САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 2.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2002

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики в качестве методических указаний для студентов естественных факультетов.

Авторы: Т.Н.Андрианова, А.К.Пономаренко, П.К.Черняев.
Рецензент: В.Ю.Сахаров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. *СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.*

1.1. *Скалярное произведение.*

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как известно, определяется следующим образом:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \overset{def}{=} |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi,^{1} \tag{1}$$

где $|\overline{a}|, |\overline{b}|$ — длины векторов $\overline{a}, \overline{b}$, $\varphi = (\overline{a},\hat{}\ \overline{b})$ — угол между ними.

Перечислим основные свойства скалярного произведения:

1. $\overline{b}\cdot\overline{a} = \overline{a}\cdot\overline{b}$,
2. $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b} = \lambda(\overline{a}\cdot\overline{b}), \lambda\in\mathbf{R}$,
3. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$,
4. $\overline{a}\perp\overline{b} \;\Leftrightarrow\; \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$.

Если в какой-нибудь прямоугольной декартовой системе кооординат Oxyz векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a} = (X_a, Y_a, Z_a)$, $\overline{b} = (X_b, Y_b, Z_b)$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = X_aX_b + Y_aY_b + Z_aZ_b. \tag{2}$$

Из определения (1) и формулы (2) следует, что

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}} = \sqrt{X_a^2+Y_a^2+Z_a^2},$$

$$\cos(\overline{a},\hat{}\ \overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{X_aX_b+Y_aY_b+Z_aZ_b}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2+Z_a^2}\cdot\sqrt{X_b^2+Y_b^2+Z_b^2}}.$$

1.2. *Векторное произведение.*

Векторным произведением $\overline{a}\times\overline{b}$ [2] векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен множителям $\overline{a}$, $\overline{b}$ (рис.1).
2. Длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е.

$$|\overline{c}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi, \quad \text{где как и выше,} \quad \varphi = (\overline{a},\hat{}\ \overline{b}).$$

---

[1] Символ $\overset{def}{=}$ означает " Равно по определению".

[2] Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$ обозначают также $(\overline{a},\overline{b})$, векторное $[\overline{a},\overline{b}]$.

3. Упорядоченная тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — тройка, одноименная с тройкой ортов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ осей Ox, Oy, Oz прямоугольной декартовой координатной системы Oxyz. Так как в дальнейшем будут рассматриваться только правые системы координат, то и тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ также будет считаться правой.[3]

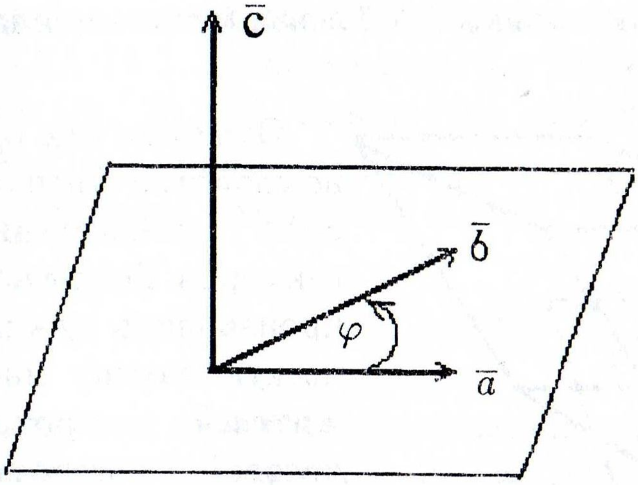

Рис. 1.

Перечислим основные свойства векторного произведения:
1. $\overline{b} \times \overline{a} = -\overline{a} \times \overline{b}$,
2. $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b}), \lambda \in \mathbf{R}$,
3. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} =$
$= \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$,
4. $\overline{a}$ коллинеарен $\overline{b}$ $\Longleftrightarrow$
$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, где $\overline{0}$ означает нулевой вектор.

Если в прямоугольной декартовой системе кооординат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют координаты $\overline{a} = (X_a, Y_a, Z_a)$, $\overline{b} = (X_b, Y_b, Z_b)$, то их векторное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix} =$$

$$= (Y_a Z_b - Y_b Z_a)\overline{i} - (X_a Z_b - X_b Z_a)\overline{j} + (X_a Y_b - X_b Y_a)\overline{k}, \qquad (3)$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — орты координатных осей Ox, Oy, Oz.

1.3.*Смешанное произведение.*

Смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — это их векторно-скалярное произведение:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}. \qquad (4)$$

Так как длина вектора $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$ численно равна площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$,

[3]Упорядоченная тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется правой, если кратчайший поворот первого вектора $\overline{a}$ тройки ко второму $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки(при этом предполагается, что векторы тройки приведены к общему началу и наблюдение ведется из конца третьего вектора $\overline{c}$,), и левой, если указанный поворот осуществляется по часовой стрелке.

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{d} \cdot \overline{c}$, скалярное произведение $\overline{d} \cdot \overline{c}$ равно проекции вектора $\overline{c}$ на ось, направление которой определено вектором $\overline{d}$, т.е. $\overline{d} \cdot \overline{c} = |\overline{d}||\overline{c}| \cos\psi = h$ (рис.2), то смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ равно объему параллелепипеда (ребра которого — векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$), если тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ правая (одноименная с тройкой координатных ортов), и равно объему указанного параллелепипеда, взятому со знаком минус, если тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ левая (разноименная с тройкой координатных ортов). [4]

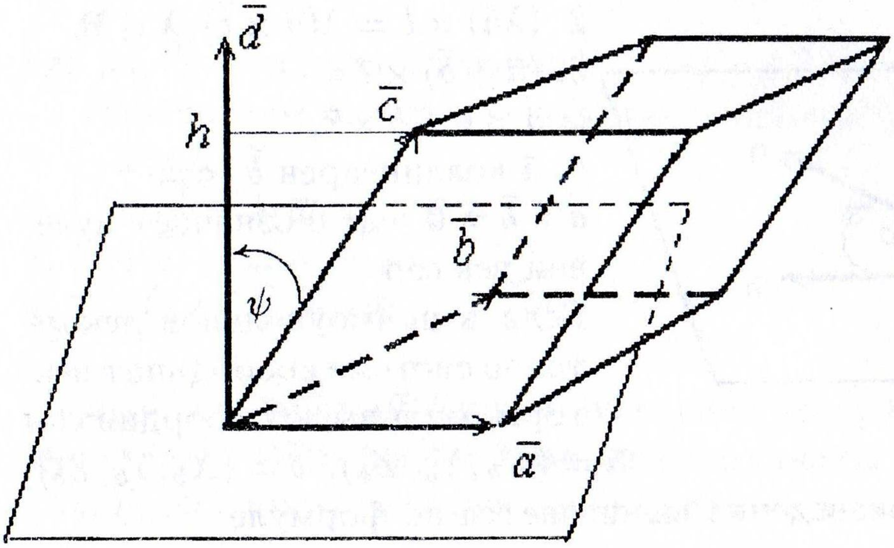

Рис. 2.

Отметим еще одно свойство смешанного произведения векторов. Если в нем производить циклическую замену множителей против часовой стрелки (рис. 3а), то произведение не изменяется; если же производить замену по часовой стрелке (рис.3б), то произведение изменяет лишь знак: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}$; $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = -\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b} = -\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} = -\overline{b}$

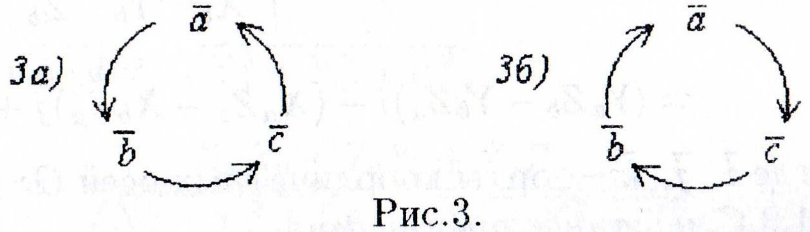

Рис.3.

Еще одно свойство смешанного произведения: для того, чтобы векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю. [5]

Если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат векторы векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ имеют следующие координаты $\overline{a} = (X_a, Y_a, Z_a)$, $\overline{b} = (X_b, Y_b, Z_b)$ $\overline{c} = (X_c, Y_c, Z_c)$, то их смешанное

[4] Две упорядоченные тройки векторов называются одноименными, если они обе правые или обе левые. Если одна из троек правая, а другая левая, то эти тройки называются разноименными.

[5] Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной плоскости.

произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix} =$$

$$= (Y_b Z_c - Y_c Z_b) X_a - (X_b Z_c - X_c Z_b) Y_a + (X_b Y_c - X_c Y_b) Z_a. \qquad (5)$$

Приведем несколько примеров решения простых задач.

ЗАДАЧА 1. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $|\overline{m}| = 1$, $|\overline{n}| = 2$, $\varphi = (\overline{m},\hat{}\ \overline{n}) = \frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и площадь S параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение. Обозначим $\psi = (\overline{a},\hat{}\ \overline{b})$. Как известно,

$$\cos\psi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и их длины.
$\overline{a}\cdot\overline{b} = (2\overline{m} - \overline{n})\cdot(\overline{m} + 2\overline{n}) = 2\overline{m}\cdot\overline{m} + 3\overline{m}\cdot\overline{n} - 2\overline{n}\cdot\overline{n} = 2|m|^2 + 3|m||n|\cos\varphi - 2|n|^2 = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 2^2 = -3$.
$|\overline{a}|^2 = \overline{a}\cdot\overline{a} = 4\overline{m}\cdot\overline{m} - 4\overline{m}\cdot\overline{n} + \overline{n}\cdot\overline{n} = 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2 = 4$.
$|\overline{b}|^2 = \overline{b}\cdot\overline{b} = \overline{m}\cdot\overline{m} + 4\overline{m}\cdot\overline{n} + 4\overline{n}\cdot\overline{n} = 1^2 + 4\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 2^2 = 21$.

Отсюда $\psi = \arccos\dfrac{-3}{2\sqrt{21}} \cong 1.904$ радиана.

Далее $\overline{a}\times\overline{b} = (2\overline{m} - \overline{n})\times(\overline{m} + 2\overline{n}) = 2\overline{m}\times\overline{m} - \overline{n}\times\overline{m} + 4\overline{m}\times\overline{n} - 2\overline{n}\times\overline{n} = 5(\overline{m}\times\overline{n})$, т.к. $\overline{m}\times\overline{m} = \overline{n}\times\overline{n} = \overline{0}$, $-\overline{n}\times\overline{m} = \overline{m}\times\overline{n}$.

Таким образом, $S = |(\overline{a}\times\overline{b})| = |5(\overline{m}\times\overline{n})| = 5|\overline{m}||\overline{n}|\sin\varphi = 5\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \cong 8.660$ кв.ед.

