Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Варианты 2001 года

Пособие для абитуриентов

Санкт-Петербург
2002

Представлено к изданию Центральной приемной комиссией Санкт-Петербургского государственного университета

составители: **Б.М. Беккер, Ю.Н. Бибиков (председатель комиссии), Н.Ю. Нецветаев, А.В. Осипов, П.К. Черняев, Ю.В. Чурин**

название: **Варианты 2001 года**
Методическое пособие для абитуриентов

Пособие содержит условия задач, предлагавшихся в 2001 году на вступительных экзаменах в Санкт-Петербургский государственный университет. Приведены ответы, а также решения задач первого варианта. Пособие адресовано поступающим в СПбГУ, учителям и старшеклассникам.

отв. редактор: канд. физ.-мат. наук, доцент **Еремеев Владимир Валерьевич**

рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент **Ильин Юрий Анатольевич**

А б и т у р и е н т у С П б Г У

Методические указания к вступительным экзаменам по математике

Цель этой памятки — познакомить Вас с порядком проведения вступительных экзаменов по математике, с обязанностями абитуриентов во время экзаменов, а также с задачами, которые предлагались на вступительных экзаменах в СПбГУ в 2001 году.

Накануне экзамена узнайте в приемной комиссии факультета, в каком месте он будет проходить, как туда вовремя добраться. На экзамен нужно приходить отдохнувшим, хорошо выспавшимся. В случае болезни не приходите на экзамен, а обратитесь в поликлинику СПбГУ, возьмите справку об освобождении и известите приемную комиссию факультета.

На экзамене Вам потребуется ручка, не помешает и запасная. Писать можно только синей, черной или фиолетовой пастой (чернилами). Разрешается иметь при себе карандаш. Пропуском на экзамен служат экзаменационный лист и паспорт. Если их нет, то допустить Вас до экзамена могут только по письменному разрешению ответственного секретаря приемной комиссии факультета. Найти его Вам помогут дежурные у входа.

На экзамен рекомендуется приходить за 15 — 20 минут до его начала. Примерно в это время начинается впуск в аудиторию. Требования экзаменатора поменять место должны выполняться безоговорочно. Выходить из аудитории во время экзамена нельзя. После окончания впуска в аудиторию экзаменаторы напомнят основные правила поведения на экзамене. Вы заполните титульный лист, на котором не следует делать никаких других записей. Затем Вам продиктуют тексты задач, объявят время окончания экзамена. Варианты письменных экзаменов содержат по 5 задач, на решение которых отводится 4 часа.

Все предлагаемые на экзаменах задачи укладываются в рамки “Программы вступительных экзаменов для поступающих в Санкт-Петербургский государственный университет”. Трудность вариантов обусловлена потребностями факультетов в определенном уровне мате-

матических знаний, реальными возможностями абитуриентов данного факультета, а также конкурсной ситуацией на данном факультете.

Обычно в каждом варианте имеется не менее двух несложных задач и по крайней мере одна трудная или нестандартная задача. Начинайте решать ту задачу, которая кажется Вам проще. Доведите решение до конца, проверьте и перепишите в чистовик (ответ при этом рекомендуется выделить). Решения на чистовике можно располагать в любом порядке, необходимо лишь сохранить нумерацию задач. Не относящиеся к решению задач надписи и рисунки в работе делать нельзя.

Решенная задача придаст Вам уверенности в себе и успокоит. После этого принимайтесь за самую легкую из оставшихся задач. Если за 10 — 20 минут Вы не можете найти решения, отложите эту задачу и примитесь за следующую. Если задача нестандартная, имеет непривычную формулировку, не спешите сразу приниматься за выкладки, сперва обдумайте условие, наметьте план решения. Помните, что все предлагаемые задачи доступны, для их решения не требуются сведения, не входящие в программу вступительных экзаменов.

В конце экзамена не забудьте тщательно проверить решения, затем вложите все листы один в другой, а затем в титульный лист. Ваш экзаменационный лист останется у экзаменаторов. После экзамена в приемной комиссии факультета и в месте проведения экзамена будут вывешены ответы и решения задач. Оценку Вам сообщат в приемной комиссии факультета накануне следующего экзамена.

Далее приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в университет в 2001 году, ответы ко всем задачам, а также краткие решения задач первого варианта.

Дневное отделение

1. Факультеты: математико-механический, прикладной математики — процессов управления и физический

Вариант I

1. Косцы должны выкосить два луга. Начав косить большой луг, они через два часа работы разделились: часть осталась на первом лугу, а другая часть пошла косить второй луг площадью вдвое меньше первого и закончила работу одновременно с первой группой. Требуется определить сколько косцов осталось работать на большом лугу, если известно, что один косец скашивает малый луг за три дня работы по восемь часов.

2. Решить уравнение
$$\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x}{2\sin 2x(2\sin x-1)}=\mathrm{ctg}2x-\mathrm{ctg}x.$$

3. Решить неравенство

   а) $\log_{x+a}3<\log_{x-a}9$ при условии, что $0<a<\dfrac{1}{8}$. *(Мат-мех, ПМ-ПУ.)*

   б) $\log_{x+a}3<\log_{x-a}9$ при условии, что $a>\dfrac{1}{8}$. *(Физический ф-т.)*

4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, AOC, BOC, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию.

5. Найти объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами длиной $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$.

Вариант II

1. Две бригады маляров красят два цеха. После 3 часов совместной работы в первом цехе вторая бригада перешла во второй цех, объем работы в котором вдвое меньше, чем в первом. Требуется определить, сколько маляров было во второй бригаде, если известно, что покраска обоих цехов была закончена одновременно, а один маляр может покрасить меньший цех за 6 дней, работая по 8 часов ежедневно.

2. Решить уравнение
$$\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x-1}{2\sin 2x(2\cos x-1)}=\mathrm{ctg}2x+\mathrm{tg}x.$$

3. Решить неравенство

   а) $\log_{x+a}2<\log_{x}4$ при условии, что $0<a<\dfrac{1}{4}$. *(Мат-мех, ПМ-ПУ.)*

   б) $\log_{x+a}2<\log_{x}4$ при условии, что $a>\dfrac{1}{4}$. *(Физический ф-т.)*

4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC, AOC, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию.

5. Найти объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами длиной $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$, 5.

2. Факультеты: биолого-почвенный, химический, филологический (теоретическая и прикладная лингвистика)

Вариант I

1. Решить уравнение $2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}x = 2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x$.
2. Решить уравнение $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{tg}x}{2\sin 2x(2\sin x-1)} = \mathrm{ctg}2x - \mathrm{ctg}x$.
3. Решить неравенство $|\log_3(x-3)| - \log_3 x > 2$.
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, AOC, BOC, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию.
5. Два насоса откачивают воду, равномерно поступающую в бак. Если включить первый насос, то бак опустеет за 3 часа, если второй — то за 2 часа, а если оба насоса сразу, то за 1 час. За какое время наполнится пустой бак, если выключить оба насоса?

Вариант II

1. Решить уравнение $\sqrt{y^2+2}-\dfrac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{y^2-2}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}$.
2. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{ctg}x-1}{2\sin 2x(2\cos x-1)} = \mathrm{ctg}2x + \mathrm{tg}x$.
3. Решить неравенство $|\log_2(x-4)| - \log_2 x > 1$.
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB, BOC, AOC, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию.
5. В бассейн по двум трубам льется вода, которую откачивает насос. Если открыть одну трубу, то пустой бассейн заполнится за 2 часа, если другую — то за 3 часа, а если обе — то за 1 час. За какое время наполнится бассейн, если выключить насос и открыть обе трубы?

3. Факультеты: географии и геоэкологии, геологический

Вариант I

1. Построить график функции $y = 2|\log_3(3-x)| + \log_3(3-x)^2$.
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y = xy + 2(\sqrt{2}-1), \\ x^2+y^2 = x^2y^2. \end{cases}$
3. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-4x+3} > x-1$.
4. Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\cos x} = 1$.
5. Вершина A квадрата $ABCD$ со стороной a лежит на окружности, касающейся сторон BC и CD. Найти площадь части квадрата, лежащей внутри окружности.

Вариант II

1. Построить график функции $y = -2|\log_2(2+x)| - \log_2(2+x)^2$.
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy = 1, \\ xy(x+y) = -\dfrac{10}{9}. \end{cases}$
3. Решить неравенство $\sqrt{4x^2+6x+2} - \sqrt{4x^2+4x} > 2x+2$.
4. Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\cos x} = 1$.
5. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит на окружности, касающейся стороны BC в ее середине. Найти площадь части треугольника, лежащей внутри окружности.

