AQ = 17a^2$, $PQ^2 = 33a^2$. Для нахождения угла $PAQ = \alpha$ используем теорему косинусов в треугольнике APQ : $33a^2 = 20a^2 + 17a^2 - 2 \times \sqrt{17} \cdot \sqrt{20}a^2 \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{85}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{85}}$. Теперь мы можем найти площадь параллелограмма $APLQ$:

$$S = AP \cdot AQ \sin\alpha = a^2\sqrt{20} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{85}} = 4a^2\sqrt{21}.$$

Для нахождения угла между плоскостями $AQLP$ и $ABB'A'$ воспользуемся «теоремой о тени»: площадь ортогональной проекции $AQL'P'$ параллелограмма $AQLP$ равна площади самого параллелограмма, умноженной на косинус угла φ между плоскостями, то есть $S' = S\cos\varphi$, где $S' = S_{AQL'P'} = 8a^2$, $S = S_{AQLP} = 4a^2\sqrt{21}$. Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

11.II.1. $y = \sin x,\ x \neq (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

11.II.2. 120 км/час.

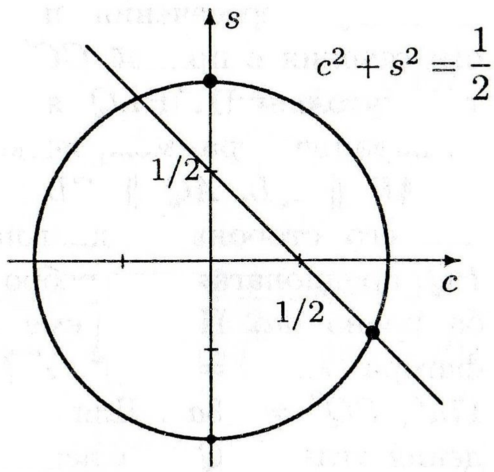
11.II.3. $x \in (-3, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

11.II.4. 5/4.

12.I.1. $\{0; -2\}$.

Решение: Неравенство эквивалентно системе $0 \leq \dfrac{x^2}{3x^2-4x-4} \leq \dfrac{1}{4}$, которая, в свою очередь эквивалентна системе $\dfrac{x^2}{3x^2-4x-4} \geq 0$, $\dfrac{x^2+4x+4}{3x^2-4x-4} \leq 0$. Оба неравенства одновременно могут выполняться только в двух точках: $x = 0$ или $x = -2$. Это и дает ответ.

12.I.2. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + k\pi,\ k \in Z.$



Решение: Так как период функций, определяющих уравнение, равен π, то достаточно найти решения, лежащие на $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. При этом имеем

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = \cos x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$$

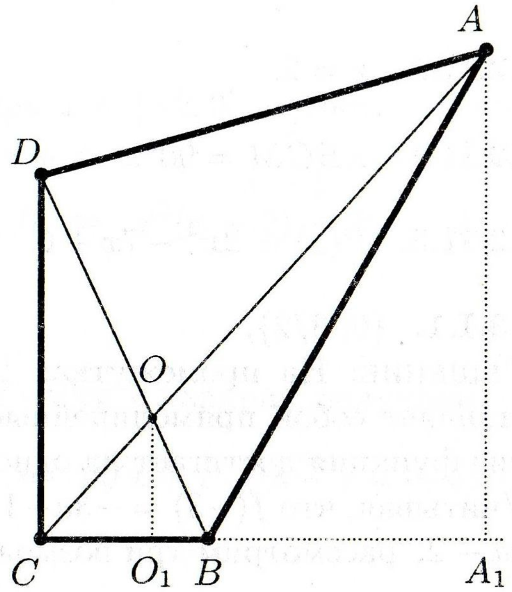
Добавляя период, получаем ответ.

12.I.2′. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

12.I.3. $x = 3$.
Решение: ОДЗ: $x > 2$. Запишем уравнение в виде $\log_4(2-x)^2 = \log_3(2-x)^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 1 \Rightarrow x = 3$.

12.I.4. $AB = 8\sqrt{3}$.

Решение: Пусть O — точка пересечения диагоналей, O_1 и A_1 — проекции точки O и A на прямую BC. Из подобия треугольников имеем



$$\frac{AA_1}{CD} = \frac{AA_1}{OO_1}\cdot\frac{OO_1}{CD} = \frac{AC}{OC}\cdot\frac{OB}{DB} =$$
$$= \frac{AO+DC}{OC}\cdot\frac{OB}{DO+OB} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{AB\cdot\sin 120^\circ}{CD} = \frac{4}{3} \Rightarrow AB =$$
$$= \frac{4}{3\sin 120^\circ}\cdot CD \Rightarrow AB =$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot 9.$$

Таким образом, получаем ответ: $AB = 8\sqrt{3}$.

12.I.5. $P(x) = 2x^2 - 9x + 9$;
Решение: Из условия $Q(x) = P(x) - 2x + 6$ следует, что общим корнем является 3. Обозначив второй корень многочлена $Q(x)$ через x_2, имеем $Q(x) = a(x-3)(x-x_2)$ (где $a \neq 0$) $\Rightarrow P(x) = a(x-3)(x-x_2) + 2(x-3) = a(x-3)\left(x - x_2 + \dfrac{2}{a}\right)$. Согласно условию,

$$\begin{cases} x_2 - \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{2}\max\{3, x_2\} \\ a(4-x_2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \dfrac{2}{3}(4-x_2) = \dfrac{1}{2}\max\{3, x_2\} \\ a(4-x_2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3}x_2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{2}\max\{3, x_2\} \\ a(4-x_2) = 3. \end{cases}$$

Имеем две возможности.

1) $x_2 \geq 3$. Тогда $\dfrac{5}{3}x_2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{16}{7}$ (< 3). Решений нет.

2) $x_2 < 3$. Тогда $\dfrac{5}{3}x_2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{5}{2}$ $(< 3) \Rightarrow a\left(4 - \dfrac{5}{2}\right) = 3 \Rightarrow a = 2$.

Т. о. $P(x) = 2(x-3)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 2x^2 - 9x + 9$.

12.II.1. $\{1, 3\}$.

12.II.2. $k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

12.II.2′. $k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi,\ k \in Z$.

12.II.3. $x = 2$.

12.II.4. $\angle BCM = 90^\circ$.

12.II.5. $P(x) = 2x^2 - 7x + 6$.

13.I.1. $\{0;\ 3/2\}$.
Решение: На промежутках $[-3, -1]$ и $[-1, 2]$ график функции представляет собой прямолинейные отрезки. Поэтому максимальное значение функция достигает на одном из концов отрезков $[-3, -1]$ или $[-1, 2]$. Учитывая, что $f(-3) = -3a+1-|1-3| = -3a-1$, $f(-1) = -a+1$, $f(2) = 2a-2$, рассмотрим три возможных случая:

1) $f(-3) = 1 \ \Leftrightarrow\ -3a - 1 = 1 \ \Leftrightarrow\ a = -2/3$. Но $f(-1) = \dfrac{2}{9} + 1 > 1$, что противоречит условию;

2) $f(-1) = 1 \ \Leftrightarrow\ a = 0$. При этом $f(-3) = -1$, $f(2) = -2$. Условие выполнено.

3) $f(2) = 1 \ \Leftrightarrow\ 2a - 2 = 1 \ \Leftrightarrow\ a = \dfrac{3}{2}$. При этом $f(-3) = -\dfrac{9}{2} - 1$, $f(-1) = -\dfrac{3}{2} + 1 = -\dfrac{1}{2}$. Условие выполнено.

13.I.2. $\dfrac{\pi k}{4},\ -\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$.
Решение: $(\sin 3x + \cos x)(\cos 3x + \sin x) = \cos 6x$. Раскрывая скобки в левой части уравнения, получаем $\sin 3x \cos 3x + \cos x \sin x + (\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x) = \cos 6x \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) + \cos 2x = \cos 6x \ \Leftrightarrow\ \sin 4x \cdot \cos 2x = \cos 6x - \cos 2x \ \Leftrightarrow\ \sin 4x \cdot \cos 2x + 2\sin 4x \cdot \sin 2x = 0 \ \Leftrightarrow$ либо $\sin 4x = 0$, либо $\operatorname{tg} 2x = -\dfrac{1}{2}$.

13.I.2′. $x = 2\pi k,\ k \in Z$.
Решение: При условии (ОДЗ) $\cos x > 0$ исходное уравнение эквивалентно уравнению $\cos 3x = \cos x \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + 2\pi k \\ 3x = -x + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow\ x = 2\pi k.$$

13.I.3. $\{9, 62\}$.

Решение: ОДЗ: $x > 0$. Учитывая, что $\log_2 a \cdot \log_3 b = \log_3 a \cdot \log_2 b$, запишем уравнение в виде $6 + \log_3 x \cdot \log_2 \sqrt{x+2} = 3\log_3 x + 2\log_2 \sqrt{x+2} \Leftrightarrow$
$$(2 - \log_3 x)(3 - \log_2 \sqrt{x+2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_2 \sqrt{x+2} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 62. \end{array}\right.$$

13.I.4. $x \in [-2, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$.

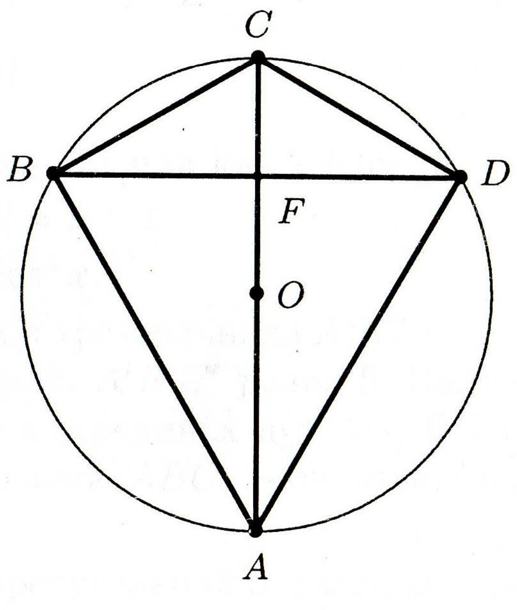
Решение: ОДЗ: $x \in [-2, 0] \cup (1, +\infty)$. При $x \in [-2, 0]$ неравенство выполняется. Пусть $x \in [1, +\infty)$. Тогда $2x + 4 > x^2 \cdot \dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow x^3 < (x-1)(2x+4) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 < 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - 2(x-2) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (\sqrt{2}, 2)$.

13.I.4′. $x = 1$.

Решение: ОДЗ: $x \in [1, +\infty)$. Возведя обе части в квадрат, получаем
$$x + 2 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + x - 1 \le 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-1} = 0.$$
Отсюда, учитывая ОДЗ, получаем $x = 1$.

13.I.5. $r = \dfrac{aS}{a^2 + S}$.

Решение: Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Положим $AF = x$, $BF = y$, $CF = u$, $DF = v$, где F — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как в $ABCD$ вписана окружность, то $AB + CD = BC + AD$. Учитывая, что $AC \perp BD$, последнее равенство принимает вид
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{u^2 + v^2} =$$
$$= \sqrt{x^2 + v^2} + \sqrt{y^2 + u^2}.$$
После возведения обеих частей в квадрат и упрощений получаем



$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (x^2 + v^2)(y^2 + u^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow. \ x^2v^2 + y^2u^2 = x^2y^2 + u^2v^2 \Leftrightarrow (x^2 - u^2)(v^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = u \text{ или } y = v.$$

Полагая, для определенности, что $y = v$, убеждаемся, что $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ (в частности, AC является диаметром описанной окружности). Пусть теперь $AB = a$, $BC = b$. Тогда $ab = S$. Отсюда радиус вписанной окружности равен

$$r = \frac{S}{a+b} = \frac{aS}{a^2+ab} = \frac{aS}{a^2+S}.$$

13.II.1. $\{0; 2\}$.