ЗАДАЧА 2. Точки $A(1,2,-1)$, $B(0,4,1)$, $C(2,0,3)$ — вершины треугольника. (Координаты точек даны в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.) Вычислить площадь $S\,\triangle ABC$.

Решение. $S = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (0-1, 4-2, 1-(-1)) = (-1, 2, 2),$$
$$\overline{AC} = (2-1, 0-2, 3-(-1)) = (1, -2, 4).$$

По формуле (3)

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\overline{j} +$$

$$+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\overline{k} = 12\overline{i} + 6\overline{j} + 0\overline{k} = 2(6\overline{i} + 3\overline{j}).$$

Здесь $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — орты координатных осей. Далее,

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 2\sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5},$$

$$S = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 3\sqrt{5} \cong 6.708.$$

ЗАДАЧА 3. Точки $A(1,0,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,1,0)$, $D(2,2,3)$ — вершины пирамиды. (Координаты точек даны в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.) Вычислить объем пирамиды $ABCD$.

Решение. Нетрудно видеть , что объем пирамиды равен одной шестой объема параллелепипеда, ребра которого — векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Объем параллелепипеда равен $|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}|$.
Как и выше, находим координаты векторов $\overline{AB} = (-1,1,2)$, $\overline{AC} = (-2,1,1)$, $\overline{AD} = (1,2,4)$. Затем вычисляем смешанное произведение, используя формулу (5):

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{1-й столбец умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 3-му, затем} \\ \text{2-й столбец прибавим к 1-му:}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Разложим определитель по} \\ \text{элементам 1-й строки:}}}{=} 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$-(-6+9) = -3$. Искомый объем равен $\frac{1}{6} \cdot |(-3)| = 0.5$ (куб. ед.).

1.4. *Различные формы уравнения плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.*

1.4.1. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору; общее уравнение плоскости; уравнение плоскости в отрезках; уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{n}(A, B, C)$ (рис.4), имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6}$$

Вектор $\overline{n}(A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости.*

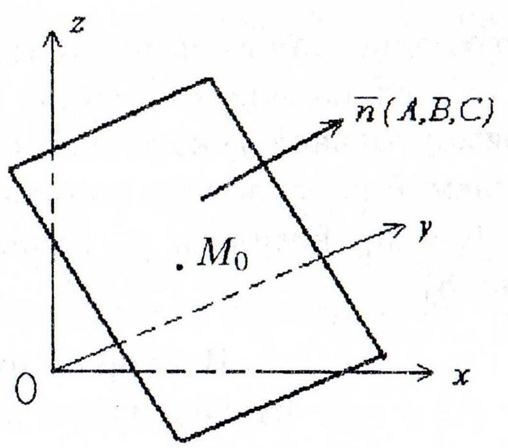

Рис. 4.

Общее уравнение плоскости — уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (7)$$

Здесь A, B, C, D — вещественные числа, хоть одно из чисел A, B, C не равно нулю; как и выше, нормальный вектор плоскости — вектор $\overline{n}(A, B, C)$. [6] Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (8)$$

где a, b, $c \in \mathbf{R}$, $abc \neq 0$, называется *уравнением плоскости в отрезках.* Здесь a, b, c — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Здесь x, y, z — координаты произвольной ("текущей") точки M плоскости.[7]

[6] Следует обратить внимание на то, что коэффициенты при координатах текущей точки в уравнении плоскости являются координатами нормального вектора этой плоскости.

[7] Уравнение (9) легко получить, если учесть, что точка M принадлежит рассматриваемой плоскости в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю, что и приводит к уравнению (9).

1.4.2. *Нормальное уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.*

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется с помощью задания расстояния $|OP| = p$ от начала координат O произвольной (но фиксированной) прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ до рассматриваемой плоскости и нормальным вектором плоскости $\overline{n}^0$, $|\overline{n}^0| = 1$, направленным из начала координат в сторону плоскости. [8] (Рис. 5).

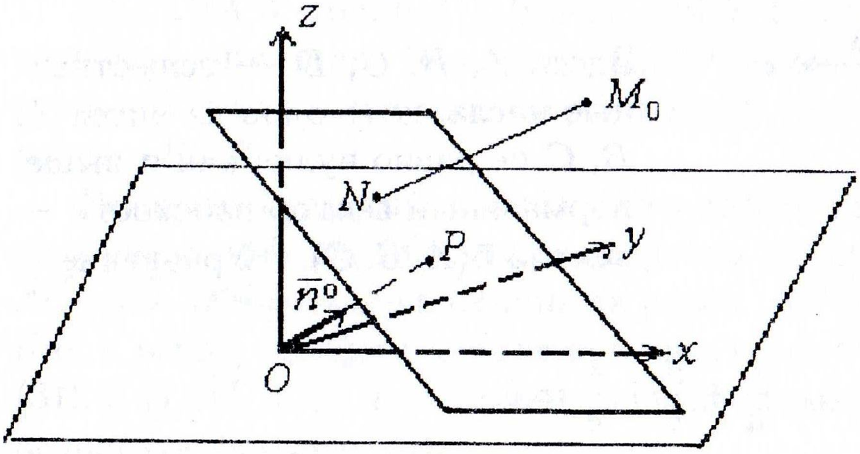

Рис. 5.

Вектор $\overline{n}^0$ имеет следующие координаты: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ — углы, образованные вектором $\overline{n}^0$ с осями координат.

Нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для приведения общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ к нормальному виду обе части его следует умножить на нормирующий множитель

$$\mathrm{M} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (11)$$

в правой части последнего равенства берется знак, противоположный знаку свободного члена D.

Для вычисления расстояния $|M_0N|$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной нормальным уравнением (10), следует в левую часть уравнения (10) подставить координаты этой точки и найти модуль полученного числа:

$$|M_0N| = |\, x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\,| \qquad (12).$$

[8] Если плоскость проходит через начало координат — точку O, то выбирается любое из двух возможных направлений вектора $\overline{n}^0$.

Если в правой части последнего равенства опустить знаки модуля $| \, |$, то получим расстояние $|M_0N|$, если точки M_0 и O лежат по разные стороны рассматриваемой плоскости, и расстояние $|M_0N|$ со знаком минус, если указанные точки лежат по одну сторону плоскости.

1.5. *Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.*

Углом между плоскостями с уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

называют угол между их нормальными векторами $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Как следует из определения скалярного произведения

$$\cos(\overline{n}_1, \widehat{\ } \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (12)$$

Условие параллельности плоскостей — условие параллельности их нормальных векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (13)$$

Условие перпендикулярности плоскостей — условие перпендикулярности их нормальных векторов:

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (14)$$

1.6. *Уравнения прямой в пространстве.*

1.6.1. *Канонические уравнения прямой.*

Прямую можно задать, если указать какую–либо ее точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и какой–нибудь вектор $\overline{l}(p, q, r)$, коллинеарный этой прямой (рис.6а):

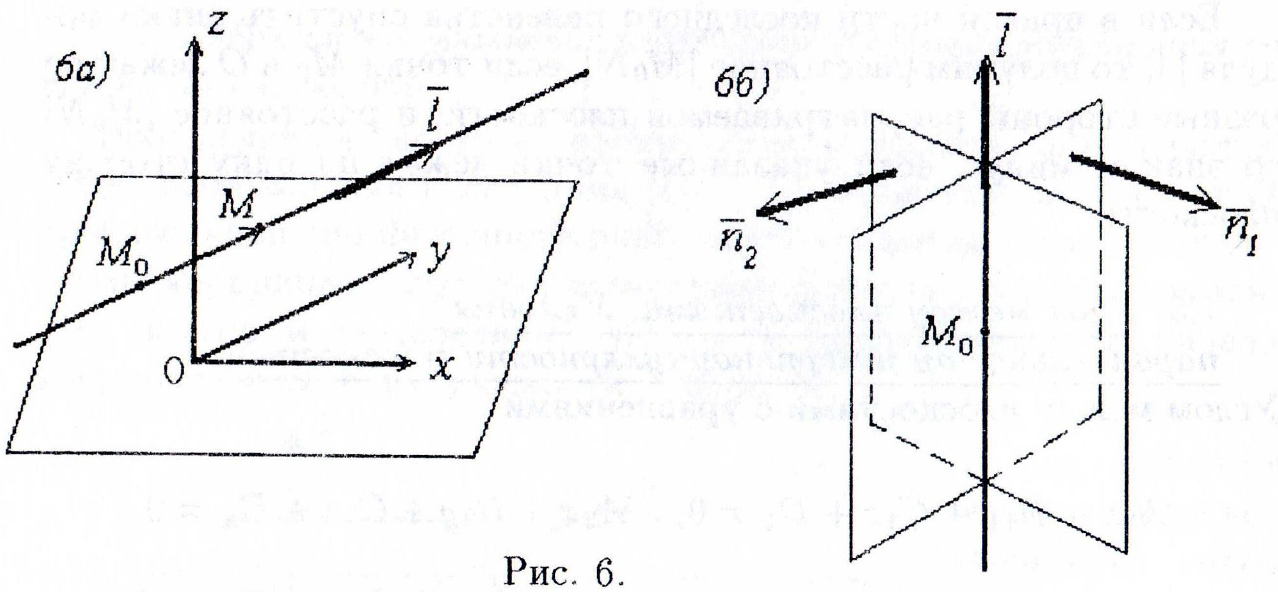

Рис. 6.

Вектор $\bar{l}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит рассматриваемой прямой в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ коллинеарны. Это приводит к *каноническим уравнениям прямой*:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \tag{15}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если на прямой известны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то в качестве вектора $\bar{l}$ можно взять вектор $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, и мы приходим к *уравнению прямой, проходящей через две точки:*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{16}$$

Приравняв каждое из отношений (15) параметру t, получим *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \end{cases} \tag{17}$$

$t \in (-\infty, +\infty)$. [9]

1.6.2. *Общие уравнения прямой.*

Прямую можно задать, указав две плоскости, пересекающиеся

[9] Если $t \in [a, b]$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, то уравнения (17) определяют отрезок AB прямой, $A(x_0 + pa, y_0 + qa, z_0 + ra)$, $B(x_0 + pb, y_0 + qb, z_0 + rb)$.

по этой прямой (рис. 6б). Если уравнения этих плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то уравнения прямой, по которой пересекаются эти плоскости, имеют вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Эти уравнения называются *общими уравнениями прямой.*

Переход от канонических уравнений прямой к общим можно осуществить, например, следующим образом: уравнения (15) записать в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q}, \\ \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} qx - py + \quad + (py_0 - qx_0) = 0, \\ \qquad ry - qz + (qz_0 - ry_0) = 0. \end{cases} \tag{18.1}$$

Это одна из разновидностей общих уравнений прямой. Прямая задана как линия пересечения плоскостей, проектирующих ее на координатные плоскости Oxy и Oyz.

Для перехода от общих уравнений прямой к каноническим нужно найти какую–нибудь ее точку (например, точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$) и нормальный вектор прямой. Так как точка M_0 принадлежит рассматриваемой плоскости, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений (18):

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0. \end{cases} \tag{18.2}$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, придав произвольное значение z_0, нетрудно из системы (18.2) найти x_0 и y_0.

