

ДИНАМИКА

**ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

ДИНАМИКА

Пособие по выполнению
расчётно-графических работ

Под редакцией Г.Т. Алдошина

Санкт-Петербург
2016

Авторы: *Г.Т. Алдошин*, д-р техн. наук, проф.; *Н.Н. Дмитриев*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *А.Л. Илхменев*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Н.Е. Рупасова*, канд. техн. наук, доц.; *В.Е. Свенцицкая*; *В.Ю. Чирков*
УДК 531.3 (076)
Д46

Динамика: пособие по выполнению расчётно-графических работ / Г.Т.Алдошин [и др.]; под ред. Г.Т. Алдошина; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2016. – 89 с.
ISBN 978-5-85546-982-0

Содержит четыре расчётно-графические работы по разделу курса теоретической механики. Приведены краткие сведения из теории, методические указания по выполнению заданий, каждая работа сопровождается примером её решения. Индивидуальность заданий обеспечивается их многовариантностью. Задания соответствуют утверждённым стандартам высшего профессионального образования.

Для студентов технических специальностей, обучающихся по программам бакалавров, специалистов и магистров.

УДК 531.3 (076)

Рецензент д-р техн. наук, проф. *В.Н. Ражиков*

*Утверждено
редакционно-издательским
советом университета*

ISBN 978-5-85546-982-0

© БГТУ, 2016
© Авторы, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая наряду с математикой и физикой составляет фундамент физико-математической подготовки современного инженера. На этот фундамент опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных курсов, определяющих научно-технический прогресс и обороноспособность страны. При этом теоретическая механика выполняет роль своеобразного моста между математикой и физикой, с одной стороны, и прикладными инженерными дисциплинами, с другой: здесь впервые происходит знакомство с реальными практическими задачами. На основе физических законов формируются динамические модели изучаемых явлений и процессов и затем методами математического анализа и вычислительной техники проводится их решение до получения конкретных результатов. Поэтому наряду с изучением теоретического материала по конспектам лекций и учебникам большое значение приобретает выполнение расчётных заданий и курсовых работ. Как показывает опыт, наиболее эффективной формой является выполнение индивидуальных заданий, в которых исследуется поведение механических систем с использованием основных теорем и уравнений теоретической механики.

Приводимые в пособии примеры выполнения заданий должны помочь студентам преодолеть психологический барьер «начала» решения задачи. Приложение содержит требования к оформлению расчётных и курсовых работ.

При изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила.

И. Ньютон

1. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Краткие сведения из теории

Введём подвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, перемещающуюся относительно неподвижной (инерциальной) системы координат $Oxyz$. Движение точки относительно неподвижной (инерциальной) системы координат определяется основным уравнением динамики

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (1.1)$$

где m – масса точки, \vec{w} – её ускорение, \vec{F} – равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке, \vec{R} – равнодействующая реакций связей.

Уравнение относительного движения точки записывается так же, как и в инерциальной системе, если к приложенным активным силам и реакциям связей добавить переносную силу инерции $\vec{J}_e = -m\vec{w}_e$ и силу инерции Кориолиса $\vec{J}_c = -m\vec{w}_c$, где \vec{w}_e – переносное ускорение и \vec{w}_c – ускорение Кориолиса, $\vec{w}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$, $\vec{\omega}$ – скорость вращения подвижной системы координат. Следовательно,

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{J}_e + \vec{J}_c, \quad (1.2)$$

где \vec{w}_r – относительное ускорение.

В проекциях на оси подвижной системы координат формула (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_{x1} + R_{x1} + J_{ex1} + J_{cx1}; \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= F_{y1} + R_{y1} + J_{ey1} + J_{cy1}; \\ m \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= F_{z1} + R_{z1} + J_{ez1} + J_{cz1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти уравнения отличаются от дифференциальных уравнений абсолютного движения наличием поправок на инерциальность системы отсчета. Решение системы (1.3) совместно с уравнениями связей при заданных начальных условиях определяет движение точки.

План решения задачи об относительном движении точки

Поставленную задачу, рекомендуется решать в следующей последовательности:

- проанализировать движение точки и выделить относительное и переносное движение;
- изобразить на рисунке подвижную $O_1x_1y_1z_1$ и неподвижную $Oxyz$ системы координат, определив, с каким телом или средой они связаны;
- определить характер переносного движения;
- рекомендуется точку в подвижных координатах считать движущейся в сторону их возрастания и указать положение точки в произвольный момент времени в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ так, чтобы она находилась со стороны положительного отсчёта оси;
- показать на рисунке для $O_1x_1y_1z_1$ все активные силы, действующие на точку, реакции связей (или их составляющие по осям координат), а также переносную силу инерции и силу инерции Кориолиса, скорости и ускорения;
- переносную силу инерции целесообразно определять как сумму осестремительной и вращательной составляющих, если переносное движение является вращательным:

$$\vec{J}_e = \vec{J}_e^{oc} + \vec{J}_e^{bp} = -m\vec{w}_e^{oc} - m\vec{w}_e^{bp};$$

- определять силу инерции Кориолиса с помощью соотношения

$$\vec{J}_c = (-m\vec{w}_c) = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_r) = 2m(\vec{v}_r \times \vec{\omega}),$$

- написать и решить, используя начальные условия, систему дифференциальных уравнений (1.3), найдя закон относительного движения точки;
- определить численные значения искомых величин.

Пример. Трубка AB (рис. 1.1) вращается вокруг горизонтальной оси Oy , с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вдоль гладкой трубки

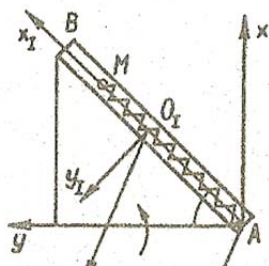


Рис. 1.1

движется гладкий шарик M веса P , прикреплённый к пружине, другой конец которой прикреплён к точке трубки A . Длина пружины в недеформированном состоянии l , коэффициент жёсткости пружины c .

В начальный момент $t_0 = 0$ пружина не напряжена, а v_{10} – составляющая скорости шарика относительно подвижного тела. Числовые значения указанных величин приведены в табл. 1.1.

Определить движение шарика относительно трубки и силу реакции трубки.

Т а б л и ц а 1.1

№	$\omega, \text{с}^{-1}$	$P, \text{Н}$	$c, \text{Н/м}$	$l, \text{м}$	$r, \text{м}$	$\alpha, ^\circ$	φ_0	$x_{10}, \text{м}$	$v_{10}, \text{м/с}$
1	π	3,92	17,64	0,60	-	30	-	0	-2,0

Решение. Дано: $P = 3,92 \text{ Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 0,60 \text{ м}$, $c = 17,64 \text{ Н/м}$, $\omega = \pi \text{ (с}^{-1}\text{)}$ при начальных условиях: $l = 0,60 \text{ м}$, $x_0 = 0$, $v_{10} = -2 \text{ м/с}$.

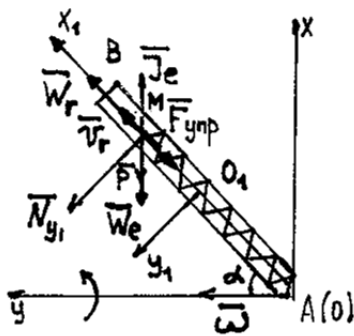


Рис. 1.2

Система отсчёта и оси координат приведены на рис. 1.2. Подвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ жёстко связываем с трубкой AB . Неподвижная система координат $Oxyz$.

Трубка равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oy , т.е. на шарик действует сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$; сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$ (проекция силы упругости на ось O_1x_1 равна $-cx_1$, где c – коэффициент пропорциональности); реакция трубки \vec{N} , имеющая две состав-

ляющие \vec{N}_{y1} и \vec{N}_{z1} (предполагаем отсутствие силы трения в трубке, поэтому $\vec{N}_{x1} = 0$).

Трубка вращается равномерно, поэтому переносное ускорение имеет только осеостремительную составляющую $w_e^{oc} = \omega^2 |AM| \sin \alpha$. Переносная сила инерции направлена от оси вращения и её модуль $|J_e| = m\omega^2 |AM| \sin \alpha = m\omega^2 (l + x_1) \sin^2 \alpha$.

Кориолисова сила инерции \vec{J}_c направлена вдоль оси $O_1 z_1$, $\vec{J}_c = 2m[\vec{v}_1 \times \vec{\omega}]$, $J_{cz} = 2mv_1 \omega \sin \alpha$.

Согласно основному уравнению динамики относительного движения

$$m\vec{w}_1 = \vec{P} + \vec{N}_{y1} + \vec{N}_{z1} + \vec{J}_c + \vec{J}_e + \vec{F}_{упр}.$$

В проекциях на оси подвижной системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ имеем систему уравнений

$$mw_{1x} = P_{x1} + J_{ex1} + F_{упрx1},$$

$$0 = N_{y1} + P_{y1} + J_{ey1},$$

$$0 = N_{z1} + J_{cz1}.$$

Учитывая, что $J_{cz1} = 2m \frac{dx_1}{dt} \omega \sin \alpha$, получаем систему из трех уравнений

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -mg \sin \alpha \cos \omega t + m\omega^2 (l + x_1) \sin^2 \alpha - cx_1,$$

$$0 = N_{y1} + mg \cos \alpha \cos \omega t - m\omega^2 (l + x_1) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$0 = N_{z1} + 2m \frac{dx_1}{dt} \omega \sin \alpha - mg \sin \omega t.$$

Первое уравнение равносильно:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x_1 = -g \sin \alpha \cos \omega t + \omega^2 l \sin^2 \alpha,$$

где $w_{1x} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$.

Численное значение $\left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) = 41,64 > 0$.

Если обозначить $k^2 = \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right)$, тогда

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 x_1 = -g \sin \alpha \cos \omega t + \omega^2 l \sin^2 \alpha .$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение складывается из общего решения однородного уравнения x_{11} и частного решения неоднородного уравнения x_{12} : $x_1 = x_{11} + x_{12}$.

Найдём общее решение однородного уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$. Его корни мнимые, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{11} = A \cos kt + B \sin kt$.

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения, обусловленного членом $-g \sin \alpha \cos \omega t$, будем использовать метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных). Заменяем произвольные постоянные в общем решении на функции $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$. Составим систему уравнений для нахождения решения:

$$\begin{cases} \frac{dZ_1(t)}{dt} \cos kt + \frac{dZ_2(t)}{dt} \sin kt = 0, \\ \frac{dZ_1(t)}{dt} (-k \sin kt) + \frac{dZ_2(t)}{dt} k \cos kt = -g \sin \alpha \cos \omega t . \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера:

$$W = \begin{vmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -k \sin kt & k \cos kt \end{vmatrix} = k \cos^2 kt + k \sin^2 kt = k \neq 0 ;$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin kt \\ -g \sin \alpha \cos \omega t & k \cos kt \end{vmatrix} = g \sin \alpha \cos \omega t \sin kt ,$$

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = \frac{W_1}{W} = \frac{g \sin \alpha \cos \omega t \sin kt}{k} ;$$

$$Z_1(t) = \int \frac{g \sin \alpha \cos \omega t \sin kt}{k} dt =$$

$$= \frac{g \sin \alpha}{k} \int \cos \omega t \sin kt dt = -\frac{g \sin \alpha}{k} \left[\frac{\cos(k + \omega)t}{2(k + \omega)} + \frac{\cos(k - \omega)t}{2(k - \omega)} \right] + C_1 ,$$

где C_1 – постоянная интегрирования;

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos kt & 0 \\ -k \sin kt & -g \sin \alpha \cos \omega t \end{vmatrix} = -g \sin \alpha \cos \omega t \cos kt ;$$

$$\frac{dZ_2(t)}{dt} = \frac{W_2}{W} = \frac{-g \sin \alpha \cos \omega t \cos kt}{k} ;$$

$$Z_2(t) = \int \frac{-g \sin \alpha \cos \omega t \cos kt}{k} dt =$$

$$= -\frac{g \sin \alpha}{k} \int \cos \omega t \cos kt dt = -\frac{g \sin \alpha}{k} \left[\frac{\sin(k - \omega)t}{2(k - \omega)} + \frac{\sin(k + \omega)t}{2(k + \omega)} \right] + C_2 ,$$

где C_2 – постоянная интегрирования;

$$x_{11} = Z_1(t) \cos kt + Z_2(t) \sin kt =$$

$$= -\frac{g \sin \alpha}{k} \cos kt \left[\frac{\cos(k + \omega)t}{2(k + \omega)} + \frac{\cos(k - \omega)t}{2(k - \omega)} \right] + C_1 \cos kt -$$

$$-\frac{g \sin \alpha}{k} \sin kt \left[\frac{\sin(k - \omega)t}{2(k - \omega)} + \frac{\sin(k + \omega)t}{2(k + \omega)} \right] +$$

$$+ C_2 \sin kt = -\frac{g \sin \alpha}{k} \left[\frac{\cos \omega t}{2(k + \omega)} + \frac{\cos(-\omega t)}{2(k - \omega)} \right] + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt =$$

$$= -\frac{g \sin \alpha \cos \omega t}{k^2 - \omega^2} + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt .$$

Далее частное решение, обусловленное постоянным членом $\omega^2 l \sin^2 \alpha$ ищем в виде $x_{12} = G$, где G – постоянная величина, по-

этому $\frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = 0$, следовательно, $k^2 G = \omega^2 l \sin^2 \alpha$, $G = \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2}$,

$$x_{12} = \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} .$$

Таким образом, решение для x_1 имеет вид

$$x_1 = \frac{g \sin \alpha \cos \omega t}{\omega^2 - k^2} + \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt ;$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{g \sin \alpha}{\omega^2 - k^2} \omega \sin \omega t - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt .$$

Подставив начальные условия $t_0 = 0$, $x_{10} = 0$, $v_{10} = -2$ м/с в полученные уравнения, находим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$0 = x_1 = \frac{g \sin \alpha \cos 0^0}{\omega^2 - k^2} + \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} + C_1 \cos 0^0,$$

$$\Rightarrow C_1 = \left(\frac{g \sin \alpha}{k^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} \right);$$

$$-2 = \frac{dx_1}{dt} = C_2 k \cos 0^0 \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{k}.$$

Подставив константы C_1 и C_2 , получим уравнение относительного движения точки:

$$x_1 = \frac{g \sin \alpha \cos \omega t}{\omega^2 - k^2} + \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} + \left(\frac{g \sin \alpha}{k^2 - \omega^2} - \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} \right) \cos kt - \frac{2}{k} \sin kt,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \left(-\frac{g \sin \alpha}{k^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} \right) k \sin kt - 2 \cos kt - \frac{g \sin \alpha}{\omega^2 - k^2} \omega \sin \omega t,$$

$$k^2 = \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) = 41,64.$$

Тогда составляющие силы реакции трубки равны:

$$\begin{aligned} N_{z1} &= -2m \frac{dx_1}{dt} \omega \sin \alpha + mg \sin \omega t = \\ &= -2m\omega \sin \alpha \left\{ \left(-\frac{g \sin \alpha}{k^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 l \sin^2 \alpha}{k^2} \right) k \sin kt - 2 \cos kt - \frac{g \sin \alpha}{\omega^2 - k^2} \omega \sin \omega t \right\} + \\ &\quad + mg \sin \omega t; \end{aligned}$$

$$N_{y1} = -mg \cos \alpha \cos \omega t + m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha + x_1 m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Подставим данные: $C_1 = 0,11$, $C_2 = -0,31$. Закон движения точки в неинерциальной системе отсчёта имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,11 \cos 6,45t - 0,31 \sin 6,45t + \frac{9,8 \cdot 0,5}{3,14^2 - 41,64} \cos \pi t + \frac{3,14^2 \cdot 0,6 \cdot 0,25}{41,64} = \\ &= (0,11 \cos 6,45t - 0,31 \sin 6,45t - 0,15 \cos \pi t + 0,04) \text{ м}, \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,7 \sin 6,45t - 2 \cos 6,45t - \frac{9,8 \cdot 0,5 \cdot 3,14}{3,14^2 - 41,64} \sin \pi t =$$

$$= (-0,71 \sin 6,45t - 2 \cos 6,45t + 0,48 \sin \pi t) \text{ м/с.}$$

Получаем составляющие силы реакции трубки

$$N_{y1} = -3,92 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3} \cos \pi t + \frac{3,92}{9,8} 3,14^2 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,25 +$$

$$+ x_1 \frac{3,92}{9,8} 3,14^2 \sqrt{3} \cdot 0,25 = 3,39 \cos \pi t + 1,02 + 1,7x_1 =$$

$$= (0,19 \cos 6,45t - 0,53 \sin 6,45t - 0,26 \cos \pi t + 3,39 \sin \pi t + 1,09) \text{ Н};$$

$$N_{z1} = \frac{-2 \cdot 3,92}{9,8} 3,14 \cdot 0,5(-0,71 \sin 6,45t - 2 \cos 6,45t + 0,48 \sin \pi t) +$$

$$+ 3,92 \sin \pi t = (0,89 \sin 6,45t + 2,52 \cos 6,45t - 0,60 \sin \pi t) + 3,92 \sin \pi t \text{ Н.}$$

Условия задач

Материальная точка M движется относительно стержня AB (цилиндрический канал AB). Движение стержня AB задано. Определить движение точки M относительно стержня и давление, производимое ею на стенки стержня.

Данные, необходимые для решения задач, приведены в табл. 1.2, где P – вес точки M , $\bar{\omega}$ – угловая скорость (постоянная величина), l – длина недеформированной пружины, x_{10} и v_{10} – начальная координата и скорость точки M относительно подвижного тела (при $t = t_0 = 0$), c – жёсткость пружины, r – расстояние

На всех схемах (рис. 1.3) оси Oz и Oz_1 направлены перпендикулярно плоскости чертежа. Угол α постоянен во всё время движения.

В вариантах 1, 3, 4, 6, 7 – переносное движение – вращение вокруг вертикальной оси, в остальных вариантах вокруг горизонтальной.

В начальный момент времени в вариантах 2, 6, 7, 9, 14, 16, 18 пружина не напряжена. В вариантах 11, 13 точка M находится в положении статического равновесия.

Угол α и размер r показаны на чертежах, φ_0 – значение угловой координаты φ при статическом равновесии вещественной точки.

В предлагаемых для решения задачах необходимо изобразить на рисунке силы, действующие на вещественную точку. К ним относятся сила тяжести \vec{P} , силы реакции цилиндрического канала, сила

упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$ (в вариантах 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18);

\vec{J}_e – переносная сила инерции, \vec{J}_c – сила инерции Кориолиса. Также необходимо изобразить на рисунке векторы скоростей и ускорений.

Если одной из активных сил является сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, то нужно учитывать, что восстанавливающая сила упругости стремится вернуть тело в положение равновесия, т.е. сила направлена в сторону, противоположную деформации.

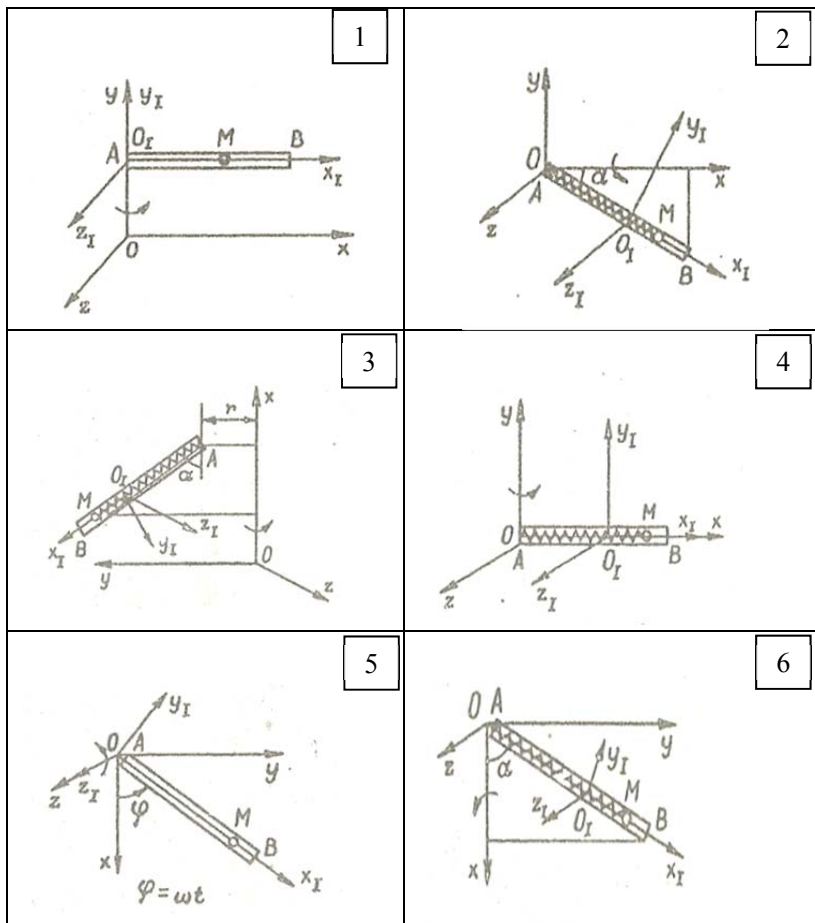


Рис. 1.3

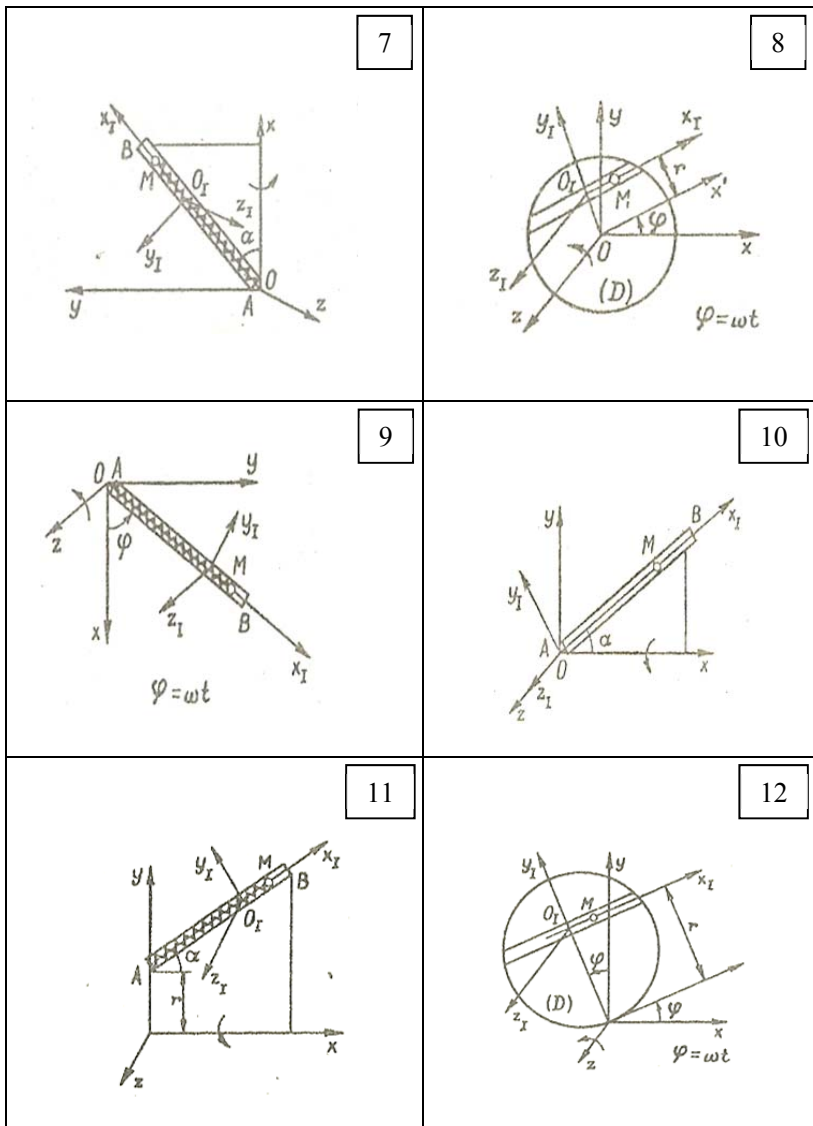
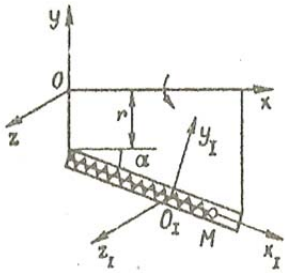
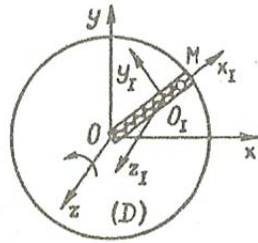