4. Экономический факультет (специальности: математические методы в экономике, прикладная информатика, финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит)

Вариант I

1. Два города A и B лежат по одну сторону от прямолинейной дороги на расстоянии 60 км и 200 км от нее. Перевозка груза по дороге обходится вдвое дешевле, чем по любому пути вне дороги. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку груза из A в B были минимальными, если известно, что расстояние между городами равно 500 км.
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=xy+2(\sqrt{2}-1), \\ x^2+y^2=x^2y^2. \end{cases}$

2* *(Для специальности математические методы в экономике.)* Найти значение параметра a, при котором сумма корней трехчлена $x^2+(a^2-2a)x+(a+1)^2$ принимает наибольшее значение.

3. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-4x+3}>x-1$.
4. Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\cos x}=1$.
5. Вершина A квадрата $ABCD$ со стороной a лежит на окружности, касающейся сторон BC и CD. Найти площадь части квадрата, лежащей внутри окружности.

Вариант II

1. Требуется перевезти груз из города A в город B, расположенный по ту же сторону от прямолинейного канала. Перевозка груза сухопутным путем обходится втрое дороже, чем по каналу. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку были минимальными, если известно, что расстояние между городами A и B равно 700 км, и они находятся в 100 км и 200 км от канала, соответственно?
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=1, \\ xy(x+y)=-\dfrac{10}{9}. \end{cases}$

2* *(Для специальности математические методы в экономике.)* Найти значение параметра a, при котором сумма корней трехчлена $x^2+(a+1)ax+(a-1)^2$ принимает наибольшее значение.

3. Решить неравенство $\sqrt{4x^2+6x+2}-\sqrt{4x^2+4x}>2x+2$.
4. Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\cos x}=1$.
5. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит на окружности, касающейся стороны BC в ее середине. Найти площадь части треугольника, лежащей внутри окружности.

5. Факультеты: международных отношений, экономический (специальности: экономика и управление на предприятии, мировая экономика, менеджмент организации; направление: экономика)

Вариант I

1. Двум трактористам было поручено вспахать три поля: A, B и C; поле A на 60 % больше поля B, а поле C на 37,5 % меньше поля A. Первый тракторист вспахал 50 % поля A и 40 % поля B, а второй — все остальное. У кого из трактористов оплата труда должна быть больше и на сколько процентов?
2. Решить уравнение $1+3\sin 2x = 2\sin x+3\cos x$.
3. Решить уравнение $\log_2\dfrac{x}{2}\cdot\log_3\dfrac{25}{3x^2}+\log_2 5 = \log_x 5$.
4. Даны четыре числа, взятые в определенном порядке. При этом сумма 2-го и 3-го чисел равна 12, а 1-го и 4-го — 14. Найти эти числа, если известно, что первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а три последние — геометрическую.

5. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, а $\angle C = \gamma$. Найти угол между высотой и медианой, выходящими из вершины B.

Вариант II

1. Два насоса наполняют четыре цистерны, 1-я из которых на 40 % меньше 2-й, а 3-я и 4-я вместе — на $66\frac{2}{3}$ % меньше 1-й. За час работы 1-й насос наполняет 1-ю цистерну на 50 % и 2-ю цистерну — на 70 %, а 2-й насос за такое же время наполняет все остальное. У какого насоса мощность больше и на сколько процентов?
2. Решить уравнение $3\sin 2x + 2\cos x = 1 + 3\sin x$.
3. Решить уравнение $\log_5 \frac{5}{x} \log_3 \frac{3}{4x^2} + \log_x 2 = \log_5 2$.
4. Четыре числа взяты в определенном порядке. При этом сумма первого и последнего из них равна 7, а сумма двух средних — 6. Найти эти числа, если известно, что первые три из них образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую.
5. Дан $\triangle ABC$. Его площадь равна S, радиус вписанной окружности равен r, а $\angle A = \alpha$. Найти длину стороны BC.

6. Факультет менеджмента

Вариант I

1. При каких a система $\begin{cases} x + |y| = 1, \\ y + a|x| = 2 \end{cases}$ имеет 4 решения?
2. Решить неравенство $x\sqrt{\frac{1-x}{2}} > -1$.
3. Решить уравнение $\frac{1}{2} + \sin x + \sin 5x = \cos^2 x$.
4. Решить неравенство $\log_2 5x^2 + \log_x \sqrt{5}x > 0$.
5. Найти площадь треугольника ABC, у которого $\angle A = \alpha$, радиус описанной окружности равен R, а высота, опущенная из вершины B, равна h.

Вариант II

1. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} |x| + y = 2, \\ x + b|y| = 3 \end{cases}$ имеет ровно 3 решения?
2. Решить неравенство $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{2x}} > -1$.
3. Решить уравнение $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 5x = \sin^2 x$.
4. Решить неравенство $\log_3 \frac{4}{3x} + \log_x 4 > 0$.
5. Найти углы треугольника ABC, если известно, что его медиана и высота, проведенные из вершины A, делят $\angle A$ на три равные части.

Вечернее и заочное отделения

7. Факультеты: математико-механический и прикладной математики — процессов управления

Вариант I

1. Построить график функции $y = \dfrac{|\cos 2x|}{\cos x - \sin x}$.

2. Решить неравенство $x\sqrt{\dfrac{2}{3-x}} < 1$.

3. Решить неравенство $\log_x \dfrac{3x^2 - x}{2} > \log_2 \dfrac{3x^2 - x}{2}$.

4. Две окружности радиусов 1 и 3 касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые ℓ_1 и ℓ_2. Острый угол, образованный прямой ℓ_1 с прямой ℓ, проходящей через центры окружностей, в три раза больше острого угла, образованного прямыми ℓ_2 и ℓ. Длины четырех хорд, высекаемых окружностями на прямых ℓ_1 и ℓ_2, образуют геометрическую прогрессию. Найти наибольшую из длин хорд.

5. Дана пирамида с прямоугольным основанием. Длины трех ее боковых ребер равны 10, 12 и 14 см. Найти длину четвертого бокового ребра, если известно, что вершина пирамиды проектируется внутрь основания.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \dfrac{|\cos 2x|}{\cos x + \sin x}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{2x}{3x-1}} > 1$.

3. Решить неравенство $\log_x \dfrac{x^2 + 3x}{4} < \log_3 \dfrac{x^2 + 3x}{4}$.

4. Окружность радиуса 1 касается изнутри окружности радиуса 4. Через точку касания проведены две прямые ℓ_1 и ℓ_2. Острый угол, образованный прямой ℓ_1 с прямой ℓ, проходящей через центры окружностей, в три раза больше острого угла, образованного прямыми ℓ_2 и ℓ. Длины четырех хорд, на которые опираются указанные углы, образуют геометрическую прогрессию. Найти наименьшую из длин хорд.

5. Дана пирамида с прямоугольным основанием. Длины трех ее боковых ребер равны 8, 10 и 12 см. Найти длину четвертого бокового ребра, если известно, что вершина пирамиды проектируется внутрь основания.

8. Факультеты: физический, геологический, географии и геоэкологии

Вариант I

1. Построить график функции $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$.

2. Решить неравенство $x\sqrt{\dfrac{2}{3-x}} < 1$.

3. Решить

   а) неравенство $\log_x \dfrac{3x^2 - x}{2} > \log_2 \dfrac{3x^2 - x}{2}$. *(Физический ф-т.)*

   б) уравнение $\log_x \dfrac{3x^2 - x}{2} = \log_2 \dfrac{3x^2 - x}{2}$. *(Геологический и географический ф-ты.)*

4. Две окружности радиусов 1 и 3 касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые ℓ_1 и ℓ_2. Острый угол, образованный прямой ℓ_1 с прямой ℓ, проходящей через центры окружностей, в три раза больше острого угла, образованного прямыми ℓ_2 и ℓ. Длины четырех хорд, высекаемых окружностями на прямых ℓ_1 и ℓ_2, образуют геометрическую прогрессию. Найти наибольшую из длин хорд.

5. Расстояние от точки внутри прямоугольника до трех его вершин равны 10, 12 и 14 см. Найти расстояние от этой точки до четвертой вершины.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{2x}{3x-1}} > 1$.