13.II.2. $\frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z$.

13.II.2′. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

13.II.3. $\{2^{-6}, 6\}$.

13.II.4. $x \in [-2, -1) \cup \left(2 - 2\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

13.II.4′. $x = 2$.

13.II.5. $R = \frac{\sqrt{b^4 + S^2}}{2b}$.

Задачи для поступавших на дневное отделение в 2002 г.

1. Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления

ВАРИАНТ I

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $7\log_{14} 2$ или $\log_4 3+\log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3-4x^2+x+6| = x+1$.
3. Решить уравнение $\sin x = 7\sqrt{3}\cos^3 x - \sin^3 x$.
4. Треугольник KLM вписан в окружность S радиуса 5 и описан вокруг окружности радиуса 2, касающейся его сторон в точках P, Q и R. Периметр треугольника с вершинами в серединах дуг KL, LM и MK окружности S равен 20. Найти периметр треугольника PQR.
5. Дана правильная четырехугольная пирамида с высотой h и стороной основания b. Ее основания касаются два шара, каждый из которых касается двух боковых граней пирамиды и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них в полтора раза больше другого.

ВАРИАНТ II

1. Выяснить, какое из чисел больше $\log_{15} 127$ или $\log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3-4x^2+5x-2| = x-1$.
3. Решить уравнение $\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x$.
4. Окружность радиуса 2 касается сторон треугольника ABC в точках A', B' и C'. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна 5. Найти площадь треугольника с вершинами в серединах дуг AB, BC и CA описанной окружности треугольника ABC, если известно, что ее радиус равен 6.
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Даны два шара, каждый из которых касается основания пирамиды, двух ее боковых граней и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них вдвое больше другого.

2. Физический факультет

ВАРИАНТ I

1. Доказать неравенство $7\log_{14}2 < \log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решить уравнение $\sin x = 7\sqrt{3}\cos^3 x - \sin^3 x$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} |x-y| \le 1, \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) \le 0. \end{cases}$$
5. Дана правильная четырехугольная пирамида с высотой h и стороной основания b. Ее основания касаются два шара, каждый из которых касается двух боковых граней пирамиды и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них в полтора раза больше другого.

ВАРИАНТ II

1. Доказать неравенство $\log_{15} 127 < \log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\cos x = 3\sin^3 x - \cos^3 x$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x+y| \le 1, \\ x^2 + y^2 \ge x + y. \end{cases}$
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Даны два шара, каждый из которых касается основания пирамиды, двух ее боковых граней и другого шара (шары касаются разных граней). Найти радиусы шаров, если известно, что один из них вдвое больше другого.

3. Филологический факультет

ВАРИАНТ I

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $7\log_{14} 2$ или $\log_4 3 + \log_7 9$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x + 6| = x + 1$.
3. Решить уравнение $\cos 3x - \sin 3x = \cos 2x$.

4. Треугольник KLM вписан в окружность S радиуса 5 и описан вокруг окружности радиуса 2, касающейся его сторон в точках P, Q и R. Периметр треугольника с вершинами в серединах дуг KL, LM и MK окружности S равен 20. Найти периметр треугольника PQR.
5. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} |x-y| \leq 1, \\ x^2+y^2+2(x+y) \leq 0. \end{cases}$$

ВАРИАНТ II

1. Выяснить, какое из двух чисел больше: $\log_{15} 127$ или $\log_3 2 + \log_5 8$.
2. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + 5x - 2| = x - 1$.
3. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 3x = \dfrac{1}{2} + \sin 2x$.
4. Окружность радиуса 2 касается сторон треугольника ABC в точках A', B' и C'. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна 5. Найти площадь треугольника с вершинами в серединах дуг AB, BC и CA описанной окружности треугольника ABC, если известно, что ее радиус равен 6.
5. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} |x+y| \leq 1, \\ x^2+y^2 \geq x+y. \end{cases}$

4. Экономический факультет (математические методы в экономике, прикладная информатика), биолого-почвенный факультет (биология, экология)

ВАРИАНТ I

1. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые 3 дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние 3 дня — 27 м?
2. При каких a уравнение $\cos x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + a}$ имеет хотя бы одно решение?

3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - 3 \cdot 2^x \leq |y^2 + 2y + 2^x|$.
4. Решить уравнение $(4x+1)\sqrt{(x+1)(1-2x)} = -1$.
5. Точка D расположена на стороне AC треугольника ABC таким образом, что $\angle ABD = 45°$, $\angle DBC = 30°$. В каком отношении отрезок BD делится медианой AE, если $AB = \sqrt{50}$, $BC = 5$?

ВАРИАНТ II

1. Косцы косили траву на поле площадью 170 га. Известно, что количество выкошенного за день увеличивалось ежедневно на одну и ту же величину. За сколько дней поле было выкошено полностью, если за первые 5 дней было выкошено 25 га, а за последние 5 дней — 60 га?
2. При каких a уравнение $\sin x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \sin x - a}$ не имеет решений?
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 + \lg x \geq |y^2 + 2y - \lg x|$.
4. Решить уравнение $(2x-5)\sqrt{(x-1)(x-4)} = 2$.
5. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle CBD = 45°$, $\angle ABD = 60°$, $AB = 4\sqrt{6}$, $BC = 6$. В каком отношении отрезок BD делится медианой CE?

5. Биолого-почвенный факультет (почвоведение), химический факультет

ВАРИАНТ I

1. Том Сойер красил забор длиной 105 м, причем день за днем количество выкрашенного за день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был выкрашен забор, если за первые 3 дня Том выкрасил 36 м забора, а за последние 3 дня — 27 м?
2. Решить уравнение $\cos x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + 1}$.
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - 3 \cdot 2^x \leq |y^2 + 2y + 2^x|$.

4. Решить уравнение $(4x+1)\sqrt{(x+1)(1-2x)} = -1$.
5. Точка D расположена на стороне AC треугольника ABC таким образом, что $\angle ABD = 45^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$. Найти длины отрезков AD и DC, если $AB = \sqrt{2}$, $BC = 1$?

ВАРИАНТ II

1. Косцы косили траву на поле площадью 170 га. Известно, что количество выкошенного за день увеличивалось ежедневно на одну и ту же величину. За сколько дней поле было выкошено полностью, если за первые 5 дней было выкошено 25 га, а за последние 5 дней — 60 га?
2. Решить уравнение $\sin x - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \sin x + 1}$.
3. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 + \lg x \geq |y^2 + 2y - \lg x|$.
4. Решить уравнение $(2x-5)\sqrt{(x-1)(x-4)} = 2$.
5. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причем $\angle CBD = 45^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$, $AB = 4\sqrt{6}$, $BC = 6$. Найти длины отрезков AD и DC.

6. Факультет географии и геоэкологии

ВАРИАНТ I

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{2(a-\sin x)(a-\cos x)} = 1 - \sin x - \cos x$ имеет по крайней мере одно решение?
2. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-4) = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{-x^2 - x + 8} = \sqrt{x-2} - 1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x| + y|y| = x + y$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площадь треугольника $ABD = 6$, площадь треугольника $ADC = 12$, а площадь треугольника CBE равна 9. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

ВАРИАНТ II

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{2(a+\sin x)(a+\cos x)} = 1+\sin x+\cos x$ имеет по крайней мере одно решение?
2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1)+\log_x(2x-3)^2 = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+3x-2} = \sqrt{x+2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x|+y^2 = x+|y|$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площади треугольников ABD и ADC равны 6, а площадь треугольника CBE равна 4. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

7. Геологический факультет

ВАРИАНТ I

1. Найти все решения уравнения $\sin x+\cos x+1 = 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Решить уравнение $\log_x(x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-4) = 2$.
3. Решить уравнение $\sqrt[3]{-x^2-x+8} = \sqrt{x-2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x|+y|y| = x+y$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площадь треугольника $ABD = 6$, площадь треугольника $ADC = 12$, а площадь треугольника CBE равна 9. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

ВАРИАНТ II

1. Найти все решения уравнения $1-\sin x-\cos x = 0$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1)+\log_x(2x-3)^2 = 2$.

3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2+3x-2}=\sqrt{x+2}-1$.
4. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x|x|+y^2=x+|y|$.
5. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC. Площади треугольников ABD и ADC равны 6, а площадь треугольника CBE равна 4. Найти площадь треугольника AFC, где F — точка пересечения отрезков AD и CE.

8. Экономический факультет (финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика), факультет международных отношений (прикладная информатика в гуманитарной сфере)

ВАРИАНТ I

1. Банк А начисляет вкладчикам ежегодно 5% от первоначально вложенной суммы, а банк Б — 20% от первоначально вложенной суммы. Вкладчик вложил в банк Б определенную сумму, а пятью годами ранее он положил в банк А сумму на 50% большую. Через сколько лет после вклада в банк Б оба счета сравняются (деньги со счетов не снимались)?
2. Решить уравнение $\sqrt{x^2\sin x+\cos x}=\sqrt{x^2\cos x+\sin x}$.
3. Решить уравнение $\log_x[(x-1)(x-2)]-\log_{x^2}(x-2)^2=2$.
4. Решить уравнение $f(x)=10$, где $f(x)=\min\left\{4(x+1)^2,\,(x-1)^2\right\}$.
5. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$, $BC=6\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{7}$, $DA=8$ вписан в окружность. Найти длину окружности.

ВАРИАНТ II

1. Вкладчик открыл счет в банке на некоторую сумму на условии, что счет увеличивается ежегодно на 5% от первоначально вложенной суммы. Через два года он сделал новый вклад на длительный срок на условии, что этот вклад увеличивается ежегодно

на 10% от первоначально вложенной суммы. На сколько процентов первый вклад должен был быть больше второго, чтобы через 10 лет после первого по времени вклада оба вклада оказались равными (деньги со счетов не снимались)?

2. Решить уравнение $\sqrt{x\cos 2x + \sin x} = \sqrt{\cos 2x + x\sin x}$.
3. Решить уравнение $\log_{y+1} \dfrac{y}{y-1} + \log_{y^2+2y+1}(y-1)^2 = 2$.
4. Решить уравнение $f(x) = 18$, где $f(x) = \max\left\{x^2,\, 2(x-2)^2\right\}$.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем $AB = 10$, $BC = 3\sqrt{10}$, $CD = 2\sqrt{15}$, $DA = \sqrt{50}$. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

9. Факультет менеджмента

ВАРИАНТ I

1. Сколько решений в зависимости от k имеет уравнение $3 - kx = \sqrt{12 - x}$?
2. Решить неравенство $\log_{2-x} 2 > \log_{x^2} 16$.
3. Решить уравнение $(x-2)\sqrt{x^2+2x} = (x+1)\sqrt{x^2-x}$.
4. Решить уравнение $\cos 4x\, \cos 5x = \cos x\, \cos 6x$.
5. Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D, а биссектриса внешнего угла A пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке E. Известно, что $BC = a$, $AC : AB = 1 : 3$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ADE.

ВАРИАНТ II

1. Сколько решений в зависимости от k имеет уравнение $kx + 4 = \sqrt{20 + x}$?
2. Решить неравенство $\log_{x^2} 81 > \log_{x+2} 3$.
3. Решить уравнение $(x+2)\sqrt{x^2-2x} = (x-1)\sqrt{x^2+x}$.
4. Решить уравнение $\sin x\, \cos 6x + \sin 5x\, \cos 4x = 0$.
5. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, равен R. Прямая, проходящая через вершину A прямого угла, пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке P. На стороне BC выбрана точка Q так, что $AQ : AP = 3 : 5$, а $\angle CAQ + \angle CAP = 180°$. Найти длину отрезка PQ.