Рис. 1.3(продолжение)

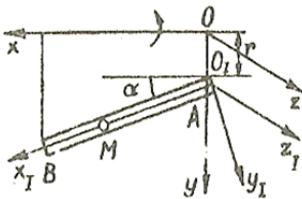
13



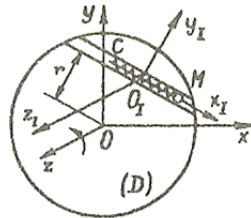
14



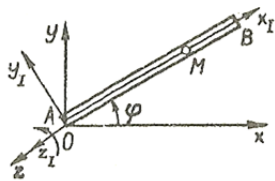
15



16



17



18

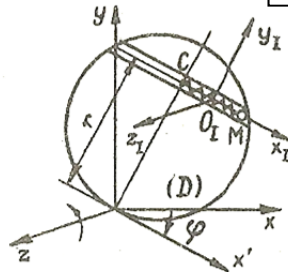


Рис. 1.3 (окончание)

Таблица 1.2

№	$\omega, \text{с}^{-1}$	$P, \text{Н}$	$c, \text{Н/м}$	$l, \text{м}$	$r, \text{м}$	$\alpha, ^\circ$	$\varphi_0,$	$x_{10}, \text{м}$	$v_{10}, \text{м/с}$
1	π	0,98	-	-	-	-	-	0,20	0
	4,0	1,96	-	-	-	-	-	0,30	1,0
	5,0	2,94	-	-	-	-	-	0,40	-2,0
2	4,0	3,92	19,6	0,30	-	30	-	-	1,0
	5,0	4,90	24,5	0,40	-	40	-	-	-2,0
	6,0	5,88	29,4	0,50	-	50	-	-	3,0
3	5,0	1,96	19,6	0,40	0,10	20	-	0,10	1,0
	6,0	3,92	39,2	0,50	0,15	30	-	0,20	-1,0
	7,0	5,88	58,8	0,60	0,20	40	-	0,30	0
4	2π	3,92	58,8	0,40	-	-	-	0	2,0
	π	2,94	49,0	0,50	-	-	-	0,10	1,0
	$0,5\pi$	1,96	39,2	0,60	-	-	-	0,10	-1,0
5	$0,25\pi$	3,92	-	-	-	-	-	0,20	0
	π	2,94	-	-	-	-	-	0,30	-1,0
	2π	1,96	-	-	-	-	-	0,40	1,0
6	2π	1,96	19,6	0,60	-	30	-	-	3,0
	3π	2,94	29,4	0,50	-	40	-	-	-2,0
	4π	3,92	39,2	0,40	-	50	-	-	1,0
7	4π	1,96	39,2	0,50	-	45	-	-	-5,0
	3π	2,94	29,4	0,40	-	35	-	-	-4,0
	2π	3,92	19,6	0,30	-	30	-	-	-3,0
8	π	1,96	-	-	0,40	-	-	0,10	1,5
	2π	3,92	-	-	0,30	-	-	-0,10	2,0
	3π	5,88	-	-	0,20	-	-	-0,20	3,0
9	2π	1,96	29,4	0,50	-	-	0	-	1,0
	$1,5\pi$	2,94	39,2	0,60	-	-	30	-	2,0
	π	3,92	58,8	0,70	-	-	45	-	3,0

№	$\omega, \text{с}^{-1}$	P, H	$c, \text{H/м}$	$l, \text{м}$	$r, \text{м}$	$\alpha, ^\circ$	$\varphi_0,$	$x_{10}, \text{м}$	$v_{10}, \text{м/с}$
10	π	3,92	-	-	-	30	-	0,50	$-\pi/3$
	2π	2,94	-	-	-	45	-	0,55	$\pi/4$
	3π	1,96	-	-	-	60	-	0,60	$-0,5\pi$
11	4,0	1,96	9,8	0,60	0,20	60	-	-	12,0
	6,0	2,94	19,6	0,70	0,30	45	-	-	15,0
	8,0	3,92	29,4	0,80	0,40	30	-	-	18,0
12	5,0	2,94	-	-	0,20	-	-	-0,30	π
	4,0	1,96	-	-	0,30	-	-	0,20	$-\pi$
	3,0	0,98	-	-	0,40	-	-	-0,20	$0,5\pi$
13	20,0	1,96	39,2	0,63	0,18	30	-	-	20,0
	10,0	2,94	29,4	0,50	0,20	45	-	-	15,0
	5,0	3,92	19,6	0,40	0,25	60	-	-	10,0
14	5,0	1,96	39,2	0,60	-	-	30	-	-2,0
	7,0	2,94	58,8	0,70	-	-	45	-	-3,0
	10,0	3,92	78,4	0,80	-	-	60	-	-4,0
15	π	2,94	-	-	0,10	30	-	0,20	0
	2π	3,92	-	-	0,20	45	-	0,25	-0,20
	3π	4,90	-	-	0,30	60	-	0,30	0,20
16	12,0	1,96	98	0,50	0,40	-	30	-	1,0
	10,0	2,94	147	0,40	0,35	-	45	-	2,0
	8,0	3,92	196	0,30	0,30	-	60	-	-2,0
17	4π	2,94	-	-	-	-	-	0,60	-2,0
	2π	1,96	-	-	-	-	-	0,50	-1,0
	$0,5\pi$	0,98	-	-	-	-	-	0,40	1,0
18	$1,5\pi$	2,94	58,8	0,40	0,60	-	60	-	-3,0
	π	3,92	78,4	0,35	0,55	-	45	-	-2,0
	$0,5\pi$	4,90	98,0	0,30	0,50	-	30	-	-1,0

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Краткие сведения из теории

При составлении уравнений, описывающих динамику точки и системы, могут использоваться основные теоремы динамики. Выбор той или иной теоремы при решении задачи обусловлен постановкой задачи, особенностями движения системы и тем, какая теорема динамики позволяет исключить из составляемых уравнений заранее неизвестные силы реакции связей.

1. Теорема о движении центра масс системы.

Радиус-вектор центра масс системы удовлетворяет соотношению

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_j m_j \bar{r}_{C_j}}{\sum_j m_j},$$

где \bar{r}_{C_j} – радиусы-векторы центров масс отдельных тел, входящих в систему. Для твердого тела массы M

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(M)} \bar{r} dm}{\int_{(M)} dm} = \frac{\int_{(M)} \bar{r} dm}{M}.$$

Согласно теореме о движении центра масс

$$M\ddot{\bar{r}}_C = \bar{F}^{(e)}, \quad (2.1)$$

где M – масса всей системы, $\bar{F}^{(e)}$ – главный вектор приложенных к системе внешних сил.

Если $\bar{F}^{(e)} \equiv 0$, то скорость центра масс системы $\overline{\dot{\bar{v}}_C} = \text{const} = \overline{\dot{\bar{v}}_{C_0}}$.

Если не только $\bar{F}^{(e)} \equiv 0$, но и начальная скорость центра масс $\overline{\dot{\bar{v}}_{C_0}} = 0$, то $\overline{\bar{r}_C} = \text{const} = \overline{\bar{r}_{C_0}}$, т.е. положение центра масс системы остается неизменным. Все вышеприведенные формулы и утверждения можно выписать в проекциях на оси координат $Oxyz$.

2. Теорема об изменении количества движения, или импульса

Импульс материальной точки $\bar{Q} = m\bar{v}$. Импульс твердого тела $\bar{Q} = \int_{(M)} \bar{v} dm$. Импульс системы выражается через движение центра

масс согласно формуле $\bar{Q} = m\bar{v}_C$. По теореме об изменении импульса системы $\dot{\bar{Q}} = \bar{F}^{(e)}$, или $\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \int_0^t \bar{F}^{(e)} dt$.

Если $\bar{F}^{(e)} = 0$ (система изолирована), то $\bar{Q} = \overline{\text{const}}$. Если $\int_0^t \bar{F}^{(e)} dt = 0$, то $\bar{Q} = \bar{Q}_0$ в этот момент времени t .

Все вышеприведенные формулы и утверждения можно выписать в проекциях на оси координат $Oxyz$.

3. Теорема об изменении кинетического момента

Кинетическим моментом материальной точки относительно полюса O называется следующая величина: $\bar{G}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}$. Для твердого тела $\bar{G}_0 = \int_{(M)} [\bar{r} \times \bar{v}] dm$.

При вращении тела около неподвижной точки (рис. 2.1), если $\bar{G}_0 = G_{0x}\bar{k}_1 + G_{0y}\bar{k}_2 + G_{0z}\bar{k}_3$, а угловая скорость $\bar{\omega} = \omega_x\bar{k}_1 + \omega_y\bar{k}_2 + \omega_z\bar{k}_3$, то

$$\begin{pmatrix} G_{0x} \\ G_{0y} \\ G_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

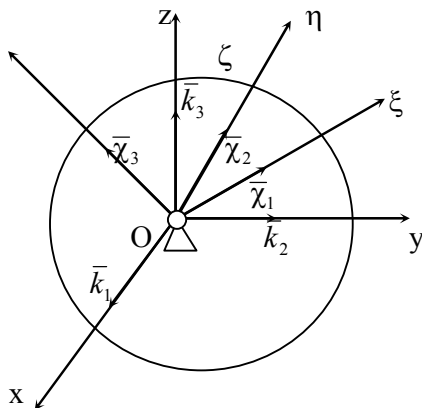


Рис. 2.1

Осевые моменты инерции

$$J_x = \int_{(M)} h_x^2 dm = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_{(M)} h_y^2 dm = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, \\ J_z = \int_{(M)} h_z^2 dm = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm,$$

центробежные моменты инерции

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm, \quad J_{xz} = \int_{(M)} xz dm, \quad J_{yz} = \int_{(M)} yz dm.$$

Формула, идентичная (2.2), выполняется в связанной с твердым телом системе координат $O\xi\eta\zeta$. Здесь матрица моментов инерции при движении твердого тела остается постоянной. Если связанные оси являются главными осями инерции тела, то $J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$ и кинетический момент $\bar{G}_0 = J_\xi \omega_\xi \bar{\chi}_1 + J_\eta \omega_\eta \bar{\chi}_2 + J_\zeta \omega_\zeta \bar{\chi}_3$.

В частном случае при вращении тела около неподвижной оси Oz $\bar{G}_0 = -J_{xz} \omega_z \bar{k}_1 - J_{yz} \omega_z \bar{k}_2 + J_z \omega_z \bar{k}_3$, а составляющая кинетического момента вдоль оси вращения $G_{0z} = J_z \omega_z$.

Кинетический момент системы относительно неподвижной точки O и произвольной точки P связаны соотношением

$$\bar{G}_0 = \bar{r}_P \times \bar{Q} + \bar{G}_P. \quad (2.3)$$

В частном случае, когда точка P является центром масс системы C , формула (2.3) принимает вид

$$\bar{G}_0 = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{G}_C.$$

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного полюса O имеет вид $\dot{\bar{G}}_0 = \bar{L}_0^{(e)}$. В правой части $\bar{L}_0^{(e)} = \sum_j \bar{M}_0 \left(\bar{F}_j^{(e)} \right)$ – сумма моментов внешних сил, приложенных к системе, относительно точки O .

Относительно произвольной точки P формулировка теоремы следующая:

$$\dot{\bar{G}}_P = \bar{L}_P^{(e)} - \bar{v}_P \times \bar{Q},$$

а в случае, если точка P совпадает с центром масс системы,

$$\dot{\bar{G}}_C = \bar{L}_C^{(e)} .$$

Если $\bar{L}_0^{(e)} \equiv 0$, то $\bar{G}_0 = \overline{\text{const}}$. Все вышеприведенные формулы можно записать в проекциях на оси координат $Oxyz$.

Так как в правой части теоремы присутствуют моменты внешних сил, характеризующие их способность к вращению, то теорема об изменении кинетического момента часто применяется при вращательном движении, хотя может использоваться не только в этом случае.

4. Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки $T = mv^2/2$. Для твердого тела $T = \int_{(M)} \frac{v^2}{2} dm$.

С движением центра масс кинетическая энергия системы точек или твердого тела связана соотношением

$$T = \frac{M\bar{v}_C^2}{2} + \sum_j \frac{m_j \bar{v}_{jr}^2}{2}, \quad T = \frac{M\bar{v}_C^2}{2} + \int_{(M)} \frac{v_r^2}{2} dm ,$$

где \bar{v}_r – скорость точек относительно системы координат, поступательно движущейся вместе с центром масс.

При поступательном движении тела $T = M(v^2/2)$, при вращении тела около неподвижной оси (I) $T = (J_{(I)}\omega^2)/2$, где \bar{v} – скорость любой точки тела, $J_{(I)}$ – момент инерции тела относительно оси

вращения. При плоскопараллельном движении $T = \frac{M\bar{v}_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_{C\zeta} \omega^2$,

где $J_{C\zeta}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения его точек; или $T = (J_{C'z'}\omega^2)/2$, где $J_{C'z'}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения точек тела.

При вращении тела около неподвижной точки O $T = \frac{1}{2} J_{(O)} \omega^2$,

где $J_{(O)}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O вдоль вектора угловой скорости; или

$$T = \frac{1}{2} \left[J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{xz} \omega_x \omega_z - 2J_{yz} \omega_y \omega_z \right]. \quad (2.4)$$

При использовании связанной системы координат $O\xi\eta\zeta$ формула идентична. Для главных осей инерции тела

$$T = \frac{1}{2} \left[J_{\xi} \omega_{\xi}^2 + J_{\eta} \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta} \omega_{\zeta}^2 \right]. \quad (2.5)$$

В общем случае движения твердого тела $T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} J_{(C\omega)} \omega^2$, где $J_{(C\omega)}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс вдоль вектора угловой скорости; или $T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_r$, где T_r вычисляется по формулам, аналогичным (2.4) и (2.5), в системе координат с началом в центре масс тела.

По теореме об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме $dT = \Delta A$.

В правой части теоремы присутствует элементарная работа приложенных к системе сил

$$\Delta A = \sum_j \Delta A_j = \sum_j \bar{F}_j d\bar{r}_j,$$

где \bar{r}_j – радиус-вектор точки приложения силы \bar{F}_j . Элементарная работа каждой силы может быть выражена через декартовы и траекторные координаты точки приложения силы:

$$\begin{aligned} \Delta A_j &= F_{jx} dx_j + F_{jy} dy_j + F_{jz} dz_j, \\ \Delta A_j &= F_{j\tau} dS_j. \end{aligned}$$

Элементарная работа момента силы, действующей на твердое тело, вращающееся вокруг оси l , определяется по формуле

$$\Delta A = M_{(l)}(\bar{F}) d\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в конечной форме имеет вид

$$T - T_0 = A = \sum_j \int_{P_{j0}}^{P_j} \bar{F}_j d\bar{r}_j. \quad (2.6)$$

В правой части работа силы представлена в виде криволинейного интеграла второго рода, взятого по пути, проходимому точкой приложения силы из начального положения P_{j0} в конечное положение P_j .

Если сила консервативна и стационарна, то ее вектор $\vec{F}_j = \vec{\nabla}_j U_j(x_j, y_j, z_j)$. Функция U_j называется силовой функцией, соответствующей силе \vec{F}_j , а $\Pi_j = -U_j$ – потенциальная энергия, соответствующая силе \vec{F}_j . Тогда элементарная работа действующих консервативных сил

$$\Delta A = dU = -d\Pi,$$

где $U = \sum_j U_j = -\Pi = -\sum_j \Pi_j$.

Если работу совершают только консервативные стационарные силы, то (2.6) переходит в $T + \Pi = \text{const} = T_0 + \Pi_0$ – закон сохранения полной механической энергии системы.

При поступательном движении твердого тела теорема о движении центра масс дает дифференциальное уравнение $M\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}^{(e)}$, решение которого $\vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$ полностью описывает движение твердого тела (так как здесь достаточно найти движение одной из точек тела и далее можно вычислить остальные характеристики движения тела).

При вращении тела около неподвижной оси теорема об изменении кинетического момента тела относительно неподвижной оси Oz приводит к уравнению $J_z \ddot{\varphi} = L_{0z}^{(e)}$. Решив данное уравнение, получим зависимость угла поворота $\varphi = \varphi(t)$ и тем самым полностью определим вращательное движение тела.

При плоскопараллельном движении (рис. 2.2) теорема о движении центра масс в проекциях на оси Ox , Oy и теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс в проекции на ось $C\zeta$ дают систему уравнений

$$M\ddot{x}_C = F_x^{(e)}, \quad M\ddot{y}_C = F_y^{(e)}, \quad J_{C\zeta} \ddot{\varphi} = L_{C\zeta}^{(e)},$$

решение которой $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ полностью описывает плоскопараллельное движение.

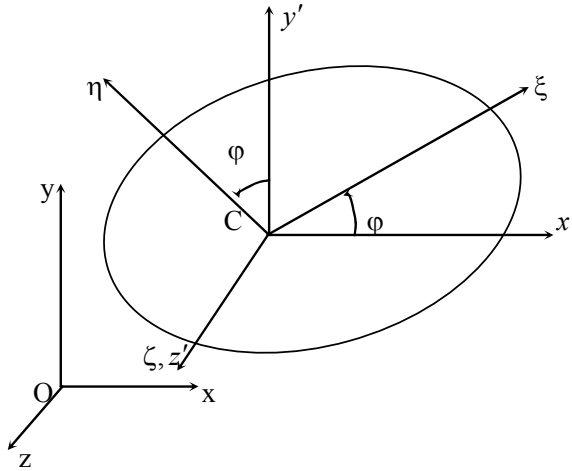


Рис. 2.2

Пример. Рассмотрим вариант 28 (рис. 2.3). Возьмем $M_0 = 30 \text{ Нм}$, $M_1 = 3 \text{ Нмс}^{-2}$, $\alpha = 30^\circ$, $k = 0,005 \text{ м}$, $P_1 = 30 \text{ Н}$, $P_2 = 250 \text{ Н}$, $r_1 = 0,2 \text{ м}$, $r_2 = 0,4 \text{ м}$, $r_3 = 0,1 \text{ м}$, $\rho = 0,2 \text{ м}$.

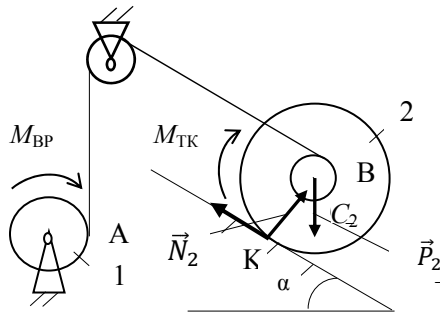


Рис. 2.3.

Для составления дифференциального уравнения, описывающего движение системы при качении без проскальзывания, используем теорему об изменении кинетической энергии системы $dT = \Delta A$.

1. Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$. При вращательном движении вала его кинетическая энергия $T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2$. Момент инерции обода $J_1 = P_1 r_1^2 / g$, поэтому $T_1 = P_1 r_1^2 \omega_1^2 / 2g$.

Для барабана 2 при плоскопараллельном движении его кинетическая энергия

$$T_2 = P_2 v_{C_2}^2 / 2g + J_{C_2 z'} \omega_2^2 / 2.$$

Момент инерции $J_{C_2 z'} = P_2 \rho^2 / g$. Из условия нерастяжимости троса следует, что скорости точек A и B одинаковы по модулю, т.е. $v_A = v_B$. Выражая их через угловые скорости тел, входящих в систему, и учитывая, что точка касания барабана и наклонной плоскости является его мгновенным центром скоростей, имеем

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 (r_2 + r_3) \text{ или } \omega_2 = \omega_1 r_1 / (r_2 + r_3).$$

Скорость центра масс барабана $v_{C_2} = \omega_2 r_2 = \omega_1 r_1 r_2 / (r_2 + r_3)$. Подстановкой последних формул в выражение для кинетической энергии T_2 представляем ее в виде

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} \cdot \frac{r_1^2 (r_2^2 + \rho^2)}{(r_2 + r_3)^2} \omega_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = [P_1 + P_2 (r_2^2 + \rho^2) / (r_2 + r_3)^2] r_1^2 \omega_1^2 / 2g,$$

или $T = B \omega_1^2 / 2g$, $B = 9,2 \text{ Нм}^2$.