3. Решить

   а) неравенство $\log_x \dfrac{x^2 + 3x}{4} < \log_3 \dfrac{x^2 + 3x}{4}$. *(Физический ф-т.)*

   б) уравнение $\log_x \dfrac{x^2 + 3x}{4} = \log_3 \dfrac{x^2 + 3x}{4}$. *(Геологический и географический ф-ты)*

4. Окружность радиуса 1 касается изнутри окружности радиуса 4. Через точку касания проведены две прямые ℓ_1 и ℓ_2. Острый угол, образованный прямой ℓ_1 с прямой ℓ, проходящей через центры окружностей, в три раза больше острого угла, образованного прямыми ℓ_2 и ℓ. Длины четырех хорд, на которые опираются указанные углы, образуют геометрическую прогрессию. Найти наименьшую из длин хорд.

5. Расстояние от точки внутри прямоугольника до трех его вершин равны 8, 10 и 12 см. Найти расстояние от этой точки до четвертой вершины.

9. Химический и биологический факультеты

Вариант I

1. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 4x^2 + ay = & 2(1+a)x, \\ y^2 + 2ax = & (1+a)y \end{cases}$ имеет ровно два различных вещественных решения.

2. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}} = 1 - \sqrt{x+3}$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2-6x+9} \dfrac{6-2x}{|4x-9|} \le \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение $\cos x + \cos 3x = \operatorname{tg} x - \sin 2x$.

5. Вершины A и B правильного треугольника ABC со стороной 6 лежат на окружности радиуса 4. Найти длину ее хорды, являющейся частью прямой AC.

Вариант II

1. Найти все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} x^2 + bx = (1-b)y, \\ y^2 + (1-b)x = by \end{cases}$ имеет ровно два различных вещественных решения.

2. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{x+1}{3}} = 1 - \sqrt{x+2}$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2-4x+4} \dfrac{12-6x}{|4x+1|} \ge \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение $\sin x - \sin 3x = \operatorname{ctg} x - \sin 2x$.

5. Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равна 4. Концы гипотенузы лежат на окружности радиуса 5. Найти длину ее хорды, являющейся частью прямой AC.

10. Экономический факультет (специальности: математические методы в экономике, финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит)

Вариант I

1. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 4x^2 + ay = & 2(1+a)x, \\ y^2 + 2ax = & (1+a)y \end{cases}$ имеет ровно два различных вещественных решения. *(Вечернее отделение.)*

1* Решить систему $\begin{cases} 4x^2 + 4x = & 3y, \\ y^2 + 2y = & 6x. \end{cases}$ *(Заочное отделение.)*

2. Решить неравенство $\sqrt{2x+6} + \sqrt{x+2} \le \sqrt{2}$.

3. Решить уравнение $\log_{x^2-6x+9} \dfrac{6-2x}{|4x-9|} = \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение $\cos x + \cos 3x = \operatorname{tg} x - \sin 2x$. *(Вечернее отделение.)*

4* Решить уравнение $2\sqrt{3}\cos x + \operatorname{tg} x = 0$. *(Заочное отделение.)*

5. Вершины A и B правильного треугольника ABC со стороной 6 лежат на окружности радиуса 4. Найти длину ее хорды, являющейся частью прямой AC.

Вариант II

1. Найти все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} x^2 + bx = (1-b)y, \\ y^2 + (1-b)x = by \end{cases}$ имеет ровно два различных вещественных решения. *(Вечернее отделение.)*

1* Решить систему $\begin{cases} x^2 + 2x = & -3y, \\ 9y^2 - x = & 6y. \end{cases}$ *(Заочное отделение.)*

2. Решить неравенство $\sqrt{3x+6} + \sqrt{x+1} \le \sqrt{3}$.

3. Решить уравнение $\log_{x^2-4x+4} \dfrac{12-6x}{|4x+1|} = \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение $\sin x - \sin 3x = \operatorname{ctg} x - \sin 2x$. *(Вечернее отделение.)*

4* Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$. *(Заочное отделение.)*

5. Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равна 4. Концы гипотенузы лежат на окружности радиуса 5. Найти длину ее хорды, являющейся частью прямой AC.

11. Факультеты: менеджмента и экономический (специальности: экономика и управление на предприятии, менеджмент организации, экономическая теория)

Вариант I

1. Построить график функции $y = 2\sin\left(x + \left|x + \dfrac{\pi}{6}\right|\right)$.

2. Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 2x + 2} = 1 - 2x$.

3. Решить уравнение $\log_2 \dfrac{3x^2 - x}{2} = \log_3 \dfrac{3x^2 - x}{2}$.

4. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если второе число уменьшить на 40%, получается геометрическая прогрессия, сумма которой равна 39. Найти эти числа.

5. В трапеции $ABCD$ точка K является серединой боковой стороны AB. Найти площадь трапеции, если известно, что $KC = 5$, $KD = 7$, $\angle CKD = 30°$.

Вариант II

1. Построить график функции $y = \cos\left(x + \left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|\right)$.

2. Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 7x + 3} = x - 2$.

3. Решить уравнение $\log_3 \dfrac{x^2 + 3x}{4} = \log_4 \dfrac{x^2 + 3x}{4}$.

4. Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если первое число уменьшить на 36%, то получится арифметическая прогрессия, сумма которой равна 120. Найти эти числа.

5. В трапеции $ABCD$ точка K является серединой боковой стороны AB. Найти $\angle CKD$, если известно, что $CK = 3$, $DK = 5$, а площадь трапеции равна 15.

Ответы и решения

Дневное отделение

1. Мат-мех, ПМ-ПУ, физический факультеты

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	5 или 6	1	8 или 16
2	$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$	2	$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$
3	$\left(a, \frac{1-2a-\sqrt{1-8a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-2a+\sqrt{1-8a}}{2}, 1-a\right) \cup (1+a, \infty)$	3	$\left(0, \frac{1}{2} - a - \sqrt{\frac{1}{4} - a}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - a + \sqrt{\frac{1}{4} - a}, 1-a\right) \cup (1, \infty)$
3*	$a \geq 1/2 \Rightarrow x \in (1+a, \infty)$, $a < 1/2 \Rightarrow x \in (a, 1-a) \cup (1+a, \infty)$	3*	$a \geq 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$, $a < 1 \Rightarrow x \in (0, 1-a) \cup (1, \infty)$
4	$\frac{50\sqrt{3}}{21}, \frac{70\sqrt{3}}{21}, \frac{90\sqrt{3}}{21}$	4	$\frac{25\sqrt{3}}{9}, 30\frac{\sqrt{3}}{9}, 35\frac{\sqrt{3}}{9}$
5	$V = 2$	5	$V = 8$

Решения задач 1-го варианта

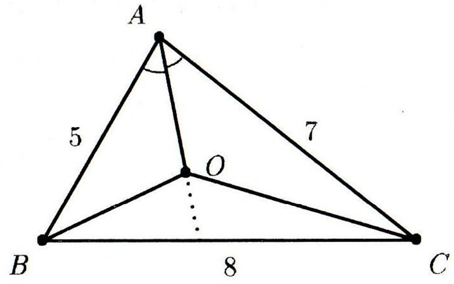
$\boxed{1}$ Обозначим через m количество косцов, оставшихся на первом лугу, а через n количество косцов, перешедших на второй луг. Чтобы выкосить второй луг требуется 24 человеко-часа, а первый луг — 48 человеко-часов. Условие задачи приводит к уравнению $\frac{48-2(m+n)}{m} = \frac{24}{n}$ или $n^2 + n(m-24) + 12m = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $m^2 - 96m + 576$. Так как он должен быть неотрицательным, то либо $m \leq 24(2-\sqrt{3})$, либо $m \geq 24(2+\sqrt{3})$. Очевидно, $m \leq 24$, так как при $m > 24$ из теоремы Виета вытекает, что уравнение не имеет положительных корней. Следовательно, $0 < m < 24(2-\sqrt{3})$, откуда $0 < m < 8$. Целые n получаются при $m = 6$ (тогда $n = 6$ или $n = 12$) и при $m = 5$ (тогда $n = 4$ или $n = 15$).