Если же $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, придав произвольное значение y_0, из системы (18.2) получаем x_0 и z_0.

Наконец, если $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, придав произвольное значение x_0, из системы (18.2) находим y_0 и z_0.

В качестве вектора $\bar{l}$ можно взять вектор, коллинеарный вектору $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы плоскостей, пересекающихся по рассматриваемой прямой (рис. 6б).

1.7. *Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.*

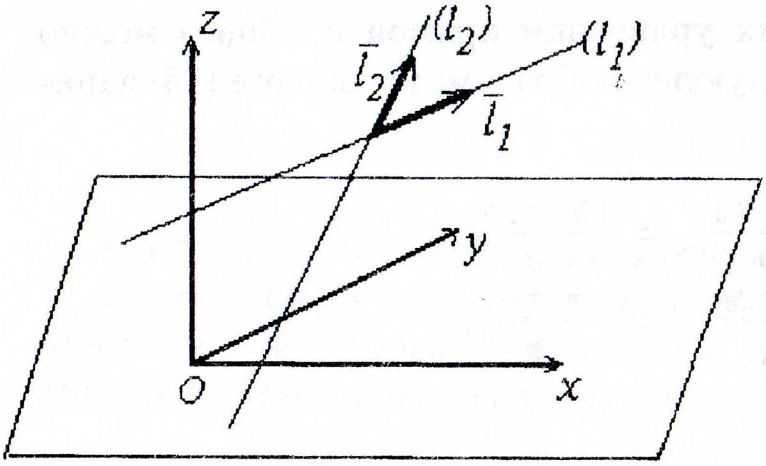

Рис. 7.

Углом между прямыми (l_1) и (l_2) называют угол между их направляющими векторами $\bar{l}_1(p_1, q_1, r_1)$ и $\bar{l}_2(p_2, q_2, r_2)$. [10] (Координаты векторов $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ заданы в прямоугольной декартовой системе координат.) Как следует из определения скалярного произведения

$$\cos(\bar{l}_1, \hat{}\, \bar{l}_2) = \frac{\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \tag{19}$$

Условие параллельности прямых — условие параллельности их направляющих векторов $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{20}$$

Условие перпендикулярности прямых — условие перпендикулярности их направляющих векторов:

$$\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0. \tag{21}$$

1.8. *Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.*

Угол между прямой и плоскостью — угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 8):

[10] Из этого определения вытекает, что угол образуют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся.

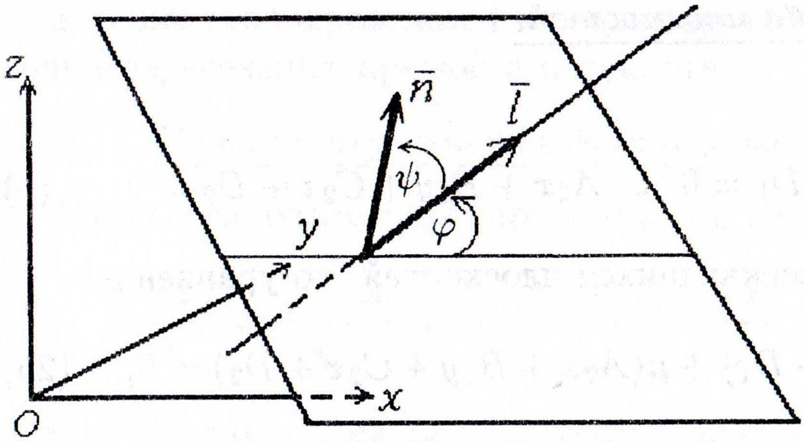

Рис. 8.

Обозначим φ угол между прямой и плоскостью, ψ — угол между направляющим вектором $\overline{l}$ прямой и нормальным вектором $\overline{n}$ плоскости. Так как $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm \psi$, то

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\overline{n}\cdot\overline{l}|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{l}|} = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \tag{22}$$

Условие параллельности прямой и плоскости — условие перпендикулярности нормального вектора $\overline{n}$ плоскости и направляющего вектора $\overline{l}$ прямой (рис. 9а):

$$\overline{n}\cdot\overline{l} = 0 \;\Leftrightarrow\; Ap + Bq + Cr = 0. \tag{23}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости — условие параллельности нормального вектора $\overline{n}$ плоскости и направляющего вектора $\overline{l}$ прямой (рис 9б):

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}. \tag{24}$$

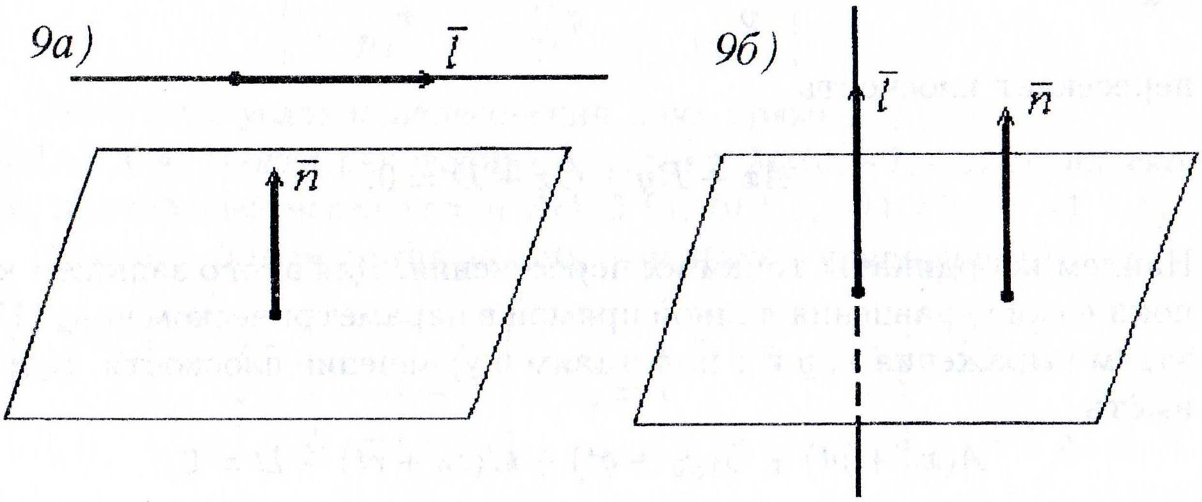

Рис. 9.

1.9. *Уравнение пучка плоскостей.*

Если

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (*)$$

— уравнения двух пересекающихся плоскостей, то уравнение

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (25)$$

где λ и μ — вещественные числа, из которых хоть одно не равно нулю, определяет плоскость, проходящую через линию пересечения плоскостей (*). Действительно, уравнение (25) — линейное относительно координат x, y, z "текущей" точки, следовательно, оно определяет некоторую плоскость. Если точка M_0 лежит на линии пересечения плоскостей (*) (рис.6б)), то ее координаты удовлетворяют каждому из уравнений (*) и обращают в нуль каждое из выражений в круглых скобках левой части уравнеия (25), откуда ясно, что эта плоскость проходит через линию пересечения плоскостей (*). Уравнение (25) называется *уравнением пучка плоскостей.*
ЗАМЕЧАНИЕ. При практическом решении задач одно из чисел λ или μ можно взять равным единице.

1.10. *Точка пересечения прямой и плоскости.*

Пусть не выполнено условие (23), и прямая

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

пересекает плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Найдем координаты точки их пересечения. Для этого запишем канонические уравнения данной прямой в параметрическом виде (17), затем выражения x, y и z подставим в уравнение плоскости. Будем иметь

$$A(x_0 + pt) + B(y_0 + qt) + C(z_0 + rt) + D = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap + Bq + Cr}.$$

Подставив это выражение t в уравнения (17), получим координаты точки пересечения прямой и плоскости.

1.11. *Условие пересечения двух прямых.*

Пусть непараллельные прямые (l_1) и (l_2) имеют уравнения

$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$$

соответственно. Они пересекаются (рис. (10)) в том и только в
$\bar{l}_2=(p_2,q_2,r_2)$ и $\overline{M_1M_2}$

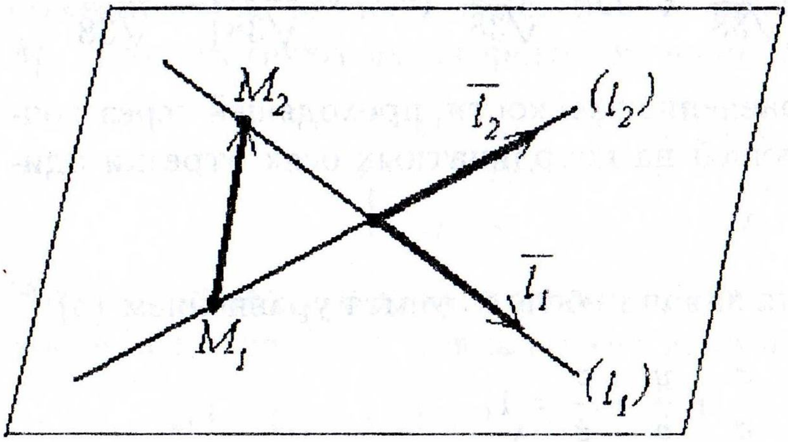

Рис. 10.

(Здесь обозначено: $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.) Необходимое и достаточное условие компланарности векторов — равенство нулю их смешанного произведения: $\overline{M_1M_2}\,\bar{l}_1\,\bar{l}_2=0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (26)$$

Это и есть условие пересечения двух прямых.

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние от точки $M_0(0,-1,-2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1,2,0)$, $B(2,1,-1)$, $C(-1,-1,-1)$.

Решение. Для решения задачи используем уравнение (9):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 1-2 & -1-0 \\ -1-1 & -1-2 & -1-0 \end{vmatrix}=0,\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив определитель по элементам 1-й строки, имеем

$$-2(x-1)+3(y-2)-5z=0 \Leftrightarrow 2x-3y+5z+4=0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$\mathrm{M} = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{38}}.$$

Нормальное уравнение плоскости (ABC) записывается в виде

$$-\frac{2}{\sqrt{38}}x + \frac{3}{\sqrt{38}}y - \frac{5}{\sqrt{38}}z - \frac{4}{\sqrt{38}} = 0.$$

Используем формулу (12) расстояния от точки до плоскости:

$$|M_0N| = \left| -\frac{2}{\sqrt{38}} \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{38}} \cdot (-1) - \frac{5}{\sqrt{38}} \cdot (-2) - \frac{4}{\sqrt{38}} \right| = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

ЗАДАЧА 5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 2, -3)$ и отсекающей на координатных осях отрезки одинаковой величины.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением (8):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

при $a = b = c$, т.е.

$$x + y + z = a.$$

Подставим в это уравнение координаты точки M_0:

$$2 + 2 - 3 = a, \quad \text{откуда} \quad a = 1,$$

и мы приходим к уравнению

$$x + y + z = 1.$$

ЗАДАЧА 6. Найти проекцию точки $M_0(1, -1, 2)$ на плоскость $2x + y - z - 5 = 0$.