2. Элементарная работа сил, приложенных к системе,

$$\Delta A = M_{\text{вп}} d\varphi_1 - P_2 \sin \alpha \cdot ds_{C_2} - M_{\text{тк}} d\varphi_2.$$

Элементарные смещение центра масс барабана, угол поворота вала и барабана соотносятся друг с другом так же, как скорость центра масс барабана и угловые скорости барабана и вала:

$$ds_{C_2} = d\varphi_1 r_1 r_2 / (r_2 + r_3), \quad d\varphi_2 = d\varphi_1 r_1 / (r_2 + r_3).$$

Момент трения качения пропорционален нормальной реакции опоры

$$M_{\text{тк}} = k |\vec{N}_2| = k P_2 \cos \alpha.$$

Тогда элементарная работа сил, приложенных к системе, равна:

$$\begin{aligned} \Delta A &= [M_0 + M_1 t^2 - P_2 \sin \alpha \cdot r_1 r_2 / (r_2 + r_3) - \\ &- k P_2 \cos \alpha r_1 / (r_2 + r_3)] d\varphi_1 = (D + M_1 t^2) d\varphi_1, \\ D &= 10 - \sqrt{3} / 4 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

3. Из теоремы об изменении кинетической энергии следует

$$B\omega_1 \cdot d\omega_1/g = (D + M_1t^2)d\varphi_1,$$

или после преобразований, так как $d\varphi_1 = \omega_1 dt$,

$$d\omega_1/dt = (D + M_1t^2)g/B.$$

В начальный момент времени система покоилась, поэтому начальное условие при $t = 0$: $\omega_1 = 0$. Интегрированием получим зависимость угловой скорости вала от времени

$$\omega_1 = (Dt + M_1t^3/3)g/B,$$

или $\omega_1 = 10,1909 t + 1,0652 t^3 (c^{-1})$ при $t \leq \tau$.

С помощью кинематического соотношения между угловой скоростью вала и скоростью центра масс барабана находим

$$v_{C_2} = \omega_1 \frac{r_1 r_2}{(r_2 + r_3)} = \frac{r_1 r_2}{(r_2 + r_3)} \frac{g}{B} (Dt + M_1t^3/3) = \frac{ds_2}{dt},$$

или $v_{C_2} = 16,305 t + 1,704 t^3$ м/с при $t \leq \tau$.

Интегрированием последнего соотношения получаем зависимость перемещения центра масс барабана от времени при подъеме:

$$s_{C_2} = \frac{r_1 r_2}{(r_2 + r_3)} \frac{g}{B} (Dt^2/2 + M_1t^4/12),$$

или $s_{C_2} = 8,1527 t^2 + 0,426 t^4$ м при $t \leq \tau$.

Угловое ускорение вала

$$\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{1z} \vec{k}_3, \quad \varepsilon_{1z} = d\omega_1/dt = (D + M_1t^2)g/B,$$

или $\varepsilon_{1z} = 10,1909 + 3,19565 t^2 c^{-2}$ при $t \leq \tau$.

4. Из теоремы об изменении кинетического момента для вала I относительно оси вращения z следует уравнение

$$J_1 d\omega_1/dt = M_0 + M_1t^2 - T_a r_1,$$

где T_a – натяжение троса. Отсюда, используя выражения для J_1, ω_1 , находим зависимость натяжения от времени:

$$T_a = (M_0 + M_1t^2)/r_1 - (D + M_1t^2)P_1 r_1/B,$$

или $T_a = 143,76 + 13,043 t^2$ Н при $t \leq \tau$. Из теоремы об изменении кинетического момента для блока из-за невесомости троса и блока и пренебрежения трением в оси блока ясно, что натяжение одинаково во всех сечениях свободного участка троса.

5. Из теоремы о движении центра масс барабана 2 следует уравнение

$$\frac{P_2}{g} \frac{dv_{C_2}}{dt} = T_a + F_T - P_2 \sin \alpha,$$

где F_T – сила трения скольжения в точке K . Отсюда, используя выражения для v_{C_2}, T_a , получаем, что сила трения при качении без проскальзывания

$$F_T = 25 - \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 22,8349 \text{ Н} = \text{const} > 0$$

(направлена вверх вдоль наклонной плоскости).

Условие качения без проскальзывания

$$|\vec{F}_T| \leq f_0 |\vec{N}_2|,$$

где f_0 – максимальное значение коэффициента трения покоя при скорости точки касания барабана и наклонной плоскости $\vec{v}_K = 0$. Так как

$$N_2 = P_2 \cos \alpha = 125\sqrt{3} \text{ Н},$$

то при качении без проскальзывания должно выполняться условие $f_0 \geq |\vec{F}_T|/|\vec{N}_2| \approx 0,1055$.

Условия задач

Условия задач сформулированы в соответствии с номером варианта. Схемы механических систем приведены на рис. 2.4, а необходимые числовые данные – в таблице к каждому варианту.

1. К валу 1 приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}} = M_0$. При помощи невесомого нерастяжимого троса, закрепленного на валу 1 и охватывающего каток 2, последний поднимается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К центру масс катка, расположенному на его оси симметрии, приложена сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости этой точки v_C : $F_C = F_0 v_C^2$, где F_0 – постоянная. Вал – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 . Каток имеет вес P_2 , радиус r_2 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Коэффициент трения качения катка о плоскость k . Трением в оси вала пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	k , мм	α , °	F_0 , $\text{с}^2\text{м}^{-2}$
0,10	0,20	0,15	20	400	200	4	30	10
0,12	0,25	0,20	25	500	220	5	25	20
0,15	0,30	0,25	30	600	250	6	20	30

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

а) зависимость скорости центра масс катка от его перемещения вдоль наклонной плоскости;

б) зависимость угловой скорости вала от времени;

в) зависимость ускорения центра масс катка от времени;

г) натяжение свободного участка троса в зависимости от времени;

д) найти условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

2. Подвижный 1 и неподвижный 2 блоки соединены невесомым нерастяжимым тросом, на конце которого находится груз 3 весом P_3 . Опускаясь, груз 3 поднимает груз 4 весом P_4 . Блоки представляют собой однородные диски веса P_1 и радиуса r_1 . К грузу 3 приложена сила сопротивления, зависящая от времени $F_c = F_0 - F_1 t^2$ на интервале времени $0 \leq t \leq \sqrt{F_0/F_1}$, где F_0, F_1 – постоянные величины. Проскальзывание между тросом и блоками отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_1 , Н	P_3 , Н	P_4 , Н	F_0 , Н	F_1 , Нс ⁻²
0,10	20	200	120	35	0,08
0,12	25	230	150	30	0,06
0,15	30	250	180	25	0,04

Определить при отсутствии трения в оси блока 2:

а) зависимость скорости подъема груза 4 от времени;

б) зависимость перемещения груза 3 от времени;

в) угловое ускорение блока 1 в зависимости от времени;

г) натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;

д) силу реакции в оси блока 2.

3. К барабану 1 приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = M_0$. При помощи невесомого нерастяжимого троса, прикрепленного к барабану 1 и охватывающего подвижный блок 2, поднимается груз 3 веса P_3 . Вращению барабана препятствует момент сопротивления M_c , пропорциональный углу поворота барабана φ_1 и равный $M_c = M_1 \varphi_1$, где M_1 – постоянная. Барабан 1 – цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 , его масса равномерно распределена по ободу. Блок 2 – однородный диск веса P_2 и радиуса $r_1/2$. Проскальзывание между блоком 2 и тросом отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	M_0 , Нм	M_1 , Нм
0,40	50	30	500	300	1,6
0,36	40	25	400	250	1,2

0,32	30	20	300	200	1,0
------	----	----	-----	-----	-----

Определить при отсутствии трения в оси барабана 1:

- зависимость между скоростью груза 3 и высотой его подъема;
 - кинематическое уравнение движения груза 3;
 - угловое ускорение барабана 1 в зависимости от времени;
 - натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени.
- д) силу реакции в оси барабана 1.

4. К барабану 2 приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = M_0$. При помощи невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через блоки, прикрепленного к барабану 2 и наматываемого на него, каток 1 поднимается по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К центру масс катка приложена сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости этой точки v_c : $F_c = B_0 v_c$, где B_0 – постоянная. Каток и барабан – однородные цилиндры веса P_1 и P_2 соответственно и одинакового радиуса r_1 . Трением качения катка о плоскость, барабана и блоков в их оси вращения и весом блоков пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	α , °	B_0 , Нмс ⁻¹
0,20	1200	60	200	25	20
0,25	1500	70	250	20	30
0,30	2000	80	300	15	40

Определить при отсутствии проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость между перемещением центра масс катка и его скоростью;
- кинематическое уравнение вращения барабана;
- зависимость углового ускорения катка от времени;
- натяжение свободной части троса в зависимости от времени;
- условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

5. Опускание трубы 1 происходит с использованием невесомого нерастяжимого троса, охватывающего трубу и неподвижный блок и закрепленного на ступенчатом барабане 2, который перекачивается по неподвижной плоскости, образующей угол α с горизонтом, без проскальзывания. Момент сопротивления вращению барабана пропорционален квадрату его угла поворота и равен $M_c = c\varphi^2$, где c –

постоянная. Вес трубы P_1 , масса ее равномерно распределена по оболочке. Барабан 2 веса P_2 имеет радиусы ступеней r_2 и r_3 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Трением качения, массой блока и трением в его оси пренебречь. Проскальзывание между трубой и тросом отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_2 , м	r_3 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	α , °	c , Нм
0,40	0,10	0,20	600	250	25	30
0,50	0,15	0,25	700	300	30	35
0,60	0,20	0,30	800	350	35	40

Определить:

а) связь между угловой скоростью барабана и углом его поворота;

б) ускорение центра масс трубы в зависимости от высоты ее опускания;

в) натяжение свободных участков нити в зависимости от этой высоты

г) условие качения барабана по наклонной плоскости без проскальзывания.

6. К валу I приложен вращающий момент $M_{вр} = M_0 + M_1 \omega_1^2$, где M_0, M_1 – постоянные величины, ω_1 – угловая скорость вала. На валу закреплен невесомый нерастяжимый трос, который перекинут через неподвижный блок и охватывает ступенчатый барабан 2, перекатывающийся по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Вал I – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 . Барабан 2 имеет вес P_2 , радиусы ступеней r_2 и r_3 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Трением качения, трением в оси вала и блока, массой блока пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	α , °	M_1 , Нмс ²
0,20	0,30	0,10	0,20	50	400	15	30	1,0
0,22	0,35	0,12	0,23	60	450	20	35	1,5
0,24	0,40	0,14	0,27	70	500	25	40	2,0

Определить в отсутствие проскальзывания барабана по наклонной плоскости:

а) зависимость угловой скорости вращения вала от его угла поворота;

- б) зависимость угловой скорости вала от времени;
- в) зависимость перемещения центра масс барабана от времени;
- г) натяжение троса в зависимости от времени;
- д) условие качения барабана по наклонной плоскости без проскальзывания.

7. Цилиндрический барабан 1 веса P_1 и радиуса r_1 перекачивается по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С помощью невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через подвижный и неподвижный блоки и прикрепленного к барабану, он связан с грузом 2 весом P_2 . Момент сопротивления вращению барабана пропорционален его угловой скорости $M_c = M_1 \omega_1$, где M_1 – постоянная. Масса барабана равномерно распределена по его ободу. Трением качения, трением в оси блока, массой блоков пренебречь. Проскальзывание между тросом и блоками отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	α , °	M_1 , Нмс
0,20	160	220	60	0,4
0,21	180	250	55	0,5
0,22	200	280	50	0,6

Определить в отсутствие проскальзывания барабана по наклонной плоскости:

- а) зависимость между скоростью центра масс барабана и его перемещением вдоль наклонной плоскости;
- б) кинематическое уравнение движения груза;
- в) зависимость углового ускорения барабана от времени;
- г) натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
- д) условие качения барабана по наклонной плоскости без проскальзывания.

8. К барабану 2 приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = M_0$. На барабане закреплен невесомый нерастяжимый трос, который перекинут через неподвижный блок и охватывает каток 1 , перекачивающийся по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонталью. Каток 1 – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 . Барабан 2 имеет вес P_2 и радиус r_2 , масса его равномерно распределена по ободу. К центру масс катка приложена сила сопротивления, выражающаяся зависимостью $F = P_1 f \cos \alpha v_c^2$, где f – постоянный коэффициент, v_c – скорость центра масс катка. Трением

качения, трением в оси барабана и блока, массой блока пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$\alpha, ^\circ$	$f, \text{ м}^{-2}\text{с}^2$
0,30	0,15	350	20	70	15	0,05
0,25	0,18	300	30	60	20	0,04
0,20	0,20	250	40	50	25	0,03

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость угловой скорости катка от его угла поворота;
- скорость центра масс катка в зависимости от времени;
- зависимость углового ускорения барабана от времени;
- натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
- условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

9. К ведущему валу I радиуса r_1 приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вп}} = M_0$. На валу закреплен невесомый нерастяжимый трос, который охватывает ступенчатый барабан 2 , а другой своей частью намотан на внешнюю ступень барабана и каток 3 , перекатывающийся по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Барабан имеет момент инерции относительно его оси вращения J , радиусы ступеней r_2 и r_4 . Каток 3 – однородный цилиндр весом P_3 и с радиусом r_3 . Момент сопротивления вращению барабана пропорционален его угловой скорости ω_2 и равен $M_c = M_1 \omega_2$, где $M_1 = \text{const}$. Трением качения, трением в оси вала и барабана и массой вала пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$P_3, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$\alpha, ^\circ$	$J, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$M_1, \text{ Нмс}$
0,10	0,20	0,10	0,11	300	800	25	2,5	0,30
0,09	0,21	0,12	0,12	350	750	20	3,0	0,25
0,08	0,22	0,15	0,15	400	700	15	3,5	0,40

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость скорости центра масс катка от времени;
- кинематическое уравнение вращения вала;
- угловое ускорение барабана в зависимости от времени;

- г) натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
 д) условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

10. Каток 1 веса P_1 и радиуса r_1 опускается по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С помощью нерастяжимого троса, перекинутого через неподвижный блок, вращается вал, на котором жестко укреплены барабан 2 и стержень 3 . Барабан – однородный цилиндр весом P_2 и с радиусом r_2 , стержень имеет длину $2r_3$ и несет на концах два тяжелых шара, каждый из которых весит P_4 и имеет момент инерции относительно своей оси симметрии J . Вес троса P_3 , его длина L , в начальный момент времени трос опущен вдоль наклонной плоскости на длину l_0 . Каток 1 – сплошной однородный цилиндр. Трением качения, трением в оси блока и вала, массой и размером блока, массой стержня и провисанием троса пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	L , м	l_0 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	P_4 , Н	α , °	J , кг·м ²
0,20	0,15	0,20	30	2,0	200	20	40	8	15	0,10
0,25	0,20	0,24	40	3,0	250	25	50	10	20	0,12
0,30	0,25	0,28	50	4,0	300	30	60	12	25	0,14

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- а) зависимость между скоростью центра масс катка и его перемещением вдоль наклонной плоскости;
 б) зависимость перемещения центра масс катка от времени;
 в) зависимость углового ускорения барабана от времени;
 г) условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

11. Труба 1 весом P_1 и радиусом r_1 поднимается с помощью невесомого нерастяжимого троса, охватывающего неподвижный блок и соединенного с грузом 2 веса P_2 , который опускается без трения по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Масса трубы равномерно распределена по ободу. К грузу приложена сила сопротивления, зависящая от времени, $F_c = B_1 t + B_2 t^2$, где B_1, B_2 – постоянные величины. Проскальзывание между тросом и трубой отсутствует. Массой блока пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	α , °	B_1 , Нс ⁻¹	B_2 , Нс ⁻²
0,20	80	120	30	15	1,0
0,25	100	150	35	20	1,3

0,30	120	180	40	30	1,8
------	-----	-----	----	----	-----

Определить при отсутствии трения в оси блока:

- зависимость скорости центра масс трубы от времени;
- зависимость перемещения груза от времени;
- угловое ускорение трубы в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- силу реакции в оси блока.

12. К ступенчатому барабану 2 приложен вращающий момент $M_{вр} = M_0 - M_1\omega_2$, где M_0, M_1 – постоянные, ω_2 – угловая скорость барабана. При помощи невесомого нерастяжимого троса, прикрепленного к барабану и охватывающего трубу 1, она поднимается. Вес трубы P_1 , радиус r_1 , масса ее равномерно распределена по ободу. Барабан 2 имеет вес P_2 , радиусы ступеней r_2 и r_3 , радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Проскальзывание между трубой и тросом отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	M_1 , Нмс
0,20	0,30	0,10	0,20	200	50	300	0,10
0,25	0,40	0,15	0,25	220	60	350	0,08
0,30	0,50	0,20	0,30	250	70	400	0,06

Определить при отсутствии трения в оси барабана 2:

- зависимость между скоростью центра масс трубы и высотой его подъема;
- кинематическое уравнение вращения барабана;
- ускорение центра масс трубы в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков и реакцию в оси барабана в зависимости от времени.

13. К валу 1 радиуса r_1 приложен вращающий момент

$$M_{вр} = M_0 + M_1\varphi_1, \quad \varphi_1 \leq \Phi_1,$$

$$M_{вр} = M_0 + M_1\Phi_1, \quad \varphi_1 > \Phi_1,$$

где M_0, M_1 – постоянные, φ_1 – угол поворота вала. При помощи невесомого нерастяжимого троса, прикрепленного к валу и охватывающего однородный цилиндр, осуществляется подъем цилиндра. Вес цилиндра P_2 , радиус r_2 . Массой вала пренебречь. Проскальзывание между цилиндром и тросом отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	P_2 , Н	M_0 , Нм	M_1 , Нм
-----------	-----------	------------	------------

0,10	400	25	5
0,15	500	50	8
0,20	600	75	10

Определить при отсутствии трения в оси вала I :

- зависимость угловой скорости цилиндра от его угла поворота;
- кинематическое уравнение вращения вала;
- ускорение центра масс цилиндра в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- силу реакции в оси вала в зависимости от времени.

14. Груз I веса P_1 опускается без трения по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С помощью нерастяжимого троса, перекинутого через неподвижный блок, приводится в движение цилиндрический каток 3 , на который намотан трос 2 . Каток имеет вес P_3 и радиус r_3 , масса его равномерно распределена по ободу, коэффициент трения качения катка о горизонтальную плоскость равен k . Вес троса P_2 , его длина L , в начальный момент времени трос опущен вдоль наклонной плоскости на длину l_0 и длина его горизонтального участка также l_0 . Трением в оси блока, массой и размером блока, провисанием троса пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_3 , м	L , м	l_0 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	P_4 , Н	k , м	α , °
0,30	20	2,0	100	60	300	8	0,05	30
0,25	25	3,0	130	75	350	10	0,04	25
0,20	30	4,0	150	90	400	12	0,03	20

Определить в отсутствие проскальзывания катка по горизонтальной плоскости:

- зависимость между скоростью груза и его перемещением;
- условие качения катка по плоскости без проскальзывания в зависимости от перемещения груза.

15. Груз I веса P_1 , находящийся на наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту, соединен невесомым нерастяжимым тросом, перекинутым через ступенчатый неподвижный блок 2 , с подвижным блоком 3 , который охватывается тросом. К центру масс подвижного блока подвешен груз 4 веса P_4 . Подвижный блок – однородный диск веса P_3 и радиуса r_3 , радиусы ступеней неподвижного блока r_2 и r_4 . Сила сопротивления движению груза I изменяется по закону $F_c = F_0 + B_1 v_1^2$, где F_0, B_1 – постоянные величины, v_1 – скорость груза I . Проскальзывание между блоками и тросом отсутствует. Массой

блока 2 пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_2, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$P_4, \text{ Н}$	$F_0, \text{ Н}$	$\alpha, ^\circ$	$B_1, \text{ Нм}^{-1}\text{с}^2$
0,30	0,20	0,10	1000	25	1600	20	25	1,0
0,40	0,25	0,12	1500	40	1800	25	20	1,2
0,45	0,30	0,15	2000	60	2200	30	15	1,5

Определить при отсутствии трения в оси блока 2:

- зависимость скорости движения груза l от его перемещения;
- зависимость угловой скорости подвижного блока от времени;
- угловое ускорение неподвижного блока в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- силу реакции в оси блока 2 в зависимости от времени.

16. К валу l радиуса r_1 приложен вращающий момент, зависящий от времени,

$$M_{\text{вп}} = M_0 + M_1 t, \quad t \leq \tau,$$

$$M_{\text{вп}} = M_0 + M_1 \tau, \quad t > \tau,$$

где M_0, M_1 – постоянные. С помощью невесомого нерастяжимого ремня вращение передается ступенчатому барабану 2, на внешнюю ступень барабана намотан невесомый нерастяжимый трос, поднимающий каток 3 по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Барабан имеет вес P_2 , радиус инерции относительно его оси вращения ρ , радиусы ступеней r_2 и r_4 . Каток – однородный цилиндр веса P_3 и радиуса r_3 . Трением качения, трением в оси вала и барабана и массой вала пренебречь. Проскальзывание ремня отсутствует. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$\rho, \text{ м}$	$P_2, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$\alpha, ^\circ$	$M_1, \text{ Нмс}^{-1}$
0,05	0,25	0,10	0,08	0,15	50	200	50	30	1,0
0,06	0,30	0,20	0,09	0,20	60	300	60	25	1,5
0,07	0,35	0,30	0,10	0,25	70	400	70	20	2,0

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость скорости центра масс катка от времени;
- кинематическое уравнение движения центра масс катка;
- угловое ускорение вала в зависимости от времени;

г) натяжение свободного участка троса в зависимости от времени;

д) условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

17. К барабану 2 приложен вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 \omega_2, \quad \omega_2 \leq \Omega,$$

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 \Omega, \quad \omega_2 > \Omega,$$

где M_0, M_1 – постоянные, ω_2 – угловая скорость барабана. При помощи невесомого нерастяжимого троса, закрепленного на барабане 2, вагонетка 1 поднимается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Барабан – однородный цилиндр веса P_2 и радиуса r_2 , вес кузова вагонетки P_1 , вес каждого из четырех колес P_4 , их радиус r_4 , колеса считать однородными дисками. Коэффициент трения качения колеса о плоскость k . Трением в оси вала пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_2, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$P_4, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$k, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	$M_1, \text{ Нмс}$
0,30	0,15	1000	50	40	300	0,020	30	10
0,40	0,18	1500	70	48	450	0,024	35	20
0,45	0,20	2000	85	52	600	0,028	40	30

Определить в отсутствие проскальзывания колес по наклонной плоскости:

а) зависимость перемещения вагонетки вдоль наклонной плоскости от ее скорости;

б) зависимость скорости вагонетки от времени;

в) кинематическое уравнение вращения барабана;

г) натяжение троса в зависимости от времени;

д) условие качения колес по наклонной плоскости без проскальзывания.