$\boxed{2}$ ОДЗ задается неравенствами $\sin 2x \neq 0$, $\sin x \neq \frac{1}{2}$. Правая часть уравнения равна $-\frac{1}{\sin 2x}$. Следовательно, $2\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}$ или $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. Решая это уравнение при условии $\sin x \neq \frac{1}{2}$, получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (не входят в ОДЗ), $3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

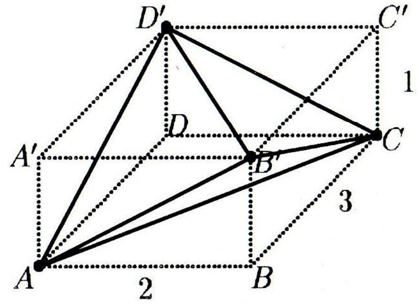
$\boxed{3}$ ОДЗ: $x > a$, $x \neq 1+a$, $x \neq 1-a$. Запишем неравенство в виде $\frac{\log_9(x-a) - \log_9(x+a)^2}{\log_9(x+a)^2 \log_9(x-a)} < 0$. Числитель или знаменатель обращаются в ноль при $x = 1+a$, $x = 1-a$, $x = x_1 = \frac{1}{2}(1-2a+\sqrt{1-8a})$, $x = x_2 = \frac{1}{2}(1-2a-\sqrt{1-8a})$. Так как $1+a > 1-a > x_1 > x_2$, решая неравенство методом интервалов, получаем ответ.

$\boxed{3^*}$ Задача решается аналогично задаче 3. Следует только принять во внимание, что дискриминант $1-8a$ здесь отрицателен.

$\boxed{4}$ Полупериметр p треугольника ABC равен 10. Используя теорему Герона, найдем, что площадь треугольника ABC равна $S = 10\sqrt{3}$. Из того, что S_{AOC} — средний член прогрессии, следует, что $S_{AOC} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. Учитывая, что $S_{AOB} : S_{AOC} = 5 : 7$, получаем, что $S_{AOB} = \frac{5}{7}\frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{50\sqrt{3}}{21}$ и, наконец, $S_{BOC} = \left(2 - \frac{5}{7}\right)\frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{90\sqrt{3}}{21}$.



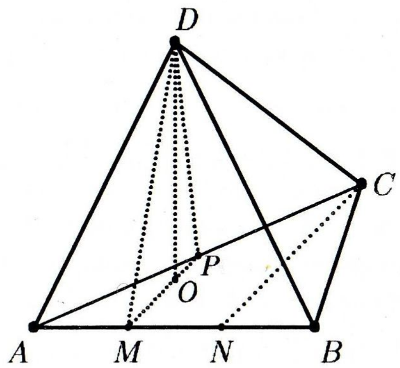
$\boxed{5}$ **Решение 1.** Ребра данной пирамиды являются диагоналями прямоугольного параллелепипеда со сторонами длиной 1, 2, 3. Объем пирамиды равен трети объема параллелепипеда.



Решение 2 (прямое вычисление). Пусть $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{13}$. Из условия задачи вытекает, что длины скрещивающихся ребер равны между собой. Достаточно найти площадь S основания ABC и высоту h пирамиды. Опустим перпендикуляры DM, PM, CN на сторону AB. По теореме о трех перпендикулярах высота $h = DO$ пирамиды является высотой в треугольнике DMP.

Обозначим через φ угол при вершине C в треугольнике ABC (он же равен углу DAC и углу DBC).

По теореме косинусов $5 = 10 + \frac{13}{16} - 2\sqrt{130}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{130}}$, следовательно, $\sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{130}}$. Теперь легко находится площадь треугольника: $S = \frac{ab}{2}\sin\varphi = \frac{7}{2}$. Далее, ищем стороны треугольника DMP. Имеем $DM = CN = \frac{2S}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$, $NB = AM = \sqrt{10 - \frac{49}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, а это — пятая часть AB. Из подобия треугольников AMP и ANC вытекает: $MP = \frac{1}{4}CN = \frac{7}{4\sqrt{5}}$, $AP = \frac{1}{4}AC = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Таким образом, $DM = 4MP$.



Рассмотрим треугольник ADP. Вновь применив теорему косинусов, получим

$$DP^2 = 10 + \frac{13}{16} - 2\frac{\sqrt{130}}{4}\frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{101}{16}.$$

С другой стороны, из треугольника PMD $DP^2 = MP^2 + MD^2 - 2MP\cdot MD\cos\angle DMP \Leftrightarrow DP^2 = MP^2(17 - 8\cos\angle DMP) \Leftrightarrow \frac{101}{16} = \frac{49}{16\cdot 5}(17 - 8\cos\angle DMP) \Leftrightarrow \cos\angle DMP = \frac{41}{49} \Leftrightarrow \sin\angle DMP = \frac{12\sqrt{5}}{49}$.

Теперь из треугольника MOD найдем $h = MD\sin\angle DMP = \frac{7}{\sqrt{5}}\frac{12\sqrt{5}}{49} = \frac{12}{7}$.

Окончательно, $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{12}{7} = 2$.

2. Биолого-почвенный, химический и филологический (теоретическая и прикладная лингвистика) факультеты

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	$x = 1$	1	$y = \sqrt{2}$
2	$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$	2	$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$
3	$\left(3, \frac{9+\sqrt{85}}{6}\right)$	3	$\left(4, 2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
4	$\frac{50\sqrt{3}}{21},\ \frac{70\sqrt{3}}{21},\ \frac{90\sqrt{3}}{21}$	4	$\frac{25\sqrt{3}}{9},\ 30\frac{\sqrt{3}}{9},\ 35\frac{\sqrt{3}}{9}$
5	6 часов	5	$\frac{6}{7}$ часа

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ ОДЗ: $|x| \geq 1$. Данное уравнение равносильно следующему: $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}x = \sqrt{x^2+1}$. Отрицательных корней это уравнение, очевидно, не имеет. Следовательно, $x \geq 1$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $\sqrt{2x}\sqrt{x^2-1} = 1 - x^2$, которое имеет единственный корень $x = 1$.

$\boxed{2}$ См. решение задачи 2 предыдущего задания.

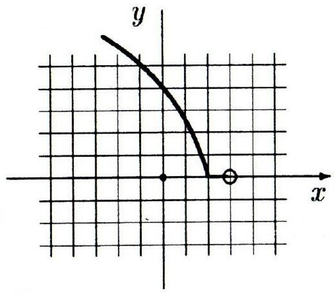
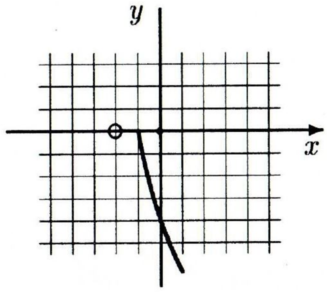
$\boxed{3}$ ОДЗ: $x > 3$. При $x \in (3,4)$ неравенство принимает вид $-\log_3(x-3) - \log_3 x > 2$, или $\frac{1}{(x-3)x} > 9$. Решая последнее, находим $3 < x < \frac{27+\sqrt{27^2+36}}{18}$. Легко видеть, что правый конец этого интервала меньше 4. При $x \geq 4$ неравенство принимает вид $\log_3(x-3) - \log_3 x > 9$, или $\frac{x-3}{x} > 9$, что невозможно при $x \geq 4$.

$\boxed{4}$ См. решение задачи 4 предыдущего задания.

$\boxed{5}$ Примем объем бака за единицу. Через x обозначим объем той части бака, которая заполняется за 1 час при выключенных насосах. Тогда за 1 час первый насос откачивает количество воды, равное $\frac{1+3x}{3}$, второй — количество воды, равное $\frac{1+2x}{2}$, а оба вместе — количество воды, равное $1+x$. Получается уравнение $1 + x = \frac{1+2x}{2} + \frac{1+3x}{3}$, откуда $x = \frac{1}{6}$.

3. Факультеты: географии и геоэкологии, геологический

О т в е т ы

	Вариант I		Вариант II
2	$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$	2	$\left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}, \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$
3	$\left(-\infty, 2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	3	$\left(-\infty, -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$
4	$x = 2\pi k, \ \ k \in Z$	4	$x = \pi + 2\pi k, \ \ k \in Z$
5	$\frac{2+\pi}{3+2\sqrt{2}}a^2$	5	$\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{32}b^2$
1		1	

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ ОДЗ: $x < 3$. При $x \in [2, 3)$ $y = 0$, а при $x \leq 2$ $y = 4\log_3(3-x)$. При $x \leq 2$ построение графика проводится поэтапно. Сначала строим график функции $y = \log_3(-x)$. Сдвигая его вправо на 3 единицы, получим график функции $y = \log_3(-(x-3))$. Осталось увеличить ординаты в 4 раза.