Задачи для поступавших на вечернее и заочное отделения в 2002 г.

10. Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления

ВАРИАНТ I

1. Найти все решения уравнения $\sin x = 4\cos^3 2x$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить неравенство $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) \le 2$.
4. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.
5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $5, 6, 9$, а боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найти высоту пирамиды.

ВАРИАНТ II

1. Найти все решения уравнения $\cos x + 4\cos^3 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 \le 2$.
4. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.
5. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, в котором $AB = 3$, $AC = 5$ и угол $BAC = 60^\circ$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45°. Найти высоту пирамиды.

11. Физический факультет

ВАРИАНТ I

1. Найти все решения уравнения $\sin x = 4\cos^3 2x$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) = 2$.
4. Решить неравенство $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} > -2$.
5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 5, 6, 9, а боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найти высоту пирамиды.

ВАРИАНТ II

1. Найти все решения уравнения $\cos x + 4\cos^3 2x = 0$ на промежутке $[0, \pi/2]$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} (x-1) + \log_x (2x-4)^2 = 2$.
4. Решить неравенство $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} < -2$.
5. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, в котором $AB = 3$, $AC = 5$ и угол $BAC = 60°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45°. Найти высоту пирамиды.

12. Факультет географии и геоэкологии

ВАРИАНТ I

1. Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.
2. $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить неравенство $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) \le 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} = -2$.
5. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.

ВАРИАНТ II

1. Решить уравнение $\cos x = \sqrt{3} \cos 2x$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1) + \log_x (2x-4)^2 \leq 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} = -2$.
5. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.

13. Геологический факультет

ВАРИАНТ I

1. Решить уравнение $\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 2\cos x$.
2. Решить уравнение $|x^4 - x + 2| = 2 + 3x - x^4$.
3. Решить уравнение $\log_x (x-5)^2 - \log_{\sqrt{x}}(x-3) = 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{2 - \dfrac{2}{x}} = -2$.
5. Биссектрисы AL, BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке P, причем $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$. Найти отношение CP/PN.

ВАРИАНТ II

1. Решить уравнение $\sin^2 x - 2\sin x = \dfrac{5}{4}$.
2. Решить уравнение $|x^4 - 3x^3 + 2| = x^4 - x^3 - 2$.
3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-1) + \log_x (2x-4)^2 = 2$.
4. Решить уравнение $x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x}} = -2$.
5. Точка C, лежащая вне окружности диаметра 12, соединена с двумя диаметрально противоположными точками A и B этой окружности. Отрезки AC и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Известно, что $CP/PA = 4$ и $CQ/QB = 2$. Найти PQ.

14. Биолого-почвенный факультет (почвоведение), химический факультет

ВАРИАНТ I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x = \sin x$.
3. Решить уравнение $3^{|x-2|} = 27$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = 5$, $CO = 7$, $AB = 6$. Найти BC.

ВАРИАНТ II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x = \cos x$.
3. Решить уравнение $2^{|x-3|} = 8$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{5-2x}{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB = 5$, $BC = 8$, $CO = 7$. Найти AO.

15. Биолого-почвенный факультет (биология, экология)

ВАРИАНТ I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. Решить уравнение $\log_2\left(\dfrac{2}{x} - 4\right) = \log_x(1-2x)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = 5$, $CO = 7$, $AB = 6$. Найти BC.

ВАРИАНТ II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$.

3. Решить уравнение $\log_3\left(6-\dfrac{3}{x}\right) = \log_x(2x-1)$.

4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{5-2x}{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB = 5$, $BC = 8$, $CO = 7$. Найти AO.

16. Экономический факультет (математические методы в экономике, прикладная информатика)

ВАРИАНТ I

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1}$.

2. Решить неравенство $\sqrt{3}\cos x > \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. Решить уравнение $\log_2\left(\dfrac{2}{x}-4\right) = \log_x(1-2x)$.

4. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{-x}}$.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = 5$, $CO = 7$, $AB = 6$. Найти отношение площадей треугольников ABC и AOC.

ВАРИАНТ II

1. Построить график функции $y = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2+4|x|+4}$.

2. Решить неравенство $\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) < 2\cos x$.

3. Решить уравнение $\log_3\left(6-\frac{3}{x}\right)=\log_x(2x-1)$.
4. Решить уравнение $\sqrt{\frac{5-2x}{x}}=\frac{2}{\sqrt{1-x}}$.
5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AB=5$, $BC=8$, $CO=7$. Найти отношение площадей треугольников AOB и COB.

17. Факультет менеджмента

ВАРИАНТ I

1. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\sqrt{3}$, а последний $4\sqrt{3}$. Найти число членов этой прогрессии, если известно, что сумма всех ее членов равна $7\sqrt{3}+3\sqrt{6}$.
2. Решить уравнение $x^{\frac{1}{3}}+(10-x)^{\frac{1}{3}}=2{,}5(10x-x^2)^{\frac{1}{6}}$.
3. Решить уравнение $5^{1+\log_5\cos x}=2{,}5$.
4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}, \\ x+y=1. \end{cases}$
5. В круге радиуса 3 проведена хорда, стягивающая дугу в 252°. Найти длину этой хорды.

ВАРИАНТ II

1. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\sqrt{6}$, а последний $16\sqrt{6}$. Найти число членов этой прогрессии, если известно, что сумма всех ее членов равна $31\sqrt{6}+30\sqrt{3}$.
2. Решить уравнение $(3+x)^{\frac{1}{3}}-(3-x)^{\frac{1}{3}}=(9-x^2)^{\frac{1}{6}}$.
3. Решить уравнение $3^{\log_3|\cos x|}=0{,}5$.
4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x-y=2. \end{cases}$
5. В круге радиуса 2 проведена хорда, стягивающая дугу в 292°. Найти площадь треугольника AOB.

18. Экономический факультет (финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит, экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика)

ВАРИАНТ I

1. Двое вложили в дело 1 300 000 рублей. Если бы первый увеличил свой взнос на 40%, а второй уменьшил свой взнос на 25%, то вложенная сумма не изменилась бы. У кого взнос больше и на сколько процентов?
2. Решить уравнение $2^{3-\lg x} = 64$.
3. Решить неравенство $\dfrac{x}{x^2+7x+12} > \dfrac{x}{x^2+3x+2}$.
4. Построить график функции $y = \sqrt{\dfrac{\mathrm{tg} x - \sin 2x}{\sin 2x - \mathrm{ctg} x}}$.
5. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 12$, $BC = 5$. Найти площадь четырехугольника ABO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно.

ВАРИАНТ II

1. Двое сговорились купить товара на 20 000 рублей. Первый должен был заплатить 12 000 рублей, но в наличии у него оказалось на 15% меньше. На сколько процентов должен увеличить свой взнос второй покупатель, чтобы сделка состоялась?
2. Решить уравнение $3^{2+\lg x} = 81$.
3. Решить неравенство $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8} < \dfrac{x}{2x^2-6x+4}$.
4. Построить график функции $y = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ctg} x - \sin 2x}{\mathrm{ctg} 2x}}$.
5. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = 12$, $BC = 9$. Найти площадь четырехугольника ADO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABC соответственно.

Ответы и решения

1.I.1. $\log_4 3 + \log_7 9$.

Решение: Приведем оба числа к основанию логарифма, равному 14. Получим числа $\log_{14} 128$ и $\log_{14} 3^{\log_4 14} + \log_{14} 9^{\log_7 14}$. Следовательно, требуется сравнить числа 128 и $3^{\log_4 14 + 2\log_7 14}$. Так как $128 < 3^{4,5} = 81 \cdot \sqrt{3}$, то целесообразно попробовать доказать неравенство $4{,}5 < \log_4 14 + 2\log_7 14$. Положим $z = \log_7 2 > 0$. Доказываемое неравенство имеет вид $4,!5 < \frac{1}{2z} + 2{,}5 + 2z$, или $2 < \frac{1}{2z} + 2z$. Последнее неравенство выполняется при всех положительных $z \neq 1/2$. Отсюда получаем ответ.

1.I.2. -1, $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Решение: Замечая, что при $x = -1$ левая часть уравнения обращается в ноль, разложим многочлен под знаком модуля на множители. После этого получаем уравнение $|x+1||x-2||x-3| = x+1$. Сразу находим первый корень $x_1 = -1$. Далее рассматриваем случаи:

а) $x \geq 3$. Уравнение после сокращения на $x-1$ принимает вид уравнения $(x-2)(x-3) = 1$, корнями которого являются числа $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Подходит $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

б) $2 \leq x \leq 3$. Здесь получается уравнение $(x-2)(3-x) = 1$, не имеющее корней.

в) $-1 \leq x \leq 2$. Получается то же уравнение, что и в случае а), но подходит корень $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

г) $x \leq -1$. Получается то же уравнение, что и в случае б).

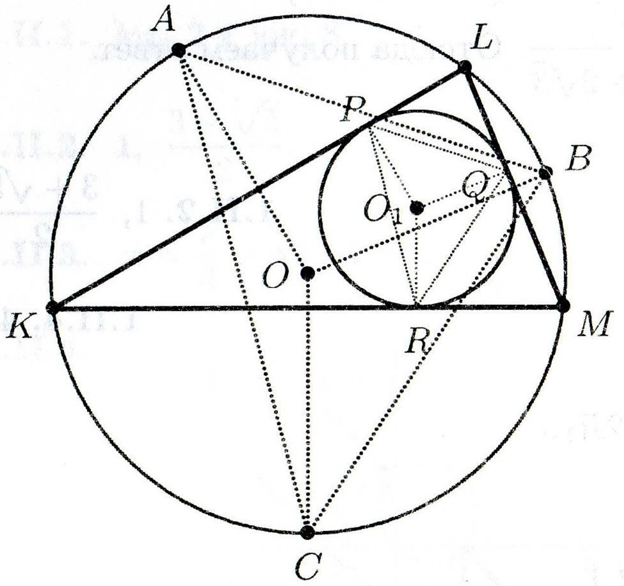
1.I.3. $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

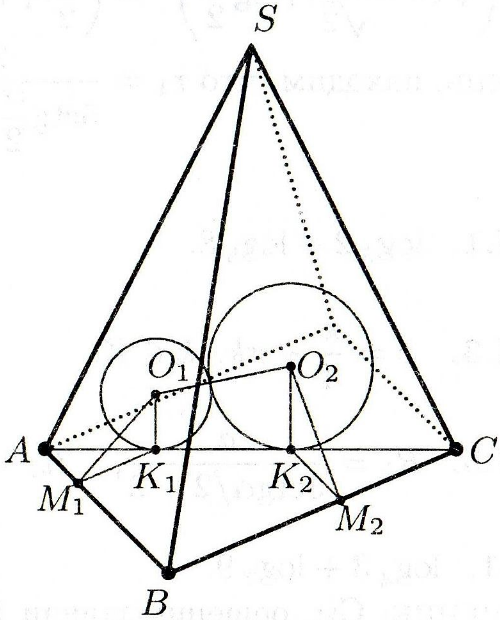
Решение: После умножения левой части на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ уравнение оказывается однородным. Деля его обе части на $\cos x \neq 0$ (легко видеть, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению), получим $\mathrm{tg} x + \mathrm{tg}^3 x = 7\sqrt{3} - \mathrm{tg}^3 x$.