Решение. Напишем канонические уравнения перпендикуляра к данной плоскости, проходящего через точку M_0:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Так как направляющим вектором перпендикуляра служит нормальный вектор $\overline{n} = (2, 1, -1)$ данной плоскости и координаты точки M_0 известны, то последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Перейдем здесь к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Обозначим $M_1(x_1, y_1, z_1)$ точку пересечения перпендикуляра с рассматриваемой плоскостью (сделайте чертеж!). Координаты точки M_1 соответствуют некоторому значению t_1 параметра t:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1, \\ y_1 = -1 + t_1, \\ z_1 = 2 - t_1. \end{cases}$$

Эти координаты должны удовлетворять и уравнению данной плоскости, т.к. точка M_1 принадлежит этой плоскости. Отсюда имеем

$$2(1 + t_1) + (-1 + t_1) - (2 - t_1) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 1,$$

и мы получаем $x_1 = 3$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$. Итак, $M_1(3, 0, 1)$.

ЗАДАЧА 7. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$$

и образующую угол $\frac{\pi}{3}$ с плоскостью $x - 7 = 0$.

Решение. Запишем уравнение (25) пучка плоскостей, соответствующее данному случаю:

$$x - z + 1 + \mu(y + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \mu y - z + (1 + 4\mu) = 0.$$

Соответствующий нормальный вектор $\overline{n} = (1, \mu, -1)$. Нормальный вектор плоскости $x - 7 = 0$ есть вектор $\overline{n}_1 = (1, 0, 0)$. Найдем косинус угла между плоскостью пучка при фиксированном значении μ и плоскостью $x - 7 = 0$ (угла между векторами $\overline{n}$ и $\overline{n}_1$):

$$cos(\overline{n}, \widehat{\ } \, \overline{n}_1) = \frac{\overline{n} \cdot \overline{n}_1}{|\overline{n}| \cdot |\overline{n}_1|}.$$

По условию $(\overline{n},\widehat{\ }\overline{n}_1) = \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1 + \mu\cdot 0 + (-1)\cdot 0}{\sqrt{1^2+\mu^2+(-1)^2}\cdot 1} \Leftrightarrow 2+\mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu = \pm\sqrt{2}.$$

Имеются две плоскости, удовлетворяющие условиям задачи. Их уравнения:

$$x + \sqrt{2}y - z + 1 + 4\sqrt{2} = 0 \quad \text{и} \quad x - \sqrt{2}y - z + 1 - 4\sqrt{2} = 0.$$

ЗАДАЧА 8. Написать уравнения проекции прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

на плоскость $x + y - z - 2 = 0$.

<u>*1 – й способ решения.*</u>

Напишем уравнение плоскости (P_1) , проектирующей данную прямую (обозначим ее (l)) на данную плоскость, которую обозначим (P) (рис. 11). Для этого перейдем от канонических уравнений прямой (l) к общим:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1}, \\[2mm] \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+1}{2}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ x - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение пучка плоскостей, пересекающихся по прямой (l):

$$x - 2y - 1 + \mu(x - z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\mu)x - 2y - \mu z - (1+2\mu) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости пучка $\overline{n}_1 = (1+\mu, -2, -\mu)$ должен быть перпендикулярным нормальному вектору $\overline{n} = (1, 1, -1)$ плоскости (P). Поэтому

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\mu)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-\mu)\cdot(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{2},$$

и уравнение плоскости (P_1) запишется так:

$$(1+\frac{1}{2})x-2y-\mu z-(1+2\cdot\frac{1}{2})=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-4y-z-4=0.$$

Общие уравнения проекции (l_1) можно написать, используя уравнения плоскостей (P) и (P_1):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & - & 2 & = & 0, \\ 3x & - & 4y & - & z & - & 4 & = & 0. \end{array}\right. \qquad (*)$$

2 – й способ решения.

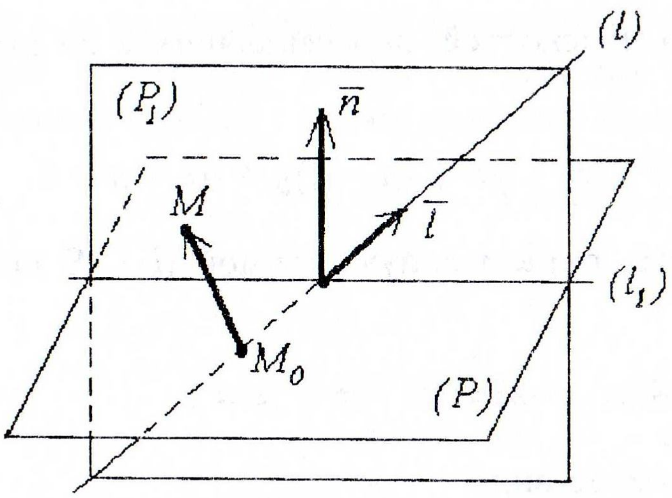

Рис. 11.

Обозначим $M(x,y,z)$ произвольную ("текущую") точку плоскости (P_1) (сохраняем обозначения, введенные выше), $M_0(1,0,-1)$ — точку прямой (l) (рис. 11). Точка M принадлежит плоскости (P_1) в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_0M}=(x-1,y,z+1)$, $\overline{n}$ и направляющий вектор $\overline{l}=(2,1,2)$ прямой (l) компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)-4y-(z+1)=0,$$

т.е.

$$3x-4y-z-4=0.$$

Как и выше, уравнения проекции записываются в виде системы $(*)$.

ЗАДАЧА 9. Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}, \quad \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

Решение. Обозначим первую из данных прямых (l_1), вторую — (l_2). Направляющие векторы этих прямых $\overline{l}_1=(2,1,-2)$ и $\overline{l}_2=(3,2,-2)$ не коллинеарны, следовательно, прямые не параллельны.

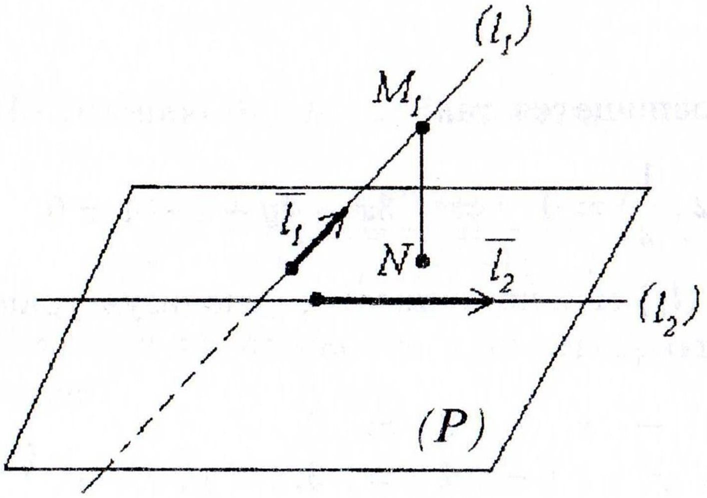

Рис. 12.

Напишем уравнение плоскости (P), проходящей через прямую (l_2) параллельно прямой (l_1) (см. рис 12). Для этого перейдем от канонических уравнений прямой (l_2) к общим

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

и напишем уравнение пучка плоскостей, пересекающихся по этой прямой:

$$2x - 3y + \mu(y + z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + (\mu - 3)y + \mu z - \mu = 0.$$

Выберем из пучка плоскость, параллельную прямой (l_1). В силу условия (23)

$$2 \cdot 2 + (\mu - 3) \cdot 1 + \mu \cdot (-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1,$$

и уравнение плоскости (P) имеет вид

$$2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Приведем его к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3},$$

и нормальное уравнение плоскости (P) запишется в виде

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0.$$

Для нахождения искомого расстояния $|M_1N|$ используем формулу (12) расстояния о точки до плоскости: подставим координаты точки $M_1(1, 1, 0)$ в левую часть последнего уравнения и найдем модуль полученного числа:

$$|M_1N| = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 10. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,0,1)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}, \quad \frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

Решение. Будем искать уравнения прямой в канонической форме. Точка $M_0(1,0,1)$, принадлежащая этой прямой, известна. Поэтому можно написать уравнения прямой следующим образом:

$$\frac{x-1}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z-1}{r}, \tag{I}$$

где p, q, r — координаты неизвестного пока ее направляющего вектора. Используем равенство (26) для записи условий пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-0 & 1-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} 0-1 & -1-0 & -1-1 \\ 3 & 2 & 2 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Это приводит к следующей системе двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p, q, r:

$$\begin{cases} -3p+\ \ q-r &= 0, \\ \ \ 2p-4q+r &= 0, \end{cases}$$

из которой p, q выражаются через r так:

$$p=-\frac{3}{10}r, \quad q=\frac{1}{10}r.$$ [11]

После подстановки этих выражений p, q в уравнения (I) и умножения всех частей полученных уравнений на $\frac{r}{10}$ приходим к уравнениям искомой прямой

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{10}.$$

[11] То, что координаты направляющего вектора искомой прямой имеют общий множитель $r, r \neq 0$, согласуется с тем фактом, что направляющие векторы одной и той же прямой коллинеарны.