18. Груз 3 веса P_3 , находящийся на наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту, соединен невесомым нерастяжимым тросом, перекинутым через барабан 2, с трубой 1, которая охватывается тросом. Труба имеет вес P_1 и радиус r_1 , масса ее равномерно распределена по ободу. Сила сопротивления движению груза 3 изменяется по закону $F_c = Bv_3$, где B – постоянная, v_3 – скорость груза 3. Проскальзывание между барабаном, трубой и тросом отсутствует. Массой барабана 2 пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$\alpha, ^\circ$	$B, \text{ Нсм}^{-1}$
------------------	------------------	------------------	------------------	-----------------------

0,20	80	300	60	100
0,22	100	400	50	110
0,26	120	500	40	120

Определить при отсутствии трения в оси барабана 2:

- зависимость перемещения груза 3 от его скорости;
- зависимость угловой скорости трубы от времени;
- ускорение груза в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- силу реакции оси барабана в зависимости от времени.

19. К ведущему валу l веса P_1 и радиуса r_1 приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = M_0$. На валу закреплен невесомый нерастяжимый трос, который охватывает ступенчатый барабан 2, а другой своей частью намотан на внутреннюю ступень барабана и каток 3, перекатовающийся по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Барабан имеет момент инерции относительно его оси вращения J , радиусы ступеней r_2 и r_4 . Каток – однородный цилиндр веса P_3 и радиуса r_3 . Вал l – однородный сплошной цилиндр. Трением качения, трением в оси вала и барабана пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$\alpha, ^\circ$	$J, \text{ кгм}^2$
0,10	0,20	0,20	0,10	100	200	150	20	0,45
0,12	0,30	0,25	0,15	120	250	160	18	0,50
0,16	0,40	0,30	0,20	150	300	170	15	0,55

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость скорости центра масс катка от его перемещения;
- кинематическое уравнение движения центра масс катка;
- ускорение центра масс катка в зависимости от времени;
- натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
- условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

20. Каток 2 с весом P_2 и радиусами ступеней r_2 и r_4 катится без скольжения по горизонтальной плоскости, приходя в движение из состояния покоя при помощи груза l веса P_1 , привязанного к невесомому нерастяжимому тросу, перекинутому через блок и охватывающему ступень катка. Радиус инерции катка относительно его оси

симметрии равен ρ . Момент сопротивления движению катка равен $M_c = c\omega_2$, где c – постоянная, ω_2 – угловая скорость катка. Массой блока, трением в его оси и трением качения пренебречь.

r_2 , м	r_4 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	c , Нмс
0,40	0,15	0,30	120	200	8,0
0,35	0,13	0,26	140	300	7,0
0,30	0,11	0,22	160	400	6,0

Определить:

- связь между перемещением и скоростью груза;
- кинематическое уравнение движения груза;
- ускорение груза в зависимости от времени;
- натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
- условие качения катка по плоскости без проскальзывания и условие перехода к проскальзыванию.

21. Ступенчатый барабан I и однородный сплошной цилиндр 2 соединены невесомым нерастяжимым тросом, на конце которого находится груз 3 веса P_3 . Вес цилиндра равен P_2 , радиусы ступеней барабана – r_1 и r_4 . К барабану I приложен момент сопротивления, пропорциональный углу поворота φ_1 : $M_c = M_1\varphi_1$, где M_1 – постоянная величина. Проскальзывание между тросом и барабаном с цилиндром отсутствует. Массой барабана пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_4 , м	P_2 , Н	P_3 , Н	M_1 , Нм
0,30	0,10	120	35	5,0
0,32	0,11	140	40	4,5
0,34	0,12	160	45	4,0

Определить при отсутствии трения в оси барабана I :

- зависимость между скоростью груза 3 и высотой его опускания;
- кинематическое уравнение движения груза 3 и барабана I ;
- угловое ускорение барабана I в зависимости от времени;
- натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- силу реакции в оси барабана в зависимости от времени.

22. К валу l радиуса r_1 приложен вращающий момент, зависящий от угла поворота φ_1 ,

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1\varphi_1^2, \quad \varphi_1 \leq \Phi_1,$$

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1\Phi_1^2 \quad \varphi_1 > \Phi_1,$$

где M_0, M_1 – постоянные. Вращение передается ступенчатому барабану 2, зацепленному с валом, на внутреннюю ступень барабана намотан невесомый нерастяжимый трос, поднимающий каток 3 по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Барабан имеет вес P_2 , радиус инерции относительно его оси вращения ρ , радиусы ступеней r_2 и r_4 . Каток – однородный цилиндр веса P_3 и радиуса r_3 . Трением качения, трением в оси вала и барабана и массой вала пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$r_2, \text{ м}$	$r_3, \text{ м}$	$r_4, \text{ м}$	$\rho, \text{ м}$	$P_2, \text{ Н}$	$P_3, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$\alpha, ^\circ$	$M_1, \text{ Нм}$
0,10	0,25	0,15	0,10	0,12	100	300	16	30	1,0
0,11	0,30	0,18	0,12	0,15	120	350	19	25	1,5
0,12	0,35	0,20	0,14	0,18	130	400	22	20	2,0

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- зависимость скорости центра масс катка от его смещения;
- натяжение троса в зависимости от смещения оси катка;
- условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

23. Груз l веса P_1 , опускаясь, с помощью невесомого нерастяжимого троса, перекинутого через неподвижные блоки, приводит в движение по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, цилиндрический каток 2, на который трос намотан. Каток имеет вес P_2 и радиус r_2 , масса его равномерно распределена по ободу. Момент сопротивления вращению катка $M_c = M_1\omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость катка, M_1 – постоянная. Трением качения, трением в оси блоков, массой блоков пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_2, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$\alpha, ^\circ$	$M_1, \text{ Нмс}^2$
0,25	50	120	15	1,0
0,28	60	140	20	2,0
0,30	70	160	25	3,0

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- а) зависимость между скоростью груза и его перемещением;
- б) угловую скорость и угловое ускорение катка в зависимости от времени;
- в) натяжение свободных участков троса;
- г) условие качения катка по плоскости без проскальзывания.

24. К валу l веса P_1 и радиуса r_1 приложен вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 t, \quad t \leq \tau,$$

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 \tau, \quad t > \tau,$$

где M_0, M_1 – постоянные, t – время. При помощи невесомого нерастяжимого троса, прикрепленного к валу, перекинутого через неподвижный блок и охватывающего трубу 2, осуществляется ее подъем. Вес трубы P_2 , радиус r_2 . Вал – однородный сплошной цилиндр, масса трубы распределена равномерно. Проскальзывание между трубой и тросом отсутствует. Массой блока и трением в его оси пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	M_1 , Нмс ⁻¹
0,10	0,20	60	100	10	0,5
0,15	0,30	70	120	15	0,4
0,20	0,40	80	140	20	0,3

Определить при отсутствии трения в оси вала l :

- а) зависимость угловой скорости вала от времени;
- б) зависимость смещения центра масс трубы от времени;
- в) угловое ускорение вала в зависимости от времени;
- г) натяжение троса в сечениях свободных участков в зависимости от времени;
- д) силы реакции в осях блока и вала.

25. К валу l приложен вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 \varphi_1, \quad \varphi_1 \leq \Phi_1,$$

$$M_{\text{вр}} = M_0 + M_1 \Phi_1, \quad \varphi_1 > \Phi_1,$$

где M_0, M_1 – постоянные, φ_1 – угол поворота вала. На валу закреплен невесомый нерастяжимый трос, который перекинут через неподвижный блок и охватывает ступенчатый барабан 2, перекатывающийся по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Вал l – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 , массу его считать равномерно распре-

деленной по ободу. Барабан имеет вес P_2 , радиусы ступеней r_2 и r_3 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Коэффициент трения качения барабана о плоскость равен k . Трением в оси вала и блока, массой блока пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	k , м	M_1 , Нм
0,10	0,30	0,10	0,15	60	350	1,0	0,010	3,0
0,15	0,35	0,12	0,20	70	400	2,0	0,008	3,5
0,20	0,40	0,14	0,25	80	450	3,0	0,006	4,0

Определить в отсутствие проскальзывания барабана по плоскости:

- зависимость скорости центра масс барабана от времени;
- кинематическое уравнение вращения вала;
- зависимость углового ускорения барабана от времени;
- натяжение свободных участков троса в зависимости от времени;
- условие качения барабана по горизонтальной плоскости без проскальзывания.

26. Каток 3 веса P_3 и радиуса r_3 , представляющий собой однородный цилиндр, катится по горизонтальной плоскости, приходя в движение из состояния покоя при помощи груза 1 веса P_1 , привязанного к невесомому нерастяжимому тросу, ветви которого охватывают ступенчатый тормозной барабан, радиусы ступеней которого r_2 и r_4 , вес P_2 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . При действии силы F на конец рычага последний вместе с колодкой прижимается к поверхности барабана, коэффициент трения скольжения колодки о барабан равен f , длины $l_1 = l_2$. Коэффициент трения качения катка о плоскость k . Массой рычага, трением в его оси и в оси барабана и провисанием троса пренебречь.

r_2 , м	r_3 , м	r_4 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	P_3 , Н	F , Н	k , м	f
0,30	0,20	0,15	0,20	1000	60	30	30	0,004	0,30
0,35	0,25	0,20	0,25	1500	80	40	35	0,005	0,34
0,40	0,30	0,25	0,30	2000	100	50	40	0,006	0,38

Определить в отсутствие проскальзывания катка по плоскости:

- связь между вертикальным перемещением груза и его скоростью;

- б) кинематическое уравнение движения груза;
- в) ускорение центра масс катка в зависимости от времени;
- д) условие качения катка по плоскости без проскальзывания и условия перехода к проскальзыванию.

27. К валу l приложен вращающий момент $M_{вп} = M_0 - M_1\omega_1^2$, где M_0, M_1 – постоянные, ω_1 – угловая скорость вала. При помощи невесомого нерастяжимого троса, закрепленного на валу l и охватывающего каток 2 , последний поднимается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Вал – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 , масса которого равномерно распределена по его ободу. Каток – сплошной однородный цилиндр с весом P_2 и радиусом $r_2 = r_1/2$. Коэффициент трения качения катка о плоскость k . Трением в оси вала пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

$r_1, \text{ м}$	$P_1, \text{ Н}$	$P_2, \text{ Н}$	$M_0, \text{ Нм}$	$k, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	$M_1, \text{ Нмс}^2$
0,22	80	400	400	0,010	15	0,8
0,20	70	350	300	0,015	20	0,5
0,18	60	300	200	0,020	25	0,2

Определить в отсутствие проскальзывания катка по наклонной плоскости:

- а) зависимость скорости центра масс катка от его перемещения вдоль наклонной плоскости;
- б) зависимость угловой скорости вала от времени;
- в) зависимость ускорения центра масс катка от времени;
- г) натяжение троса в зависимости от времени;
- д) условие качения катка по наклонной плоскости без проскальзывания.

28. К валу l приложен вращающий момент

$$M_{вп} = M_0 + M_1t^2, \quad t \leq \tau,$$

$$M_{вп} = M_0 + M_1\tau^2, \quad t > \tau,$$

где M_0, M_1 – постоянные, t – время. На валу закреплен невесомый нерастяжимый трос, который перекинут через неподвижные блоки и охватывает ступенчатый барабан 2 , перекатывающийся по неподвижной наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Вал l – однородный цилиндр веса P_1 и радиуса r_1 , масса которого принимает-

ся равномерно распределенной по его ободу. Барабан имеет вес P_2 , радиусы ступеней r_2 и r_3 и радиус инерции относительно оси симметрии ρ . Коэффициент трения качения барабана о плоскость равен k . Трением в оси вала и блоков, массой блоков пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	ρ , м	P_1 , Н	P_2 , Н	M_0 , Нм	k , мм	α , °	M_1 , Нмс ⁻²
0,20	0,40	0,10	0,20	30	250	30	5	30	3,0
0,25	0,45	0,15	0,25	40	300	35	6	25	4,0
0,30	0,50	0,20	0,30	50	350	40	7	20	5,0

Определить в отсутствие проскальзывания барабана по наклонной плоскости:

- а) зависимость угловой скорости вращения вала от времени;
- б) зависимость скорости центра масс барабана и его перемещения от времени;
- в) угловое ускорение вала в зависимости от времени;
- г) натяжение троса в зависимости от времени;
- д) условие качения барабана по наклонной плоскости без проскальзывания.

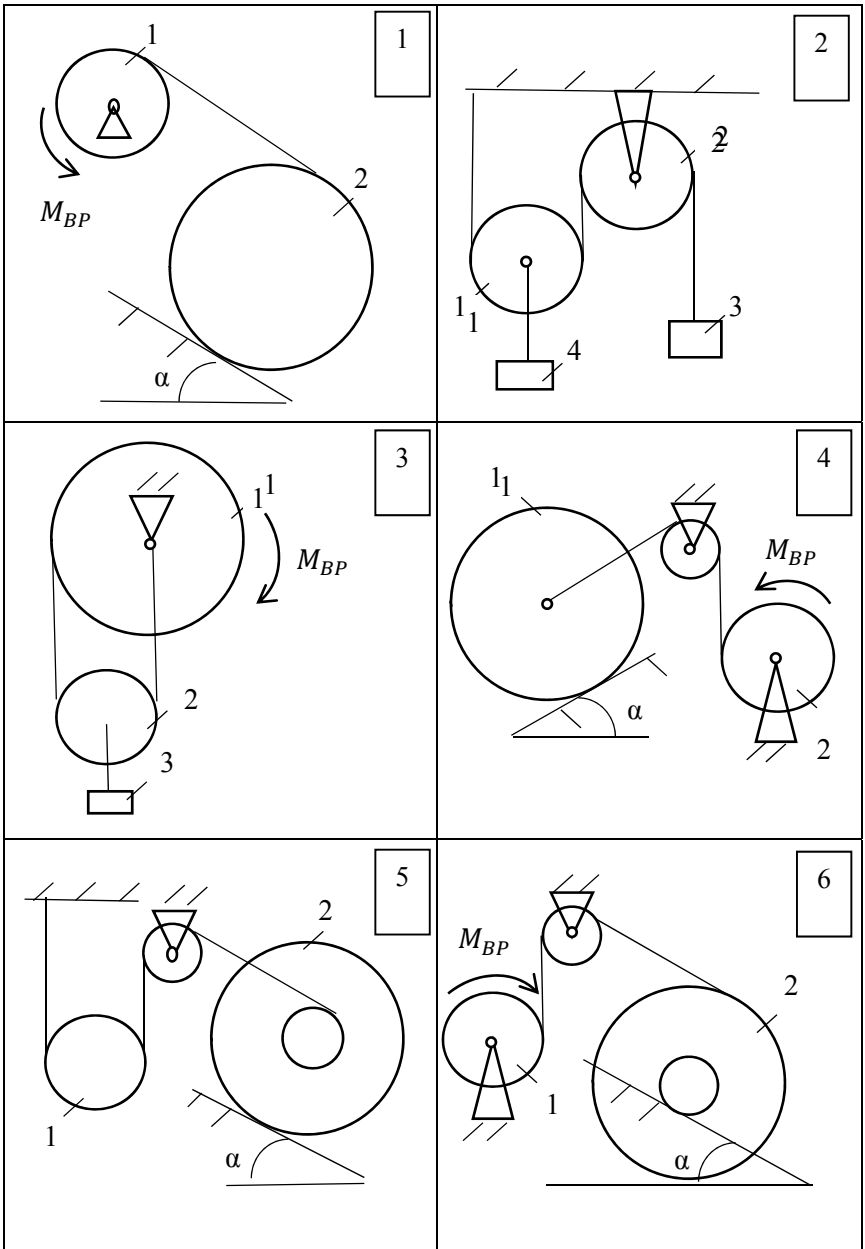


Рис. 2.4

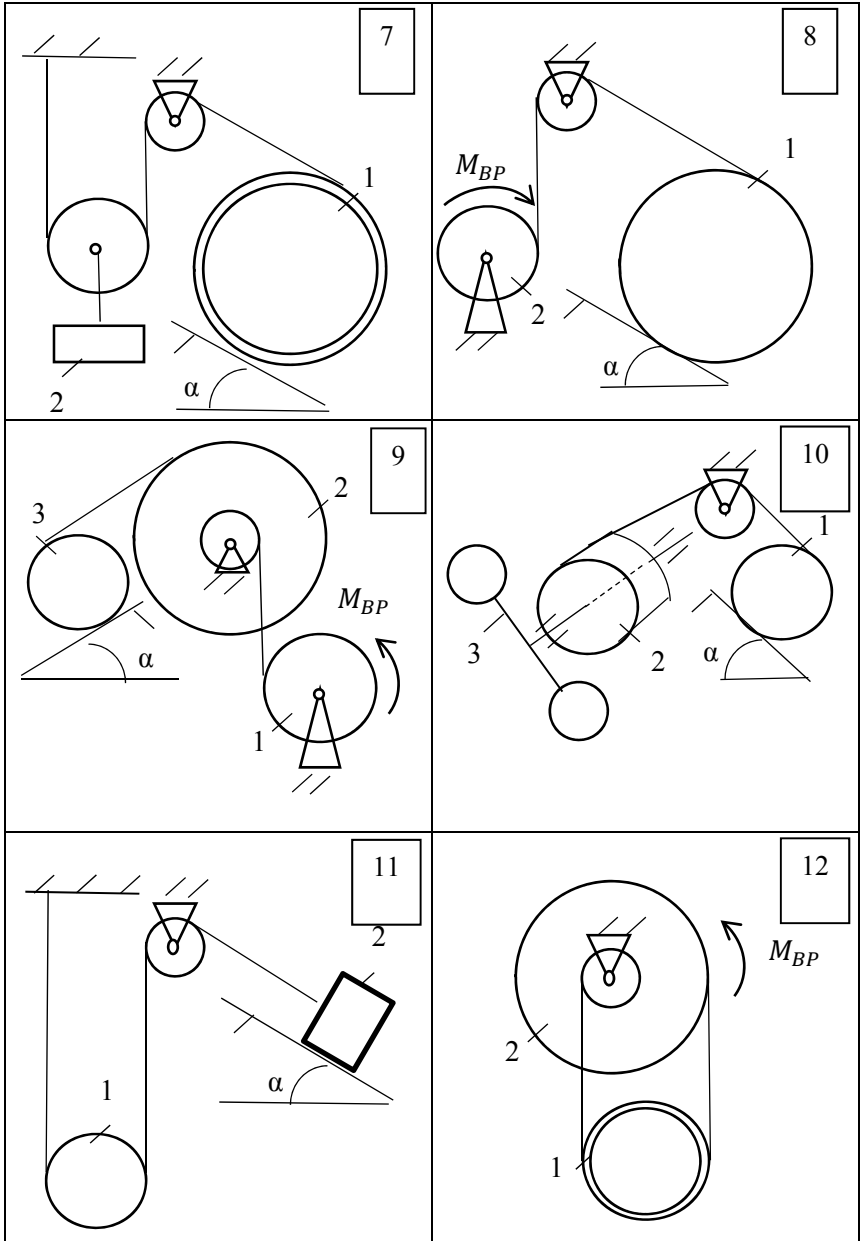


Рис. 2.4 (продолжение)

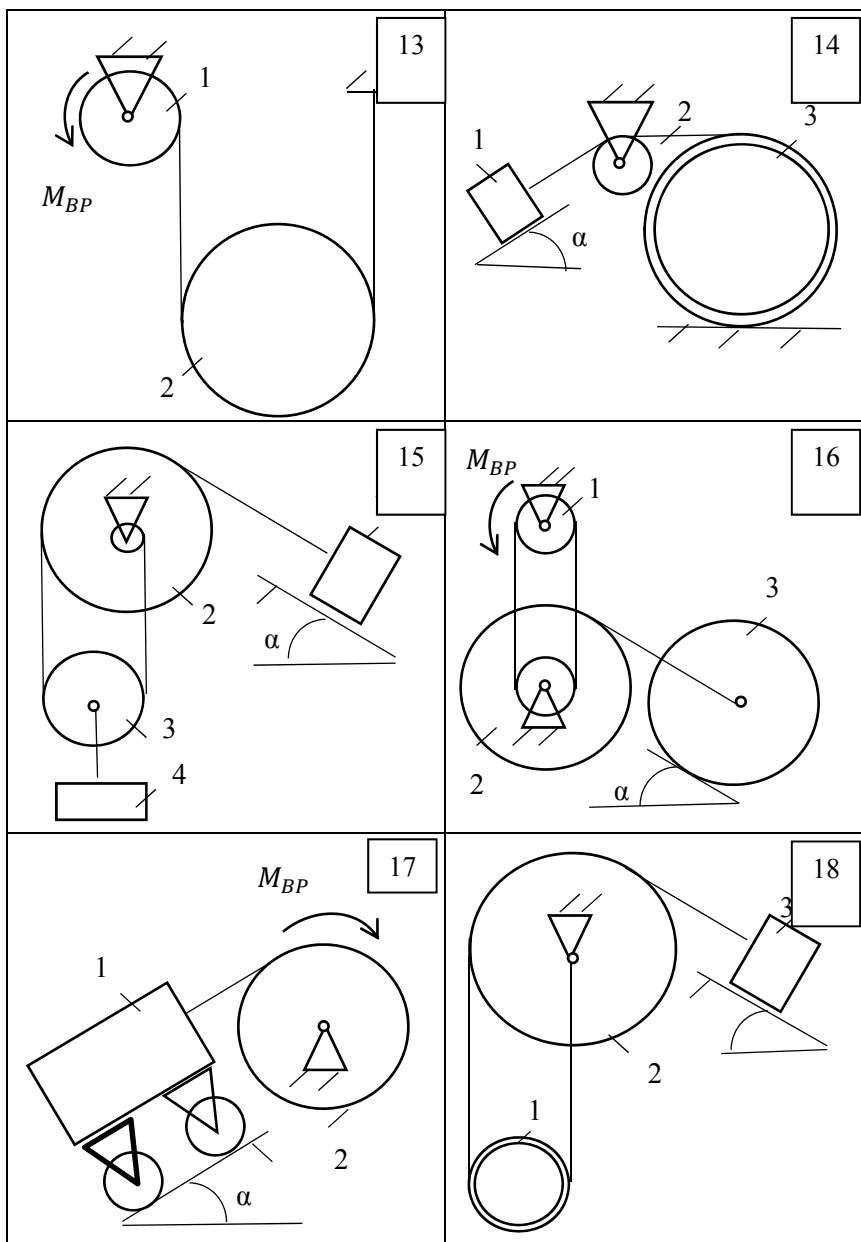


Рис. 2.4 (продолжение)