Положим $\mathrm{tg} x = z$. Уравнение $2z^3 + z - 7\sqrt{3} = 0$ имеет очевидный корень $z_1 = \sqrt{3}$. Разлагая левую часть на множители, получим $(z - \sqrt{3})(2z^2 + 2\sqrt{3}z + 7) = 0$, откуда видно, что других корней нет. Решая уравнение $\mathrm{tg} x = \sqrt{3}$, получаем ответ.

1.I.4. 8.

Решение: Пусть O — центр окружности S (она описана вокруг треугольника KLM и ее радиус равен 5), а O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника PQR (она вписана в треугольник KLM и ее радиус равен 2. Пусть A — середина дуги KL, B — середина дуги LM, C — середина дуги MK. Прямые OA и O_1P параллельны, т.к. они перпендикулярны прямой KL. Действительно, OA — перпендикуляр через через середину отрезка KL, а O_1P — радиус в точку касания касательной KL. Аналогично, параллельны прямые OB и O_1Q, OC и O_1R. Отсюда вытекает, что треугольники PQR и ABC подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{2}{5}$. Следовательно, периметр треугольника PQR равен $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$.





1.I.5. $R_1 = \dfrac{2b}{5\mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2h}{b}\right) + 2\sqrt{3}}$, $\quad R_2 = \dfrac{3R_1}{2}$.

Решение: Обозначим через S вершину пирамиды, а через $ABCD$ — квадрат в ее основании. Пусть шар меньшего радиуса r_1 касается граней SAB и SAD пирамиды, а шар большего радиуса — граней SCB и SCD. Центры O_1 меньшего шара и O_2 большего шара, а также точки касания K_1 и K_2 ими основания пирамиды лежат в плоскости ASC. Через L_1 и L_2 обозначим точки касания шарами граней SAB и SCB, а через M_1 и M_2 — основания перпендикуляров, опущенных на AB и BC из точек K_1 и K_2 соответственно. При этом O_1M_1 и O_2M_2 также перпендикулярны к AB и BC соответственно, а четырехугольники $O_1K_1M_1L_1$ и $O_2K_2M_2L_2$ лежат в плоскостях, ортогональных AB и BC.

Рассмотрим четырехугольник $O_1K_1M_1L_1$. Так как $O_1L_1 = O_1K_1 = r_1$, то M_1O_1 — биссектриса угла наклона боковой грани пирамиды к ее основанию, равного $\mathrm{arctg}\,\dfrac{2h}{b}$ ($= \alpha$ для краткости). Следовательно,

$K_1M_1 = O_1K_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Аналогично, рассматривая четырехугольник $O_2K_2M_2L_2$ заключаем, что $K_2M_2 = O_2K_2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда, $AK_1 = \sqrt{2}K_1M_1 = \sqrt{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $K_2C = \sqrt{2}K_2M_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а $K_1K_2 = \sqrt{2}b - \sqrt{2}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}b - \frac{5}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Опустим в четырехугольнике $O_1K_1K_2O_2$ из точки O_1 перпендикуляр на сторону O_2K_2. По теореме Пифагора $O_1N^2 = O_1O_2^2 - O_2N^2$, что, поскольку $O_1N = K_1K_2$, приводит к уравнению, определяющему r_1: $\left(\sqrt{2}b - \frac{5}{\sqrt{2}}r_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}r_1 + r_1\right)^2 - \left(r_1 + \frac{3}{2}r_1 - r_1\right)^2 = 6r_1^2$. Извлекая корень, находим, что $r_1 = \dfrac{2b}{5\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{3}}$. Отсюда получаем ответ.

1.II.1. $\log_3 2 + \log_5 8$.

1.II.2. $1,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.II.3. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

1.II.4. 45.

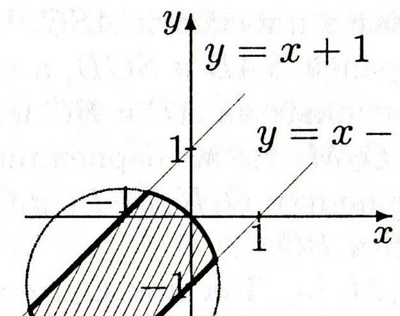
1.II.5. $R_1 = \dfrac{a}{3\operatorname{ctg}\alpha/2 + 2},\quad R_2 = 2R_1$.

2.I.1. $\log_4 3 + \log_7 9$.
Решение: См. решение задачи 1.I.1.

2.I.2. $-1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.
Решение: См. решение задачи 1.I.2.

2.I.3. $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.
Решение: См. решение задачи 1.I.3.

2.I.4.



Решение: Множество точек, удовлетворяющих первому неравенству — это полоса, ограниченная прямыми $y = \pm x + 1$ вместе с этими прямыми. Ширина этой полосы равна $\sqrt{2}$. Второе неравенство перепишем в виде $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$. Оно определяет круг с центром в точке $(-1, 1)$ и диаметром, равным $2\sqrt{2}$ вместе с граничной окружностью. Искомое множество — это общая часть полосы и круга.

2.I.5. $R_1 = \dfrac{2b}{5\mathrm{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2h}{b}\right) + 2\sqrt{3}}$, $\quad R_2 = \dfrac{3R_1}{2}$.

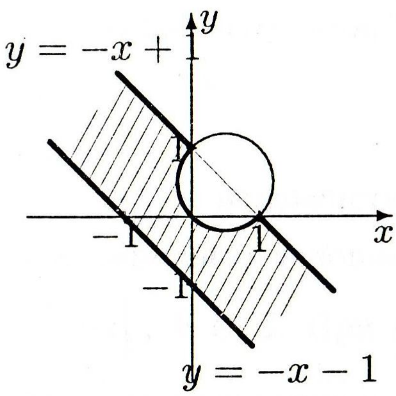
Решение: См. решение задачи 1.I.5.

2.II.1. $\log_3 2 + \log_5 8$.

2.II.2. 1, $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2.II.3. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

2.II.4.



2.II.5. $R_1 = \dfrac{a}{3\mathrm{ctg}\alpha/2 + 2}$, $\quad R_2 = 2R_1$.

3.I.1. $\log_4 3 + \log_7 9$.
Решение: См. решение задачи 1.I.1.

3.I.2. -1, $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.
Решение: См. решение задачи 1.I.2.

3.I.3. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2\pi k$
$-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$.

Решение: Так как $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, то целесообразно разложить на множители и левую часть уравнения. Для этого прибавим и вычтем в левой части величину $\cos x + \sin x$. Имеем $\cos 3x - \sin 3x = (\cos 3x - \cos x) - (\sin 3x + \sin x) + (\cos x + \sin x) = -2\sin x\cos 2x - 2\sin 2x\cos x + \cos x + \sin x = (\cos x + \sin x)(1 - 2\sin x)$.

Уравнение распадается на два:

1) $\cos x + \sin x = 0$,

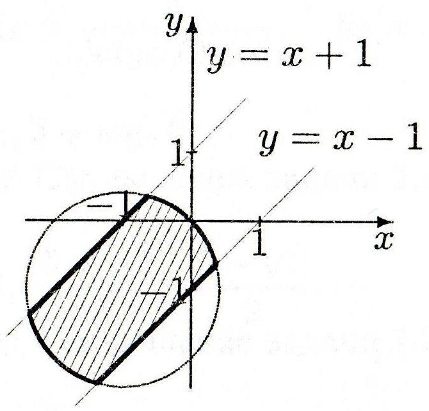
2) $1 - 2\sin 2x = \cos x - \sin x$.

Первое уравнение эквивалентно $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Для решения второго положим $\cos x - \sin x = z$. Уравнение примет вид $1 - 2(z^2 - 1) = z$, откуда $z_1 = 1,\ z_2 = -1/2$. Получаем уравнения $\cos x - \sin x = 1$ и $\cos x - \sin x = -1/2$. Первое имеет решения $x = 2\pi k$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, а второе эквивалентно уравнению $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, откуда $x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. Собирая все серии, получаем ответ.

3.I.4. 8.

Решение: См. решение задачи 1.I.4.

3.I.5.



Решение: См. решение задачи 4 предыдущего задания.

3.II.1. $\log_3 2 + \log_5 8$.

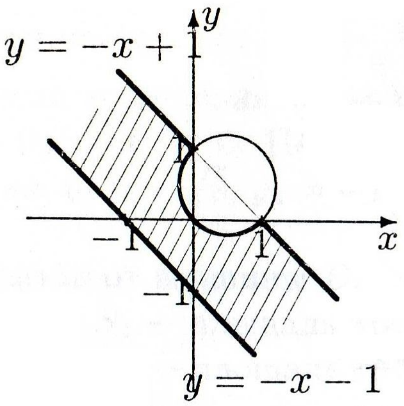
3.II.2. $1,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3.II.3. $-\frac{\pi}{12} + \pi k,\ \frac{7\pi}{12} + \pi k,$

$-\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

3.II.4. 45.

3.II.5.



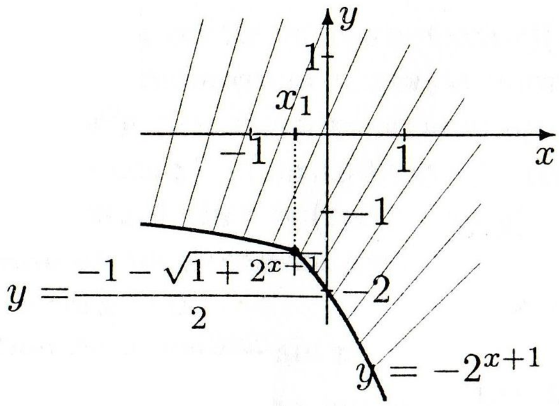
4.I.1. 10 дней.

Решение: Используем свойство арифметической прогрессии, заключающееся в том, суммы двух членов прогрессии, равноотстоящих от первого и последнего (в том числе сумма первого и последнего) равны между собой. Из условия задачи вытекает, что за каждые два дня, равноотстоящих от первого и последнего, Том выкрашивал $\frac{27+36}{3}$ м $=21$ м забора. Следовательно, за $n-6$ дней, начиная с четвертого дня, где n — искомое число дней, Том выкрасил 105 м — 63 м $=42$ м. По формуле суммы членов арифметической прогрессии $42=21\cdot\frac{n-6}{2}$, откуда $n=10$.

4.I.2. $\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{57}{32}$.

Решение: ОДЗ задается неравенством $\cos 4x-\cos x+a\geq 0$. Кроме того, имеется дополнительное условие $\cos x\geq\frac{1}{2}$, что эквивалентно $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. При выполнении дополнительного условия возведем обе части уравнения в квадрат: $\cos^2 x-\cos x+\frac{1}{4}=\cos 4x-\cos x+a$. Заметим, что корни этого уравнения автоматически принадлежат ОДЗ. Полученное уравнение эквивалентно следующему: $-2\cos^2 2x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{7}{4}=a$. Так как $2x\in\left[-\frac{2\pi}{3}+4k\pi,\frac{2\pi}{3}+4k\pi\right]$, то величина $z=\cos 2x$ меняется на промежутке $\left[-\frac{1}{2},1\right]$. Уравнение имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит области значений функции $f(z)=-2z^2+\frac{z}{2}+\frac{7}{4}$, определенной на промежутке $\left[-\frac{1}{2},1\right]$. График $f(z)$ — парабола. На концах промежутка $f(z)$ равна $\frac{1}{4}$ и 1, а ее единственный экстремум (максимум) достигается при $z=\frac{1}{8}$ и равен $\frac{57}{32}$. Отсюда вытекает ответ.

4.I.3.