2. *ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.*

Поверхности второго порядка — поверхности, которые имеют уравнения второй степени относительно декартовых координат. Кроме нехарактерных случаев (случаев, когда рассматриваемое уравнение второй степени определяет пустое множество, точку, прямую, плоскость, пару плоскостей), поверхностями второго порядка являются сфера, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конус и цилиндры второго порядка (рис. 13).[12]

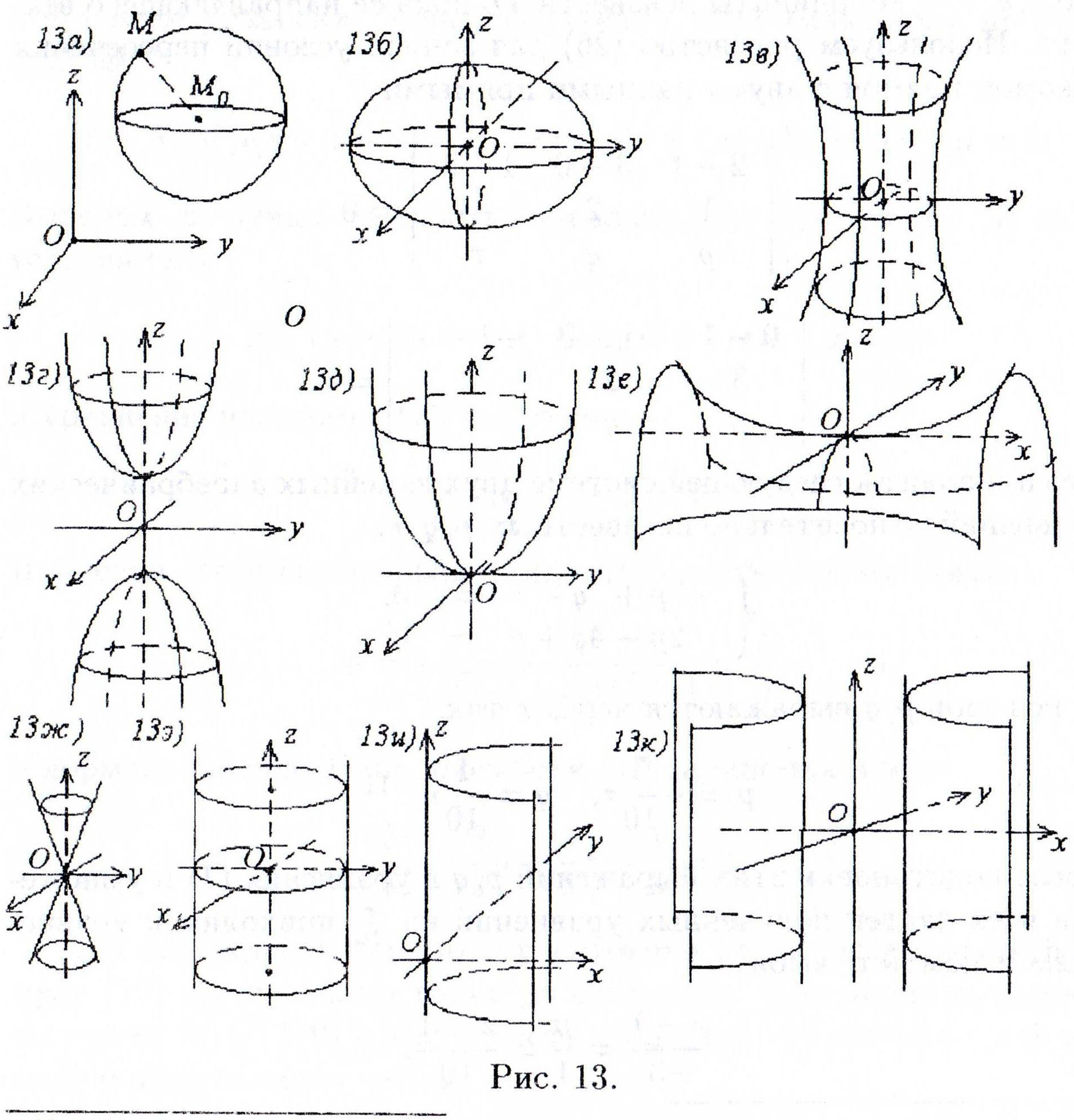

Рис. 13.

[12] Приведем здесь лишь канонические уравнения поверхностей второго порядка и их рисунки. Более подробная информация содержится в книгах [1,2] и других учебниках по аналитической геометрии.

СФЕРА. Если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ центр сферы — точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиус сферы равен $M_0M = R$ (рис. 13а), то уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{27}$$

ЭЛЛИПСОИД. Каноническое уравнение эллипсоида записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \text{ – положительные числа.} \tag{28}$$

Эллипсоид изображен на рис. 13б).

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \text{ – положительные числа.} \tag{29}$$

Однополостный гиперболоид изображен на рис. 13в).

ДВУПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a, b, c \text{ – положительные числа.} \tag{30}$$

Двуполостный гиперболоид изображен на рис. 13г).

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД. Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z, \quad p, q \text{ – положительные числа.} \tag{31}$$

Эллиптический параболоид изображен на рис. 13д).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД. Каноническое уравнение гиперболического параболоида записывается в виде

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \quad p, q \text{ – положительные числа.} \tag{32}$$

Гиперболический параболоид изображен на рис. 13е).

КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА. Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c \text{ – положительные числа.} \tag{33}$$

Конус второго порядка изображен на рис. 13ж).

ЦИЛИНДРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА. Их канонические уравнения записываются в виде:
а) для *эллиптического цилиндра*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b \text{ – положительные числа}, \tag{34}$$

рис. 13з);
б) для *параболического цилиндра*:

$$y^2=2px, \quad p \text{ – положительное число}, \tag{35}$$

рис. 13и);
в) для *гиперболического цилиндра*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b \text{ – положительные числа}, \tag{36}$$

рис. 13к).

ЗАДАЧА 11. Указать тип поверхности, заданной уравнением

$$4x^2+36y^2+9z^2+16x+72y+16=0,$$

и сделать ее чертеж в системе координат $Oxyz$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4(x^2+4x)+36(y^2+2y)+9z^2+16=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left((x+2)^2-4\right)+36\left((y+1)^2-1\right)+9z^2+16=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2+36(y+1)^2+9z^2=36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1. \tag{II}$$

Сделаем параллельный перенос осей координат с помощью преобразования

$$\begin{cases} \overline{x} &= & x+2, \\ \overline{y} &= & y+1, \\ \overline{z} &= & z \end{cases} \quad \text{(см рис. 14).}$$

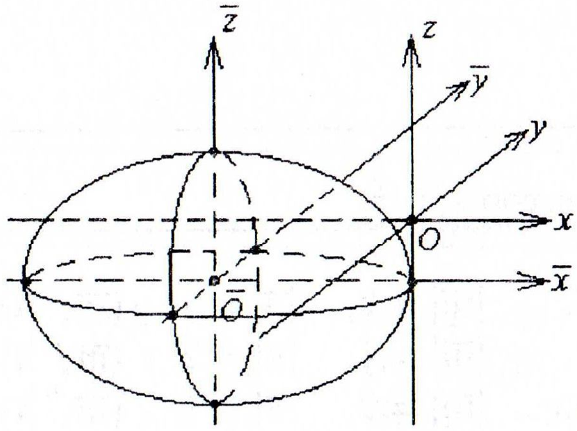

Рис. 14.

Начало координат новой координатной системы $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ — точка $\overline{O}(-2,-1,0)$. Уравнение (II) записывается в новой системе координат так:

$$\frac{\overline{x}^2}{9}+\frac{\overline{y}^2}{1}+\frac{\overline{z}^2}{4}=1$$

и определяет эллипсоид с полуосями $3, 1, 2$. Центр эллипсоида — точка $\overline{O}$, оси симметрии — координатные оси новой координатной системы.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1.

Решить задачи №№$1.k.$ — $4.k.$ для варианта №k.

Задача №1.

Вычислить $\cos(\overline{a},\widehat{\ }\,\overline{b})$ и длину вектора $\overline{a}\times\overline{b}$, если

Вар-т №	Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$				
1.1.	$\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}$,	$\overline{b}=3\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.2.	$\overline{a}=\overline{m}+3\overline{n}$,	$\overline{b}=2\overline{m}-\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{6}$.
1.3.	$\overline{a}=\overline{m}-3\overline{n}$,	$\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.4.	$\overline{a}=\overline{m}+5\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.
1.5.	$\overline{a}=\overline{m}-3\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.6.	$\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=3$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.
1.7.	$\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+5\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.8.	$\overline{a}=\overline{m}-4\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{6}$.
1.9.	$\overline{a}=2\overline{m}-3\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=3$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.
1.10.	$\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}$,	$\overline{b}=3\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.11.	$\overline{a}=\overline{m}-3\overline{n}$,	$\overline{b}=2\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{6}$.
1.12.	$\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$,	$\overline{b}=2\overline{m}-3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=4$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.13.	$\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+3\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=2$,	$\lvert\overline{n}\rvert=1$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.
1.14.	$\overline{a}=3\overline{m}-\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=3$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{3}$.
1.15.	$\overline{a}=5\overline{m}-\overline{n}$,	$\overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert=1$,	$\lvert\overline{n}\rvert=2$,	$(\overline{m},\widehat{\ }\,\overline{n})=\frac{\pi}{4}$.

Вар-т №	Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$				
1.16.	$\overline{a} = 3\overline{m} + \overline{n}$,	$\overline{b} = 3\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$.
1.17.	$\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$,	$\overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 2$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{4}$.
1.18.	$\overline{a} = 2\overline{m} + 5\overline{n}$,	$\overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 2$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.
1.19.	$\overline{a} = \overline{m} - 5\overline{n}$,	$\overline{b} = \overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$.
1.20.	$\overline{a} = -3\overline{m} + 2\overline{n}$,	$\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.
1.21.	$\overline{a} = \overline{m} - 4\overline{n}$,	$\overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 2$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$.
1.22.	$\overline{a} = \overline{m} + 4\overline{n}$,	$\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 1$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.
1.23.	$\overline{a} = \overline{m} - 6\overline{n}$,	$\overline{b} = \overline{m} + 2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 2$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{4}$.
1.24.	$\overline{a} = \overline{m} + 3\overline{n}$,	$\overline{b} = -\overline{m} + 2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 3$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 2$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{6}$.
1.25.	$\overline{a} = 3\overline{m} - 2\overline{n}$,	$\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$,	$\lvert\overline{m}\rvert = 1$,	$\lvert\overline{n}\rvert = 3$,	$(\overline{m},\hat{\ }\overline{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Задача №2.

A, B, C, D — вершины пирамиды.

а) Используя скалярное произведение векторов, найти $\angle ABC$.

б) Используя векторное произведение векторов, найти площадь грани ABC.

в) Используя смешанное произведение векторов, найти объем пирамиды $ABCD$.

г) Написать уравнения:

г1) плоскости ABC,

г2) прямой (AB),

г3) перпендикуляра (DK) к грани ABC.

д) Используя формулу расстояния от точки до плоскости, вычислить длину высоты $|DK|$ пирамиды.

е) Вычислить двугранный угол между плоскостями ABC и BCD.

Вар-т №	Координаты точек A, B, C, D			
2.1.	$A(1,-1,2)$,	$B(2,3,4)$,	$C(0,-1,6)$,	$D(1,-2,0)$.
2.2.	$A(2,3,4)$,	$B(0,1,-6)$,	$C(1,-2,0)$,	$D(1,-1,2)$.
2.3.	$A(0,-1,6)$,	$B(1,-2,0)$,	$C(1,-1,2)$,	$D(2,3,4)$.
2.4.	$A(1,-2,0)$,	$B(1,-1,2)$,	$C(2,3,4)$,	$D(0,-1,6)$.
2.5.	$A(-1,1,-2)$,	$B(-2,-3,-4)$,	$C(0,1,-6)$,	$D(-1,2,0)$.

