

# Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби

Материалы III Международного семинара,  
посвящённого 75-летию академика А. И. Субботина



Materials of III International Seminar  
dedicated to the 75th anniversary  
of Academician A. I. Subbotin

Control Theory and  
Theory of Generalized Solutions  
of Hamilton–Jacobi Equations



**Control Theory  
and  
Theory of Generalized Solutions  
of Hamilton–Jacobi Equations  
CGS'2020**

Materials of III International Seminar  
dedicated to the 75<sup>th</sup> anniversary  
of Academician Andrei Izmailovich Subbotin

Ekaterinburg, Russia  
26–30 October, 2020

Ekaterinburg  
2020



Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук

Уральский математический центр

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

# Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби

Материалы

III Международного семинара, посвящённого 75-летию  
академика А. И. Субботина

Екатеринбург, Россия  
26–30 октября 2020 г.

Екатеринбург  
2020

УДК 517.9 + 519.63

ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

Мероприятие проводится при финансовой поддержке РФФИ,  
проект № 20-01-22017

Редактор: В. С. Пацко

**«Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби» (CGS'2020):** Материалы III Междунар. семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина, Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. 350 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований, представленных на семинаре CGS'2020. Эти материалы отражают современное состояние следующих научных направлений: теория обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби, математическая теория управления динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, оценивание и идентификация в динамических системах, обратные задачи и управляемые распределенные системы, численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби.

ISBN 978-5-8295-0729-9

© ИММ УрО РАН, 2020

© УрФУ, 2020

**III Международный семинар  
«Теория управления и теория обобщенных  
решений уравнений Гамильтона – Якоби»,  
посвящённый  
75-летию академика А. И. Субботина  
Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г.**

**Организаторы семинара:**

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН),  
Региональный научно-образовательный математический центр «Уральский математический центр»,  
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

**Научные направления:**

Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби  
Управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности  
Задачи оценивания и идентификации в динамических системах  
Обратные задачи и управляемые распределенные системы  
Численные алгоритмы решения задач оптимального управления и краевых задач для уравнений Гамильтона – Якоби

**Программный комитет**

**Сопредседатели:**

В.И. Бердышев (Россия)  
В.Е. Третьяков (Россия)  
Н.Ю. Лукоянов (Россия)

### **Члены программного комитета:**

А. Азамов (Узбекистан)	Ю.С. Ледяев (США)
А.В. Арутюнов (Россия)	М.С. Никольский (Россия)
М. Барди (Италия)	Ю.С. Осипов (Россия)
Т. Башар (США)	Л.А. Петросян (Россия)
Х. Гусейнов (Турция)	Е.С. Половинкин (Россия)
А.А. Давыдов (Россия)	Н.Н. Субботина (Россия)
В. Джафаров (Турция)	А.А. Толстоногов (Россия)
В.И. Жуковский (Россия)	В.Н. Ушаков (Россия)
М.И. Зеликин (Россия)	А.Г. Ченцов (Россия)
Ф.М. Кириллова (Беларусь)	Ф.Л. Черноусько (Россия)
Ф. Кларк (Франция)	А.А. Чикрий (Украина)
В.В. Козлов (Россия)	М. Фальконе (Италия)
А.Б. Куржанский (Россия)	А.А. Шананин (Россия)

### **Организационный комитет**

#### **Сопредседатели:**

Н.Н. Субботина (ИММ УрО РАН)  
В.Н. Ушаков (ИММ УрО РАН)  
А.М. Тарасьев (ИММ УрО РАН)

#### **Члены организационного комитета:**

М.И. Гомоюнов (ИММ УрО РАН), М.И. Гусев (ИММ УрО РАН),  
А.Г. Иванов (ИММ УрО РАН), А.О. Иванов (УрФУ),  
И.Н. Кандоба (ИММ УрО РАН),  
А.Ф. Клейменов (ИММ УрО РАН),  
А.И. Короткий (ИММ УрО РАН), В.В. Кружаев (УрФУ),  
Е.А. Крупенников (ИММ УрО РАН),  
С.С. Кумков (ИММ УрО РАН), В.И. Максимов (ИММ УрО РАН),  
О.Г. Матвийчук (ИММ УрО РАН), В.С. Пацко (ИММ УрО РАН),  
В.Г. Пименов (УрФУ), Д.А. Серков (ИММ УрО РАН),  
А.Н. Сесекин (УрФУ), О.Н. Старикова (ИММ УрО РАН),  
А.А. Усова (ИММ УрО РАН), А.А. Успенский (ИММ УрО РАН),  
Л.Г. Шагалова (ИММ УрО РАН), Г.С. Шелементьев (УрФУ).