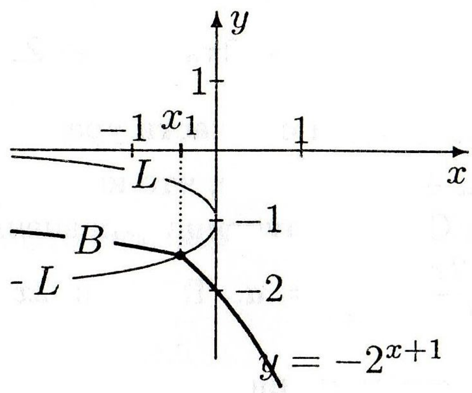


Решение: Обозначим через L кривую, в точках которой выражение под знаком модуля, обращается в ноль. Она задается уравнениями $y = -1 \pm \sqrt{1-2^x}$ и лежит в третьем квадранте. В области, ограниченной кривой L выражение под знаком модуля отрицательно, а вне нее — положительно. Граница B искомого множества задается уравнением $y^2 - 3\cdot 2^x = |y^2+2y+2^x|$. Вне кривой L она задается уравнением $y^2-3\cdot 2^x = y^2+2y+2^x$, или $y = -2^{x+1}$. Внутри кривой L она задается уравнением $y^2 - 3\cdot 2^x = -y^2 - 2y - 2^x$, или $y^2 + y - 2^x = 0$. Решая последнее уравнение относительно y, получаем $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+2^{x+2}}}{2}$, причем знак $+$ следует отбросить, т.к. в этом случае $y > 0$, а мы находимся внутри L, следовательно, в третьем квадранте. Т.о., кривая B задается следующим образом:

$$y = \begin{cases} -2^{x+1} & \text{при } x \geq x_1, \\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+2^{x+2}}}{2} & \text{при } x \leq x_1, \end{cases}$$

где x_1 удовлетворяет уравнению $-2^{x+1} = -1 - \sqrt{1-2^x}$.

Действительно, это уравнение имеет единственный корень x_1, причем $2^{x_1} = \dfrac{3}{4}$, а уравнение $-2^{x+1} = -1 + \sqrt{1-2^x}$ вообще не имеет решений. Имеем: $x_1 = \log_2 3 - 2$, $y_1 = -\dfrac{3}{2}$.



Непосредственно убеждаемся, что начало координат удовлетворяет неравенству задачи и лежит выше кривой B, а точка $(0, -3)$ не удовлетворяет неравенству задачи и лежит ниже кривой B. Т.о., искомой областью является та часть плоскости Oxy, которая лежит выше кривой B и включает саму кривую.

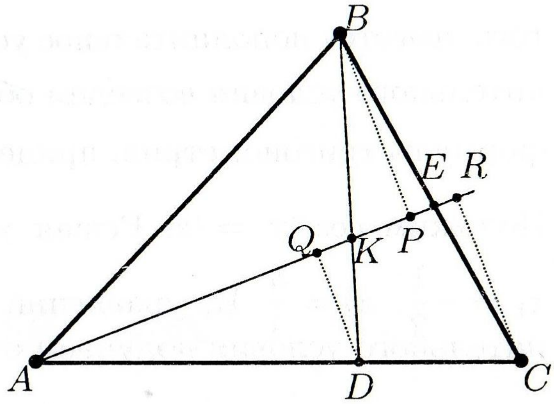
4.I.4. $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$.

Решение: Положим $4x + 1 = y$. Тогда $x + 1 = \dfrac{y+3}{4}$, $1 - 2x = \dfrac{3-y}{2}$.

Уравнение принимает вид $y\sqrt{\dfrac{9-y^2}{8}} = -1$. Отсюда видно, что $|y| \leq 9$, $y < 0$. После возведения в квадрат получается биквадратное уравнение $-y^4 + 9y^2 + 8 = 0$. Полагая $z = y^2$, находим $z_1 = 8$, $z_2 = 1$. Следовательно, $y_1 = -\sqrt{8}$, $y_2 = -1$. Отсюда получаем ответ.

4.I.5. 3:2, считая от вершины B.

Решение: Пусть S_1 — площадь треугольника ABD, а S_2 — площадь треугольника DBC. Вычисляя эти площади двумя способами, составим их отношение: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2S_1}{2S_2} = \dfrac{h \cdot AD}{h \cdot DC} = \dfrac{\sin 45^\circ \cdot \sqrt{50} \cdot BD}{\sin 30^\circ \cdot 5 \cdot BD}$, где h — высота треугольника ABC.

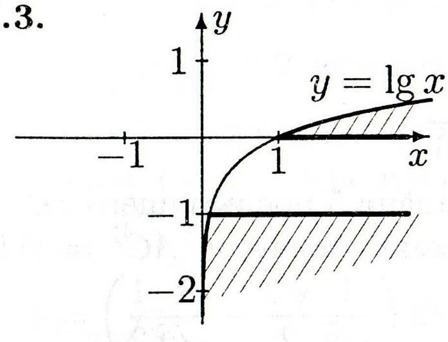


Отсюда вытекает, что $AD : DC = 2 : 1$. Опустим на медиану AE (и ее продолжение) перпендикуляры BP, DQ, CR. Треугольники BPE и ECR равны по стороне ($BE = EC$) и двум углам. Следовательно, $BP = CR$. Из подобия треугольников AQD и ARC находим $DQ : RC = AD : AC = 2 : 3$, а из подобия треугольников BPK и KDQ находим $BK : KD = BP : QD = CR : QD = 3 : 2$.

4.II.1. 20 дней.

4.II.2. $a < -\dfrac{57}{32}$, $a > -\dfrac{1}{4}$.

4.II.3.



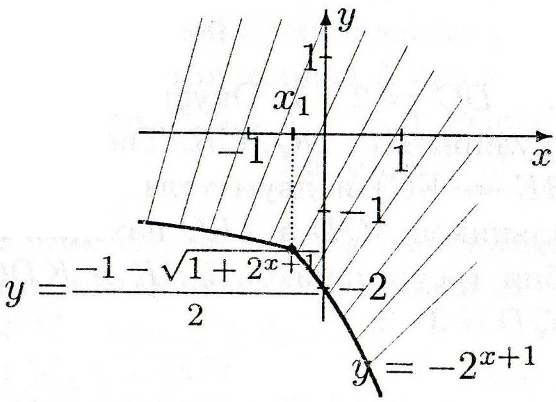
4.II.4. $\dfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{145}}{2}}\right)$.

4.II.5. 3:1, считая от вершины B.

5.I.1. 10 дней.
Решение: См. решение задачи 4.I.1.

5.I.2. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$
Решение: ОДЗ определяется неравенством $\cos 4x-\cos x+1\ge 0$. Кроме того, имеется дополнительное условие $\cos x\ge\dfrac{1}{2}$. При выполнении дополнительного условия возведем обе части уравнения в квадрат. Используя формулы тригонометрии, придем к уравнению $\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{4}=2\cos^2 2x$. Положим $\cos 2x=z$. Решая уравнение $-2z^2+\dfrac{z}{2}+\dfrac{3}{4}=0$, находим $z_1=-\dfrac{1}{2}$, $z_2=\dfrac{3}{4}$. Из уравнений $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\dfrac{3}{4}$ с учетом дополнительного условия получаем ответ.

5.I.3.



Решение: См. решение задачи 4.I.3.

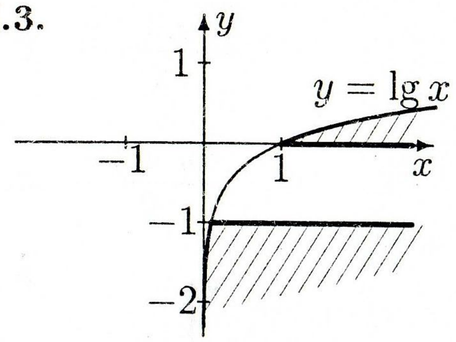
5.I.4. $-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}.$
Решение: См. решение задачи 4.I.4.

5.I.5. $AD=\dfrac{2}{3}\sqrt{4-\sqrt{3}},\ CD=\dfrac{1}{3}\sqrt{4-\sqrt{3}}.$
Решение: Раасуждая как при решении задачи 5 предыдущего задания, докажем, что $AD:DC=2:1$. По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos(45^\circ+30^\circ)=2+1-2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}\right)=4-\sqrt{3}.$ Учитывая вышесказанное, получаем ответ.

5.II.1. 20 дней.

5.II.2. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\qquad \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi k,\ k\in Z.$

5.II.3.



5.II.4. $\dfrac{1}{2}\left(5+\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{145}}{2}}\right)$.

5.II.5. $AD = \dfrac{2}{3}\sqrt{204-24\sqrt{3}}$, $CD = \dfrac{1}{3}\sqrt{204-24\sqrt{3}}$.

6.I.1. $a \in [-1-\sqrt{2}; 0] \cup \{1\}$.

Решение: Помимо условия положительности подкоренного выражения, имеется дополнительное условие $1-\sin x-\cos x \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим $2a^2-2a(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x = 1+\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x-2\cos x+\sin x\cos x$, или $a^2-1=(a-1)(\sin x+\cos x)$. При $a=1$ получается тождество. Следовательно, при $a=1$ решения существуют.

При $a \neq 1$ получается уравнение $a+1=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Это уравнение имеет решение, если $-\sqrt{2} \leq a+1 \leq \sqrt{2}$. Учитывая дополнительное условие, получаем ответ.

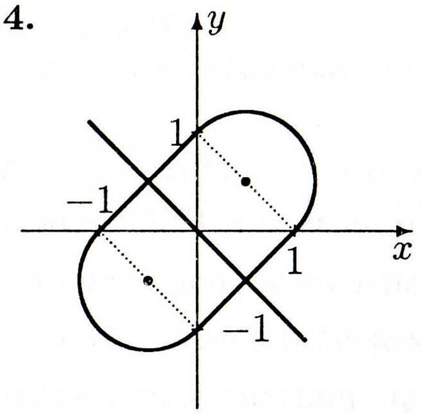
6.I.2. $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Решение: ОДЗ: $x>4$, $x \neq 5$. Данное уравнение эквивалентно уравнению $\log_x \dfrac{(x-5)^2}{(x-4)^2}=2$, которое в ОДЗ эквивалентно уравнению $\dfrac{|x-5|}{x-4}=x$. При $x>5$ получается уравнение $x-5=x^2-4x$, которое не имеет корней. При $4<x<5$ получается уравнение $5-x=x^2-4x$, имеющее два корня $\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$, из которых подходит $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

6.I.3. $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Решение: ОДЗ: $x \geq 2$. Возведем обе части уравнения в куб. В результате получается уравнение $-(x+1)(x-3)=\sqrt{x-2}(x+1)$. Корень $x=-1$ этого уравнения не входит в ОДЗ. Поделив на $x+1$ и возведя обе части получившегося уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2-7x+11=0$, из двух корней которого проверку выдерживает $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

6.I.4.



Решение: В каждом квадранте плоскости Oxy уравнение, определяющее искомое множество, имеет различный вид. Рассмотрим 4 случая.

1) В первом квадранте получается уравнение $x^2 + y^2 = x + y$, или $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Это уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Во втором квадранте получаем уравнение $-x^2 + y^2 = x + y$, распадающееся на два уравнения прямых: $x + y = 0$, $y - x = 1$.

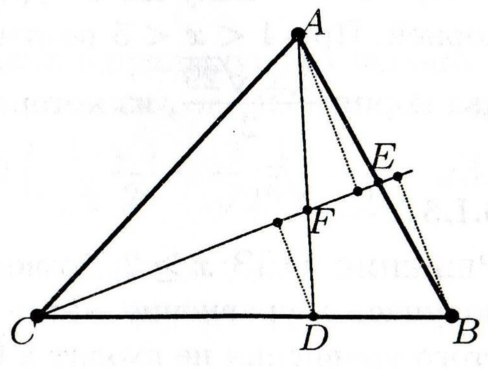
3) Аналогично случаю 1 в третьем квадранте получаем уравнение $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ окружности с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Аналогично случаю 2 в четвертом квадранте получаем уравнения двух прямых: $x + y = 0$, $x - y = 1$. Объединяя эти результаты, получаем ответ.