Вар-т №	Координаты точек A, B, C, D			
2.6.	$A(-2,-3,-4)$,	$B(0,1,-6)$,	$C(-1,2,0)$,	$D(-1,1,-2)$.
2.7.	$A(0,1,-6)$,	$B(-1,2,0)$,	$C(-1,1,-2)$,	$D(-2,-3,-4)$.
2.8.	$A(-1,2,0)$,	$B(-1,1,-2)$,	$C(-2,-3,-4)$,	$D(0,1,-6)$.
2.9.	$A(2,3,1)$,	$B(4,1,-2)$,	$C(6,3,7)$,	$D(-5,-4,8)$.
2.10.	$A(4,1,-2)$,	$B(6,3,7)$,	$C(-5,-4,8)$,	$D(2,3,1)$.
2.11.	$A(6,3,7)$,	$B(-5,-4,8)$,	$C(2,3,1)$,	$D(4,1,-2)$.
2.12.	$A(-5,-4,8)$,	$B(2,3,1)$,	$C(4,1,-2)$,	$D(6,3,7)$.
2.13.	$A(-4,-1,2)$,	$B(-6,-3,-7)$,	$C(5,4,-8)$,	$D(-2,-3,-1)$.
2.14.	$A(-6,-3,-7)$,	$B(5,4,-8)$,	$C(-2,-3,-1)$,	$D(-4,-1,2)$.
2.15.	$A(5,4,-8)$,	$B(-2,-3,-1)$,	$C(-4,-1,2)$,	$D(-6,-3,-7)$.
2.16.	$A(-2,-3,-1)$,	$B(-4,-1,2)$,	$C(-6,-3,-7)$,	$D(5,4,-8)$.
2.17.	$A(1,-2,4)$,	$B(3,7,6)$,	$C(-4,8,-5)$,	$D(3,1,2)$.
2.18.	$A(3,7,6)$,	$B(-4,8,-5)$,	$C(3,1,2)$,	$D(1,-2,4)$.
2.19.	$A(-4,8,-5)$,	$B(3,1,2)$,	$C(1,-2,4)$,	$D(3,7,6)$.
2.20.	$A(3,1,2)$,	$B(1,-2,4)$,	$C(3,7,6)$,	$D(-4,8,-5)$.
2.21.	$A(-1,2,-4)$,	$B(-3,-7,-6)$,	$C(4,-8,5)$,	$D(-3,-1,-2)$.
2.22.	$A(-3,-7,-6)$,	$B(4,-8,5)$,	$C(-3,-1,-2)$,	$D(-1,2,-4)$.
2.23.	$A(4,-8,5)$,	$B(-3,-1,-2)$,	$C(-1,2,-4)$,	$D(-3,-7,-6)$.
2.24.	$A(-1,1,2)$,	$B(3,2,4)$,	$C(-1,0,6)$,	$D(-2,1,0)$.
2.25.	$A(3,2,4)$,	$B(-1,0,6)$,	$C(-2,1,0)$,	$D(-1,1,2)$.

Задача №3.

Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую (l) перпендикулярно плоскости (P).

Вар-т №	Уравнения прямой (l)	Уравнение плоскости (P)
3.1.	$\begin{cases} 2x+3y-z+5=0 \\ x-y+3z-1=0, \end{cases}$	$x+y-z=0$.
3.2.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$,	$x+y-2z+3=0$.

Вар-т №	Уравнения прямой (l)	Уравнение плоскости (P)
3.3.	$\begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x+y-z-\ =0, \end{cases}$	$2x-y+z-1=0.$
3.4.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2},$	$3x+2y-z+15=0.$
3.5.	$\dfrac{x-2}{5}=y-3=\dfrac{z+1}{2},$	$x+4y-3z+7=0.$
3.6.	$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{2},$	$x-2y-3z-5=0.$
3.7.	$\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2},$	$2x+3y-z+2=0.$
3.8.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2}{-2},$	$3x-2y+z-5=0.$
3.9.	$\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2},$	$3x+2y+z-15=0.$
3.10.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+2}{-2},$	$3x-2y+z+10=0.$
3.11.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-2}{2},$	$3x-2y-z+3=0.$
3.12.	$\begin{cases} 3x+2y-z+5=0 \\ x-y-3z+1=0, \end{cases}$	$x+y-z+6=0.$
3.13.	$x-3=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+1}{2},$	$4x+y-3z+5=0.$
3.14.	$\begin{cases} 2x-y+3z+5=0 \\ x+3y-z-1=0, \end{cases}$	$x-y+z-3=0.$
3.15.	$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=z-3,$	$3x-y-4z+2=0.$
3.16.	$\begin{cases} 2x-3y+z+5=0 \\ x+y-3z-1=0, \end{cases}$	$x-y+z-5=0.$
3.17.	$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=z-3,$	$3x+y-4z+2=0.$
3.18.	$\begin{cases} x+3y+2z+5=0 \\ 3x+y-z+1=0, \end{cases}$	$x-y+z-3=0.$
3.19.	$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+3}{-1},$	$3x+y-4z+9=0.$
3.20.	$\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ 2x-y-z+\ =0, \end{cases}$	$2x+y+z-4=0.$

Вар-т №	Уравнения прямой (l)	Уравнение плоскости (P)
3.21.	$\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x-y+z=0, \end{cases}$	$2x+y-z-3=0.$
3.22.	$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-5}=z-3,$	$3x-y-4z-1=0.$
3.23.	$\begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ x-2y-z=0, \end{cases}$	$x-2y-z-8=0.$
3.24.	$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2},$	$3x+2y-z-5=0.$
3.25.	$\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ 2x+y-z=0, \end{cases}$	$x-y+5=0.$

Задача №4.

Указать тип поверхности (S) и сделать ее чертеж в системе координат $Oxyz$, если уравнение поверхности (S) имеет вид

Вар-т №	Уравнение поверхности (S)
4.1.	$36x^2+9y^2+4z^2-18y+16z=11.$
4.2.	$9x^2+36y^2+4z^2-18x+16z=11.$
4.3.	$9x^2+36y^2+4z^2+18x-16z=11.$
4.4.	$4x^2+9y^2+36z^2+16x-18z=11.$
4.5.	$36x^2-9y^2+4z^2+18y+16z=29.$
4.6.	$4x^2-9y^2+36z^2+16x+18y=29.$
4.7.	$9x^2-36y^2-4z^2-18x-16z=-29.$
4.8.	$36x^2+4y^2-9z^2+16y+18z=29.$
4.9.	$36x^2-9y^2-4z^2+18y+16z=61.$
4.10.	$36x^2-4y^2-9z^2-16y+18z=61.$
4.11.	$9x^2-36y^2+4z^2-18x+16z=-61.$
4.12.	$4x^2+9y^2-36z^2+16x-18y=-61.$
4.13.	$x^2+4y^2-2(x+2z)=3.$
4.14.	$x^2+4y^2-2(x-2z)=3.$
4.15.	$y^2+4z^2-4(x+2z)=0.$

Вар-т №	Уравнение поверхности (S)
4.16.	$4x^2 + z^2 - 4(2x + y) = 0.$
4.17.	$4x^2 + z^2 - 4(y - 2x) = 0.$
4.18.	$y^2 + 4z^2 + 4(x - 2z) = 0.$
4.19.	$9x^2 - 4z^2 - 36y - 16z = -20.$
4.20.	$9x^2 - 4z^2 + 36y - 16z = 52.$
4.21.	$4x^2 - 9y^2 + 16x + 36z = 20.$
4.22.	$9x^2 - 4y^2 - 16y + 36z = 52.$
4.23.	$9x^2 + 4y^2 - 36z^2 + 18x - 16y = -25.$
4.24.	$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 18y - 16z = 11.$
4.25.	$4x^2 - 9y^2 + z^2 - 8x - 36y = 68.$

3. *КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.*

3.1. *Криволинейные интегралы первого рода.*

Криволинейные интегралы первого рода — интегралы по длине дуги кривой.

Сформулируем определение криволинейного интеграла первого рода и приведем правила его вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть вдоль непрерывной простой спрямляемой кривой $\overset{\smile}{AB}$ задана произвольная функция $f(M)$. Возьмем на этой кривой точки $M_0 = A$, $M_1 \ldots, M_n = B$ (рис. 15). Обозначим Δl_i длину дуги $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$, $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta l_i\}$. На дуге $\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ возьмем произвольную точку $\widetilde{M_i}$.

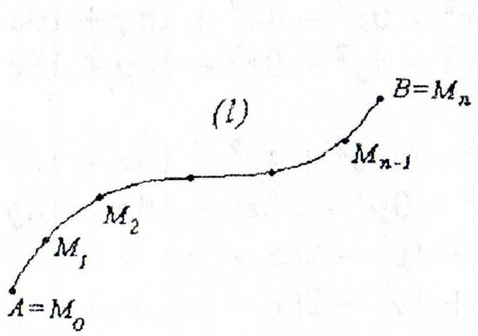

Рис. 15.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{M}_i)\Delta l_i,$$

не зависящий ни от способа разбиения кривой $\breve{AB}$ на части, ни от выбора точек $\widetilde{M}_i$,то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой $\breve{AB}$ (или криволинейным интегралом первого рода по длине кривой $\breve{AB}$). Величина этого предела обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)\,dl$$

Если гладкая кривая $\breve{AB}$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, или, что то же самое, имеет представление $\overline{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, при этом $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ и $x'(t), y'(t), z'(t)$ — непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции, то криволинейный интеграл первого рода от непрерывной на кривой $\breve{AB}$ функции $f(x, y, z)$ сводится к определенному интегралу

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt. \tag{37}$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода аналогичны свойствам определенного интеграла. Однако криволинейный интеграл первого рода *не зависит от выбора направления кривой.*

ПРИМЕР 1.

Вычислить

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dl,$$

где кривая γ задана уравнениями $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. $x'(t) = -a\sin t, y'(t) - a\cos t, z'(t) = b$. Тогда по формуле (37) вычисления криволинейного интеграла первого рода имеем

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg} 2\pi b/a.$$

3.2. *Криволинейные интегралы второго рода.*

Криволинейные интегралы второго рода — интегралы по координатам.

Сформулируем определение криволинейного интеграла второго рода и приведем правила его вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть вдоль непрерывной простой спрямляемой кривой $\breve{AB}$ определена вектор–функция $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$. На кривой $\breve{AB}$ выберем произвольно точки $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, $M_n = B$ и точки $\widetilde{M_i}$, лежащие на дугах $\breve{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть точки M_i имеют координаты (x_i, y_i, z_i). Обозначим $\lambda_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i\}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Если существует

$$\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\widetilde{M_i})\Delta x_i + Q(\widetilde{M_i})\Delta y_i + R(\widetilde{M_i})\Delta z_i,$$

не зависящий ни от способа разбиения кривой $\breve{AB}$ на части, ни от выбора точек $\widetilde{M_i}$, то он называется криволинейным интегралом второго рода (или криволинейным интегралом по координатам) от векторной функции $\overline{F}$ по кривой $\breve{AB}$ и обозначается

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \text{ или}$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(M)\,dx+Q(M)\,dy+R(M)\,dz, \text{ или } \int\limits_{\breve{AB}} \overline{F}(M)\cdot d\overline{r}, \text{ где} d\overline{r}=(dx,dy,dz).$$

Если гладкая кривая $\breve{AB}$ имеет представление

$$\overline{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)), \quad \alpha\le t\le\beta,$$

где $x(t), y(t), z(t)$-непрерывно дифференцируемые на сегменте $[\alpha,\beta]$ функции, то для непрерывной вектор-функции $\overline{F}$ криволинейный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt. \tag{38}$$

Для криволинейного интеграла второго рода сохраняются все свойства определенного интеграла. В частности, *знак криволинейного интеграла второго рода изменяется при изменении выбора направления кривой*:

$$\int\limits_{\breve{BA}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=-\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

ПРИМЕР 2.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\gamma} x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz,$$

γ — направленный отрезок AB, $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.