**E-mail:** [cgs20@imm.uran.ru](mailto:cgs20@imm.uran.ru)

**Сайт семинара:** <https://cgs20.imm.uran.ru/>



## Содержание

А. И. Субботин . . . . .	27
<i>Averboukh Yu.</i> Value function of the mean field type differential game	35
<i>Bardi M., Cardaliaguet P.</i> Convergence of some control problems and Mean Field Games to aggregation and swarming models . . . . .	38
<i>Barron E. N.</i> Applications of quasiconvex functions to HJ equations and optimal control . . . . .	41
<i>Basar T.</i> Mean field differential games with elements of robustness	41
<i>Davydov A.</i> Optimization of steady states of exploited populations .	41
<i>Dzhafarov V.</i> Stability region for discrete time systems and its boundary	42
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh.G.</i> On the control system described by Urysohn type integral equation . . . . .	42
<i>Khlopin D. V.</i> Necessary conditions in infinite-horizon control problem regardless asymptotic assumptions . . . . .	45
<i>Kim A. V., Andryushechkina N. A.</i> On application of $i$ -smooth analysis to nonlinear differential games with delays . . . . .	50
<i>Kolpakova E. A.</i> Feedback strategies for controlled continuity equation .	52
<i>Krasovskii A. N.</i> Construction of mutual tracking of motions of a real nonlinear dynamical system and its virtual model-leader	55
<i>Ledyayev Y. S.</i> Harmonic analysis, differential games and matrix Riccati equations . . . . .	56

<i>Lokutsievskiy L.</i>	
On optimal semiflow in a class of nilpotent-convex problems . . . . .	57
<i>Maksimov V. I.</i>	
The methods of reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations . . . . .	58
<i>Ovseevich A.</i>	
A number theoretic piece of control theory . . . . .	61
<i>Petrosian O. L., Kuchkarov I. I.</i>	
Inverse optimal control with continuous updating for steering behavior model . . . . .	66
<i>Petrosian O., Tur A., Zhou J.</i>	
Pontryagin Maximum Principle for cooperative differential games with continuous updating . . . . .	70
<i>Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Ya.</i>	
A class of cooperative differential games on networks . . . . .	72
<i>Pimenov V. G., Tashirova E. E.</i>	
Explicit numerical method for fractional diffusion-wave equation with functional delay . . . . .	78
<i>Rettieva A. N.</i>	
Rational behavior in dynamic multicriteria games . . . . .	82
<i>Shananin A., Tarasenko M., Trusov N.</i>	
Mathematical modeling of the consequences of the COVID-19 pandemic for the Russian economy . . . . .	85
<i>Subbotina N. N.</i>	
A variational approach to solutions of control reconstruction problems . . . . .	86
<i>Troeva M. S.</i>	
Abstract fractional McKean–Vlasov and HJB equations . . . . .	90
<i>Turetsky V., Weiss M., Shima T.</i>	
Combined linear quadratic/bounded control differential game with delayed pursuit decision . . . . .	91
<i>Азамов А. А., Бегалиев А. О.</i>	
К общей теории систем Пфаффа . . . . .	95

<i>Ананьев Б. И.</i>	
О задачах оценивания для нелинейных динамических систем . . . . .	96
<i>Арутюнов А. В.</i>	
Глобальная теорема о неявной функции . . . . .	99
<i>Асеев С. М.</i>	
О принципе максимума Понтрягина для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени . . . . .	99
<i>Багно А. Л., Тарасьев А. М.</i>	
Сведение задач оптимального управления с бесконечным горизонтом на компактные сильно инвариантные множества . . . . .	99
<i>Башкирцева И. А.</i>	
Синтез стохастических аттракторов при неполной информации . . . . .	104
<i>Бедин Д. А.</i>	
Смещённые оценки в задаче траекторной фильтрации, определение нижней границы возможной точности . . . . .	107
<i>Бедин Д. А., Иванов А. Г.</i>	
Оптимизация матрицы переходных вероятностей для метода ИММ траекторного слежения . . . . .	111
<i>Бенараб С.</i>	
Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи . . . . .	115
<i>Братусь А. С., Дрожжин С. В., Якушкина Т. С.</i>	
Экстремальные принципы эволюционной адаптации в математических моделях репликаторных систем . . . . .	117
<i>Бурлаков Е. О., Жуковский Е. С., Серова И. Д.</i>	
Условие типа Каристи в задаче о минимуме отображений при ограничениях . . . . .	119
<i>Васёв П. А., Федотов А. А.</i>	
Визуализация движений траекторий, идущих по границе трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса . . . . .	122

<i>Гомоюнов М. И.</i>	
Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби с коинвариантными производными дробного порядка . . . . .	126
<i>Гребенчиков Б. Г., Ложников А. Б.</i>	
Неустойчивость и стабилизация системы с линейным запаздыванием . . . . .	129
<i>Григоренко Н. Л., Григорьева Э. В., Хайлов Е. Н., Клименкова А. Д.</i>	
Оптимальные стратегии в модели CAR-T иммунотерапии лечения лейкемии . . . . .	133
<i>Гриних А. Л., Петросян Л. А.</i>	
Эффективное наказание в многошаговой «дилемме заключённого $n$ -лиц» на сети . . . . .	137
<i>Гусев М. И., Осипов И. О.</i>	
Об асимптотике множеств достижимости на малых временных промежутках . . . . .	142
<i>Дмитрук А. В., Самыловский И. А.</i>	
Оптимальный синтез в простейшей задаче быстрого действия с линейным фазовым ограничением . . . . .	146
<i>Долгий Ю. Ф., Сесекин А. Н.</i>	
Регуляризация вырожденной задачи оптимальной стабилизации импульсных систем с запаздыванием . . . . .	149
<i>Дыкта В. А.</i>	
Квадратичные опорные суперрешения уравнения Гамильтона – Якоби и позиционный принцип минимума второго порядка . . . . .	153
<i>Ершов А. А., Ушаков А. В., Ушаков В. Н.</i>	
О двух игровых задачах сближения . . . . .	156
<i>Желонкина Н. И., Сесекин А. Н.</i>	
О порядке сингулярности решения задачи оптимальной стабилизации для систем с запаздыванием . . . . .	158