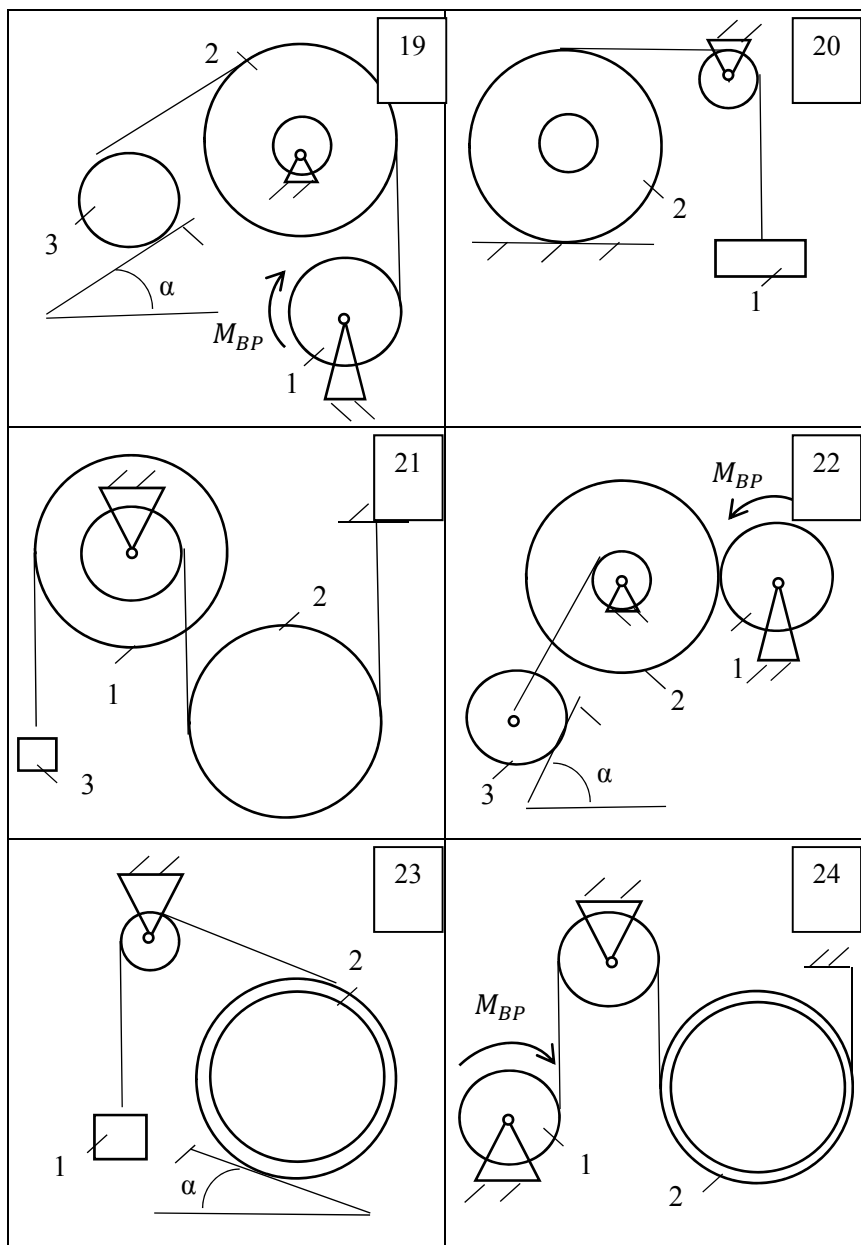


Рис. 2.4 (продолжение)

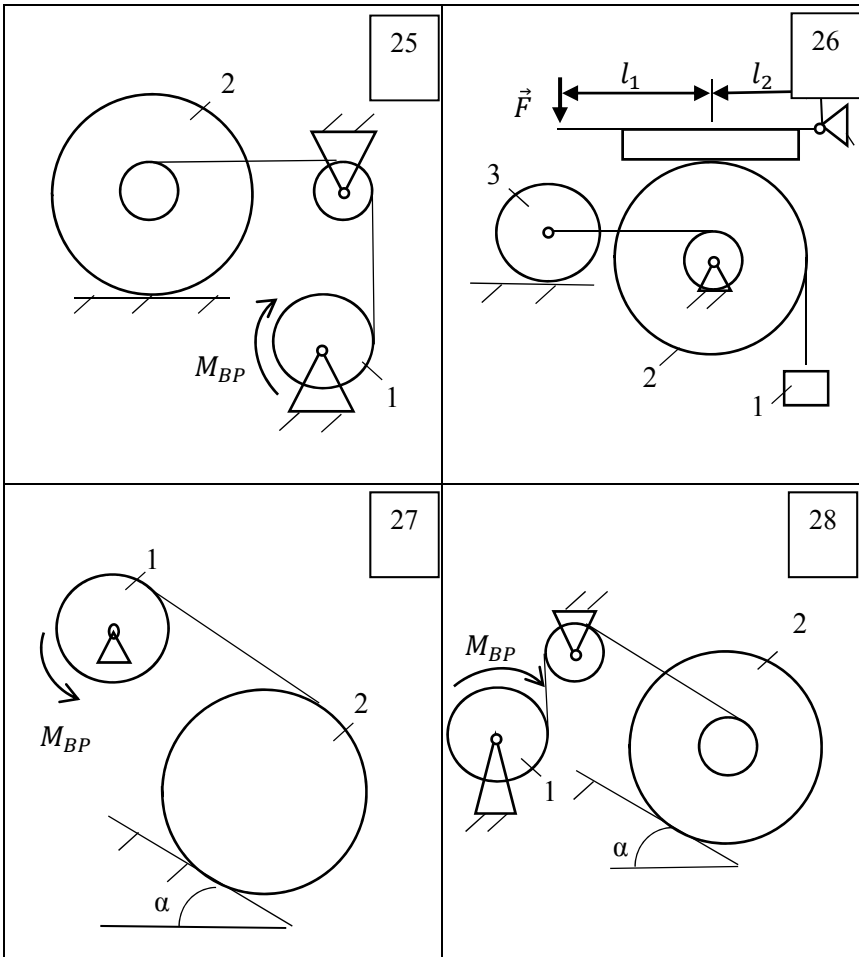


Рис. 2.4 (окончание)

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пример. Для подъема и перемещения груза применяют механизм, называемый грузовой лебедкой, которая состоит из двигателя, ведущего вала 1, планетарного редуктора, ведомого вала 2, барабана и троса (см. рис. 3.6). Двигатель, редуктор и барабан лежат на одной оси, поднимаемый груз Q находится на наклонной плоскости с углом наклона α .

Лебедка приводится в движение двигателем. Ведущему валу двигателя сообщается постоянный вращательный момент $M_1 = 1,2M_0$ (момент M_0 удерживает систему в покое, и его величину рассчитывают в процессе решения задачи).

Планетарный редуктор предназначен для передачи крутящего момента от двигателя непосредственно к приводу. Редуктор состоит из набора взаимно зацепленных зубчатых колес с перемещающимися осями, которые, в свою очередь, способны вращаться вокруг неподвижных осей. Одно из колес в редукторе установлено неподвижно. Так как подвижные шестерни движутся вокруг одного центра, то вся конструкция напоминает солнечную систему, и поэтому редуктор называется *планетарным*, а подвижные шестерни – *сателлитами*.

Груз Q поднимается по наклонной плоскости без скольжения, коэффициент трения качения $f_{mp.k.}$. Силы сопротивления, приложенные к механизму редуктора условно приводятся к моменту M_2 , приложенному к ведомому валу, величина которого принимается пропорциональной угловой скорости вала: $M_2 = k\omega_2$.

Определить: 1) используя теорему об изменении кинетической энергии для механической системы:

- дифференциальное уравнение движения ведущего вала 1;
- закон изменения угловой скорости вала 1, движущегося из состояния покоя до установившегося движения. Привести график этой зависимости;

- угловую скорость установившегося движения;

2) используя теорему об изменении кинетического момента системы:

- силы взаимодействия между двумя сцепленными шестернями (по выбору);

- закон изменения натяжения троса в зависимости от времени и его установившееся значение;
- 3) из уравнений движения груза по наклонной плоскости
 - силу реакции наклонной плоскости;
 - коэффициент трения скольжения, обеспечивающий качение груза по наклонной плоскости без скольжения

Кинематический расчет редуктора. В редукторе (рис. 3.1) вращение ведущего вала с угловой скоростью ω_1 передается на ведомый вал 2 следующим образом. Водило 3, вращаясь с угловой скоростью ω_1 , приводит в движение систему шестерен 4, 6, закрепленных на общей оси 4-6. Шестерня 4 находится в зацеплении с неподвижной (опорной) шестерней 5 корпуса редуктора. Подвижные шестерни 4, 6 совершают спинное движение: вращаясь вокруг оси 4-6 (*относительное движение*), вместе с этой осью вращение переносится водилом вокруг центральной оси 1-2 редуктора (*переносное движение*); шестерня 6, находясь в зацеплении с шестерней 7, приводит в движение ведомый вал 2.

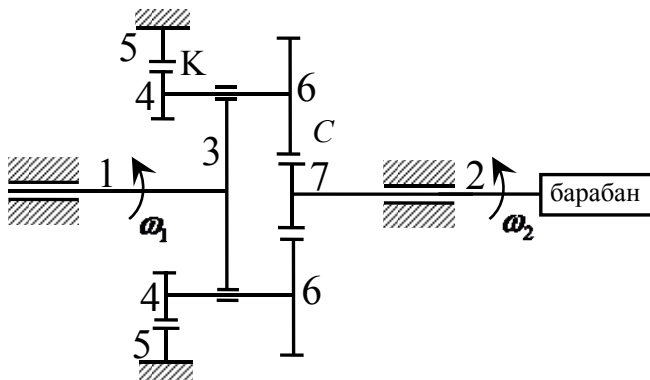


Рис. 3.1. Схема редуктора и крепление барабана

Расчет кинематики редуктора проводится *методом мгновенного центра скоростей*.

Пусть угловая скорость ведомого вала $\omega_1 > 0$. Мгновенная ось абсолютного вращения шестерен 4, 6 проходит параллельно центральной оси 1-2 через точку касания K неподвижной шестерни 5 и подвижной шестерни 4. Эта точка K является мгновенным центром скоростей. Так как в рассматриваемой конструкции редуктора мгновенный центр скоростей располагается за осью относительного

движения 4-6, то скорость относительного движения шестерен 4, 6 ω_r , по абсолютной величине больше скорости переносного движения $\omega_e = \omega_1$ и угловая скорость абсолютного вращения ω_a будет направлена в сторону большей из угловых скоростей (т.е. в сторону ω_r) и будет равна

$$\omega_a = \omega_r - \omega_1 . \quad (3.1)$$

Точка K делит расстояние между осями переносного 1-2 и относительного 4-6 движений внешним образом на части, обратно пропорциональные значениям угловых скоростей:

$$\omega_1 (R_4 + R_6 + R_7) = \omega_r R_4$$

или

$$\omega_r = \omega_1 \left(1 + \frac{R_6 + R_7}{R_4} \right) . \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) находим скорость абсолютного вращения:

$$\omega_a = \frac{R_6 + R_7}{R_4} \omega_1 = \frac{R_3}{R_4} \omega_1 . \quad (3.3)$$

Для определения угловой скорости вращения шестерни 7, и следовательно, и угловой скорости ведомого вала 2 воспользуемся тем, что абсолютные скорости точек шестерен 6 и 7 в точке C их зацепления равны между собой, поскольку нет относительного проскальзывания:

$$\omega_a (R_4 + R_6) = \omega_2 R_7 .$$

Таким образом,

$$\omega_2 = \frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_7 + R_6}{R_4} \cdot \omega_1 . \quad (3.4)$$

Передаточное число редуктора

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_3}{R_4} .$$

В том случае, если мгновенный центр скоростей располагается между осями переносного и относительного движений (рис. 3.2), то мгновенная ось абсолютного вращения делит расстояние между осями переносного и относительного движений внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей,

скорость результирующего движения равна сумме угловых скоростей составляющих движений.

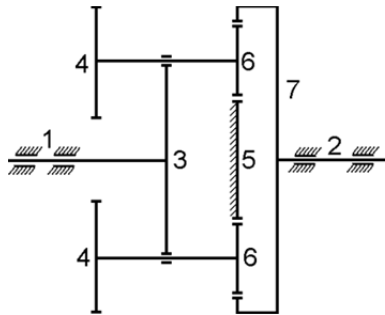


Рис. 3.2. Редуктор, в котором мгновенная ось вращения шестеренки 6 располагается между осями переносного и относительного движений

Таким образом, для редуктора, изображенного на рис. 3.2,

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{R_3 - R_6}{R_6}, \quad \omega_r = \omega_e \frac{R_3 - R_6}{R_6}, \quad \omega_a = \omega_e + \omega_r = \omega_1 + \omega_1 \frac{R_3 - R_6}{R_6} = \omega_1 \frac{R_3}{R_6},$$

где ω_a – абсолютная угловая скорость оси 4-6.

Расчет кинетической энергии системы. Кинетическая энергия редуктора вместе с барабаном складывается из энергии ведущего вала и водила T_{1-3} , энергии спаренной шестерни T_{4-6} , энергии шестерни 7, вала 2 и барабана.

Водило и вал 1 вращаются вокруг неподвижной оси и их кинетическая энергия $T_{1-3} = \frac{1}{2} I_{1-3} \omega_1^2$.

Шестерни 4-6 совершают сложное движение. Поэтому кинетическую энергию шестеренок 4 и 6 найдем как половину произведения момента инерции относительно мгновенной оси вращения и квадрата абсолютной угловой скорости, которую вычисляем по формуле (3.3). Момент инерции относительно мгновенной оси вращения определяется с помощью теоремы Штейнера

$$I_K = I_{4-6} + m_{4-6} R_4^2.$$

В итоге,

$$T_{4-6} = \frac{1}{2} \left(I_{4-6} + m_{4-6} R_4^2 \right) \cdot \left(\frac{\omega_1 R_3}{R_4} \right)^2.$$

Шестерня 7 с ведомым валом и барабаном вращаются вокруг неподвижной оси и их кинетическая энергия равна

$$T_{2-7} = \frac{1}{2} I_{2-7} \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_{2-7} \left(\frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_3}{R_4} \right)^2 \omega_1^2.$$

Суммарная кинетическая энергия лебедки

$$T_{\text{леб}} = \frac{1}{2} I_{1-3} \omega_1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} m_{4-6} R_3^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{4-6} \left(\frac{R_3}{R_4} \omega_1 \right)^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} I_{2-7} \left(\frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_3}{R_4} \right)^2 \omega_1^2.$$

Кинетическая энергия груза определяется по теореме Кенига (рис. 3.3)

$$T_{\text{гр}} = \frac{1}{2} m_{\text{гр}} v_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{гр}} \omega_{\text{гр}}^2,$$

где

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{\omega_2 r_{\text{бар}}}{(R+r)} = \frac{(R_4 + R_6) \cdot R_3 \cdot r_{\text{бар}}}{(R+r) \cdot R_7 \cdot R_4} \cdot \omega_1, \\ v_{\text{гр}} = \omega_{\text{гр}} \cdot r = \frac{(R_4 + R_6) \cdot R_3 \cdot r_{\text{бар}} \cdot r}{(R+r) \cdot R_7 \cdot R_4} \cdot \omega_1, \quad (3.5)$$

$r_{\text{бар}}$ – радиус барабана.

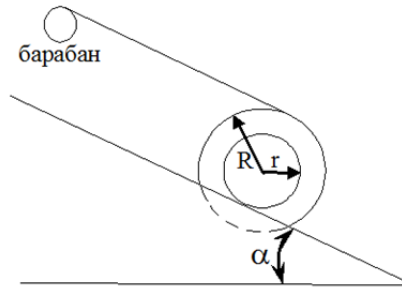


Рис. 3.3. Барабан и поднимаемый груз (вид сбоку)

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий лебедки и груза:

$$T = \frac{1}{2} \left[I_{1-3} + 2 \cdot \left(m_{4-6} R_3^2 + I_{4-6} \left(\frac{R_3}{R_4} \right)^2 \right) + I_{2-7} \left(\frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_3}{R_4} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(m_{\text{гр}} r^2 + I_{\text{гр}} \right) \frac{(R_4 + R_6)^2 \cdot R_3^2 \cdot r_{\text{бар}}^2}{R_7^2 \cdot R_4^2 \cdot (R + r)^2} \right] \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \omega_1^2, \quad (3.6)$$

где $I_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции.

Вычисление элементарной работы сил, действующих на систему. Работа сил на элементарном перемещении при движении груза без проскальзывания (рис. 3.4) складывается из работы момента, приложенного к барабану, $M_1 d\varphi_1$, работы момента сопротивления в редукторе, условно приведенного ко второму валу, $-M_2 d\varphi_2$; работы силы тяжести груза $-P_{\text{гр}} dh$, где dh – элементарное изменение высоты центра тяжести груза, работы момента трения качения, действующего на груз, $-M_{\text{тр.к.}} d\varphi_{\text{гр}}$, где $d\varphi_{\text{гр}}$ – элементарный угол поворота груза. Все элементарные перемещения, на которых совершается работа, вызваны поворотом вала I (см. рис. 3.1).

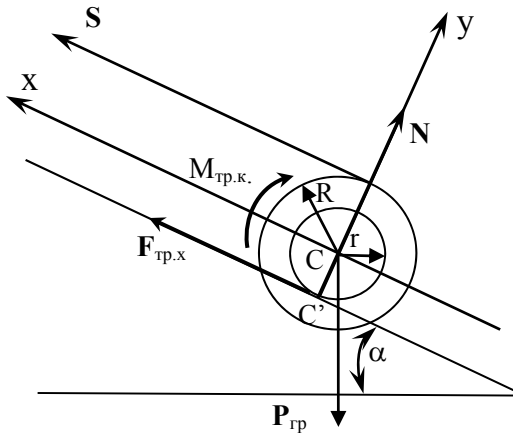


Рис. 3.4. Плоское движение груза

Таким образом,

$$\Delta A = M_1 d\varphi_1 - M_2 d\varphi_2 - P_{\text{гр}} dh - M_{\text{тр.к}} d\varphi_{\text{гр}} .$$

Отметим, что только работа момента M_1 входит с положительным знаком в работу ΔA , так как моменты M_2 , $M_{\text{тр.к}}$ и сила $P_{\text{гр}}$ имеют отрицательную мощность.

Из соотношений (3.4) и (3.5)

$$d\varphi_2 = z_2 d\varphi_1, \quad d\varphi_{\text{гр}} = z_{\text{гр}} d\varphi_1, \quad dh = z_C \sin \alpha d\varphi_1,$$

здесь

$$z_2 = \frac{R_4 + R_6}{R_7} \cdot \frac{R_3}{R_4}, \quad z_{\text{гр}} = \frac{(R_4 + R_6) R_3 r_{\text{бар}}}{(R + r) R_7 R_4}, \quad z_C = \frac{(R_4 + R_6) R_3 r_{\text{бар}} r}{(R + r) R_7 R_4}$$

и, следовательно,

$$\Delta A = M_1 d\varphi_1 - M_2 z_2 d\varphi_1 - P_{\text{гр}} z_C \sin \alpha d\varphi_1 - M_{\text{тр.к}} z_{\text{гр}} d\varphi_1. \quad (3.7)$$

Момент M_2 по условию пропорционален угловой скорости ω_2 :

$$M_2 = k\omega_2 = kz_2\omega_1.$$

Момент трения качения $M_{\text{тр.к}}$ определяется по закону

$$M_{\text{тр.к}} = f_{\text{тр.к}} N,$$

где N – нормальная составляющая реакции наклонной плоскости на груз. Для ее нахождения требуется рассмотреть уравнения плоскопараллельного движения груза:

$$m_{\text{гр}} \ddot{x}_C = S + F_{\text{тр.к}} - m_{\text{гр}} g \sin \alpha, \quad (3.8)$$

$$m_{\text{гр}} \ddot{y}_C = N - m_{\text{гр}} g \cos \alpha, \quad (3.9)$$

$$I_{\text{гр}} \ddot{\varphi}_{\text{гр}} = -SR + F_{\text{тр.к}} r + f_{\text{тр.к}} N. \quad (3.10)$$

Так как $y_C = \text{const}$, то $\ddot{y}_C = 0$ и, следовательно, из уравнения (3.9)

$$N = m_{\text{гр}} g \cos \alpha.$$

Для нахождения зависимости $\omega_1(t)$ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Сила S является внутренней силой системы и при нерастяжимости троса ее работа равна нулю.

Дифференциал кинетической энергии в соответствии с выражением (3.6) имеет вид

$$dT = I_{\text{пр}} \omega_1 \dot{\omega}_1 dt = I_{\text{пр}} \dot{\omega}_1 d\phi_1 . \quad (3.11)$$

Формула (3.7) для элементарной работы переписывается следующим образом:

$$\Delta A = \left(M_1 - kz_2^2 \omega_1 - P_{\text{гр}} z_C \sin \alpha - M_{\text{тр.к}} z_{\text{гр}} \right) d\phi_1 . \quad (3.12)$$

При равновесии $\omega_1 = 0$ и $\Delta A = 0$. При этом вместо момента M_1 к первому валу прикладывается момент M_0 , который удерживает систему в равновесии. Следовательно,

$$M_0 = P_{\text{гр}} z_C \sin \alpha + M_{\text{тр.к}} z_{\text{гр}} .$$

Далее по условию задачи $M_1 = 1,2M_0$.

Подставим выражения (3.11) и (3.12) в теорему об изменении кинетической энергии $dT = \Delta A$ и сократим левую и правую части полученного выражения на $d\phi_1$. В результате этих действий записываем дифференциальное уравнение для определения угловой скорости первого вала

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega_1}{dt} = M_1 - kz_2^2 \omega_1 - P_{\text{гр}} z_C \sin \alpha - M_{\text{тр.к}} z_{\text{гр}} ,$$

которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными и имеет аналитическое решение

$$\omega_1(t) = \frac{G}{D} \left(1 - \exp \left(- \frac{D}{I_{\text{пр}}} t \right) \right) \quad (3.13)$$

где $G = M_1 - P_{\text{гр}} z_C \sin \alpha - M_{\text{тр.к}} z_{\text{гр}}$, $D = kz_2^2$.