6.I.5. $7\frac{1}{5}$.

Решение: По условию задачи площадь треугольника ADC вдвое больше площади треугольника ADB, а площади треугольников AEC и BEC равны 9. Отсюда вытекает, что $CD = 2DB$, а $AE = BE$, так как у этих треугольников попарно равные высоты.

Отсюда $S_{AEF} = S_{BEF}$, $S_{CDF} = 2S_{BDF}$, $S_{ACF} = S_{BDF} + S_{CDF} = 3S_{BDF}$. Следовательно, $5S_{BDF} = 12$ и $S_{ACF} = \frac{36}{5}$.

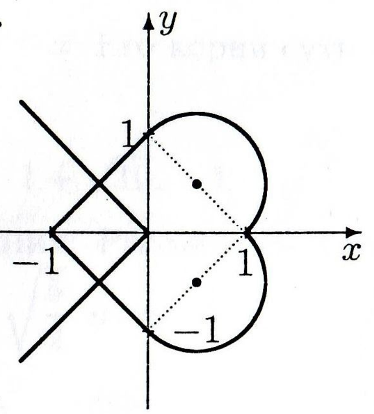


6.II.1. $a \in [-1 - \sqrt{2}; 0] \cup \{1\}$.

6.II.2. $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

6.II.3. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

6.II.4.



6.II.5. $4\dfrac{4}{5}$.

7.I.1. $-\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$.

Решение: Уравнение $\sin x + \cos x = -1$ возведем в квадрат. Поскольку $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, получим, что $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in Z$. Проверяя точки, входящие в заданный промежуток, получим ответ.

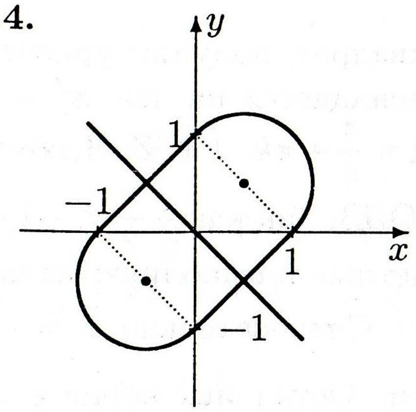
7.I.2. $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Решение: См. решение задачи 6.I.2.

7.I.3. $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Решение: См. решение задачи 6.I.3.

7.I.4.



Решение: См. решение задачи 6.I.4.

7.I.5. $7\frac{1}{5}$.

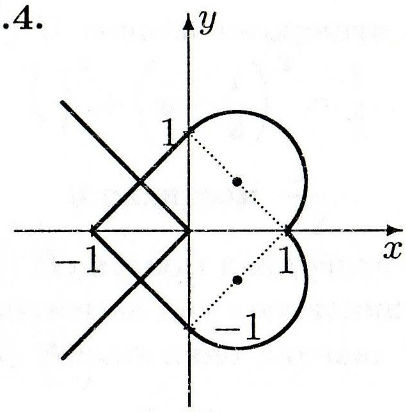
Решение: См. решение задачи 6.I.5.

7.II.1. $-\frac{3\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$.

7.II.2. $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

7.II.3. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

7.II.4.



7.II.5. $4\frac{4}{5}$.

8.I.1. Через 7 лет.

Решение: Пусть b — сумма, вложенная в банк Б. Тогда $1{,}5b$ — сумма, вложенная в банк А. Обозначим через n искомое число лет. Условие задачи записывается в виде уравнения $b(1+0{,}2n) = 1{,}5b(1+0{,}05(n+5))$. Сокращая на b и приводя подобные, получаем уравнение $0{,}125n = 0{,}875$. Следовательно, $n = 7$.

8.I.2. 1, $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$.

Решение: Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $(x^2-1)(\sin x - \cos x) = 0$. Это уравнение распадается на два: $x^2 = 1$ и $\sin x = \cos x$, решая которые, находим $x = \pm 1$ и $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. Необходимо проверить, принадлежат ли эти решения ОДЗ. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, то $\sin(-1) - \cos(-1) < 0$. Кроме того, при нечетных n выполняются неравенства $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) < 0$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) < 0$. Следовательно, $x = -1$ и $x = \frac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$, $k \in Z$ — посторонние корни. Остальные корни в ОДЗ входят.

8.I.3. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

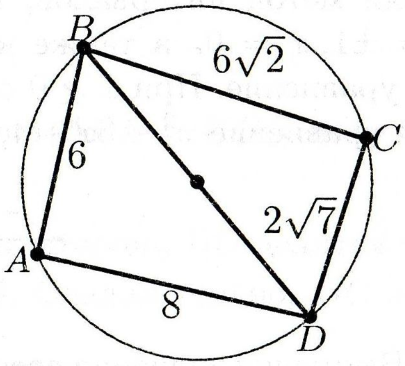
Решение: ОДЗ: $0 < x < 1$ и $x > 2$. В ОДЗ рассматриваемое уравнение эквивалентно следующему: $\dfrac{(x-1)(x-2)}{|x-2|} = x^2$. При $x > 2$ получаем $x^2 = x - 1$. Это уравнение не имеет решений. При $0 < x < 1$ получаем $x^2 = 1 - x$. Его корни суть $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, причем знак $-$ следует отбросить.

8.I.4. $1+\sqrt{10},\ -1-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Решение: Рассмотрим уравнение $4(x+1)^2 = 10$. Его корни суть $x_1 = -1+\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ и $x_2 = -1-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. Уравнение $(x-1)^2 = 10$ имеет корни $x_3 = 1+\sqrt{10}$ и $x_4 = 1-\sqrt{10}$. Так как $(x_1-1)^2 = \left(-2+\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 < 10$, то x_1 не является корнем уравнения $f(x) = 10$. В то же время $(x_2 - 1)^2 = \left(-2-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 > 10$. Следовательно, x_2 — корень уравнения $f(x) = 10$. Рассуждая аналогично, заключаем, что x_3 удовлетворяет уравнению $f(x) = 10$, а x_4 — нет.

8.I.5. 10π.

Решение: Так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle A + \angle C = \pi$. Следовательно, $\cos\angle A = -\cos\angle C$. По теореме косинусов $BD^2 = 100 - 96\cos\angle A = 100 - 24\sqrt{14}\cos\angle C$. Отсюда вытекает, что $\cos\angle A = \cos\angle C = 0$. Следовательно, углы A и C — прямые, а $BD = 10$ — диаметр окружности. Отсюда получаем ответ.



8.II.1. На 20%.

8.II.2. $1,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ k \le 0$

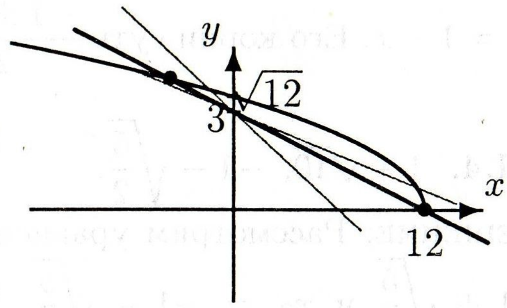
$(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z,\ k \ge 0.$

8.II.3. $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

8.II.4. $-1, \sqrt{18}$.

8.II.5. $37{,}5\pi$.

9.I.1. При $0 < k \le \dfrac{1}{4}$ — два решения, при остальных k — одно решение.

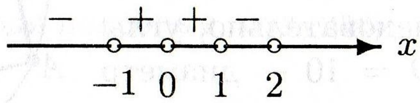


Решение: Решения данного уравнения — это абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 3 - kx$ и $y = \sqrt{12 - x}$. График функции $y = \sqrt{12 - x}$ — это половина параболы $x = 12 - y^2$. Она проходит через точку $(0, \sqrt{12})$.

График функции $y = 3 - kx$ — это прямая, проходящая через точку $(0, 3)$. Так как $\sqrt{12} > 3$, то точек пересечения — либо одна, либо две в зависимости от k, причем переход от одного пересечения к двум происходит, когда прямая $y = 3 - kx$ горизонтальна, т.е. $k = 0$, и когда она проходит через вершину параболы — точку $(12, 0)$. Решая уравнение $3 - 12k = 0$, находим $k = \dfrac{1}{4}$. Отсюда получаем ответ.

9.I.2. $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Решение: ОДЗ: $x < 2$, $x \ne \pm 1$, $x \ne 0$. Запишем данное неравенство в виде $\dfrac{1}{\log_2(2-x)} - \dfrac{2}{\log_2|x|} > 0$, или $\dfrac{\log_2|x| - 2\log_2(2-x)}{\log_2(2-x)\log_2|x|} > 0$. Применяя метод интервалов, находим возможные точки перемены знака: $x = \pm 1$, $x = 0$, а также корни уравнения $|x| = (2-x)^2$. Рассмотрим это уравнение. При $x \ge 0$ оно имеет вид $x^2 - 5x + 4$. При $x \le 0$ получается уравнение $x^2 - 3x + 4$, не имеющее корней.



Вычисляя значение левой части при $x = \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2$, получаем картину распределения знаков, что дает ответ.

9.I.3. $0, \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

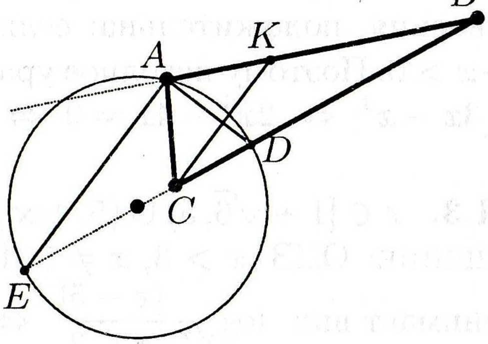
Решение: ОДЗ: $x \le -2$, $x = 0$ и $x \ge 1$. Имеется также дополнительное условие, которое можно записать в виде $(x-2)(x+1) > 0$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат и приведения подобных, получим уравнение $3x(x^2 + x - 3) = 0$. Его корни — 0 и $\dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Дополнительному условию удовлетворяют лишь $x = 0$ и $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

9.I.4. $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Решение: Используя формулы $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$, приведем рассматриваемое уравнение к виду $\cos x-\cos 5x=\cos 7x-\cos 9x$, а затем, используя формулы $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, запишем его в виде $2\sin x\cos x\sin 3x=\sin x\sin 8x$. Это уравнение распадается на два: 1) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in Z$. 2) $2\cos x\sin 3x=\sin 8x \Leftrightarrow \sin 4x+\sin 2x=\sin 8x \Leftrightarrow \sin 2x=2\sin 2x\cos 6x$, распадающееся в свою очередь на 2а) $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

2б) $2\cos 6x=1$, $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

9.I.5. $\frac{3}{8}a$.



Решение: Так как $\angle EAD$ равен половине развернутого, то треугольник EAD — прямоугольный с гипотенузой ED. Следовательно, требуемый радиус равен $\frac{ED}{2}$. Чтобы найти ED, проведем прямую CK, параллельную биссектрисе AE. В треугольнике ACK прямая AD — одновременно и биссектриса и высота, следовательно $AC=AK$. Согласно условию задачи $AK:AB=1:3$.

Пусть $EC=x$. Из подобия треугольников ABE и KBC получаем пропорцию $\frac{x+a}{x}=\frac{3}{1}$, откуда $x=EC=\frac{a}{2}$.