<i>Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Жуковская Л. В.</i>	
К устойчивости паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной позиционной игре трех лиц с нетрансферабельными выигрышами . . . . .	161
<i>Зайцев В. А., Ким И. Г.</i>	
О назначении спектра в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу . . . . .	164
<i>Зыков И. В.</i>	
О способах построения внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями . . . . .	167
<i>Изместьев И. В., Ушаков В. Н.</i>	
Параллельная реализация одного алгоритма решения задачи быстрогодействия для нелинейной управляемой системы . . . . .	171
<i>Калев В. И., Шориков А. Ф.</i>	
Программный комплекс для компьютерного моделирования решения задач оптимизации управления жидкостной двигательной установкой ракеты-носителя . . . . .	174
<i>Камнева Л. В.</i>	
Численное построение множеств разрешимости “к моменту” в линейных дифференциальных играх на плоскости . . . . .	179
<i>Кандоба И. Н., Новиков Д. А., Плаксин А. Р., Козьмин И. В.</i>	
О задаче оптимального управления возвращаемым блоком ракеты-носителя . . . . .	183
<i>Клейменов А. Ф.</i>	
Построение решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления с тремя участниками . . . . .	187

<i>Колокольцов В. Н.</i>	
Квантовые динамические игры и уравнения Гамильтона – Якоби на Римановых многообразиях . . . . .	188
<i>Корнеев В. А.</i>	
Гарантирующее управление упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта на подвижном основании от удара . . . . .	189
<i>Костоусова Е. К.</i>	
О полиэдральном методе синтеза управлений в задаче целевого уклонения для линейных многошаговых систем . . . . .	193
<i>Красовский Н. А., Тарасьев А. М.</i>	
Минимаксные решения уравнений Гамильтона – Якоби для динамических биматричных игр размерности $2 \times 3$ . . . . .	198
<i>Крупенников Е. А.</i>	
О численном методе решения задач динамической реконструкции . . . . .	200
<i>Кувшинов О. А., Ершов А. А.</i>	
О пересечении $\alpha$ -множеств . . . . .	204
<i>Кузнецов Н. В., Андриевский Б. Р., Кудряшова Е. В., Кузнецова О. А., Попов А. М.</i>	
Скрытые колебания управляемой аэродинамическим сопротивлением формации двух спутников . . . . .	207
<i>Кумакшев С. А.</i>	
Активное гашение колебаний при помощи обратной связи . . . . .	211
<i>Кумков С. И., Пятко С. Г., Овчинников М. М.</i>	
Управление бесконфликтным движением беспилотных летательных аппаратов в районе аэродрома . . . . .	215
<i>Куржанский А. Б., Усова А. А.</i>	
О двойственности математических моделей проблем механики и теории электрических цепей . . . . .	219
<i>Ламоткин А. Е., Мисюра Н. Е., Митюшов Е. А.</i>	
Об одном способе построения программной траектории сферического движения твердого тела . . . . .	220

<i>Лемперт А. А., Казаков А. Л., Та Ч. Т.</i>	
Об упаковке пропорциональных шаров в компактное множество . . . . .	224
<i>Лукьянова Л. Н.</i>	
Оптимальное и субоптимальное управление в модели односекторной экономики с запаздывающим аргументом . . . . .	227
<i>Максимов В. П.</i>	
О задачах управления для непрерывно-дискретных систем с последствием . . . . .	232
<i>Мерчела В.</i>	
О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на $(q_1, q_2)$ -квазиметрическом пространстве . . . . .	235
<i>Никитина С. А., Ухоботов В. И.</i>	
Дискретная задача управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств . . . . .	238
<i>Никольский М. С.</i>	
Линейные управляемые объекты с фазовыми ограничениями. Приближенное вычисление множеств достижимости . . . . .	240
<i>Новоселова Н. Г.</i>	
О численном построении множеств выживаемости в задачах химиотерапии злокачественных опухолей . . . . .	243
<i>Пацко В. С., Федотов А. А.</i>	
Аналитическое исследование трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса в случае двусторонних поворотов . . . . .	246
<i>Петров Н. Н., Мачтакова А. И.</i>	
Преследование группы убегающих в задаче с дробными производными и фазовыми ограничениями . . . . .	249
<i>Плаксин А. Р.</i>	
Субградиенты функционала цены в дифференциальных играх для систем с запаздыванием . . . . .	253

<i>Попова С. Н., Федорова М. В.</i>	
О критерии пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова систем с дискретным временем . . . . .	255
<i>Решмин С. А.</i>	
Проблемы оптимального управления системами многих тел . . . . .	259
<i>Родин А. С.</i>	
О точках бифуркации решения уравнения Гамильтона – Якоби в модели молекулярной генетики . . . . .	263
<i>Розенберг В. Л.</i>	
Динамическая реконструкция внешних воздействий при дефиците информации в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении . . . . .	268
<i>Ряшко Л. Б., Башкирцева И. А.</i>	
Управление стохастическими системами с цветными шумами . . . . .	272
<i>Серков Д. А.</i>	
К методу программных итераций . . . . .	275
<i>Соколов В. Ф.</i>	
Адаптивная субоптимальная стабилизация дискретного минимально фазового объекта с неопределенностями по выходу и управлению . . . . .	278
<i>Спиридонов А. А., Кумков С. С.</i>	
Слияние потоков воздушных судов с учётом их типизации . . . . .	282
<i>Сумин В. И.</i>	
Метод обращения главной части начально-краевых задач в теории оптимального управления распределенными системами . . . . .	286
<i>Сумин М. И.</i>	
Регуляризация классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимизации управляемых распределенных систем . . . . .	290