Решение. Составим уравнения прямой, проходящей через точки A и B.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Уравнения этой прямой в параметрической форме имеют вид

$$x = t + 1, y = 2t + 1, z = 3t + 1, 0 \le t \le 1.$$

По формуле (38) сведения криволинейного интеграла второго рода к определенному имеем

$$\int\limits_{\gamma} x\,dx + y\,dy + z\,dz = \int\limits_{0}^{1} ((t+1)1 + (2t+1)2 + (3t+1)3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (14t + 6)\,dt = 13.$$

4. *ГРАДИЕНТ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ.*

Градиентом функции $U = U(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор

$$gradU\,(M_0) = \frac{\partial U(M_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U(M_0)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U(M_0)}{\partial z}\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ координатные орты.

Если ввести оператор Гамильтона

$$\nabla \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \text{то} \quad gradU = \nabla U.$$

Градиент функции U в точке M_0 направлен по нормали к поверхности уровня функции U, задаваемой уравнением $U(x, y, z) = C$, $C = const$, выходящей из точки M_0.

Производной функции $U = U(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению, определяемому вектором $\bar{l}$, называется

$$\lim_{MM_0 \to 0} \frac{U(M) - U(M_0)}{MM_0},$$

где M и M_0 — точки на оси, направление которой задано вектором $\bar{l}$ (рис. 16), а MM_0 — величина [13] направленного отрезка этой прямой.

---

[13]Величина MM_0 вектора $\overline{MM_0}$, лежащего на оси (l), направление которой

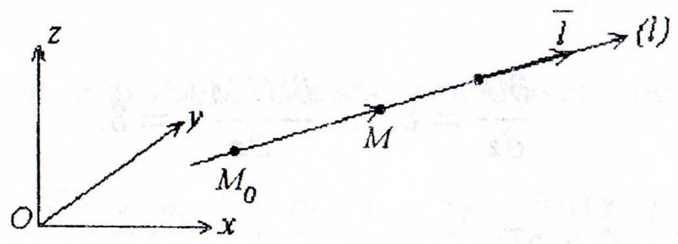

Рис. 16.

Производная функции U по направлению l обозначается $\frac{\partial U}{\partial l}$. Если вектор $\bar{l}$ составляет с осями координат углы α, β, γ соответственно, то имеет место следующая формула

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Производная функции U по направлению l характеризует скорость изменения функции U в направлении оси (l). Производная по направлению и градиент связаны формулой

$$\frac{\partial U}{\partial l} = gradU \cdot \bar{l}^0, \quad \bar{l}^0 = \frac{1}{|\bar{l}|} \cdot \bar{l}.$$

Из этой формулы следует, что направление градиента — это направление наибольшей скорости возрастания функции, т.е. если $\bar{l}_{gr} = gradU$, то производная по этому направлению принимает наибольшее значение

$$\frac{\partial U}{\partial l_{gr}} = |gradU|.$$

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1.

Вычислить величину угла между градиентами функций $U = x^3 - y^3 + z^3$ и $V = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M(1,1,1)$.

Решение.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial U(M)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -3y^2, \quad \frac{\partial U(M)}{\partial y} = -3,$$

задано вектором $\bar{l}$, определяется следующим образом:

$$MM_0 = \begin{cases} \left|\overline{MM_0}\right|, & \text{если } \overline{MM_0} \uparrow\uparrow \bar{l}, \\ -\left|\overline{MM_0}\right|, & \text{если } \overline{MM_0} \uparrow\downarrow \bar{l}, \\ 0, & \text{если } \left|\overline{MM_0}\right| = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=3z^2,\quad \frac{\partial U(M)}{\partial z}=3.$$

Отсюда
$gradU|_M=3\bar{i}-3\bar{j}+3\bar{k}$

Аналогично получаем
$gradV|_M=2\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$.

Пусть α — угол между $gradU|_M$ и $gradV|_M$. Тогда

$$\cos\alpha=\frac{(gradU\,(M)\,,gradV\,(M))}{|gradU\,(M)\,|\cdot|gradV\,(M)\,|}=-1/\sqrt{6},$$

и $\alpha=\arccos(-1/\sqrt{6})$.

ПРИМЕР 2.

Найти значение производной функции U в точке M в направлении вектора $\bar{l}=\overline{MN}$, если $U=xy+xz+yz$, $M(1,2,3)$, $N(2,3,4)$.

Решение.

$$\bar{l}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\quad \frac{\partial U(M)}{\partial l}=\frac{gradU\,(M)\cdot\bar{l}}{|\bar{l}|}.$$

Вычислим значение градиента функции U в точке M:
$gradU\,(M)=5\bar{i}+4\bar{j}+3\bar{k}$.

Тогда

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=12/\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

5. *РАСХОДИМОСТЬ И ВИХРЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ.*

Пространственная (или плоская) область, в каждой точке M которой задан вектор $\overline{F}(M)$, называется полем вектора $\overline{F}$, или просто векторным полем.

Будем рассматривать поле вектора $\overline{F}$ для случая пространства. Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ с ортами осей $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ вектор $\overline{F}$ имеет разложение

$$\overline{F}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k},$$

где P, Q, R — функции координат точки $M(x,y,z)$.

Расходимостью, или *дивергенцией*, векторного поля $\overline{F}$ называется скаляр

$$div\overline{F} \stackrel{def}{=} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}.$$

Если использовать оператор Гамильтона $\nabla = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$, то дивергенцию вектора $\overline{F}$ можно рассматривать как скалярное произведение ∇ и $\overline{F}$:

$$div\overline{F} = \nabla \cdot \overline{F}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\overline{F}$ — вектор скорости частицы движущейся несжимаемой жидкости (или газа), то $div\overline{F}$ есть плотность источников или стоков (см.[3,5] или другие учебники по математическому анализу).

Наряду с расходимостью рассматривают также и вихрь (или ротор) векторного поля.

Вихрем (*ротором*) векторного поля $\overline{F}$ называется вектор

$$rot\overline{F} = curl\overline{F} \stackrel{def}{=} \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Таким образом, вихрь вектора $\overline{F}$ есть векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\overline{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\overline{F}$ — вектор скорости частицы движущейся несжимаемой жидкости (или газа), то $rot\overline{F}$ есть удвоенная мгновенная угловая скорость вращательного движения частицы (см.[3,5] или другие учебники по математическому анализу).

ПРИМЕР. Вычислить расходимость и вихрь векторного поля $\overline{F} = x^2y\overline{i} - y^3z^2\overline{j} + xyz\overline{k}$ в точке $M(1,-1,2)$.

Решение. Здесь $P = x^2y$, $Q = -y^3z^2$, $R = xyz$. Для вычисления расходимости находим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -3y^2z^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = xy.$$

Далее

$$div\overline{F}|_M = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_M = (2xy - 3y^2z^2 + xy)|_{(1,-1,2)} = -15.$$

Аналогично находим

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -y^3z^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz + 2y^3z)\overline{i} + (0 - yz)\overline{j} +$$

$$+(0 - x^2)\overline{k} = (xz + 2y^3z)\overline{i} - yz\overline{j} - x^2\overline{k}.$$

Отсюда

$$rot\overline{F}\big|_M = \left((xz + 2y^3z)\overline{i} - yz\overline{j} - x^2\overline{k}\right)\big|_{(1,-1,2)} = -2\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}.$$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2.

Решить задачи №№5.k. — 9.k. для варианта №k.

Задача №5.

Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl$.

Вар-т №	Подинтегральная функция	Путь интегрирования γ
5.1.	$f(x,y,z) = x^2y + \dfrac{\sqrt{y}}{x}$,	γ — отрезок AB прямой, $A(1,2,3)$, $B(2,4,5)$.
5.2.	$f(x,y,z) = x^2$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = 3t, \end{cases}$
5.3.	$f(x,y,z) = y^2$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le \pi. \\ z = 3\cos t, \end{cases}$

Вар-т №	Подинтегральная функция	Путь интегрирования γ
5.4.	$f(x,y,z) = x + y + z,$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\cos t, \\ y & = & 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi. \\ z & = & 4t, \end{array}\right.$
5.5.	$f(x,y,z) = xz,$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1/2\cos t, \\ y & = & t/3, \qquad , 0 \leq t \leq \pi/2. \\ z & = & 1/2\sin t, \end{array}\right.$
5.6.	$f(x,y,z) = xz - \dfrac{y}{x},$	γ — отрезок AB прямой, $A(-1,1,2)$, $B(0,3,-1)$.
5.7.	$f(x,y,z) = y^2 + xz,$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t - \sin t, \\ y & = & 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z & = & 2, \end{array}\right.$
5.8.	$f(x,y,z) = \dfrac{y}{x} + z,$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3, \\ y & = & 2(t - sint), \quad 0 \leq t \leq \pi. \\ z & = & 2(1 - \cos t), \end{array}\right.$
5.9.	$f(x,y,z) = xy,$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\cos t, \\ y & = & 5t, \qquad 0 \leq t \leq \pi. \\ z & = & -\sin t, \end{array}\right.$
5.10.	$f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x}{2}},$	γ задана уравнениями $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t^2, \\ y & = & 4\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z & = & 4\cos t, \end{array}\right.$

Вар-т №	Подинтегральная функция	Путь интегрирования γ
5.11.	$f(x,y,z)=\dfrac{2x}{y}-z^2,$	γ — отрезок AB прямой, $A(-2,3,1),\ B(2,-1,4).$
5.12.	$f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z},$	$\gamma=\breve{OA}$ задана уравнениями $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2}, & 0(0,0,0), \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}, & A(2,\frac{8}{3},2) \\ z = t, & \end{cases}$.
5.13.	$f(x,y,z)=x+y,$	$\gamma=\breve{AB}$ задана уравнениями $\begin{cases} x = \ln t, & A(0,\frac{1}{2},-\sqrt{2}), \\ y = \dfrac{t^2}{2}, & \\ z = -\sqrt{2}t, & B(1,\frac{e^2}{2},-\sqrt{2}e) \end{cases}$.
5.14.	$f(x,y,z)=2y+z,$	$\gamma=\breve{AB}$ задана уравнениями $\begin{cases} x = e^t, & A(1,0,2\sqrt{2}), \\ y = t, & \\ z = 2\sqrt{2}e^{(\frac{t}{2}}, & B(e,1,2\sqrt{2e}) \end{cases}$.
5.15.	$f(x,y,z)=x^2+z^2,$	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 3t, & \\ y = \cos 4t, & 0\le t\le \pi/2. \\ z = \sin 4t, & \end{cases}$
5.16.	$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y}{z},$	γ — отрезок AB прямой, $A(-2,-3,4),\ B(4,5,-1).$
5.17.	$f(x,y,z)=\sqrt{2z},$	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 3\sin t, & \\ y = 3\cos t, & 0\le t\le \pi. \\ z = t^2/2, & \end{cases}$