$\boxed{2}$ Возведем первое уравнение в квадрат. Получим $x^2+y^2+2xy = x^2y^2+4(3-2\sqrt{2})+4xy(\sqrt{2}-1)$. Из второго уравнения системы вытекает, что $xy(2-4\sqrt{2}+4) = 4(3-2\sqrt{2})$. Сокращая на $3-2\sqrt{2}$ и используя первое уравнение, получим систему $xy = 2, \ x+y = 2\sqrt{2}$, которая имеет единственное решение $x = y = \sqrt{2}$.

$\boxed{3}$ Неравенство определено, если выражения под радикалами неотрицательны. Пусть $x \geq 1$. Возводя в квадрат обе части неравенства $\sqrt{x^2-3x+2} > x-1+\sqrt{x^2-4x+3}$, получаем неравенство $-x^2+3x-2 > 2(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}$, которое неверно, так как слева стоит неположительная величина.

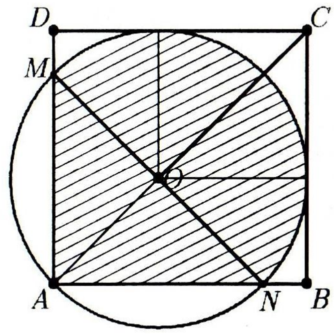
Пусть теперь $x < 1$. Возводя в квадрат неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}+1-x > \sqrt{x^2-4x+3}$, приходим после сокращения на $1-x$ к неравенству $2sx^2-3x+2 > x$. Решая его при $x < 1$ находим $x < 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 1$.

$\boxed{4}$ Возведем обе части уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим

$$1+\sin x-\cos x = 2\sqrt{1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x}.$$

Возведя еще раз в квадрат и приведя подобные члены получим $1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\sin x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2\pi k, \ x_2 = -\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ k \in Z$. Вторая серия корней посторонняя.

$\boxed{5}$ Пусть O — центр круга. Он лежит на диагонали AC. Так как треугольник AON — равнобедренный, то $\angle OAN = \angle ONA = 45°$. Следовательно, угол AON — прямой. Аналогично, угол AOM — прямой. Следовательно, отрезок MN — диаметр круга, а искомая площадь $S = \dfrac{\pi R^2}{2} + R^2$, где R — радиус круга. Но $AC = a\sqrt{2} = R + R\sqrt{2}$, следовательно, $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Окончательно, $S = \dfrac{2a^2}{(1+\sqrt{2})^2}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2+\pi}{3+2\sqrt{2}}a^2$.



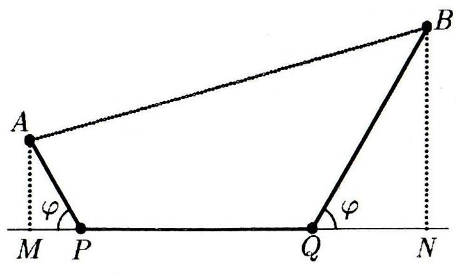
4. Экономический факультет (специальности: математические методы в экономике, прикладная информатика, финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит)

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	$\varphi = 60°$	1	$\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$
2	$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$	2	$\left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}, \left\{2, -\dfrac{1}{3}\right\}$
2*	$a = 2 - \sqrt{6}$	2*	$a = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$
3	$\left(-\infty, 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$	3	$\left(-\infty, -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$
4	$x = 2\pi k,\ k \in Z$	4	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
5	$\dfrac{2+\pi}{3+2\sqrt{2}}a^2$	5	$\dfrac{2\pi + 3\sqrt{3}}{32}b^2$

Решения задач 1-го варианта

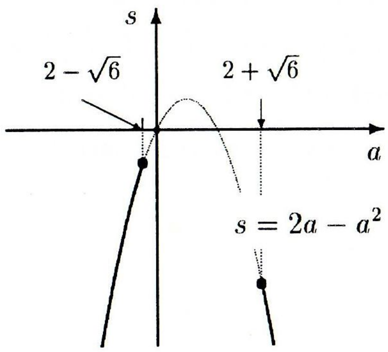
$\boxed{1}$ По условию $AB{=}500$, $AM{=}60$, $BN{=}200$. Следовательно, $BK{=}140$, а $AK = MN = \sqrt{500^2 - 140^2} = \sqrt{360 \cdot 640}{=}480$. Если движение производится по пути $APQB$, то точки P и Q должны быть выбраны так, чтобы минимизировать функцию $R(x,y) = 2\sqrt{3600 + x^2} + (480 - x - y) + 2\sqrt{40000 + y^2}$, где $x = MP,\ y = QN$.



Представим R в виде $R = R_1(x) + R_2(y) + 480$, где $R_1 = 2\sqrt{3600 + x^2} - x$, $R_2 = 2\sqrt{40000 + y^2} - y$. Минимум $R_1(x)$ достигается при $x = x_0$, где x_0 — корень уравнения $R_1'(x) = 0$. Имеем $x_0^2 = 1200$.

Аналогично, минимум $R_2(y)$ достигается при $y = y_0$, где $y_0^2 = \dfrac{40000}{3}$. Нетрудно убедиться, что $R(x_0, y_0) < 1000$. Это показывает, что расходы на перевозку по прямому пути AB наименьшими не являются. Следовательно, двигаться следует по пути $APQB$, где углы APM и BQN равны $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°$.

$\boxed{2^*}$ По теореме Виета сумма корней трехчлена равна $2a - a^2$ при условии неотрицательности дискриминанта $D = (a^2 - 2a)^2 - 4(a+1)^2 = (a^2 - 4a - 2)(a^2 + 2)$. Неравенство $D \geq 0$ эквивалентно неравенству $a^2 - 4a - 2 \geq 0$, решая которое, находим: $a \leq 2 - \sqrt{6}$ и $a \geq 2 + \sqrt{6}$. Ось симметрии параболы $y = 2a - a^2$ — это прямая $a = 1$. Так как точка $a_1 = 2 - \sqrt{6}$ находится ближе к точке 1, чем точка $a_2 = 2 + \sqrt{6}$, то наибольшее значение суммы корней трехчлена получается при $a = 2 - \sqrt{6}$ и равно $-6 + 2\sqrt{6}$.



$\boxed{3}$ Неравенство определено, если выражения под радикалами неотрицательны. Пусть $x \geq 1$. Возводя в квадрат обе части неравенства $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, получаем неравенство $-x^2 + 3x - 2 > 2(x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 3}$, которое неверно, так как слева стоит неположительная величина.

Пусть теперь $x < 1$. Возводя в квадрат неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 1 - x > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, приходим, после сокращения на $1 - x$ и вторичного возведения в квадрат, к неравенству $4(x^2 - 3x + 2) > x^2$. Решая его при $x < 1$ находим $x < 2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) < 1$.

$\boxed{4}$ См. задачу 4 предыдущего задания.

$\boxed{5}$ См. задачу 5 предыдущего задания.

5. Факультеты: экономический (специальности: экономика и управление на предприятии, менеджмент организации, международная экономика, экономическая теория; направление: экономика), международных отношений

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	100%	1	25%
2	$(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$	2	$\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ (-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$
3	$2,\ 5,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	3	$\dfrac{1}{2},\ 5,\ \sqrt{3}$
4	$12,\ 8,\ 4,\ 2;\quad \dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2},\ \dfrac{15}{2},\ \dfrac{25}{2}$	4	$1,\ 2,\ 4,\ 6;\quad \dfrac{25}{4},\ \dfrac{15}{4},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{3}{4}$
5	$\operatorname{arctg}\dfrac{\sin(\alpha - \gamma)}{2\sin\alpha\sin\gamma}$	5	$\dfrac{S}{r} - r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Примем площадь поля B за 100 кв. ед. Тогда площадь поля A равна 160 кв. ед., а площадь поля C — 100 кв. ед. Получается, что первый тракторист вспахал 120 кв. ед., а второй — 240 кв. ед.

$\boxed{2}$ Данное уравнение можно записать в виде $1 - 2\sin x = 3\cos x(1 - 2\sin x)$. Это уравнение разбивается на два: $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{1}{3}$, решая которые получаем ответ.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$. Данное уравнение эквивалентно следующему:

$$(\log_2 x - 1)(2\log_3 5 - 1 - 2\log_3 x) + \log_2 5 = \log_x 5.$$

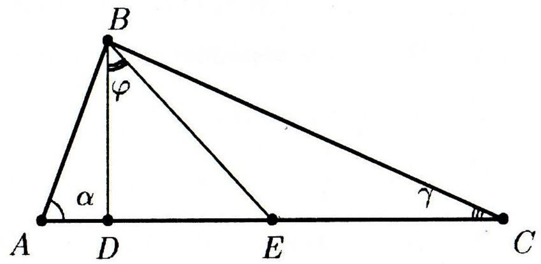
Введем обозначения: $\log_2 x = t,\ \log_2 3 = a,\ \log_2 5 = b$. В этих обозначениях уравнение принимает вид

$$(t-1)\left(\frac{2b}{a} - 1 - \frac{2t}{a}\right) + b = \frac{b}{t}.$$

Решая это уравнение, находим $t_1 = 1,\ t_2 = b,\ t_3 = -\frac{a}{2}$, откуда и следует ответ.