<i>Сурков П. Г.</i>	
О приближенном вычислении дробной производной типа Капуто по неточным данным, поступающим непрерывно . . . . .	294
<i>Тимофеева Г. А., Завалищин Д. С.</i>	
Управление спросом на транспортные услуги как игровая задача со случайным вторым игроком . . . . .	298
<i>Толстоногов А. А.</i>	
Максимальная монотонность оператора Немыцкого и неявные эволюционные включения . . . . .	300
<i>Точилин П. А., Чистяков И. А.</i>	
Алгоритм построения кусочно-квадратичных оценок функции цены в задаче разрешимости для нелинейной системы . . . . .	302
<i>Усова А. А., Тарасьев А. М.</i>	
Асимптотическая устойчивость по первому приближению гамильтоновых систем . . . . .	305
<i>Успенский А. А., Лебедев П. Д.</i>	
Численно-аналитические методы построения сингулярных множеств решений в классе плоских задач управления по быстрдействию . . . . .	309
<i>Ухоботов В. И., Ушаков В. Н., Изместьев И. В.</i>	
Об одной импульсной задаче управления с помехой и возможной поломкой в динамике . . . . .	313
<i>Ушаков В. Н., Ершов А. А.</i>	
Оптимальный выбор пробных управлений для восстановления неопределённых параметров в управляемой системе . . . . .	315
<i>Филиппова Т. Ф.</i>	
Задачи импульсного управления при неопределённости . . . . .	319
<i>Хайиткулов Б. Х.</i>	
Консервативные схемы решения нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике . . . . .	322

<i>Ченцов А. Г.</i>	
Дифференциальная игра сближения-уклонения: проблема релаксации и программные конструкции . . . . .	328
<i>Чистяков С. В.</i>	
Заметки о дифференциальных играх . . . . .	331
<i>Шагалова Л. Г.</i>	
О построении обобщенного решения уравнения Гамильтона – Якоби с трехкомпонентным гамильтонианом . . . . .	335
<i>Шориков А. Ф., Горанов А. Ю.</i>	
Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением космических аппаратов . . . . .	337
<i>Жуковский В. И.</i>	
Равновесие по Бержу . . . . .	341
<i>Falcone M.</i>	
A tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints . . . . .	342
Список авторов . . . . .	343

## Contents

A. I. Subbotin . . . . .	27
<i>Averboukh Yu.</i>	
Value function of the mean field type differential game	35
<i>Bardi M., Cardaliaguet P.</i>	
Convergence of some control problems and Mean Field Games to aggregation and swarming models . . . . .	38
<i>Barron E. N.</i>	
Applications of quasiconvex functions to HJ equations and optimal control . . . . .	41
<i>Basar T.</i>	
Mean field differential games with elements of robustness	41
<i>Davydov A.</i>	
Optimization of steady states of exploited populations .	41
<i>Dzhafarov V.</i>	
Stability region for discrete time systems and its boundary	42
<i>Huseyin N., Huseyin A., Guseinov Kh. G.</i>	
On the control system described by Urysohn type integral equation . . . . .	42
<i>Khlopin D. V.</i>	
Necessary conditions in infinite-horizon control problem regardless asymptotic assumptions . . . . .	45
<i>Kim A. V., Andryushechkina N. A.</i>	
On application of $i$ -smooth analysis to nonlinear differential games with delays . . . . .	50
<i>Kolpakova E. A.</i>	
Feedback strategies for controlled continuity equation .	52
<i>Krasovskii A. N.</i>	
Construction of mutual tracking of motions of a real nonlinear dynamical system and its virtual model-leader	55
<i>Ledyayev Y. S.</i>	
Harmonic analysis, differential games and matrix Riccati equations . . . . .	56

<i>Lokutsievskiy L.</i>	
On optimal semiflow in a class of nilpotent-convex problems . . . . .	57
<i>Maksimov V. I.</i>	
The methods of reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations . . . . .	58
<i>Ovseevich A.</i>	
A number theoretic piece of control theory . . . . .	61
<i>Petrosian O. L., Kuchkarov I. I.</i>	
Inverse optimal control with continuous updating for steering behavior model . . . . .	66
<i>Petrosian O., Tur A., Zhou J.</i>	
Pontryagin Maximum Principle for cooperative differential games with continuous updating . . . . .	70
<i>Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Ya.</i>	
A class of cooperative differential games on networks . . . . .	72
<i>Pimenov V. G., Tashirova E. E.</i>	
Explicit numerical method for fractional diffusion-wave equation with functional delay . . . . .	78
<i>Rettieva A. N.</i>	
Rational behavior in dynamic multicriteria games . . . . .	82
<i>Shananin A., Tarasenko M., Trusov N.</i>	
Mathematical modeling of the consequences of the COVID-19 pandemic for the Russian economy . . . . .	85
<i>Subbotina N. N.</i>	
A variational approach to solutions of control reconstruction problems . . . . .	86
<i>Troeva M. S.</i>	
Abstract fractional McKean–Vlasov and HJB equations . . . . .	90
<i>Turetsky V., Weiss M., Shima T.</i>	
Combined linear quadratic/bounded control differential game with delayed pursuit decision . . . . .	91
<i>Azamov A. A., Begaliev A. O.</i>	
On general theory of Pfaff systems . . . . .	95