Натяжение свободного участка троса в зависимости от времени. Для нахождения силы натяжения троса S применим теорему об изменении кинетического момента для груза относительно мгновенного центра скоростей – точки C' (см. рис. 3.4):

$$\left(I_{\text{гр}} + m_{\text{гр}} r^2 \right) \dot{\omega}_{\text{гр}} = S(R + r) - M_{\text{тр.к}} - P_{\text{гр}} r \sin \alpha . \quad (3.14)$$

Здесь использовали теорему Штейнера для определения момента инерции относительно оси, проходящей через точку C' перпендикулярно плоскости рисунка. Зависимость величины $\omega_{\text{гр}}$ от времени из-

вестна, так как $\omega_{\text{гр}} = z_{\text{гр}}\omega_1$, где угловая скорость $\omega_1(t)$ известна из формулы (3.13). Из формулы (3.14) находим величину силы S :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{R+r} \left[M_{\text{мп.к.}} + P_{\text{зр}} r \sin \alpha + (I_{\text{зр}} + m_{\text{зр}} r^2) \varepsilon_{\text{зр}} \dot{\omega}_1 \right] = \\ &= \frac{1}{R+r} \left[m_{\text{зр}} g r \sin \alpha + m_{\text{зр}} g f_{\text{мп.к.}} \cos \alpha + (I_{\text{зр}} + m_{\text{зр}} r^2) \varepsilon_{\text{зр}} \frac{G}{I_{\text{нр}}} e^{-\frac{Dt}{I_{\text{нр}}}} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Определение силы реакции наклонной плоскости и коэффициента трения скольжения груза, обеспечивающего его подъем по наклонной плоскости без проскальзывания. Скорость точки контакта груза с плоскостью равна нулю:

$$\mathbf{v}_{C'} = 0 = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CC}'$$

или в проекции на ось x

$$\dot{x}_C + \dot{\phi}_{\text{гр}} r = 0,$$

откуда следует $\ddot{x}_C = -\ddot{\phi}_{\text{гр}} r$. Уравнения плоского движения (3.8) и (3.10) с учетом зависимости $\ddot{x}_C = -\ddot{\phi}_{\text{гр}} r$ переписываем в виде

$$m_{\text{гр}} \ddot{x}_C = S + F_{\text{тр},x} - m_{\text{гр}} g \sin \alpha, \quad (3.16)$$

$$-m_{\text{гр}} \rho_{\text{гр}}^2 \frac{\ddot{x}_C}{r} = -SR + F_{\text{тр},x} r + f_{\text{тр.к}} m_{\text{гр}} g \cos \alpha. \quad (3.17)$$

Здесь учтена зависимость $I_{\text{гр}} = m_{\text{гр}} \rho_{\text{гр}}^2$, где $\rho_{\text{гр}}$ – радиус инерции груза относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно рисунку. Из (3.17) получаем

$$m_{\text{гр}} \ddot{x}_C = S \frac{Rr}{\rho_{\text{гр}}^2} - F_{\text{тр},x} \frac{r^2}{\rho_{\text{гр}}^2} - f_{\text{тр.к}} m_{\text{гр}} g \frac{r}{\rho_{\text{гр}}^2} \cos \alpha. \quad (3.18)$$

Так как левые части выражений (3.16) и (3.18) одинаковы, то равными должны быть и правые части этих соотношений

$$S + F_{\text{тр},x} - m_{\text{гр}} g \sin \alpha = S \frac{Rr}{\rho_{\text{гр}}^2} - F_{\text{тр},x} \frac{r^2}{\rho_{\text{гр}}^2} - f_{\text{тр.к}} m_{\text{гр}} g \frac{r}{\rho_{\text{гр}}^2} \cos \alpha,$$

откуда

$$F_{\text{тр}x} \left(1 + \frac{r^2}{\rho_{\text{гр}}^2} \right) = S \left(\frac{Rr}{\rho_{\text{гр}}^2} - 1 \right) + m_{\text{гр}} g \left(\sin \alpha - f_{\text{тр},k} \frac{r}{\rho_{\text{гр}}} \cos \alpha \right)$$

и окончательно

$$F_{\text{тр}x} = \frac{S(Rr - \rho_{\text{гр}}^2) + m_{\text{гр}} g (\rho_{\text{гр}}^2 \sin \alpha - f_{\text{тр},k} r \cos \alpha)}{\rho_{\text{гр}}^2 + r^2}.$$

Условие отсутствия проскальзывания груза по наклонной плоскости

$$|F_{\text{тр}x}| \leq f m_{\text{гр}} g \cos \alpha$$

и, следовательно,

$$f \geq \frac{S(Rr - \rho_{\text{гр}}^2) + m_{\text{гр}} g (\rho_{\text{гр}}^2 \sin \alpha - f_{\text{тр},k} r \cos \alpha)}{(\rho_{\text{гр}}^2 + r^2) m_{\text{гр}} g \cos \alpha}.$$

Напомним, что величина силы S определяется выражением (3.15).

Силы взаимодействия между двумя шестернями редуктора.

Взаимодействие между шестеренками 6 и 7 определим с помощью теоремы об изменении кинетического момента, которую составим относительно неподвижной оси, совпадающей с валом 2.

Используем теорему об изменении кинетического момента относительно второго вала, с которым жестко соединена шестеренка 7 и барабан, на который наматывается трос. На шестеренку 7 со стороны шестерни 6 действует сила S_6 (рис. 3.5). Ко второму валу приложен момент сопротивления в редукторе $M_2 = k\omega_2 = kz_2\omega_1$. Теорема об изменении кинетического момента позволяет записать дифференциальное уравнение

$$I_{2-7}\dot{\omega}_2 = S_6 R_7 - M_2 - S r_{\text{бар}},$$

откуда

$$S_6 = \frac{1}{R_7} (M_2 + S r_{\text{бар}} + I_{2-7}\dot{\omega}_2).$$

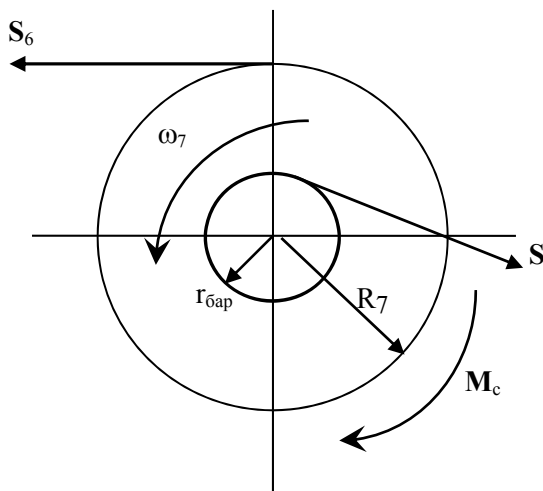


Рис. 3.5. Усилия, действующие на шестеренку 7

Здесь сила S берется из формулы (3.15), момент M_2 с учетом зависимости (3.13) равен $M_2 = kz_2 \frac{G}{D} \left(1 - \exp\left(-\frac{D}{I_{np}} t\right) \right)$ и, наконец,

$$\dot{\omega}_2 = z_2 \frac{G}{I_{np}} \exp\left(-\frac{D}{I_{np}} t\right);$$

$$S_6 = \frac{1}{R_7} \left\{ kz_2 \frac{G}{D} \left(1 - \exp\left(-\frac{D}{I_{np}} t\right) \right) + I_{2-7} z_2 \frac{G}{I_{np}} \exp\left(-\frac{D}{I_{np}} t\right) + \frac{r_{6ap}}{R+r} \left[m_{ep} g r \sin \alpha + m_{ep} g f_{мп.к.} \cos \alpha + (I_{ep} + m_{ep} r^2) \varepsilon_{ep} \frac{G}{I_{np}} \exp\left(-\frac{D}{I_{np}} t\right) \right] \right\}$$

Условия задач

Номер варианта задания выдается преподавателем. Схема редуктора в задании соответствует номеру варианта. Схема груза выбирается из рис. 3.7 по формуле $n = N - 4 \left[\frac{N-1}{4} \right]$, где N – номер варианта; квадратные скобки обозначают целую часть от деления. Схемы редукторов и их параметры приведены на рис. 3.6 и в табл. 3.1.

Параметры груза и угол наклона плоскости, по которой поднимается груз, заданы в табл. 3.2.

В соответствии с выданным вариантом задания привести схему грузовой лебедки и поднимаемого груза по наклонной плоскости (см. рис. 3.6 и 3.7, табл. 3.1 и 3.2).

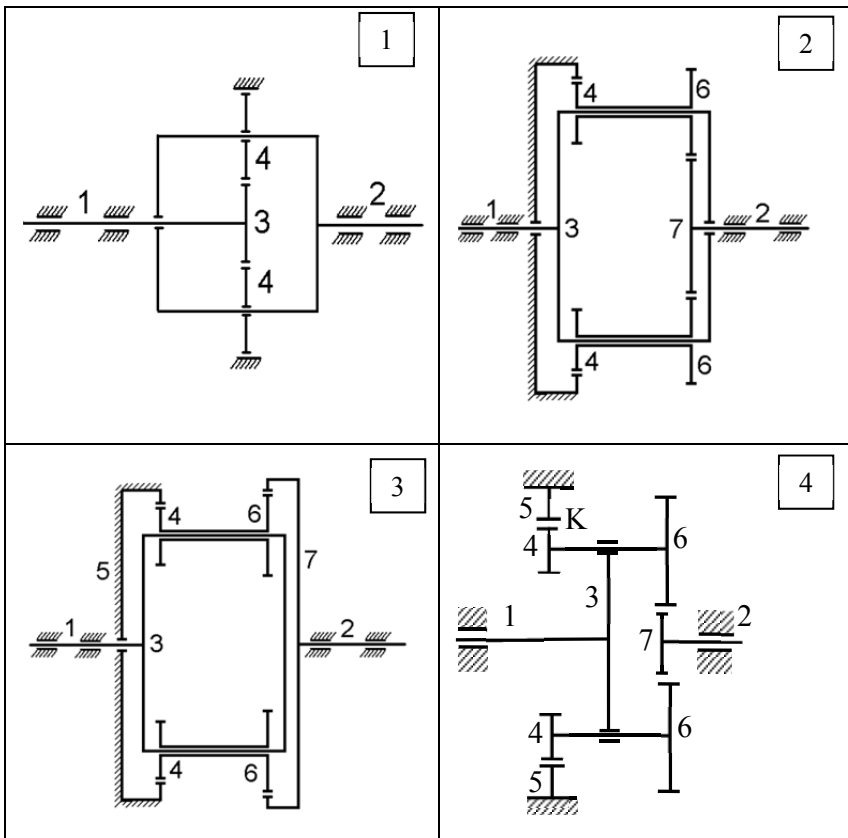


Рис. 3.6. Схемы редукторов

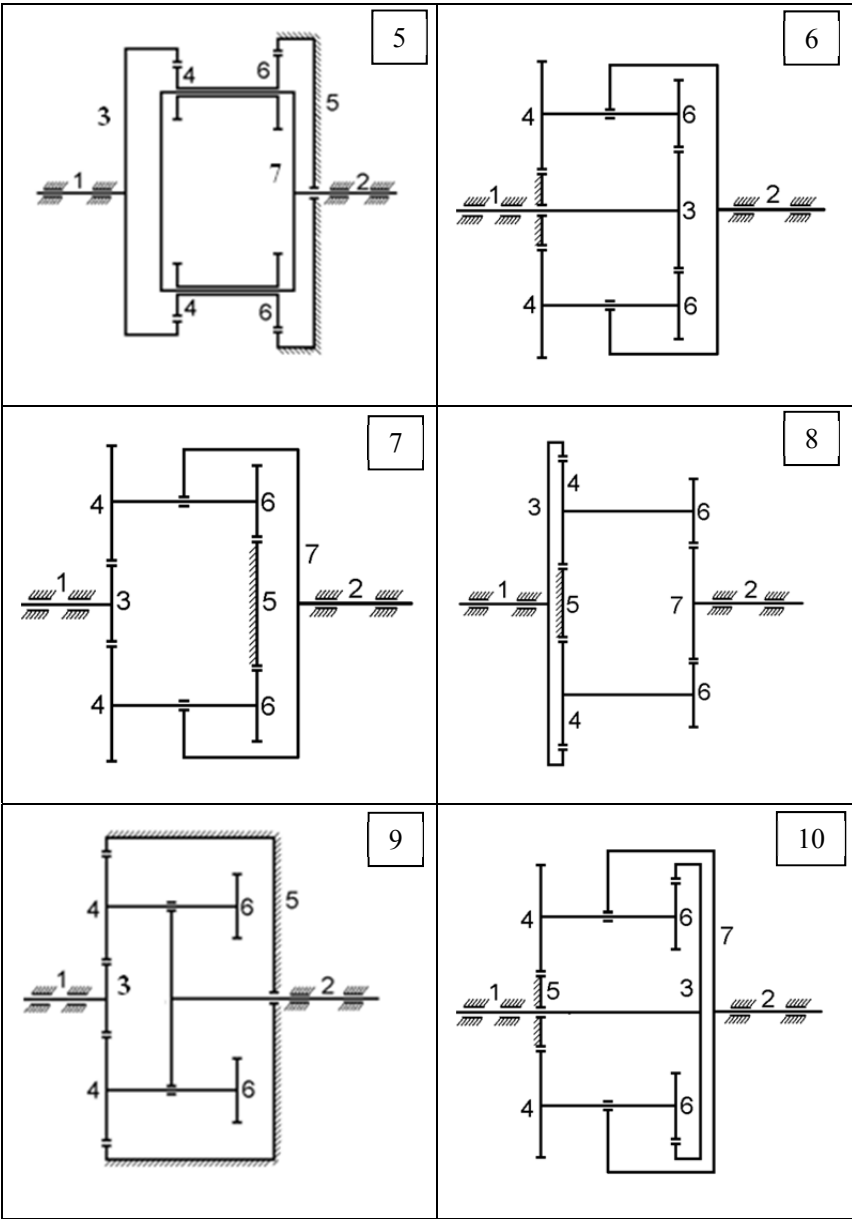


Рис. 3.6 (продолжение)

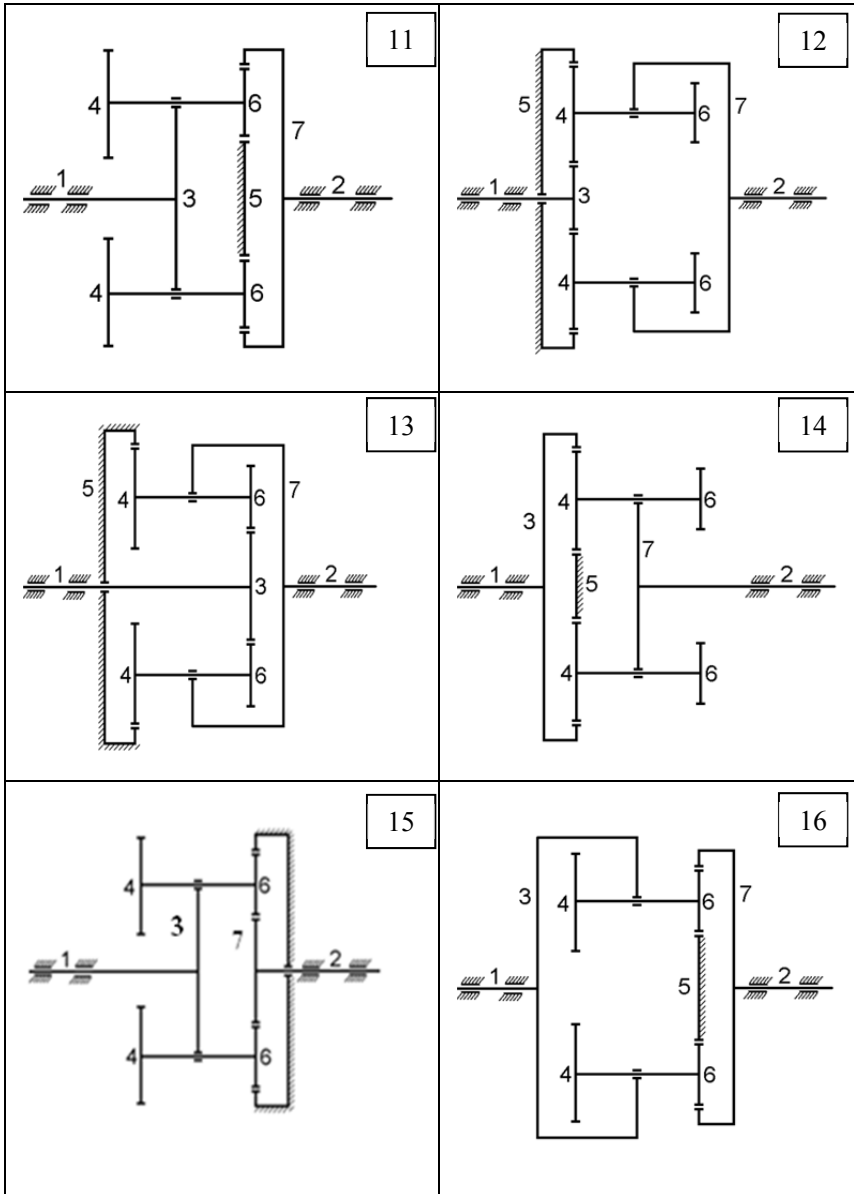


Рис. 3.6 (продолжение)

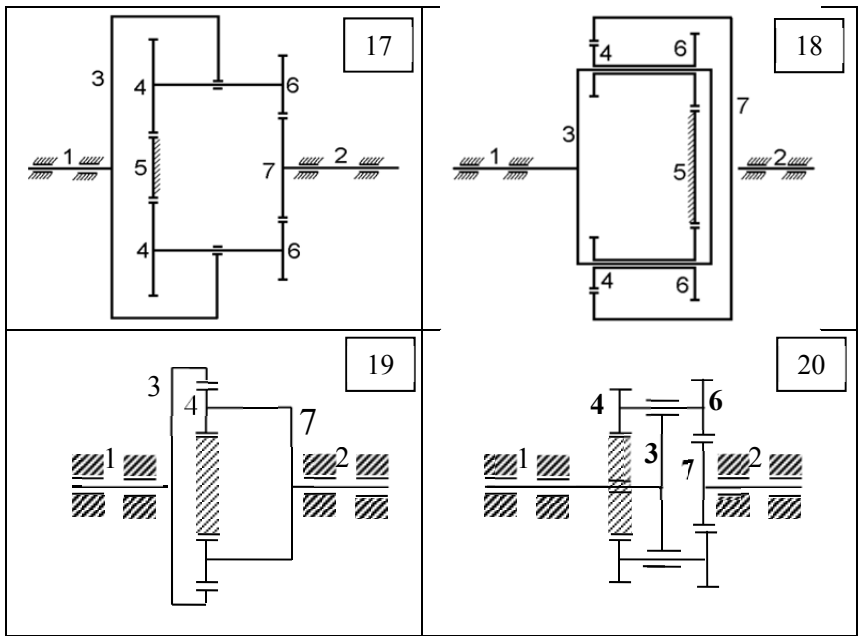


Рис. 3.6 (окончание)

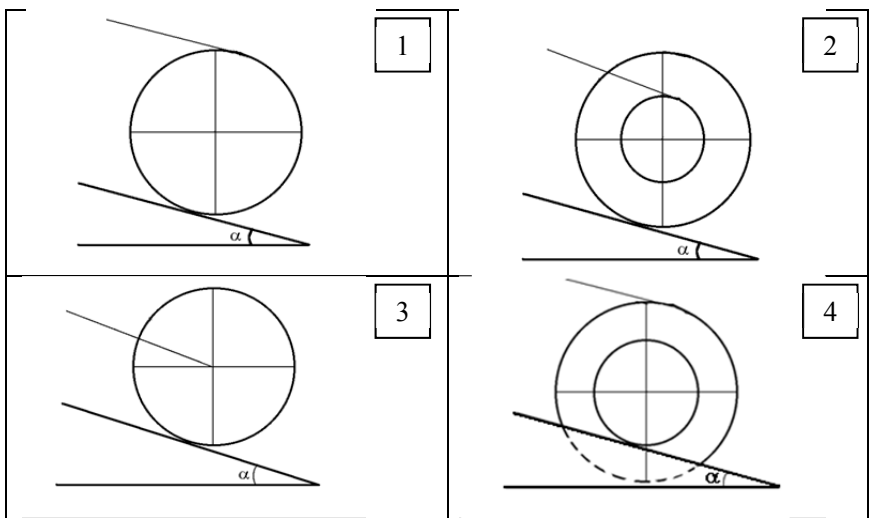


Рис. 3.7. Схемы поднимаемых грузов

Таблица 3.1

Параметры редукторов

Номер вари- анта	$R_3,$ 10^{-1} М	$R_4,$ 10^{-1} М	$R_6,$ 10^{-1} М	$R_7,$ 10^{-1} М	$L_{1-3},$ кг·м ²	I_{4-6} или I_4 кг·м ²	I_{2-7}	m_{4-6} или $m_4,$ кг
	1	1,2 1,4 1	1,0 1,0 0,8	- - -	- - -	1/3 1/2 2	1/4 1/3 1/2	8 6 10
2	- - -	0,4 0,5 0,6	0,6 0,5 0,4	0,4 0,5 0,6	3/8 1/3 2/5	2/5 3/4 2/3	4 6 8	1 0,8 1
3	0,8 1 0,9	0,4 0,6 0,5	0,5 0,7 0,6	- - -	2 3/4 1	4 2 2/5	10 8 6	1 1 0,8
4	- - -	0,5 0,4 0,6	0,6 0,5 0,8	0,6 0,8 0,4	4 3 2	2/3 4/3 3/4	8 10 6	0,8 1 1
5	- - -	0,2 0,4 0,6	0,4 0,6 0,7	0,6 0,8 0,9	1/3 2/3 4/3	2/5 2/7 2/3	4 6 5	1 1 0,8
6	0,8 0,9 1	1 1,2 1,4	0,8 1 1,2	- - -	2 3 3/2	2/3 3/2 3	4 4 6	0,8 1 1,2
7	1 0,8 0,6	0,3 0,4 0,3	0,5 0,9 0,6	- - -	1/2 2/3 1/3	1/4 2/5 1/2	6 4 3	0,8 1 1
8	1,2 1 0,8	0,4 0,3 0,3	0,3 0,2 0,2	0,5 0,5 0,3	1 3/2 2	1/4 1/3 1/2	5 4 5	1 0,8 0,8
9	0,5 1,0 0,6	0,4 0,5 0,3	- - -	- - -	1 1/2 2	1/2 1 1/3	3 4 5/3	1 0,8 1
10	1 1,2 0,8	0,4 0,5 0,4	0,3 0,3 0,2	- - -	1 3 3/2	1/2 1 1/3	3 4 3	1 1 1
11	0,8 1 0,7	- - -	0,4 0,3 0,3	- - -	3/2 1 1/3	2/3 1/2 1/5	2 6 5	0,8 0,8 1
12	1,0 1,7 1,8	0,5 0,3 0,6	- - -	- - -	2 2/3 3	1 1 3/2	6 4 8	1 1 1
13	1,0 1,2 0,9	0,4 0,6 0,3	0,6 0,8 0,6	- - -	1 2 3	1/2 1/3 3/2	2 6 8	0,8 1 0,8
14	1,0 1,0 1,3	0,3 0,4 0,5	- - -	- - -	2 3 3/2	1/2 1 1/3	5 6 4	1 1 1

Окончание табл. 3.1

Номер	$R_3,$	$R_4,$	$R_6,$	$R_7,$	$L_{1-3},$	I_{4-6} или I_4	I_{2-7}	m_{4-6} или
-------	--------	--------	--------	--------	------------	---------------------	-----------	---------------