$\boxed{4}$ Обозначим первые два числа через a и b. Тогда данные числа запишутся так: $a, b, 12 - b, 14 - a$, причем $b - a = 12 - 2b$, а $\frac{12-b}{b} = \frac{14-a}{12-b}$. Выражая a через b из первого равенства, подставим получившееся выражение во второе. Получим квадратное уравнение $2b^2 - 25b + 72 = 0$, которое имеет корни $b_1 = 8$ и $b_2 = 4,5$. Соответственно, $a_1 = 12,\ a_2 = 1,5$.

$\boxed{5}$ Если $\alpha = \gamma$, то искомый угол равен 0. Далее считаем, что $\alpha < \gamma$ (в противном случае α и γ поменяются ролями). Положим $h = BN$ (BN — высота), $d = MN$ (BM — медиана), $AC = b$. Так как $\frac{b}{2} = h\mathrm{ctg}\alpha - d = h\mathrm{ctg}\gamma + d$, то $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{d}{h} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\gamma}{2}$, где φ — искомый угол.



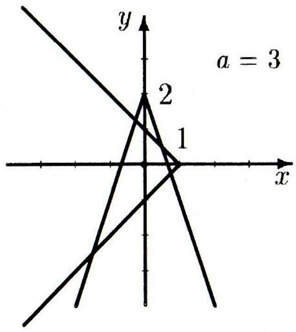
6. Факультет менеджмента

Ответы

Вариант I		Вариант II	
1	$a \in (2, +\infty)$	1	$b = \frac{3}{2}$
2	$(-1, 1]$	2	$(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ (-1)^k \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$	3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup (1, +\infty)$	4	$\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, 4)$
5	$\frac{h}{2}\left(h\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - h^2}\right)$, если $\angle C \leq 90°$, $\frac{h}{2}\left(h\mathrm{ctg}\alpha - \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - h^2}\right)$, если $\angle C \geq 90°$,	5	$30°,\ 60°,\ 90°$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Количество решений системы равно числу точек пересечения графиков функций $x = 1 - |y|$ и $y = 2 - a|x|$ в плоскости Oxy. В зависимости от a получаем следующее число точек пересечения указанных графиков:
0 при $a \in (-\infty, 1]$,
1 при $a \in (-1, 1]$,
2 при $a \in (1, 2)$,
3 при $a = 2$,
4 при $a \in (2, \infty)$.

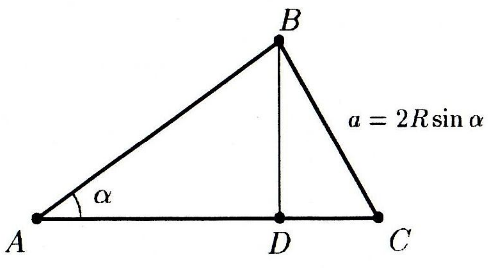


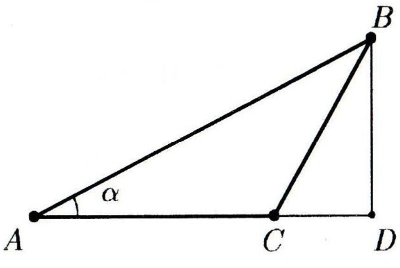
$\boxed{2}$ ОДЗ: $x \leq 1$. При $x \in [0,1]$ неравенство справедливо. При $x < 0$ оно эквивалентно неравенству $\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} < -\dfrac{1}{x}$, которое в свою очередь эквивалентно неравенству $x^3 - x^2 - 2 > 0$. Уравнение $x^3 - x^2 + 2 = 0$ имеет очевидный корень $x = -1$. Деля левую часть на $x + 1$, убеждаемся в отсутствии других корней. Следовательно, к отрезку $[0,1]$ следует добавить интервал $(-1, 0)$.

$\boxed{3}$ Запишем уравнение в виде $1 - 2\cos^2 x + 2(\sin x + \sin 5x) = 0$, что эквивалентно $\cos 2x = 4 \sin 3x \cos 2x$. Это уравнение разбивается на два: $\cos 2x = 0$ и $4 \sin 3x = 1$.

$\boxed{4}$ Запишем неравенство в виде $\log_2 5 + 2\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_x 5 + 1 > 0$. Полагая $\log_2 5 = a$, $\log_2 x = t$, получим неравенство $a + 1 + 2t + \dfrac{a}{2t} > 0$. Решая его методом интервалов, находим $t > 0$ и $-\dfrac{a}{2} < t < -\dfrac{1}{2}$.

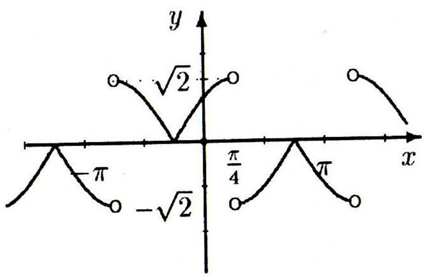
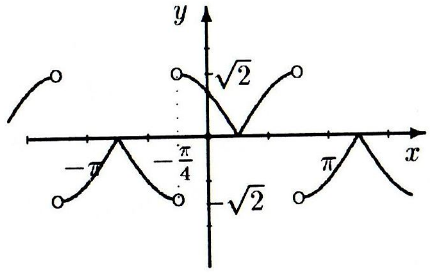
$\boxed{5}$ По теореме синусов длина стороны BC равна $2R\sin\alpha$. Пусть сначала $\angle C < 90°$. Тогда длина основания AC равна $\sqrt{4R^2\sin^2\alpha - h^2} + h\,\mathrm{ctg}\alpha$ независимо от того, является угол α тупым или острым. Аналогично, если $\angle C > 90°$, то $AC = h\,\mathrm{ctg}\alpha - \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - h^2}$. Наконец, если $\angle C = 90°$, то тогда $BC = h = 2R\sin\alpha$, то есть подкоренное выражение обращается в ноль.





7. Математико-механический факультет и факультет прикладной математики и процессов управления.

Ответы

	Вариант I		Вариант II
2	$(-\infty, 1)$	2	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
3	$\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 2)$	3	$(3, \infty)$
4	$\sqrt{27+3\sqrt{3}};\quad 2\sqrt{7}$	4	$\sqrt{3-\sqrt{6}}$
5	$4\sqrt{3},\ 2\sqrt{38},\ 4\sqrt{15}$	5	$2\sqrt{5},\ 6\sqrt{3},\ 6\sqrt{5}$
1		1	

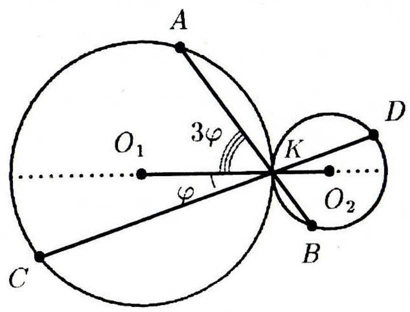
Решения задач 1-го варианта

1 Функция определена при $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Учитывая равенство $y(x+\pi) = -y(x)$, достаточно рассмотреть $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],\ x \neq \frac{\pi}{4}$. При $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ $y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. При $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $y = \frac{-\cos 2x}{\cos x - \sin x} = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

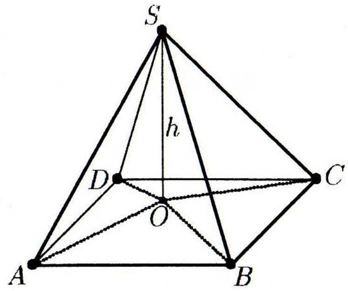
2 ОДЗ: $x < 3$. При $x \leq 0$ неравенство выполняется. При $x \in (0, 3)$ оно эквивалентно квадратному неравенству $2x^2 + x - 3 < 0$, решая которое, получаем ответ.