<i>Ananyev B. I.</i>	
On estimation problems for nonlinear dynamical systems	96
<i>Arutyunov A.</i>	
Implicit function theorem	99
<i>Aseev S. M.</i>	
On the Pontryagin Maximum Principle for infinite horizon optimal control problems	99
<i>Bagno A. L., Tarasyev A. M.</i>	
Reduction of optimal control problems with infinite horizon to compact strongly invariant sets	99
<i>Bashkirtseva I. A.</i>	
Synthesis of stochastic attractors under incomplete information	104
<i>Bedin D. A.</i>	
Biased estimates in the trajectory tracking problem: the determination of the lower bound of their accuracy	107
<i>Bedin D. A., Ivanov A. G.</i>	
Optimization of transition probabilities matrix for the IMM trajectory tracking method	111
<i>Benarab S.</i>	
Differential inequality for a periodic boundary value problem	115
<i>Bratus A., Drozhzhin S., Yakushkina T.</i>	
On the extreme principles for modeling the evolutionary adaptation process for permanent replicating systems	117
<i>Burlakov E. O., Zhukovskiy E. S., Serova I. D.</i>	
The Caristi-like condition for the problem of finding a conditional minimum of a mapping in the partially ordered set	119
<i>Vasev P. A., Fedotov A. A.</i>	
Visualization of motions going along the boundary of the three-dimensional reachable set for the Dubins car	122
<i>Gomoyunov M. I.</i>	
Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional-order coinvariant derivatives	126

<i>Grebenshchikov B. G., Lozhnikov A. B.</i>	
Unstability and stabilization of system with linear delay	129
<i>Grigorenko N. L., Grigorieva E. V., Khailov E. N., Klimenkova A. D.</i>	
Optimal strategies in the CAR-T model of immunotherapy of leukemia treatment . . . . .	133
<i>Grinikh A. L., Petrosyan L. A.</i>	
Effective punishment in multi-stage $n$ -person prisoner's dilemma network game . . . . .	137
<i>Gusev M. I., Osipov I. O.</i>	
On the asymptotics of small-time reachable sets . . . . .	142
<i>Dmitruk A. V., Samylovskiy I. A.</i>	
Optimal synthesis in the simplest time-optimal problem with linear state constrain . . . . .	146
<i>Dolgi Yu. F., Sesekin A. N.</i>	
Regularization of the degenerate problem of optimal stabilization of impulsive systems with delay . . . . .	149
<i>Dykhta V. A.</i>	
Quadratic support super solutions of the Hamilton– Jacobi equation and the second order feedback minimum principle . . . . .	153
<i>Ershov A. A., Ushakov A. V., Ushakov V. N.</i>	
On two game approach problems . . . . .	156
<i>Zhelonkina N. I., Sesekin A. N.</i>	
On the order of singularity of the solution of the optimal stabilization problem for systems with delay . . . . .	158
<i>Zhukovskiy V. I., Kudryavtsev K. N., Zhukovskaya L. V.</i>	
To the stability of Pareto equilibrium of objections and counterobjections in a coalition differential positional game for three persons without side payments . . . . .	161
<i>Zaitsev V. A., Kim I. G.</i>	
Spectrum assignment in linear systems with commensurate lumped and distributed delays by static output feedback . . . . .	164

<i>Zykov I. V.</i>	
On methods of constructing external estimates for reachable sets of control systems with integral constraints . . . . .	167
<i>Izmest'ev I. V., Ushakov V. N.</i>	
Parallel implementation of one algorithm for solving the time-optimal problem for a nonlinear control system . .	171
<i>Kalev V. I., Shorikov A. F.</i>	
Software package for computer simulation of solving optimization problems for the control of a launch vehicle's liquid propulsion system . . . . .	174
<i>Kamneva L. V.</i>	
Computation of backward reachable set "up to an instant" for linear differential games in the plane . .	179
<i>Kandoba I. N., Novikov D. A., Plaksin A. R., Kozmin I. V.</i>	
On an optimal control problem by returnable module of the launch carrier . . . . .	183
<i>Kleimenov A. F.</i>	
Decision making in a hybrid two-step problem of dynamic control with three participants . . . . .	187
<i>Kolokoltsov V. N.</i>	
Quantum dynamic games and the Hamilton–Jacobi– Bellman equations on Riemannian manifolds . . . . .	188
<i>Korneev V. A.</i>	
Guaranteeing control of anticipation and delay in the problem of protection of an object on a movable base from an impact . . . . .	189
<i>Koustousova E. K.</i>	
On the polyhedral method of control synthesis in a target evasion problem for linear discrete-time systems . . . .	193
<i>Krasovskii N. A., Tarasyev A. M.</i>	
Minimax solutions of the Hamilton–Jacobi equations for 2×3 dynamic bimatrix games . . . . .	198
<i>Krupennikov E. A.</i>	
On a numerical method for solving dynamic reconstruction problems . . . . .	200