Т а б л и ц а 3.2

Параметры поднимаемого груза

№ п/п	Масса груза, кг	Радиус инерции груза, м	$f_{тр.к},$ М	$R,$ М	$r,$ М	$\alpha, ^\circ$
1	8	Однородный сплошной диск	0,04	0,6	-	15
	10		0,05	0,8	-	30
	12		0,04	1	-	30
2	8	0,4	0,02	0,6	0,4	20
	10	0,3	0,03	0,5	0,3	30
	12	0,5	0,02	0,8	0,6	15
3	10	Однородный сплошной диск	0,03	0,4	-	15
	8		0,02	0,5	-	15
	8		0,02	0,8	-	15
4	6	0,4	0,01	0,5	0,2	15
	8	0,3	0,02	0,3	0,1	25
	8	0,6	0,02	0,7	0,4	30
5	10	Однородный сплошной диск	0,01	0,4	-	20
	12		0,02	0,5	-	25
	10		0,03	0,8	-	20
6	6	0,4	0,02	0,5	0,4	15
	8	0,3	0,03	0,4	0,3	20
	5	0,4	0,02	0,7	0,6	20

Окончание табл. 3.2

№ п/п	Масса груза, кг	Радиус инерции груза, м	$f_{тр.к},$ М	$R,$ М	$r,$ М	$\alpha, ^\circ$
7	6	Однородный сплошной диск	0,02	0,7	-	30
	7		0,02	0,6	-	20
	8		0,01	0,9	-	10
8	6	0,4	0,01	0,8	0,5	20
	8	0,6	0,03	0,7	0,4	30
	10	0,5	0,02	1	0,5	10
9	10	Однородный сплошной диск	0,02	0,9	-	35
	8		0,01	0,5	-	15
	6		0,02	0,4	-	10
10	8	0,6	0,03	0,7	0,5	20
	6	0,4	0,03	0,4	0,2	10
	5	0,3	0,02	0,5	0,3	15
11	10	Однородный сплошной диск	0,04	1	-	15
	9		0,05	0,9	-	30
	8		0,04	0,8	-	30
12	8	0,5	0,02	0,8	0,4	20
	7	0,6	0,03	0,7	0,3	30
	6	0,5	0,02	0,6	0,2	15
13	6	Однородный сплошной диск	0,03	0,7	-	15
	8		0,02	0,9	-	15

	10		0,02	1,1	-	15
14	10	0,4	0,01	1	0,5	15
	7	0,6	0,02	0,7	0,3	25
	5	0,8	0,02	0,5	0,2	30
15	8	Однородный сплошной диск	0,01	0,8	-	20
	10		0,02	0,9	-	25
	8		0,03	1	-	20
16	6	0,3	0,02	0,8	0,6	15
	8	0,6	0,03	0,6	0,4	20
	6	0,5	0,02	0,8	0,6	20
17	8	Однородный сплошной диск	0,02	0,7	-	30
	10		0,02	0,9	-	20
	10		0,01	0,8	-	10
18	6	0,4	0,01	0,6	0,5	20
	8	0,7	0,03	0,8	0,7	30
	8	0,5	0,02	0,8	0,4	10
19	8	Однородный сплошной диск	0,02	0,8	-	35
	10		0,01	0,5	-	15
	8		0,02	0,8	-	10
20	6	0,4	0,03	0,6	0,3	35
	8	0,3	0,03	0,7	0,4	35
	10	0,5	0,02	0,8	0,3	35

4. ДИНАМИКА СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Краткие сведения из теории

Аналитическая механика – это раздел теоретической механики, в котором изучение равновесия и движения механических систем основано на дифференциальных и интегральных принципах механики. Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения несвободной механической системы, составленные в обобщенных координатах. Обобщенные координаты – это независимые между собой координаты, которые однозначно определяют положение механической системы в пространстве.

Пример. Составить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника (рис. 4.1), состоящего из ползуна 1 массы m_1 , скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика 2 массы m_2 , соединенного с ползуном стержнем AB длины l . Стержень может вращаться вокруг оси A , связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь.

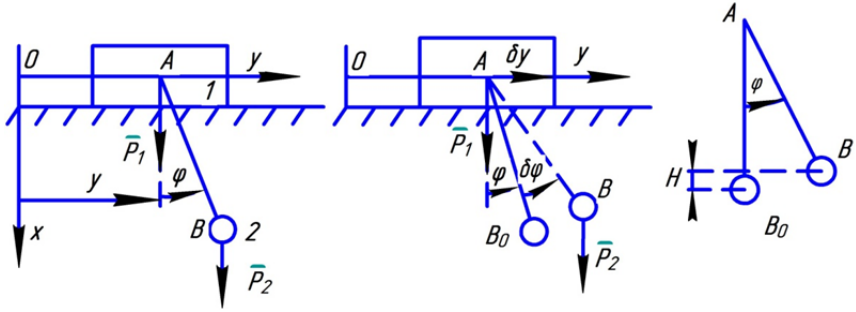


Рис. 4.1

Решение. 1. Тела, входящие в систему: ползун 1 совершает поступательное движение, шарик 2 – материальная точка.

2. Число степеней свободы $s = 2$.

3. Обобщенные координаты: $q_1 = y$ – перемещение ползуна, $q_2 = \varphi$ – отклонение стержня от вертикали; обобщенные скорости

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

4. Уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

5. Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2.$$

Кинетическая энергия ползуна при поступательном движении

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Шарик – материальная точка, перемещающаяся в вертикальной плоскости, поэтому скорость шарика имеет проекции на оси x и y . Кинетическая энергия шарика

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} \right)^2 \right].$$

Выразим координаты шарика через обобщенные координаты

$$x_2 = l \cos \varphi, \quad y_2 = y + l \sin \varphi.$$

Проекция скорости шарика на оси координат примут вид

$$\frac{dx_2}{dt} = -l \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy}{dt} + l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя их в выражение кинетической энергии шарика, получаем:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[l^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 2l \cos \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + l^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right].$$

Окончательно кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + m_2 l \cos \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

6. Производные от кинетической энергии, входящие в левые части уравнений Лагранжа. Частная производная от кинетической энергии по обобщенной скорости dy/dt :

$$\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} = (m_1 + m_2) \frac{dy}{dt} + m_2 l \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Полная производная по времени от этого выражения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right] = (m_1 + m_2) \frac{d^2 y}{dt^2} + m_2 l \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_2 l \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Так как в выражение кинетической энергии не входит обобщенная координата y , то частная производная от кинетической энергии по y равна нулю: $\partial T / \partial y = 0$.

Частная производная от кинетической энергии по обобщенной скорости $d\varphi/dt$

$$\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)} = m_2 l \cos \varphi \frac{dy}{dt} + m_2 l^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Полная производная по времени от этого выражения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)} \right] = m_2 l \cos \varphi \frac{d^2 y}{dt^2} - m_2 l \sin \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Частная производная от кинетической энергии по обобщенной координате φ

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l \sin \varphi \frac{dy}{dt} \frac{d\varphi}{dt}.$$

7. Обобщенные силы. Изобразим на рис. 4.1 действующие силы. Это сила тяжести ползуна P_1 и сила тяжести шарика P_2 . Силу реакции горизонтальной плоскости показывать не нужно, так как реакции идеальных связей в уравнениях Лагранжа учитываются автоматически.

Первый способ. Запишем сумму элементарных возможных работ через силы, действующие на механическую систему:

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = \sum_{j=1}^n (F_{jx} \delta x_j + F_{jy} \delta y_j + F_{jz} \delta z_j).$$

С другой стороны, сумму элементарных возможных работ можно выразить через обобщенные силы:

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = Q_y \delta y + Q_\varphi \delta \varphi.$$

Из рис. 4.1 видно, что проекция силы P_{1x} на возможном перемещении δx_1 работу не совершает. Кроме того, силы P_1 и P_2 не имеют проекций на ось y . То есть работу совершает только P_{2x} на возможном перемещении δx_2 :

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = P_{2x} \delta x_2, \quad P_{2x} = m_2 g.$$

Координата шарика x_2 и вариация координаты δx_2 :

$$x_2 = l \cos \varphi, \quad \delta x_2 = -l \sin \varphi \delta \varphi.$$

Подставляя эти выражения в сумму элементарных возможных работ, получаем:

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = -m_2 g l \sin \varphi \delta \varphi.$$

Из сравнения формул элементарных возможных работ, записанных через действующие и обобщенные силы, найдем обобщенные силы:

$$Q_y = 0, \quad Q_\varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

8. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Найденные в пп. 6 и 7 выражения подставим в уравнения Лагранжа второго рода:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 y}{dt^2} + m_2 l \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_2 l \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0,$$

$$m_2 l^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m_2 l \cos \varphi \frac{d^2 y}{dt^2} = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Таким образом, поставленная задача решена. Но обобщенные силы можно найти и другим способом.

Второй способ определения обобщенных сил. Дадим системе возможное перемещение δy в сторону возрастания y такое, что $\delta \varphi = 0$. Тогда сумма элементарных возможных работ

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = Q_y \delta y = 0.$$

Так как $\delta y \neq 0$, то обобщенная сила, соответствующая координате y , равна нулю: $Q_y = 0$. Дадим системе возможное перемещение $\delta \varphi$ в сторону возрастания φ такое, что $\delta y = 0$. Тогда сумма элементарных возможных работ

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j = Q_\varphi \delta \varphi = -P_2 l \sin \varphi \delta \varphi.$$

Коэффициент при $\delta \varphi$ даст значение обобщенной силы, соответствующей координате φ ,

$$Q_\varphi = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Третий способ определения обобщенных сил. Так как силы тяжести, действующие на механическую систему, являются консервативными силами, то обобщенные силы можно определить через потенциальную энергию системы.

Потенциальная энергия системы $\Pi = m_2 g H + C$, где H – высота подъема шарика из начального положения в данное, C – постоянная, $H = l - l \cos \varphi$;

$$\Pi = m_2 g l (1 - \cos \varphi) + C.$$

Обобщенные силы равны

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -m_2 g l \sin \varphi, \quad Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0.$$

Условия задач

Текст задач сформулирован в соответствии с номером варианта, чертежи к задаче (в соответствии с номером варианта) помещены на рис. 4.2.

1. Установить характер движения точек и тел, входящих в механическую систему (материальная точка, перемещающаяся в плоскости или в пространстве; твердое тело, совершающее поступательное движение, или вращающееся вокруг неподвижной оси, или совершающее плоское движение).

2. Определить число степеней свободы механической системы s . Во всех предложенных вариантах задания число степеней свободы равно двум.

3. Выбрать обобщенные координаты. Целесообразно за обобщенные координаты принимать переменные, рекомендованные в тексте задачи. Записать обобщенные скорости, т.е. полные производные по времени от обобщенных координат.

4. Записать уравнения Лагранжа второго рода для выбранных обобщенных координат в общем виде. Уравнений Лагранжа столько, сколько степеней свободы имеет механическая система:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, i = 1, 2, \dots, S$$

где T – кинетическая энергия системы; q_i – обобщенная координата; $\frac{dq_i}{dt}$ – обобщенная скорость; Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i .

5. Записать кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел, входящих в рассматриваемую механическую систему. Формула кинетической энергии определяется видом движения твердого тела.

Кинетическая энергия материальной точки

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

где m – масса материальной точки, v – абсолютная скорость точки.

Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2,$$

где m – масса твердого тела, v_c – скорость центра масс.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz ,

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

где ω – угловая скорость твердого тела, J_z – момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2,$$

где J_{cz} – момент инерции плоской фигуры относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости фигуры.

Выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

6. Найти все частные и полные производные, входящие в левые части уравнений Лагранжа второго рода.

7. Определить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам. Обобщенной силой, соответствующей i -й обобщенной координате, называется величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему. Существуют различные способы вычисления обобщенных сил:

1) согласно определению, обобщенная сила

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \bar{F}_j \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i}.$$

Принимая во внимание, что $\bar{r}_j = x_j \bar{i} + y_j \bar{j} + z_j \bar{k}$, получаем

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right).$$

Этот способ определения обобщенных сил называют аналитическим;

2) обобщенные силы для механических систем с $s > 1$ целесообразно вычислять последовательно, учитывая, что обобщенные координаты, а значит, и их вариации независимы между собой. Системе всегда можно сообщить такое возможное перемещение, при котором

изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не варьируются. В этом случае $\sum_{j=1}^n \delta A_j = Q_i \delta q_i$, откуда $Q_i = \frac{\sum_{j=1}^n \delta A_j}{\delta q_i}$.

Возможная работа сил, действующих на систему, определяется на перемещениях точек приложения этих сил, соответствующих вариации только одной i -й обобщенной координаты;

3) если силы, действующие на механическую систему, потенциальные, то обобщенные силы можно определить через потенциальную энергию системы Π :

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

8. Записать дифференциальные уравнения движения механической системы, подставив в уравнения Лагранжа второго рода найденные производные и обобщенные силы.

Вариант 1. Шероховатый цилиндр весом P и радиусом r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра с весом Q , радиусом R , который может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной оси симметрии. Определить угловые ускорения цилиндров, приняв за обобщенные координаты угол поворота полого цилиндра ψ и угол поворота мысленного отрезка φ .

Вариант 2. Решить предыдущую задачу в предположении, что по внутренней поверхности полого цилиндра катится без скольжения шар весом P и радиусом r (диаметральная плоскость шара во все время движения остается параллельной поперечному сечению цилиндра).

Вариант 3. Составить уравнения движения системы, состоящей из диска A , жестко прикрепленного к стержню длины l , другой конец которого шарнирно прикреплен к оси цилиндра B . Цилиндр B катится без скольжения по горизонтальной плоскости, радиус цилиндра R , вес Q . Веса стержня и диска одинаковы и равны P , радиус диска r . Трением качения пренебречь. За обобщенные координаты принять y – перемещение центра масс катка B и φ – угол отклонения стержня от вертикали.

Вариант 4. Каток A весом Q и радиусом R , скатываясь без скольжения по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , приводит в движение цилиндрический каток B такого же веса и радиуса с помощью невесомой, нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C . Коэффициент трения качения катка A о плоскость k . Нить не скользит по цилиндрическому катку B . Определить ускорения центров катков A и B и натяжение нити, приняв за обобщенные

координаты x – перемещение центра масс катка A и φ – угол поворота катка B .

Вариант 5. Механическая система состоит из груза A весом Q и однородного цилиндра весом P и радиусом R , соединенных невесомой нитью, переброшенной через неподвижный блок C . Система приходит в движение под действием силы тяжести груза A , который скользит по плоскости, образующей угол α с горизонтом. Считая, что скольжение нити по цилиндру отсутствует, определить ускорение груза A , угловое ускорение цилиндра и натяжение нити. За обобщенные координаты принять x – перемещение груза A и φ – угол поворота цилиндра B .

Вариант 6. Цилиндрические катки A и B одинакового веса P и радиуса R соединены невесомой нитью, переброшенной через неподвижный блок C , и лежат на боковых гранях треугольной призмы D весом Q . Система приходит в движение под действием сил тяжести. Считая, что боковые грани призмы образуют с горизонтальной плоскостью углы α и β , пренебрегая трением качения и трением между призмой и плоскостью, определить ускорение призмы, угловые ускорения цилиндрических катков и натяжение нити. Качение катков по граням цилиндра происходит без скольжения. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение призмы и x_2 – перемещение центра масс катка A относительно призмы.

Вариант 7. Три груза A , B , C , веса которых соответственно P ; $0,75P$; $0,5P$, соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки M и N . Грузы лежат по сторонам четырехугольной пирамиды и перемещаются под действием силы тяжести. Пренебрегая трением между плоскостью, пирамидой и грузами, определить ускорения пирамиды и груза A относительно пирамиды, а также натяжение нити и давление груза A на боковую грань пирамиды. Вес пирамиды Q . За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение пирамиды и x_2 – перемещение груза A относительно пирамиды.

Вариант 8. Решить вариант 7 для случая, когда груз B заменен цилиндрическим катком того же веса, катящимся без скольжения по пирамиде. Радиус катка R . Коэффициент трения качения катка о грань пирамиды равен k .

Вариант 9. Решить вариант 7 для случая, когда груз A заменен однородным цилиндром того же веса, катящимся без скольжения по грани пирамиды. Трением качения пренебречь. За обобщенные коор-

динаты принять x_1 – перемещение пирамиды, x_2 – перемещение центра масс катка A относительно пирамиды.

Вариант 10. Однородная нить, к концу которой привязан цилиндрический каток A весом P и радиусом R , огибает неподвижный блок B , охватывает подвижный блок C , поднимается вверх на неподвижный блок D и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к ее концу привязан груз E веса P . Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f . Трением качения пренебречь. К оси блока C прикреплен груз K весом Q , под действием силы тяжести которого происходит движение системы. Пренебрегая весами блоков B , C и D , определить ускорения груза E и центра масс катка A , а также натяжение нити. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза E , x_2 – перемещение центра масс катка A .

Вариант 11. Решить вариант 10 в предположении, что каток A заменен грузом того же веса. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза E , x_2 – перемещение груза A .

Вариант 12. Механическая система, состоящая из однородных цилиндров A и B одинакового веса Q и одинакового радиуса r и груза C весом P , соединенных невесомой нитью, переброшенной через невесомые неподвижные блоки M и N , приходит в движение под действием силы тяжести цилиндра B . Пренебрегая трением качения и считая, что цилиндр B не скользит по нити, а цилиндр A совершает чистое качение по плоскости, определить ускорения груза C и центра масс цилиндра A , а также натяжение нити. Коэффициент трения скольжения груза C по плоскости равен f . За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза C , x_2 – перемещение центра масс цилиндра A .

Вариант 13. Круглый однородный диск радиусом R и весом P связан шарниром со стержнем OA длиной l и весом Q , могущим вращаться около неподвижной горизонтальной оси O . Диск может вращаться в плоскости колебаний стержня OA . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты углы поворота стержня φ и диска ψ .

Вариант 14. В дифференциальной передаче, расположенной в горизонтальной плоскости, к водилу O_1O_2 приложен постоянный вращающий момент M . Шестерня 1 весом Q и радиусом R свободно насажена на общую с водилом ось O_1 и может вращаться вокруг нее независимо от водила. С шестерней 1 во внешнем зацеплении находится шестерня 2 весом Q и радиусом r . Считая водило однородным стержнем весом P , а шестерни однородными дисками и пренебрегая трением,

определить угловые ускорения водила и шестерни I . За обобщенные координаты принять углы поворота водила ψ и шестерни I φ .

Вариант 15. В дифференциальной передаче, расположенной в горизонтальной плоскости, к водилу O_1O_2 приложен постоянный вращающий момент M . Шестерня I весом Q и радиусом R свободно насажена на общую с водилом ось O_1 и может вращаться вокруг нее, независимо от водила. С шестерней I во внутреннем зацеплении находится шестерня 2 весом Q и радиусом r . Считая водило однородным стержнем весом P , а шестерни однородными дисками и пренебрегая трением, определить угловые ускорения водила и шестерни I . За обобщенные координаты принять углы поворота водила ψ и шестерни I φ .

Вариант 16. Шарик весом P движется внутри гладкой трубы, ось которой представляет окружность радиусом R . Труба свободно вращается около вертикального диаметра. Момент инерции трубы относительно вертикального диаметра равен J . Считая, что труба вращается под действием постоянного момента M , составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты углы поворота трубы φ и радиуса ψ .

Вариант 17. Грузы A и B каждый весом P и однородный цилиндрический каток C весом Q и радиусом R , соединенные невесомой нитью, переброшенной через невесомые блоки K , M и N , приходят в движение под действием сил тяжести. Груз A скользит по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, а каток C катится без скольжения по другой наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом. Пренебрегая трением качения, определить ускорения груза A и оси катка C , а также натяжение нити. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза A , x_2 – перемещение центра масс катка C .

Вариант 18. Решить вариант 17 для случая, когда груз A заменен цилиндрическим катком весом Q и радиусом R , катящимся без скольжения по наклонной плоскости. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение центра масс катка A , x_2 – перемещение центра масс катка C .

Вариант 19. Составить дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из математического маятника длиной l и весом Q , подвешенного к вертикально движущемуся ползуну A весом P , прикрепленному к пружине жесткости c . Длина недеформированной пружины l_0 . За обобщенные координаты принять x – перемещение ползуна, φ – угол поворота стержня AM .

Вариант 20. Однородные цилиндрические катки A и B каждый весом P и радиусом R и груз C весом Q соединены невесомой нитью, переброшенной через невесомые блоки, и образуют механическую систему, которая приходит в движение под действием сил тяжести. Груз C скользит по гладкой плоскости, образующей с горизонтом угол α . Каток B катится без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом. Считая, что цилиндр A не скользит по нити, и пренебрегая трением качения, определить ускорения груза C и центра масс цилиндра B , а также натяжение нити. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза C , x_2 – перемещение центра масс цилиндра B .

Вариант 21. Через блок A радиусом R и весом Q_1 перекинута невесомая нерастяжимая нить. На одном ее конце привязан груз M_1 весом P_1 , на другом – блок B радиусом r весом Q_2 . Через блок B также перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы M_2 и M_3 , веса которых соответственно P_2 и P_3 . Пренебрегая скольжением нитей по блокам, определить ускорение груза M_1 и относительное ускорение груза M_2 . Блоки A и B считать однородными дисками. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза M_1 , x_2 – относительное перемещение груза M_2 .

Вариант 22. Решить вариант 20 для случая, когда груз C заменен цилиндрическим катком весом Q и радиусом R . За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение центра масс катка C , x_2 – перемещение центра масс катка B .

Вариант 23. Груз A весом P_1 с помощью невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок B весом Q_1 и радиусом r , ось которого неподвижна, и блок D весом Q_2 и радиусом R . К центру блока D на пружине жесткости c подвешен груз E весом P_2 . Пренебрегая скольжением нити относительно блоков и принимая блоки за однородные диски, составить дифференциальные уравнения движения системы. За обобщенные координаты принять x_1 – перемещение груза A , x_2 – перемещение груза E относительно блока D .

Вариант 24. Двойной плоский математический маятник, состоящий из двух однородных стержней весом P и длиной l каждый, совершает колебания в вертикальной плоскости под действием сил тяжести. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты углы поворота стержня OA – φ и стержня AB – ψ .

Вариант 25. Ползун A массы m_1 , соединенный с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости c , может скользить без

трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру ползуна на невесомой нерастяжимой нити длины l подвешен груз массой m_2 . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение ползуна, φ – угол отклонения нити от вертикали.