Кроме того, поскольку AD — биссектриса, сторона BC делится точкой D в отношении $3:1$, считая от точки B. Следовательно, $DC=\frac{a}{4}$. Итак, $ED=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3a}{4}$. Отсюда получаем ответ.

9.II.1. При $0<k\le\frac{1}{5}$ — два решения, при остальных k — одно решение.

9.II.2. $(-2,-1)\cup(1,\infty)$.

9.II.3. 0, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

9.II.4. $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

9.II.5. $\frac{16}{15}R$.

10.I.1. $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение: Так как на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ левая часть уравнения монотонно возрастает от 0 до 1, а правая часть — монотонно убывает от 4 до -4, то уравнение имеет одно решение. Легко видеть, что им является $x = \frac{\pi}{6}$.

10.I.2. 0, $\sqrt[3]{2}$.

Решение: При любом x функция, стоящая под модулем в левой части уравнения, положительна: если $x < 2$, то $-x + 2 > 0$, если $x \geq 2$, то $x^4 - x > 0$. Поэтому исходное уравнение переписывается в виде $x^4 - x + 2 = 2 + 3x - x^4 \Leftrightarrow 2x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt[3]{2}$.

10.I.3. $x \in [1+\sqrt{6}, 5) \cup (5, +\infty)$.

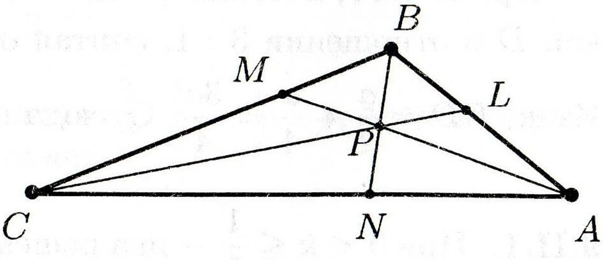
Решение: ОДЗ: $x > 3$, $x \neq 5$. При указанных значениях x неравенство принимает вид $\log_{\sqrt{x}} \frac{|x-5|}{x-3} \Leftrightarrow |x-5| \leq x(x-3)$.

Если $x \in (3, 5)$, то $5 - x \leq x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1+\sqrt{6}, 5)$.

Если $x \in (5, +\infty)$, то $x - 5 \leq x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (5, +\infty)$.

10.I.4. $CP/PN = 8/7$.

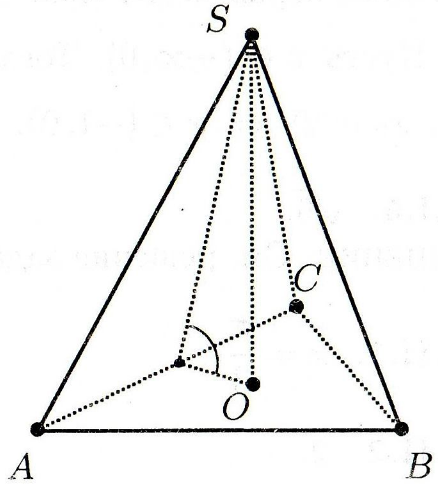
Решение: Пусть площади треугольников BPL, CPL, CPM и BPN равны x, y, z и u соответственно. Тогда, исходя из условия $AP/PL = 4$ и $BP/PM = 2$, имеем $S_{BPA} = 4x$, $S_{APM} = 2x$, $S_{APN} = 4x - u$.



Кроме того $2x + z = 4y$ и $x + y = 2z$. Отсюда, учитывая, что x, y и z — положительны, получаем, что $\frac{y}{x} = \frac{5}{7}$ и $\frac{z}{x} = \frac{6}{7}$. Далее имеем $\frac{CP}{PN} = \frac{x+y}{u} = \frac{2x+z}{4x-u} = \frac{2z+4y}{4x} = \frac{2\cdot 6 + 4\cdot 5}{4\cdot 7} = \frac{8}{7}$.

10.I.5. $\sqrt{6}$.

Решение: Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под углом 60°. Следовательно, высота пирамиды падает в центр окружности, вписанной в основание, и при этом ее радиус r и высота h связаны равенством $h = r\operatorname{tg}60^\circ = r\sqrt{3}$.



Согласно условию, полупериметр основания $p = \dfrac{5+6+9}{2} = 10$. Следовательно, площадь основания $S = 10r$. Но по формуле Герона $S = \sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)} = 10\sqrt{2}$. Следовательно, $r = \sqrt{2}$ и $h = \sqrt{6}$.

10.II.1. $x = \dfrac{\pi}{3}$.

10.II.2. 2.

10.II.3. $x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

10.II.4. $PQ = 8\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

10.II.5. $\sqrt{\dfrac{19}{3}}$.

11.I.1. $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение: См. решение задачи 10.I.1.

11.I.2. $0,\ \sqrt[3]{2}$.

Решение: См. решение задачи 10.I.2.

11.I.3. $1+\sqrt{6}$.

Решение: ОДЗ: $x > 3$, $x \neq 5$. В ОДЗ исходное уравнение эквивалентно уравнению $|x-5| = x(x-3)$. Если $x \in (3,5)$, то $5 - x = x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{6}$.

Если $x \in (5, +\infty)$, то $x - 5 = x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$. Решений нет.

11.I.4. $x \in (-1,0) \cup [1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ: $2 - \dfrac{2}{x} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$. При $x \in [1,+\infty)$ исходное неравенство выполняется.

Пусть $x \in (-\infty,0)$. Тогда $x^2\left(2-\dfrac{2}{x}\right) < 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 < 0$ ($x_1 = -1$, $x_2 = 2$) $\;\Leftrightarrow\; x \in (-1,0)$.

11.I.5. $\sqrt{6}$.

Решение: См. решение задачи 10.I.5.

11.II.1. $x = \dfrac{\pi}{3}$.

11.II.2. 2.

11.II.3. $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

11.II.4. $x \in (-\infty,-1)$.

11.II.5. $\sqrt{\dfrac{19}{3}}$.

12.I.1. $x_1 = (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \pi n$,

$x_2 = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Решение: $\sin x + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x + \sqrt{3}(1-2\sin^2 x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x - \sqrt{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x = \dfrac{1 \mp 5}{4\sqrt{3}}$.

12.I.2. 0, $\sqrt[3]{2}$.

Решение: См. решение задачи 10.I.2.

12.I.3. $x \in [1+\sqrt{6},5) \cup (5,+\infty)$.

Решение: См. решение задачи 10.I.3.

12.I.4. -1.

Решение: При $x \geq 0$ решений нет. Пусть $x < 0$. Тогда $x^2\left(2-\dfrac{2}{x}\right) = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$.

12.I.5. $CP/PN = 8/7$.

Решение: См. решение задачи 10.I.4.

12.II.1. $x_1 = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\pi n,\ x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

12.II.2. 2.

12.II.3. $x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).$

12.II.4. -1.

12.II.5. $PQ = 8\sqrt{\dfrac{6}{5}}.$

13.I.1. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Решение: $\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 2\cos x \ \Leftrightarrow\ \cos^2 x - 2\cos x + \dfrac{3}{4} = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos x =$ $\cos x = 1 \mp \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = 1 - \dfrac{1}{2}.$

13.I.2. 0, $\sqrt[3]{2}$.
Решение: См. решение задачи 10.I.2.

13.I.3. $1 + \sqrt{6}$.
Решение: См. решение задачи 11.I.3.

13.I.4. -1.
Решение: См. решение задачи 12.I.4.

13.I.5. $CP/PN = 8/7$.
Решение: См. решение задачи 10.I.4.

13.II.1. $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

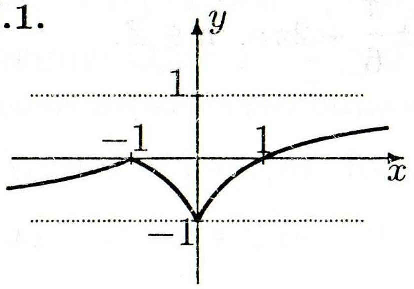
13.II.2. 2.

13.II.3. $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}.$

13.II.4. -1.

13.II.5. $PQ = 8\sqrt{\dfrac{6}{5}}.$

14.I.1.



Решение: $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+2|x|+1} = \dfrac{(x-1)|x+1|}{(|x|+1)^2} \Rightarrow$ область задания: $x \in R$.

При $x \geq 0$ $\quad y = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1} \equiv g(x)$. При $-1 \leq x \leq 0$ $\quad y = 1 - \dfrac{2}{1-x} = g(-x)$. При $x \leq -1$ $\quad y = -1 + \dfrac{2}{1-x} = -g(-x)$.

14.I.2. $\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Решение: $\sqrt{3}\cos x = \sin x \ \Leftrightarrow\ \mathrm{tg} x = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$.

14.I.3. $-1;\ 5$.
Решение: $3^{|x-2|} = 27 \ \Leftrightarrow\ 3 \ \Leftrightarrow\ x - 2 = \pm 3$.

14.I.4. -4.
Решение:

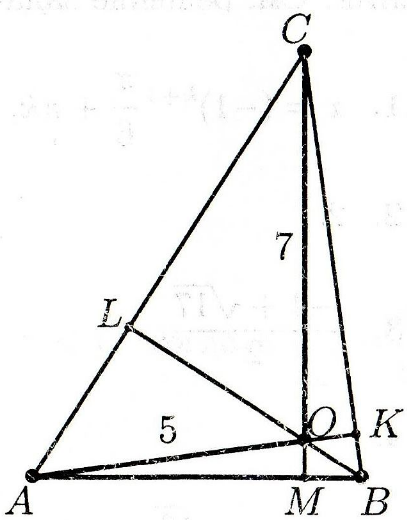
$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{-x}} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{4}{-x} \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 7x - 4 = 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-7 - \sqrt{49+32}}{4} = x = \frac{-7-9}{4} = -4.$$

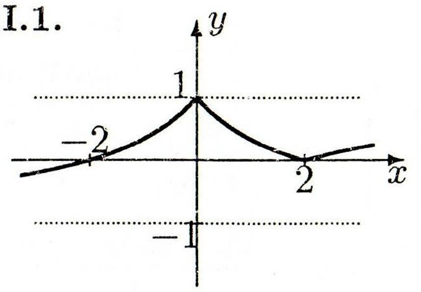
14.I.5. $\sqrt{60}$.

Решение: Пусть K и M — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и C соответственно. Обозначим через x синус угла BAK. Учитывая, что $\angle BAK = \angle BCM$, имеем $OK = 7x$, $OM = 5x$, $BK = 6x$, $BM = BC \cdot x$.

Используя теорему Пифагора, получаем $BM^2 + OM^2 = OK^2 + BK^2$. Следовательно, $BC^2 + 25 = 49 + 36 \ \Leftrightarrow$ $BC = \sqrt{60}$.



14.II.1.



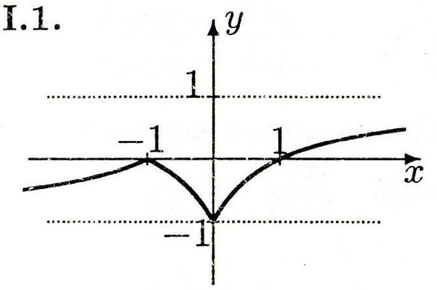
14.II.2. $\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

14.II.3. 0; 6.

14.II.4. 1/2.

14.II.5. $\sqrt{10}$.

15.I.1.



Решение: См. решение задачи 14.I.1.

15.I.2. $\operatorname{arctg} 3\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Решение: $\sqrt{3}\cos x = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos x = \sin x - \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow$ $\operatorname{tg} x = 3\sqrt{3}$.