<i>Kuvshinov O. A., Ershov A. A.</i>	
On intersection of $\alpha$ -sets . . . . .	204
<i>Kuznetsov N. V., Andrievsky B. R., Kudryashova E. V., Popov A. M.</i>	
Hidden oscillations of drag-controlled two satellites formation . . . . .	207
<i>Kumakshev S. A.</i>	
Active vibration damping by feedback . . . . .	211
<i>Kumkov S. I., Pyatko S. G., Ovchinnikov M. M.</i>	
Control by nonconflict motion of unmanned aerial vehicles in the airport zone . . . . .	215
<i>Kurzhanskiĭ A. B., Usova A. A.</i>	
On the duality of the mathematical models of mechanics and the electrical circuit theory . . . . .	219
<i>Lamotkin A. E., Misyura N. E., Mityushov E. A.</i>	
On one method for constructing a programmed spherical motion trajectory of a rigid body . . . . .	220
<i>Lempert A. A., Kazakov A. L., Ta T. T.</i>	
On packing proportional balls into a compact set . . . . .	224
<i>Lukianova L. N.</i>	
Optimal and suboptimal control in a one-sector model economic growth . . . . .	227
<i>Maksimov V. P.</i>	
On some control problems for continuous-discrete systems with aftereffect . . . . .	232
<i>Merchela W.</i>	
On the existence of coincidence points of two mappings defined on $(q_1, q_2)$ -quasimetric space . . . . .	235
<i>Nikitina S. A., Ukhobotov V. I.</i>	
Discrete control problem with interference and vectograms linearly dependent on the given sets . . . . .	238
<i>Nikolskii M. S.</i>	
Linear controlled objects with phase restrictions. Approximate calculation of attainable sets . . . . .	240



<i>Novoselova N. G.</i>	
On a numerical construction of viability sets in the problems of chemotherapy of malignant tumors . . . . .	243
<i>Patsko V. S., Fedotov A. A.</i>	
Analytical investigation of the three-dimensional reachable set for the Dubins car in the case of two-side turns . . . . .	246
<i>Petrov N. N., Machtakova A. I.</i>	
Pursuit of a group of evaders in a problem with fractional derivatives and phase constraints . . . . .	249
<i>Plaksin A. R.</i>	
Subgradients of a value functional in differential games for time-delay systems . . . . .	253
<i>Popova S. N., Fedorova M. V.</i>	
On a criterion for the proportional local assignability of Lyapunov exponents of discrete-time systems . . . . .	255
<i>Reshmin S. A.</i>	
Problems of optimal control design for multibody systems . . . . .	259
<i>Rodin A. S.</i>	
On bifurcation points of the solution of the Hamilton–Jacobi equation in the model of molecular genetics . . . .	263
<i>Rozenberg V. L.</i>	
Dynamic reconstruction of external actions in a quasi-linear stochastic differential equation under the lack of information . . . . .	268
<i>Ryashko L. B., Bashkirtseva I. A.</i>	
Controlling stochastic systems with colored noise . . . . .	272
<i>Serkov D. A.</i>	
On the programmed iterations method . . . . .	275
<i>Sokolov V. F.</i>	
Adaptive stabilization of discrete-time minimum phase plant under output and control uncertainties . . . . .	278
<i>Spiridonov A. A., Kumkov S. S.</i>	
Merging flows of aircraft taking into account their types	282

<i>Sumin V. I.</i>	
Method of inversion of the main part of initial-boundary value problems in the theory of optimal control of distributed systems . . . . .	286
<i>Sumin M. I.</i>	
Regularization of the classical optimality conditions in the convex optimization problems for controlled distributed systems . . . . .	290
<i>Surkov P. G.</i>	
On approximate calculation of the Caputo-type fractional derivative from inaccurate continuous data . . . . .	294
<i>Timofeeva G. A., Zavalishchin D. S.</i>	
Transport service demand control as a game problem with a random second player . . . . .	298
<i>Tolstonogov A. A.</i>	
Maximal monotonicity of a Nemytskii operator and implicit evolution inclusions . . . . .	300
<i>Tochilin P. A., Chistiakov I. A.</i>	
An algorithm for constructing piecewise quadratic estimates of the value function in the solvability problem for a nonlinear system . . . . .	302
<i>Usova A. A., Tarasyev A. M.</i>	
Asymptotic stability at the first approximation of Hamiltonian systems . . . . .	305
<i>Uspenskii A. A., Lebedev P. D.</i>	
Numerical and analytical methods for singular sets constructing in one class of planar velocity control problems . . . . .	309
<i>Ukhobotov V. I., Ushakov V. N., Izmet'ev I. V.</i>	
On an impulse control problem with disturbance and possible breakdown in dynamics . . . . .	313
<i>Ushakov V. N., Ershov A. A.</i>	
Optimal choice of test controls for determining unknown parameters in a control system . . . . .	315
<i>Filippova T. F.</i>	
Impulse control problems under uncertainty . . . . .	319