Вариант 26. Доска массы m_1 , соединенная пружинами жесткости c с неподвижными стенками, может скользить по гладкому горизонтальному полу. По доске может катиться без проскальзывания диск массой m_2 и радиусом r , центр которого соединен с краем доски пружиной жесткости $2c$. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение доски, ξ – перемещение центра масс диска относительно доски.

Вариант 27. Через блок O массой m , подвешенный на вертикальной пружине жесткости c , перекинута невесомая нерастяжимая нить с двумя грузами A и B массами m_1 и m_2 на концах. Нить по блоку не скользит. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x_1 – перемещение точки O , x_2 – перемещение груза A относительно блока.

Вариант 28. Однородный диск A весом P и радиусом R может катиться без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К центру диска на невесомой нерастяжимой нити длины l подвешен груз веса Q , совершающий колебания в вертикальной плоскости. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение центра масс диска, φ – угол отклонения нити от вертикали.

Вариант 29. Составить дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из математического маятника M массой m и длиной l , точка подвеса A которого находится в центре диска радиусом r и массой m_1 . Диск может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости, сохраняя свою плоскость вертикальной. Центр диска соединен с неподвижной стенкой пружиной жесткости c . За обобщенные координаты принять x – перемещение центра масс диска, φ – угол отклонения нити от вертикали.

Вариант 30. Внутри полого цилиндра массой m_1 и радиусом R , который может свободно качаться вокруг своей горизонтальной образующей, катится без скольжения однородный цилиндр массой m_2 и радиусом r . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты углы поворота мысленных отрезков OA – φ , AC – ψ .

Вариант 31. Однородный цилиндр весом P и радиусом r может катиться без скольжения внутри неподвижного полого цилиндра радиусом R . К центру подвижного цилиндра подвешен математический маятник AM весом Q и длиной l . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты углы поворота мысленного отрезка OA – φ , маятника AM – ψ .

Вариант 32. Груз 1 массой m_1 и пренебрежимо малых размеров может скользить без трения по стержню 2 достаточно большой длины l_2 . Груз удерживается пружиной жесткостью c . Длина недеформированной пружины l . К грузу приложена постоянная по величине сила F , составляющая угол ψ с горизонтом. Масса стержня 2 равна m_2 . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты ξ_1 – перемещение груза по стержню, φ – угол поворота стержня.

Вариант 33. Тело 1 , имеющее массу m_1 , скользит по гладкой горизонтальной поверхности. Тело 2 , представляющее собой однородный диск радиусом r и массой m_2 , катится без скольжения по цилиндрической поверхности тела 1 радиусом R . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение тела 1 , φ – угол поворота мысленного отрезка AC .

Вариант 34. Ползун 1 массой m_1 скользит без трения по горизонтальной направляющей. К ползуну подвешен математический маятник 2 массой m_2 и длиной l , связанный с ползуном спиральной пружиной с крутильной жесткостью c . При нижнем положении маятника пружина не деформирована. К концу маятника приложена постоянная по величине сила F , составляющая угол ψ с горизонтом. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x_A – перемещение ползуна, φ – угол поворота маятника.

Вариант 35. Призма 1 массой m_1 скользит по гладкой горизонтальной плоскости, удерживаемая горизонтальной пружиной жесткостью c . По наклонной грани призмы катится без скольжения однородный цилиндр 2 , имеющий массу m_2 . К его центру B под углом ψ к горизонту приложена сила F , величина которой постоянна. Угол наклона грани призмы к горизонту α . Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение призмы, ξ_B – перемещение центра масс диска относи-

тельно призмы. Обобщенная координата x отсчитывается от положения призмы, в котором пружина не деформирована.

Вариант 36. Призма 1 массой m_1 скользит по гладкой горизонтальной плоскости. По наклонной грани призмы катится без скольжения однородный диск 2, имеющий массу m_2 . Центр диска B прикреплен к призме пружиной жесткостью c . К центру диска под углом ψ к горизонту приложена сила F , величина которой постоянна. Угол наклона грани призмы к горизонту α . Пружина параллельна грани призмы. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение призмы, ξ_B – перемещение центра масс диска относительно призмы. Обобщенная координата ξ_B отсчитывается от положения центра диска, при котором пружина не деформирована.

Вариант 37. Груз 1 массой m_1 и пренебрежимо малых размеров может скользить без трения по стержню 2 достаточно большой длины l_2 . Стержень удерживается спиральной пружиной крутильной жесткостью c . В нижнем положении стержня пружина не деформирована. К грузу приложена постоянная по величине сила F , составляющая угол ψ с горизонтом. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты ξ_1 – перемещение груза по стержню, φ – угол поворота стержня.

Вариант 38. Доска 1 массой m_1 может передвигаться на роликах 3, 4 массой $m_3 = m_4$, катящихся без скольжения по горизонтальной плоскости. По доске катится без скольжения цилиндр 2 массой m_2 . Доска удерживается горизонтальной пружиной жесткостью c . К оси цилиндра приложена постоянная по величине сила F , составляющая угол ψ с горизонтом. Составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение доски, ξ_B – перемещение центра масс цилиндра относительно доски, отсчитываемое от точки O_2 . Обобщенная координата x отсчитывается от положения края доски, при котором пружина не деформирована.

Вариант 39. Тележка 1 массой m_1 , имеющая два колеса 3, 4 массой $m_3 = m_4$, может двигаться без сопротивления по горизонтальной плоскости. При этом колеса катятся без скольжения. По тележке катится без скольжения однородный диск 2 массой m_2 , центр которого соединен с неподвижным основанием горизонтальной пружиной жесткостью c . К центру диска приложена постоянная по величине сила F , составляющая угол ψ с горизонтом. Составить дифференци-

альные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты x – перемещение тележки, ξ_B – перемещение центра масс диска относительно тележки. Считать, что при $x = 0$, $\xi_B = 0$ пружина не деформирована.

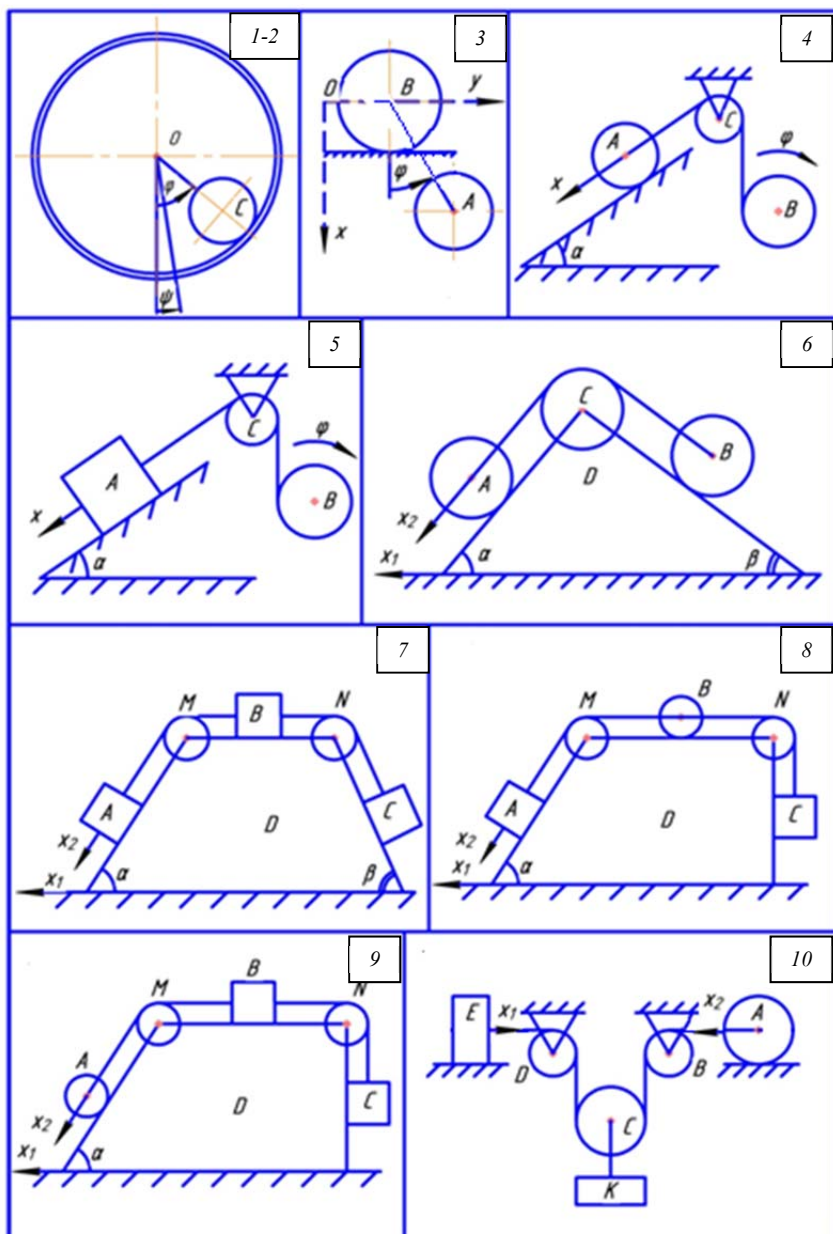


Рис. 4.2

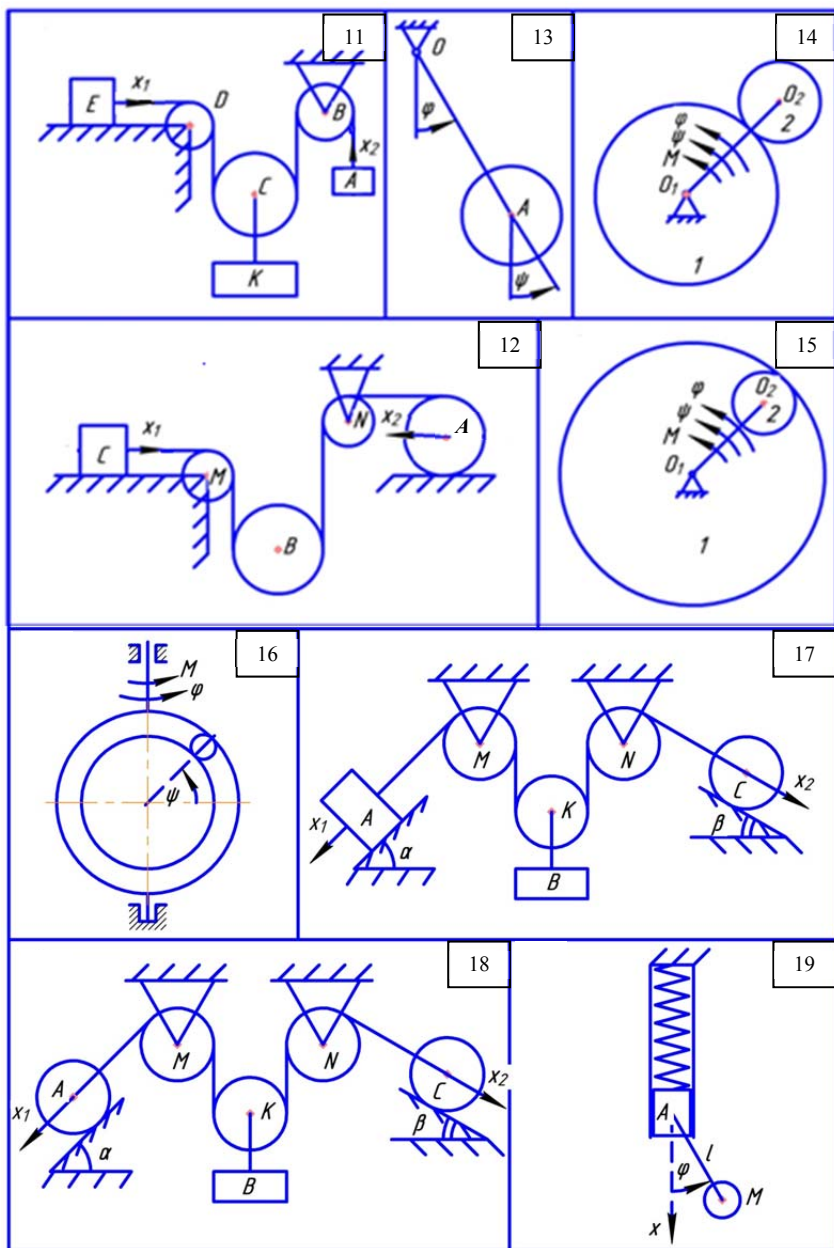


Рис. 4.2 (продолжение)

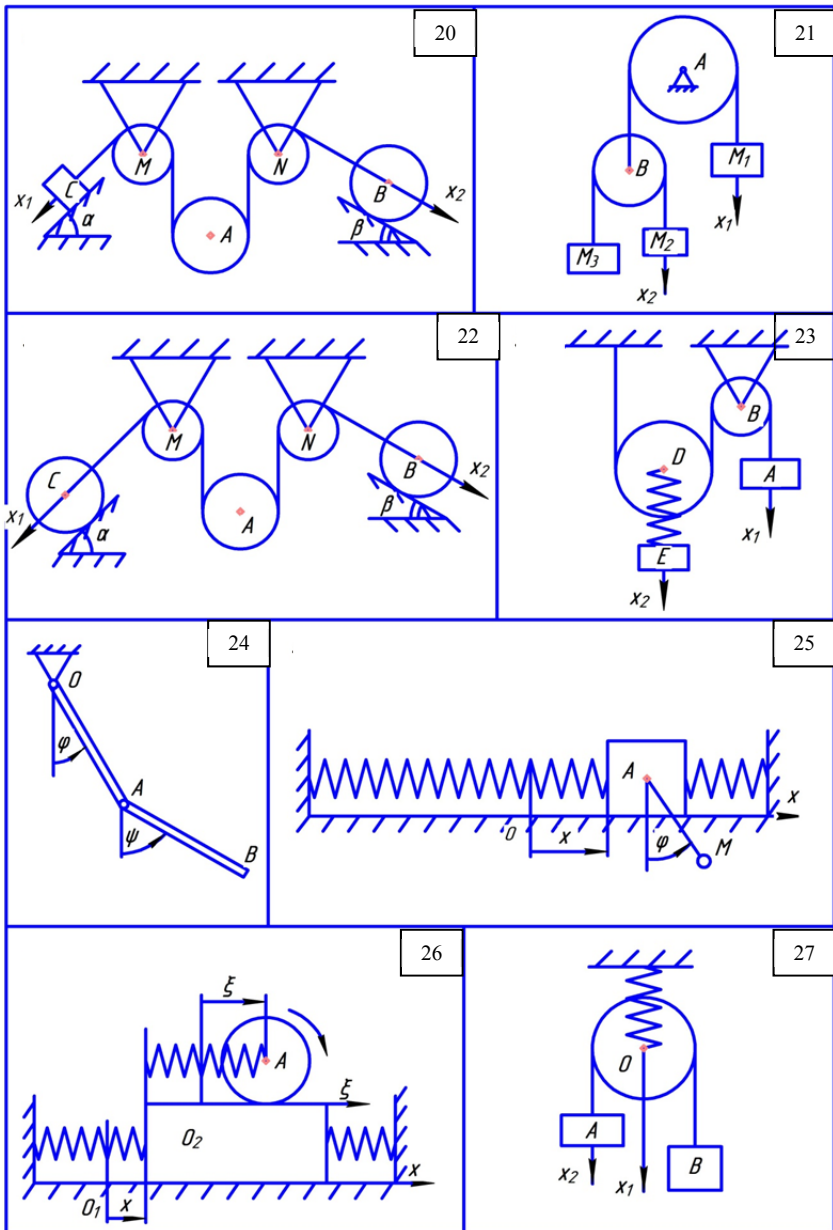


Рис. 4.2 (продолжение)

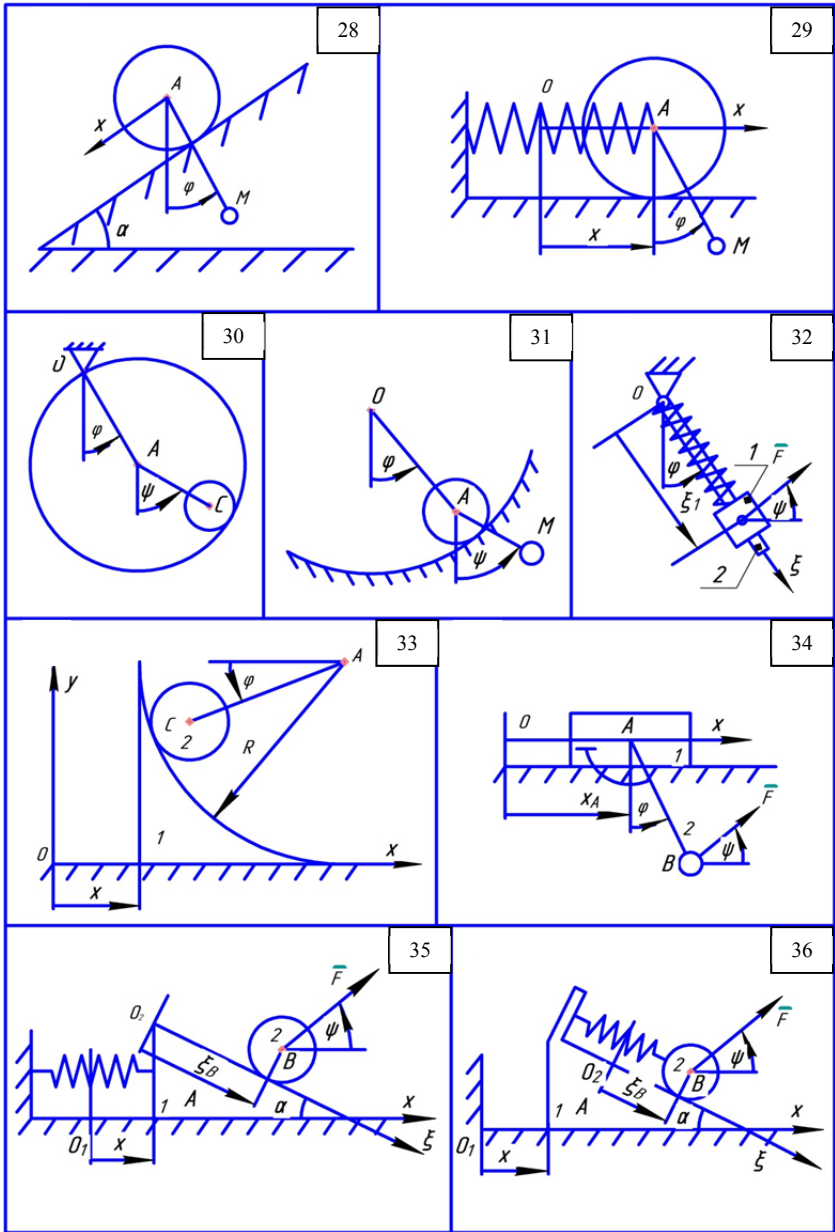


Рис. 4.2 (продолжение)

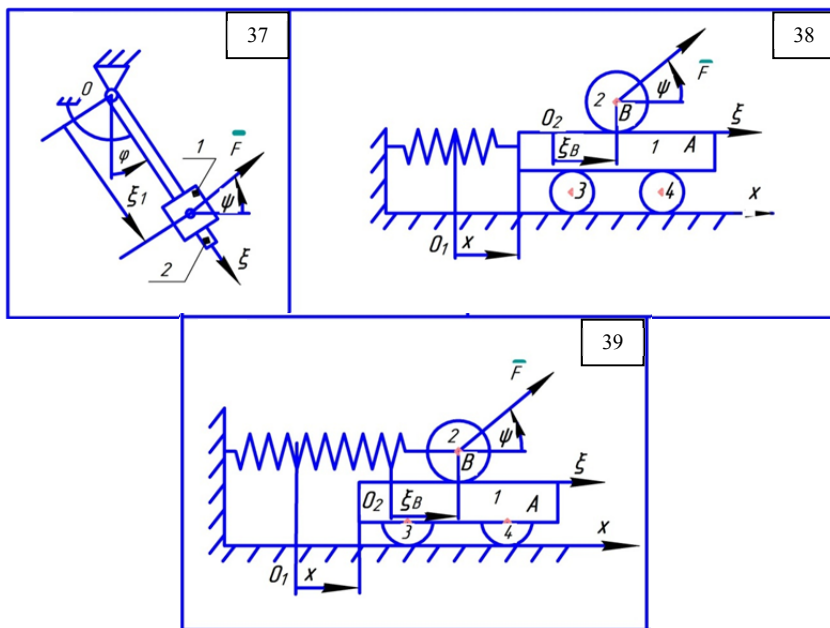


Рис. 4.2 (окончание)

Библиографический список

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. Т.2 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, В.Р. Меркин. СПб.: Лань. 2002.
2. Курс теоретической механики / Ред. К.С. Колесников. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002.
3. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. СПб.: Лань. 2013.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Каждое задание оформляется на одной стороне бумаги формата А4. Первая страница – титульный лист, образец которого приведён в прил. 2. Вторая страница начинается с полной формулировки условия задачи, схемы рассматриваемого механизма, исходных данных для расчёта. Решение задачи должно сопровождаться подробными объяснениями, в которых нужно указать, какая теорема, принцип и т.п. применяются в расчётах. Схемы механизмов, расчётные схемы (изображения тел с приложенными к ним силами, скоростями, ускорениями и т.д.) должны быть чёткими и с соблюдением пропорций, чтобы изображаемые величины были не слишком малыми или слишком большими. Текст может быть рукописным, но небрежно оформленные работы не принимаются, в этих случаях работа должна быть распечатана на компьютере.

При защите работы студент должен быть готов к ответу на вопросы по теории и методам выполнения работы.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Балтийский государственный технический университет
«Военмех» им. Д.Ф. Устинова
Кафедра теоретической механики и баллистики

Расчётно-графическая работа № ____
по разделу «Динамика»
Вариант № ____

Выполнил: _____
Группа _____
Проверил: _____

Санкт-Петербург
20__

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Динамика относительного движения материальной точки	4
2. Основные теоремы динамики механических систем	17
3. Основные теоремы динамики системы материальных точек и дифференциальные уравнения движения твердого тела	49
4. Динамика систем материальных точек с двумя степенями свободы .	66
<i>Библиографический список</i>	86
П р и л о ж е н и е 1. Требования к оформлению расчетно-графичес- кой работы	87
П р и л о ж е н и е 2. Образец оформления титульного листа	88

*Алдошин Геннадий Тихонович, Дмитриев Никита Николаевич,
Илихменев Андрей Львович, Рупасова Наталия Евгеньевна,
Свентицкая Вера Евгеньевна, Чирков Вадим Юрьевич*

Динамика

Редактор *Г.В. Никитина*

Корректор *Л.А. Петрова*

Компьютерная верстка: *С.В. Кашуба*

Подписано в печать 24.10.2016. Формат 60×84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,175. Тираж 300 экз. Заказ № 176 .

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1