15.I.3. 1/3.

Решение: ОДЗ: $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. $\log_2\left(\dfrac{2}{x} - 4\right) = \log_x(1-2x) = \Leftrightarrow 1 + \log_2(1-2x) - \log_2 x = \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x} \Leftrightarrow (1 - \log_2 x)\left(1 - \dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2(1-2x) = \log_2 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \notin \text{ОДЗ}, \\ x = 1/3 \in \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$

15.I.4. −4.

Решение:

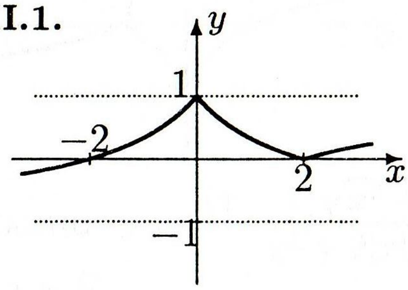
$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{4}{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + 7x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-7 - \sqrt{49+32}}{4} = x = \frac{-7-9}{4} = -4.$$

15.I.5. $\sqrt{60}$.

Решение: См. решение задачи 14.I.5.

15.II.1.



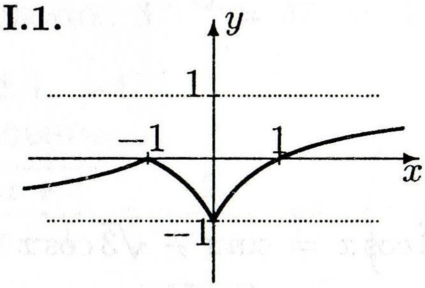
15.II.2. $\operatorname{arctg}\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

15.II.3. 3.

15.II.4. 1/2.

15.II.5. $\sqrt{10}$.

16.I.1.



Решение: См. решение задачи 14.I.1.

16.I.2. $x\in(-\pi+\operatorname{arctg}3\sqrt{3}+2\pi k,\ \operatorname{arctg}3\sqrt{3}+2\pi k),\ k\in Z$.

Решение: $\sqrt{3}\cos x>\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{3}\cos x>\sin x-\sqrt{3}\cos x\ \Leftrightarrow$ $3\sqrt{3}\cos x>\sin x\ \Leftrightarrow\ -\pi+\operatorname{arctg}3\sqrt{3}+2\pi k<x<\operatorname{arctg}3\sqrt{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

16.I.3. 1/3.

Решение: ОДЗ: $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. $\log_2\left(\dfrac{2}{x}-4\right)=\log_x(1-2x)=\Leftrightarrow\ 1+\log_2(1-2x)-\log_2 x=\dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x}\ \Leftrightarrow\ (1-\log_2 x)\left(1-\dfrac{\log_2(1-2x)}{\log_2 x}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2(1-2x)=\log_2 x\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=2\notin\text{ОДЗ},\\ x=1/3\in\text{ОДЗ}.\end{array}\right.$

16.I.4. -4.

Решение:

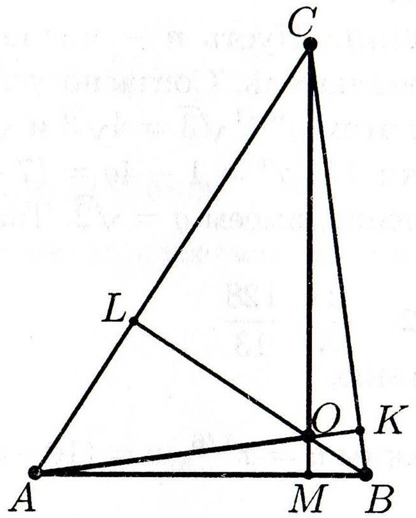
$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{-x}}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ \dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{4}{-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ 2x^2+7x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-7-\sqrt{49+32}}{4}=x=\frac{-7-9}{4}=-4.$$

16.I.5. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOC}}=\dfrac{12\sqrt{15}}{35}$.

Решение: Пусть K, L и M — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B и C соответственно. Имеем тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AOC}}=\frac{BL}{OL}=1+\frac{OB}{OL}.$$



Из подобия треугольников OCL и OBM получаем $\dfrac{7}{OL}=\dfrac{OB}{OM}$. Следовательно, $\dfrac{OB}{OL}=\dfrac{OB}{7\cdot OM}$.

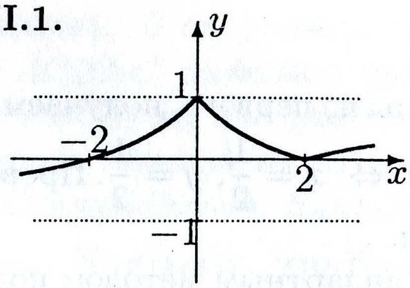
Обозначим через x синус угла BAK. Учитывая, что $\angle BAK=\angle BCM$, имеем $OK=7x$, $OM=5x$, $BK=6x$. По теореме Пифагора $OB^2=OK^2+BK^2=85x^2$. Таким образом, $\dfrac{OB}{OL}=\dfrac{85x^2}{7\cdot 5x}=\dfrac{17}{7}x$.

Для нахождения x используем теорему Пифагора для треугольника ABK. Учитывая, что $AK=AO+OK=5+7x$, имеем $(5+7x)^2+36x^2=36\Leftrightarrow 85x^2+2\cdot 35x-11$.

Так как $x>0$, получаем $x=\dfrac{-35+\sqrt{35^2+11\cdot 85}}{85}=-\dfrac{7}{17}+\dfrac{6\sqrt{60}}{5\cdot 17}$.

Окончательно имеем $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOC}}=1+\dfrac{17}{7}x=\dfrac{6\sqrt{60}}{35}$.

16.II.1.



16.II.2. $x \in \left(-\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{4+\sqrt{3}}{3} + 2\pi k,\ \operatorname{arctg}\dfrac{4+\sqrt{3}}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$

16.II.3. 3.

16.II.4. 1/2.

16.II.5. $\dfrac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{56}.$

17.I.1. 5.
Решение: Пусть n — число членов геометрической прогрессии и q — ее знаменатель. Согласно условию, она имеет вид $\sqrt{3}, q\sqrt{3}, \ldots, q^{n-1}\sqrt{3}$ и при этом $q^{n-1}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}(1+q+\ldots+q^{n-1}) = 7\sqrt{3}+3\sqrt{6}$. Отсюда следует $1-q^n = 1-4q = (7+3\sqrt{2})(1-q)$. Решая полученное линейное уравнение, имеем $q = \sqrt{2}$. Таким образом, $(\sqrt{2})^{n-1} = 4 \Leftrightarrow n = 5$.

17.I.2. $\dfrac{2}{13}, \dfrac{128}{13}.$
Решение:
Положим $u = x^{1/6}$, $v = (10-x)^{1/6}$. Тогда $\begin{cases} u^6+v^6 = 10, \\ u^2+v^2-\dfrac{5}{2}uv = 0. \end{cases}$ Из 2-го уравнения системы получаем, что либо $v = 2u$, либо $v = \dfrac{u}{2}$. Если $v = 2u$, то $v^6 = 64u^6$. Следовательно, $(1+64)x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{13}$.

Если $v = \dfrac{u}{2}$, то $v^6 = \dfrac{u^6}{64}$. Следовательно, $(1+\dfrac{1}{64})x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{128}{3}$.

17.I.3. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$
Решение: ОДЗ: $\cos x > 0$. Так как $1 + \log_5 \cos x = \log_5(5\cos x)$, то, согласно определению логарифма, $5\cos x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

17.I.4. $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}.$
Решение: Вычитая второе уравнение системы из первого, получаем $x^2 + y^2 - x - y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{2}$. Проверка подтверждает верность найденного решения.

Замечание: Система легко решается и стандартным методом подстановки.

17.I.5. $6\sin 54^\circ$.

Решение: Пусть AC — диаметр круга. Тогда $AC = 6$, $\angle ABC = 90^\circ$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}(360^\circ - 252^\circ) = 54^\circ$. Следовательно, $AB = 6 \cdot \sin 54^\circ$.

18.I.1. На 60% (у второго).

Решение: Пусть взносы первого и второго вкладчиков равна x и y соответственно. Согласно условию, $1,4x + 0,75y = x + y \Leftrightarrow 0,4x = 0,25y \Leftrightarrow 1,6x = y$. Следовательно, взнос больше у второго вкладчика на 60%. *Замечание:* От размера вложенной суммы ответ не зависит.

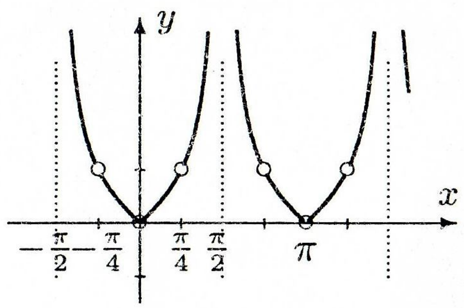
18.I.2. $x = \dfrac{1}{1000}$.

Решение: $2^{3-\lg x} = 64 \Leftrightarrow 3 - \lg x = \log_2 64 \Leftrightarrow \lg x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3}$.

18.I.3. $x \in (-4, -3) \cup (-5/2, -2) \cup (-1, 0)$.

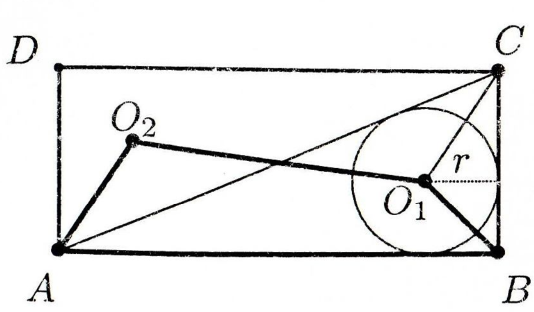
Решение: Исходное неравенство преобразуется к виду $\dfrac{x(4x+10)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} < 0$. Применяя метод интервалов, приходим к ответу.

18.I.4.



Решение: Учитывая, что $\dfrac{\mathrm{tg}x - \sin 2x}{\sin 2x - \mathrm{ctg}x} = \dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 2\cos x\right)}{\cos x\left(2\sin x - \dfrac{1}{\sin x}\right)} = \mathrm{tg}^2 x\,\dfrac{1 - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 1} = \mathrm{tg}^2 x$ (при условии, что $\sin^2 x \neq 1/2$), получаем $y = |\mathrm{tg}x|$, $x \neq \dfrac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

18.I.5. $S_{ABO_1O_2} = 25$.



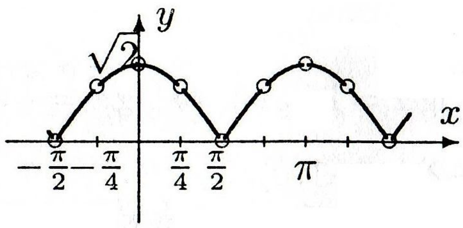
Решение: В силу симметрии ломаная AO_2O_1C разбивает прямоугольник $ABCD$ на две равные фигуры, площадь каждой из которых равна 30. Следовательно, $S_{ABO_1O_2} = 30 - S_{BCO_1}$. Учитывая, что $S_{BCO_1} = \dfrac{5}{2}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, остается найти r. Так как $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, то $r = \dfrac{1}{2}(12 + 5 - 13) = 2$. Окончательно получаем $S_{ABO_1O_2} = 25$.

18.II.1. На $22,5\%$.

18.II.2. $x = 100$.

18.II.3. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

18.II.4.



18.II.5. $S_{ADO_1O_2} = 36$.

СОДЕРЖАНИЕ