<i>Khayitkulov B. Kh.</i>	
Conservative schemes for solving non-stationary problems of heat conduction control with variable coefficients in a rectangle . . . . .	322
<i>Chentsov A. G.</i>	
Differential game of guidance-evasion: relaxation problem and programmed constructions . . . . .	328
<i>Chistyakov S. V.</i>	
Notes about differential games . . . . .	331
<i>Shagalova L. G.</i>	
On the construction of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation with a three-component Hamiltonian . . . . .	335
<i>Shorikov A. F., Goranov A. Y.</i>	
Algorithm for solving open-loop terminal control problem of spacecraft’s rendezvous . . . . .	337
<i>Zhukovskiy V. I.</i>	
Berge equilibrium . . . . .	341
<i>Falcone M.</i>	
A tree structure algorithm for optimal control problems with state constraints . . . . .	342
List of authors . . . . .	346

*beinikov* A. Program and positional control strategies for the Lotka–Volterra competition model / Stability, Control and Differential Games. Proceedings of the International Conference “Stability, Control, Differential Games” (SCDG2019); Tarasyev, A., Maksimov, V., Filippova, T., Eds.; Switzerland AG, Springer Nature, 2020. P. 39–49.

- [3] Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д. Оптимальные стратегии лечения раковых заболеваний в математической модели конкуренции Лотки – Вольтерры // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 71–88.

## Эффективное наказание в многошаговой «дилемме заключённого $n$ -лиц» на сети

А. Л. Гриних<sup>1</sup>, Л. А. Петросян<sup>1</sup>

e-mail: st062331@student.spbu.ru, l.petrosyan@spbu.ru

### 1. Введение

Большая часть исследований в области теории игр связана с играми двух игроков. Одним из классических примеров является дилемма заключённого двух лиц. Данная игра заключается в конфликте интересов двух задержанных, каждому из которых предложено сократить свой срок пребывания в тюрьме, выдав своего соучастника. Предложения о предательстве поступают заключённым одновременно, а те, в свою очередь, должны незамедлительно и без возможности переговоров со своим подельником принять решение о сотрудничестве со следствием. Сотрудничество со следствием уменьшает срок заключения задержанного, даже если его подельник тоже решил «сдаться», однако увеличивает срок заключения соучастника.

В настоящей работе будет использована модификация данной модели (которую впервые предложил Генри Гамбургер [1]), рассматривающая взаимодействие  $n$  заключённых. Мы будем исследовать модель дилеммы заключённого  $n$ -лиц на графе. Каждый из заключённых обладает лишь частью сведений об участии остальных

---

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

ных заключённых в преступлении, поэтому возможность влияния на срок заключения остальных игроков зависит от длины пути на графе, связывающем всех соучастников преступления.

Работа продолжает исследования, результаты которых опубликованы в статье Grinikh A.L. «Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value» [2].

## 2. Постановка модели

Рассмотрим сеть  $M$ , узлами которой являются игроки. Путём от игрока  $i$  к игроку  $j$  назовём последовательность игроков, поочередно соединённых между собой рёбрами данной сети. Соответственно, *длиной пути* будем называть количество игроков в пути от  $i$  к  $j$ . Если путь от  $i$  к  $j$  содержит минимальное количество игроков, то он является *кратчайшим путём*. Тогда, *расстояние* между игроками  $i$  и  $j$  — это длина кратчайшего пути между ними.

Строится статическая некооперативная игра  $\gamma_M$  для  $n$  игроков на сети  $M$ . Множество всех игроков обозначим через  $N$ . Каждый из игроков имеет две доступные чистые стратегии:  $C$  — «молчать», и  $D$  — «предать». Соответственно, множество чистых стратегий игрока может быть представлено в виде  $X_i = \{C, D\}$ ,  $\forall i \in N$ . Тогда функция выигрыша  $h_i(x_1, \dots, x_n)$   $i$ -го игрока в статической игре типа «дилемма заключённого  $n$ -лиц»,  $\gamma_M$ , на сети  $M$  будет зависеть от стратегии  $x_i \in \{C, D\}$ , выбранной данным игроком, и  $x_{m,N}^i$  — количества игроков из множества  $N$ , выбравших стратегию  $C$ , длина пути от которых до  $i$ -ого игрока равна  $m$ :

$$h_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \begin{cases} (\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i) + b_1, & \text{если } x_i = C, \\ (\sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i) + b_2, & \text{если } x_i = D. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a_1, a_2, b_1, b_2, \delta$  — параметры, единые для всех игроков.

Данная функция выигрыша удовлетворяет следующим условиям игры типа «дилемма заключённого  $n$ -лиц»:

1.  $(\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i) + b_1 < (\sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i) + b_2, \forall i \in N$ , то есть стратегия  $D$  строго доминирует стратегию  $C$ ;
2.  $\sum_{i \in N} ((\sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i) + b_1) > \sum_{i \in N} (b_2)$ , где  $\bar{x}_{m,N}^i$  означает, что все игроки, включая  $i$ -го, выбирают стратегию  $C$ , а, следовательно, совместное «молчание» приносит больший

суммарный выигрыш игрокам, чем абсолютное «предательство»;

3.  $\left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m x_{m,N}^i \right) + b_1 \right) \geq (a_1 + b_1)$  и  $\left( \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m x_{m,N}^i \right) + b_2 \right) \geq b_2$ , что означает уменьшение выигрыша игрока от предательства каждым из остальных игроков.

### 3. Постановка задачи

Пусть  $\Gamma_M$  — повторяющаяся  $K$  раз игра  $\gamma_M$  типа «дилемма заключённого  $n$ -лиц» на сети  $M$ . Тогда выигрыш  $i$ -го игрока в игре  $\Gamma_M$  будет равен сумме выигрышей  $i$ -го игрока в каждой из  $K$  игр.