3 ОДЗ: $x > \frac{1}{3},\ x \neq 1$. Обозначим через a левую часть неравенства, а через b — правую. При $\frac{1}{3} < x < 1$ оказывается, что $0 < \frac{3x^2 - x}{2} < 1$. В этом случае $a > 0,\ b < 0$ и рассматриваемое неравенство выполняется. При $x > 1$ a и b положительны, причем $x^a = 2^b = \frac{3x^2 - x}{2}$. Логарифмируя по основанию 2, получаем $a \log_2 x = b$. Отсюда следует, что $a > b$ при $1 < x < 2$.

4 Длины хорд вычисляются следующим образом: $KB = 2\cos 3\varphi,\ KD = 2\cos\varphi,\ KA = 6\cos\varphi,\ KC = 6\cos 3\varphi$. Следует рассмотреть две геометрические прогрессии: KB, KD, KA, KC и KB, KA, KD, KC. В первом случае получается уравнение $\frac{\cos\varphi}{\cos 3\varphi} = \frac{3\cos 3\varphi}{\cos\varphi}$ или $\cos^2\varphi = 3\cos^2 3\varphi$. Во втором случае получаем уравнение $\frac{3\cos 3\varphi}{\cos 3\varphi} = \frac{\cos\varphi}{3\cos 3\varphi}$ или $9\cos 3\varphi = \cos\varphi$. Используя формулу $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, в первом случае получим $4\cos^2\varphi - 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а во втором — $4\cos^2\varphi - 3 = \frac{1}{9}$. Искомая величина $6\cos\varphi$ в первом случае равна $\sqrt{27+3\sqrt{3}}$, а во втором — $2\sqrt{7}$.



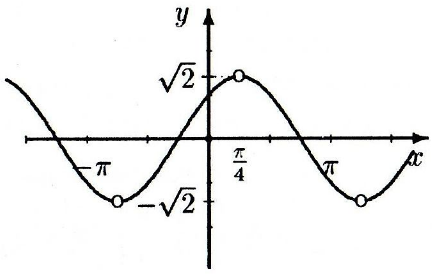
5 Справедлива формула: $AO^2 + OC^2 = BO^2 + OD^2$ (см. решение 5-й задачи следующего задания). Отсюда следует, что и $AS^2 + SC^2 = BS^2 + SD^2$. В зависимости от расположения ребер, получаются следующие три уравнения относительно длины x четвертого ребра: $10^2+12^2 = 14^2+x^2$, $10^2+14^2 = 12^2+x^2$, $12^2+14^2 = 10^2 + x^2$. Решая эти уравнения, получаем ответ.

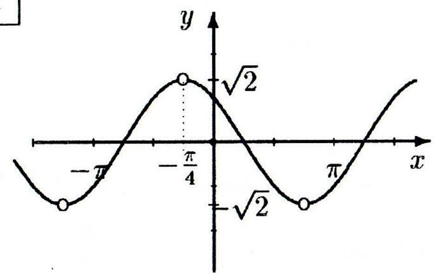


8. Физический, геологический факультеты и факультет географии и геоэкологии

Ответы

	Вариант I		Вариант II
2	$x \in (-\infty, 1)$	2	$x \in (\frac{1}{3}, 1)$
3	$x = 2$	3	$x = 3$
4	$\sqrt{27 + 3\sqrt{3}}$; $2\sqrt{7}$	4	$\sqrt{3 - \sqrt{6}}$
5	$4\sqrt{3}$, $2\sqrt{38}$, $4\sqrt{15}$	5	$2\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $6\sqrt{5}$
1		1	





Решения задач 1-го варианта

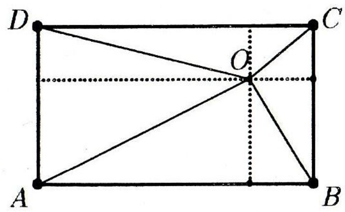
1 Функция определена при $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. В ОДЗ функция имеет вид $y = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2 ОДЗ: $x < 3$. При $x \leq 0$ неравенство выполняется. При $x \in (0, 3)$ оно эквивалентно квадратному неравенству $2x^2 + x - 3 < 0$, решая которое, получаем ответ.

3 ОДЗ: $x > \frac{1}{3}$, $x \neq 1$. Уравнение эквивалентно совокупности: $x = 2$ или $\frac{3x^2 - x}{2} = 1$. Из трех корней $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$, $x = 2$ в ОДЗ входит лишь один $x = 2$.

4 См. решение задачи 4 предыдущего задания.

5 Справедлива формула: $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$. Действительно, применяя теорему Пифагора для вычисления AO^2, CO^2, BO^2, DO^2, видим, что обе части доказываемого равенства равны одной и той же величине.
В зависимости от расположения вершин, получаются следующие три уравнения относительно длины x четвертого расстояния: $10^2 + 12^2 = 14^2 + x^2$, $10^2 + 14^2 = 12^2 + x^2$, $12^2 + 14^2 = 10^2 + x^2$. Решая эти уравнения, получаем ответ.



9. Химический и биолого-почвенный факультеты

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	$a \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$	1	$b \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$
2	$x = -2$	2	$x = -1$
3	$\left(-\infty, \dfrac{7}{4}\right] \cup \left(2, \dfrac{9}{4}\right) \cup \left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{11}{4}\right]$	3	$\left[-\dfrac{7}{4}, -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}, 1\right) \cup \left[\dfrac{5}{4}, 2\right)$
4	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ (-1)^n \arcsin \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n,\ n \in Z$	4	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ \pm \arccos \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$
5	$\sqrt{21} \pm 3$	5	$(\sqrt{21} \pm 2)\sqrt{2}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ Введем для удобства новую переменную $z = 2x$. Система примет симметричный вид:

$$\begin{cases} z^2 + ay = (1+a)z, \\ y^2 + az = (1+a)y. \end{cases}$$

Вычитая и складывая уравнения, после преобразований получим эквивалентную систему $\begin{cases} (z-y)(z+y-2a-1) = 0, \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \end{cases}$ Второе уравнение является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а первое распадается на два: $y = z$ и $y = -z + 2a + 1$. Подставив $y = z$ во второе уравнение, получим два решения: $z_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $z_2 = 1$, $y_2 = 1$. Остается определить, при каких значениях параметра нет других решений. Отметим, что прямая $y = z + 2a + 1$ не пересекает указанную окружность в случае, когда $2a + 1 < 0$ или $2a + 1 > 2$, то есть когда $|a| > \frac{1}{2}$. Рассматривая отдельно $a = \pm\frac{1}{2}$, получаем, что и в этом случае новых решений не возникает. Таким образом, $|a| \geq \frac{1}{2}$.

$\boxed{2}$ Запишем уравнение в виде $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}} + \sqrt{x+3} = 1$. Один корень легко подбирается: $x = -2$. Левая часть, очевидно, возрастает, следовательно, других корней нет. Ответ можно получить также возведением обеих частей уравнения в квадрат.

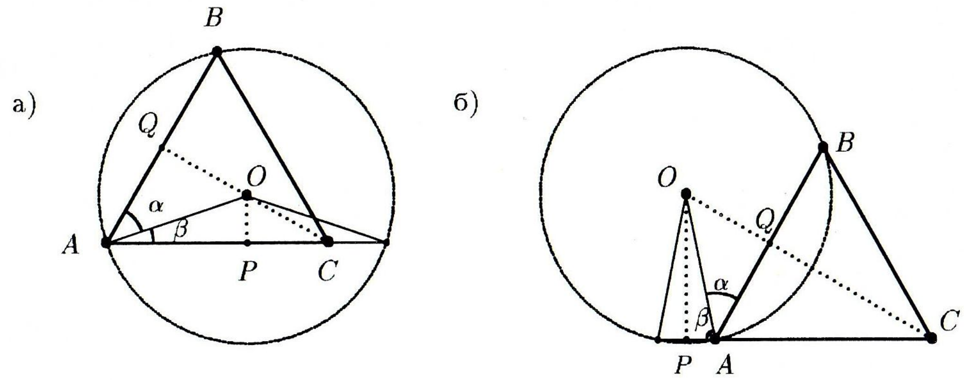
$\boxed{3}$ ОДЗ: $x < 3$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{9}{4}$. Рассматриваемое неравенство эквивалентно неравенству $\log_{3-x} \dfrac{2(3-x)}{|4x-9|} \leq 1$.