Поскольку у каждого из игроков на отдельном шаге игры стратегия  $D$  является доминирующей, абсолютным равновесием по Нэшу будет являться выбор каждым из игроков стратегии  $C$  на каждом шаге игры.

Тем не менее, поскольку суммарный выигрыш будет выше при выборе каждым из игроков на каждом шаге стратегии «молчать» ( $C$ ), необходимо определить, какое количество шагов достаточно для того, чтобы выигрыш игрока от единоличного «предательства»,  $(h_i(x_i = D, x_j = C, \forall j \in N \setminus i) - h_i(x_i = C, x_j = C, \forall j \in N \setminus i))$ , был бы меньше потерь от «наказания». Под наказанием здесь и далее будем понимать выбор каждым из игроков, кто не отклонился от стратегии, приносящей максимальный суммарный выигрыш, стратегии «всех против каждого отклонившегося», а, значит, приносящей минимальный возможный выигрыш отклонившимся игрокам.

### 4. Эффективное наказание

Определим «эффективное наказание» для игры  $\Gamma_M$  «дилемма заключённого  $n$ -лиц» на сети.

**Теорема.** Для многошаговой игры «дилемма заключённого  $n$ -лиц» на сети  $M$  количество шагов, обеспечивающих стратегию «молчать на всех этапах игры» для каждого из игроков равно

$$\bar{k} = \max_{i \in N} \left[ \frac{a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i}{a_1 + b_1 - b_2 + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i} \right]. \quad (2)$$

*Доказательство.* Найдём  $k_i$  — количество шагов, необходимое для «эффективного наказания»  $i$ -го игрока. Поскольку выбор страте-

гии «предать» уменьшает выигрыш каждого из остальных игроков по сравнению с выбором стратегии «молчать», стратегия «против каждого предавшего» будет совпадать со стратегией «предать» на всех оставшихся шагах игры у всех игроков, которые на предыдущем шаге выбрали стратегию «C». Тогда количество шагов  $k_i$ , достаточных для эффективного наказания  $i$ -го игрока, можно определить в виде

$$k_i b_2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_2 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i < \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_1 \delta^m \bar{x}_{m,N}^i + b_1 \right) k_i. \quad (3)$$

В этом случае для «эффективного наказания»  $i$ -го игрока будет достаточно, чтобы оставшееся до конца игры количество шагов удовлетворяло условию

$$k_i = \left\lceil \frac{a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i}{a_1 + b_1 - b_2 + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m \bar{x}_{m,N}^i} \right\rceil. \quad (4)$$

Тогда количество шагов, необходимое для обеспечения оптимального по Парето исхода игры в многошаговой игре «дилемма заключённого  $n$ -лиц» на сети  $M$ , а, следовательно, и для «эффективного наказания» всех игроков, будет равно

$$\bar{k} = \max_{i \in N} k_i. \quad (5)$$

□

## 5. Пример

Рассмотрим пример игры  $\Gamma_M$  для четырёх игроков на сети  $M$ , представленной на рис. 1.

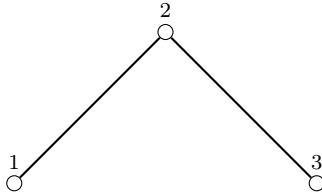


Рис. 1: Пример сети для игры  $\Gamma_M$

Пусть функция выигрыша игроков на каждом из трёх шагов игры задана формулой

$$h_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (\sum_{m=0}^{\infty} 0,8^m x_{m,N}^i) + 3, & \text{если } x_i = C, \\ (\sum_{m=1}^{\infty} 2 \times 0,8^m x_{m,N}^i) + 5, & \text{если } x_i = D. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае количество шагов, необходимых для «эффективного наказания» каждого из игроков, будет равно, соответственно,

$$k_1 = \lceil \frac{2 \times (0,8 + 0,64)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 + 0,64)} \rceil = 7, \quad (7)$$

$$k_2 = \lceil \frac{2 \times (0,8 \times 2)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 \times 2)} \rceil = 6, \quad (8)$$

$$k_3 = \lceil \frac{2 \times (0,8 + 0,64)}{1 + 3 - 5 + 1 \times (0,8 + 0,64)} \rceil = 7. \quad (9)$$

Тогда количество шагов, необходимых для «эффективного наказания» в представленной игре, будет

$$\bar{k} = \max \{7, 6, 7\} = 7. \quad (10)$$

То есть, при количестве шагов, оставшихся до окончания игры больше, чем 7, ни одному из игроков не будет выгодно «предавать» остальных.

## 6. Заключение

В данной работе исследована повторяющаяся «дилемма заключённого»  $n$ -лиц на сети. Найдено количество шагов, обеспечивающее «эффективное наказание» любого из игроков. Кроме того, определено количество шагов, необходимое для «эффективного наказания» любого из отклонившихся игроков в повторяющейся «дилемме заключённого  $n$ -лиц» на сети  $M$ .

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01079).

- [1] *Hamburger H.* N-person prisoner's dilemma // *Journal of Mathematical Sociology.* 1973. V. 3, no. 1. P. 27–48.
- [2] *Grinikh A.L.* Stochastic n-person Prisoner's Dilemma: the Time-Consistency of Core and Shapley Value // *Contributions to Game theory and management.* 2019. No. 12. P. 151–158.