1) $3 - x > 1 \Leftrightarrow x < 2$. В этом случае основание больше 1 и, следовательно, $\dfrac{2(3-x)}{|4x-9|} \leq 3 - x \Leftrightarrow \dfrac{2}{|4x-9|} \leq 1 \Leftrightarrow |4x-9| \geq 2 \Leftrightarrow 9 - 4x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$.

2) $2 < x < 3$. В этом случае основание меньше 1 и знак неравенства меняется на противоположный:
$\dfrac{2(3-x)}{|4x-9|} \geq 3 - x \Leftrightarrow |4x-9| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 9 \leq 2, \\ 4x - 9 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq 11, \\ 4x \geq 7. \end{cases}$ Отсюда получаем ответ.

$\boxed{4}$ ОДЗ: $\cos x \neq 0$. Преобразуем уравнение. $\cos x + \cos 3x = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x \Leftrightarrow 2\cos x \cos 2x = \dfrac{\sin x(1 - 2\cos^2 x)}{\cos x} \Leftrightarrow 2\cos^2 x \cos 2x = -\sin x \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 2 - 2\sin^2 x = -\sin x. \end{array}\right.$ Решая последние уравнения, получаем ответ.

$\boxed{5}$ Возможны два случая: а) центр O окружности лежит по ту же сторону от прямой AB, что и треугольник ABC; б) центр лежит по другую сторону.



Рассмотрим случай а). Пусть $\angle OAQ = \alpha$, $\angle OAP = \beta$. Так как радиус окружности меньше стороны треугольника, точка O лежит внутри треугольника. Имеем $\alpha + \beta = 60°$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\beta = \cos(60° - \alpha) = \dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \dfrac{3+\sqrt{21}}{8}$. Следовательно, искомая длина хорды равна $2AB = 2\cdot 4\cos\beta = 3 + \sqrt{21}$.

Случай б) отличается от случая а) тем, что $\alpha + \beta = 120°$. Тогда $\cos\beta = -\dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{8}$, а искомая длина хорды равна $2AP = -3 + \sqrt{21}$.

10. Экономический факультет (математические методы в экономике; бухгалтерский учет; анализ и аудит; финансы и кредит)

Ответы

	Вариант I		Вариант II
1	$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	1	$b \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
1*	$(0,0)$ и $(1/2, 1)$	1*	$(0,0)$ и $(-1, 1/3)$
2	$x = -2$	2	$x = -1$
3	$\frac{7}{4}$, $\frac{11}{4}$	3	$-\frac{7}{4}$, $\frac{5}{4}$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n$, $n \in Z$	4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$
4*	$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$	4*	$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$
5	$\sqrt{21} \pm 3$	5	$(\sqrt{21} \pm 2)\sqrt{2}$

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ См. решение задачи 1 предыдущего задания.

$\boxed{1^*}$ Вычтем из первого уравнения второе. Получим уравнение $4x^2 - y^2 + 10x - 5y = 0$, которое разбивается на два: $2x - y = 0$, $2x + y + 5 = 0$. Подставляя $y = 2x$ в первое уравнение системы, получим уравнение $4x^2 - 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$ (тогда и $y_1 = 0$) и $x_2 = 1/2$ (тогда $y_2 = 1$). Если же $y = -2x - 5$, то получим уравнение $4x^2 + 10x + 15 = 0$, которое не имеет решений.

$\boxed{2}$ ОДЗ: $x \geq -2$. Левая часть неравенства монотонно возрастает в ОДЗ. Поскольку при $x = -2$ достигается равенство, получим единственное решение $x = -2$. Неравенство можно решить также возведением обеих его частей в квадрат.

$\boxed{3}$ ОДЗ: $x < 3$, $x \neq \dfrac{9}{4}$. Рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению $\log_{3-x} \dfrac{2(3-x)}{|4x-9|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2(3-x)}{|4x-9|} = 3 - x \Leftrightarrow \dfrac{2}{|4x-9|} = 1 \Leftrightarrow |4x-9| = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{4}$ или $x = \dfrac{11}{4}$.

$\boxed{4}$ См. задачу 4 предыдущего задания.

$\boxed{4^*}$ Используя соотношение $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и основное тождество тригонометрии, представим данное уравнение в виде $2\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x - 2\sqrt{3} = 0$. Отсюда $\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Первое равенство невозможно, второе дает ответ.

$\boxed{5}$ См. задачу 5 предыдущего задания.

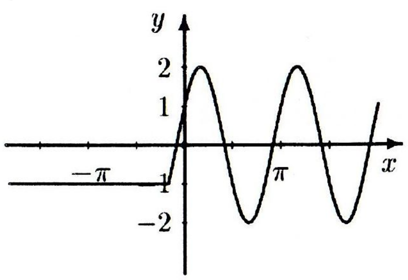
11. Факультеты: экономический (менеджмент организации, экономическая теория, мировая экономика, экономика и управление на предприятии) и менеджмента

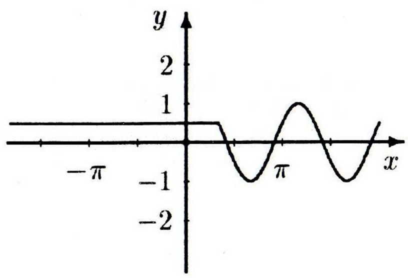
Ответы

	Вариант I		Вариант II
$\boxed{1}$	*см. график внизу*		
$\boxed{2}$	$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$	$\boxed{2}$	$1+\sqrt{2}$
$\boxed{3}$	$1,\ -\dfrac{2}{3}$	$\boxed{3}$	$1,\ -4$
$\boxed{4}$	3, 15, 27	$\boxed{4}$	25, 40, 64
$\boxed{5}$	$\dfrac{35}{2}$	$\boxed{5}$	90°

Решения задач 1-го варианта

$\boxed{1}$ При $x \geq -\dfrac{\pi}{6}$ функция представляется в виде $y = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$. График функции $y = 2\sin 2x$, смещен влево на $\dfrac{\pi}{12}$. При $x \leq -\dfrac{\pi}{6}$ функция постоянна и равна -1.





$\boxed{2}$ ОДЗ: $x^3-2x+2 \geq 0$. Видно, что $x \leq 1/2$. После возведения в квадрат получим уравнение $x^3-4x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_{2,3}=\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Дополнительному условию удовлетворяет только один корень $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

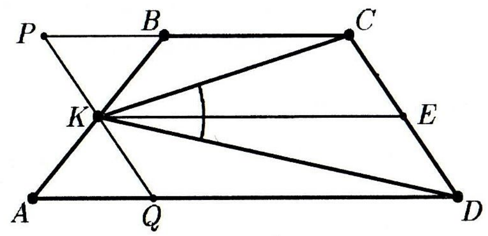
$\boxed{3}$ Указанное равенство может выполняться только в случае, когда $\dfrac{3x^2-x}{2}=1 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-\dfrac{2}{3}$. Оба корня подходят.

$\boxed{4}$ Запишем данные числа в виде a, $a+d$, $a+2d$. По условию задачи $a>0$, $d>0$ и, кроме того,

$$\frac{0{,}6(a+d)}{a}=\frac{a+2d}{0{,}6(a+d)}, \qquad 2{,}6(a+d)=39.$$

Решая эту систему относительно a, d, найдем $a=3$, $d=12$.

$\boxed{5}$ **Первое решение.** Проведем через точку K прямую, параллельную CD. Треугольники PKB и QKA равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, площадь трапеции равна площади параллелограмма $PCDQ$. Однако, площадь треугольника CKD составляет половину площади параллелограмма. Таким образом, искомая площадь равна $2S_{CKD}=CK \cdot KD \sin \angle CKD=\dfrac{35}{4}$.



Второе решение (без дополнительного построения). Обозначим через a и b длины оснований трапеции. Тогда длина средней линии KE равна $\dfrac{a+b}{2}$ и, следовательно, площадь трапеции равна $\dfrac{a+b}{2}h$, где h — высота трапеции. С другой стороны, площадь каждого из треугольников KCE и KCD равна $\dfrac{1}{2}\dfrac{a+b}{2}\dfrac{h}{2}$. Следовательно, их суммарная площадь, то есть площадь треугольника KCD, составляет половину площади трапеции. Для подсчета площади пользуемся той же формулой, что и в первом решении.

тираж : специальный место издания: СПб, Первая линия
лицензия: ЛП N 000166 от 14.05.99; ПЛД N 69-369 от 21.05.99; утверждено к печати: 8 апреля 2002
рисунок *Алексея Осипова*


Ты уверен, что если я её не съем то мне мат?!