Вар-т №	Подинтегральная функция	Путь интегрирования γ
5.18.	$f(x,y,z)=yz$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = 5, \qquad 0\le t\le 2\pi. \\ z = 3(1-\cos t), \end{cases}$
5.19.	$f(x,y,z)=xz$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad 0\le t\le \pi/2. \\ z = 2, \end{cases}$
5.20.	$f(x,y,z)=y$,	$\gamma=\breve{AB}$ задана уравнениями $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \qquad A(\frac{1}{3},0,\frac{2\sqrt{2}}{3}), \\ y = \ln t, \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}, \qquad B(\frac{e^3}{3},1,\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{\frac{3}{2}}) \end{cases}$
5.21.	$f(x,y,z)=xz$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 2, \\ y = t-\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi. \\ z = 1-\cos t, \end{cases}$
5.22.	$f(x,y,z)=xy$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 4, \\ y = \cos^3 2t, \quad 0\le t\le \pi/4. \\ z = \sin^3 2t, \end{cases}$
5.23.	$f(x,y,z)=y^2-z^2$,	γ задана уравнениями $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3\sin t, \quad 0\le t\le \pi. \\ z = 3\cos t, \end{cases}$
5.24.	$f(x,y,z)=x^2yz$,	γ — отрезок AB прямой, $A(2,1,3)$, $B(-1,4,2)$.

Вар-т №	Подинтегральная функция	Путь интегрирования γ
5.25.	$f(x,y,z)=\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{z}{y},$	γ — отрезок AB прямой, $A(3,-2,1),\ B(2,-1,3)$.

Задача №6.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\gamma}\overline{F}(M)\cdot d\overline{r}$, $\overline{F}(M)=P(M)\overline{i}+Q(M)\overline{j}+R(M)\overline{k}$, $M=M(x,y,z)$.

Вар-т №	Функции			Уравнения пути интегрирования γ
	$P(M)$	$Q(M)$	$R(M)$	
6.1.	y	$-x$	z^2	$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z = 2t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.
6.2.	$y-z$	$z-x$	$x-y$	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.
6.3.	$y-z$	$z-x$	$x-y$	$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 1-\cos t, \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.
6.4.	x^2	y	$-z$	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.
6.5.	$2y$	$-3x$	x	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2(1-\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\le t\le \pi$.

Вар-т №	Функции			Уравнения пути интегрирования γ
	$P(M)$	$Q(M)$	$R(M)$	
6.6.	$2z$	$-x$	y	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad \pi \le t \le 2\pi. \\ z = 1, \end{cases}$
6.7.	y	$-x$	z	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}. \\ z = 3, \end{cases}$
6.8.	x	z^2	y	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \\ z = 2(\cos t - \sin t) - 1, \end{cases}$
6.9.	$3y$	$-3x$	x	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \quad \pi \le t \le 2\pi. \\ z = 3(1 - \cos t - \sin t), \end{cases}$
6.10.	$-x^2y^3$	2	xz	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \quad 0 \le t \le \pi. \\ z = 1, \end{cases}$
6.11.	$6z$	$-x$	xy	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \\ z = 3, \end{cases}$
6.12.	z	y^2	$-x$	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le \pi. \\ z = \sqrt{2}\cos t, \end{cases}$
6.13.	x	$2z^2$	y	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t, \quad \pi \le t \le 2\pi. \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2, \end{cases}$
6.14.	x	$-\frac{1}{3}z^2$	y	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t, \\ y = \frac{1}{3}\sin t, \quad 0 \le t \le \pi. \\ z = \cos t - \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{4}, \end{cases}$

Вар-т №	Функции			Уравнения пути интегрирования γ
	$P(M)$	$Q(M)$	$R(M)$	
6.15.	$4y$	$-3x$	x	$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 4(1-\cos t-\sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le 2\pi.$
6.16.	$-z$	$-x$	xz	$\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \\ z = 4, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$
6.17.	z	x	y	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 0, \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$
6.18.	$y-z$	$z-x$	$x-y$	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$
6.19.	$2y$	$-z$	x	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 4-\cos t-\sin t, \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$
6.20.	xz	x	z^2x	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \sin t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$
6.21.	$-x^2y^3$	3	y	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 5, \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$
6.22.	x	$-3z^2$	y	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 2\cos t-4\sin t+3, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$
6.23.	x	$-2z^2$	y	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 6\cos t-4\sin t+1, \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

Вар-т №	Функции			Уравнения пути интегрирования γ
	$P(M)$	$Q(M)$	$R(M)$	
6.24.	$-x^2y^3$	4	x	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le \pi. \\ z = 4, \end{cases}$
6.25.	$2y$	$-z$	x	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad \pi \le t \le 2\pi. \\ z = 1 - \cos t - \sin t, \end{cases}$

Задача №7.

Вычислить угол между градиентами функций $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ в точке M.

Вар-т №	Функции		Точка M
	U	V	
7.1.	$x^2 + 2y^2 - z^2$	$2x^3 - y^3 + z^3$	$M(1, 2, 3)$
7.2.	$x^3 - 2y^3 + 2z^3$	$x^2 - xy + 2yz$	$M(-1, 2, 1)$
7.3.	$x^2y + xz^2 + y^2z$	$-xy + yz + x$	$M(2, -1, 1)$
7.4.	$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$	$x^2 - 2xz + y^2$	$M(1, 2, -3)$
7.5.	$\frac{2x}{z} - \frac{y}{x} + \frac{3z}{y}$	$x^3 - y^3 + 2z^3$	$M(2, 3, -2)$
7.6.	$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}$	$x^2 - xy + yz$	$M(-3, 2, -1)$
7.7.	$\frac{x}{y^2} - \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}$	$xy - 2yz + 3xz$	$M(1, -2, 3)$
7.8.	$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} - \frac{yz}{x}$	$x^2y - 2y^2z + 3xz^2$	$M(1, -3, 4)$

Вар-т №	Функции		Точка M
	U	V	
7.9.	$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2$	$\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x-z}+\dfrac{1}{y-z}$	$M(2,-3,4)$
7.10.	$(x-y)^3+(y-z)^3+(x-z)^3$	$2x^2-3y^2+4z^2$	$M(1,1,1)$
7.11.	$x^2y-3y^2z+4xz^2$	$x^3-y^3-2z^3$	$M(-1,2,-3)$
7.12.	$\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$	$M(1,2,4)$
7.13.	$\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{2}{xz}$	$2\dfrac{x}{y}-3\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}$	$M(2,3,4)$
7.14.	$(x+2y)^2+(y+2z)^2+(z+2x)^2$	$3x^3-2y^3-z^3$	$M(2,4,-1)$
7.15.	$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$	$\dfrac{-x}{y}+\dfrac{2y}{z}-\dfrac{3z}{x}$	$M(-3,4,5)$
7.16.	$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{x}\right)^2$	$\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{z^3}{x}-\dfrac{y^3}{z}$	$M(-3,2,1)$
7.17.	$(2-x)^2+(3-y)^2+(4-z)^2$	$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}$	$M(-3,-4,-5)$
7.18.	$\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{3+y}+\dfrac{1}{4+z}$	$\dfrac{x-y}{z}-\dfrac{y-z}{x}-\dfrac{z-x}{y}$	$M(2,3,-5)$
7.19.	$\dfrac{x+2y}{z}+\dfrac{3x+z}{2y}$	$x^2-2xy+3yz-z^2$	$M(3,5,-2)$
7.20.	$\dfrac{x^2-y^2}{z}+\dfrac{y^2-z^2}{x}+\dfrac{z^2-x^2}{y}$	$2xz-3y^2z+xy^2$	$M(1,4,-2)$

Вар-т №	Функции		Точка M
	U	V	
7.21.	$\left(x-\frac{1}{y}\right)^3+\left(y-\frac{1}{z}\right)^3+\left(z-\frac{1}{x}\right)^3$	$x^3-y^2z+2yz^2$	$M(3,2,-4)$
7.22.	$\left(xy+\frac{1}{z}\right)^2+\left(xz+\frac{1}{z}\right)^2+\left(yz+\frac{1}{x}\right)^2$	$\frac{2x^2}{y}-\frac{3y^2}{z}+\frac{4z^2}{x}$	$M(-2,1,-3)$
7.23.	$2xy+4xz+10yz$	$\frac{x}{y^3}-\frac{2y}{z^3}+\frac{5z}{x^3}$	$M(3,2,-5)$
7.24.	$2xy^2-5yz^2+6x^2z$	$-\frac{3}{x+y}-\frac{5}{y+z}-\frac{2}{x+z}$	$M(1,-3,5)$
7.25.	$\left(\frac{2}{x}-y\right)^2+\left(\frac{2}{y}-z\right)^2+\left(\frac{2}{z}-x\right)^2$	$\frac{x^2}{z}-3\frac{y^2}{x}+5\frac{z^2}{y}$	$M(-5,2,1)$

Задача №8.

Вычислить производную функции U в точке M в направлении вектора $\overline{MN}$.

Вар-т №	Функция $U(x,y,z)$	Точки	
		M	N
8.1.	$x^2-y^2-z^2$	$M(1,1,0)$	$N(2,1,3)$
8.2.	$x^2+y^2-z^2$	$M(1,-1,1)$	$N(-2,1,-3)$
8.3.	$-x^2-y^2+z^2$	$M(1,2,-1)$	$N(-3,2,-1)$
8.4.	$2x^2-y^2+z^2$	$M(-1,3,-2)$	$N(-2,3,-1)$
8.5.	$2x^2+3y^2-z^2$	$M(-3,2,-1)$	$N(0,2,-2)$
8.6.	$3x^2-y^2+2z^2$	$M(2,-1,0)$	$N(-2,4,-1)$

Вар-т №	Функция $U(x,y,z)$	Точки M	N
8.7.	$-3x^2+2y^2+z^2$	$M(2,-3,1)$	$N(-4,2,0)$
8.8.	$-2x^2+y^2-z^2$	$M(2,3,4)$	$N(-2,0,1)$
8.9.	$x^2+4y^2-3z^2$	$M(-1,0,1)$	$N(2,-1,3)$
8.10.	$-2x^2-3y^2+4z^2$	$M(2,-3,0)$	$N(-1,1,2)$
8.11.	$3x^2+y^2-4z^2$	$M(5,1,4)$	$N(2,1,-1)$
8.12.	$-2x^2-4y^2+z^2$	$M(3,-1,0)$	$N(-2,0,-3)$
8.13.	$x^2-3y^2+5z^2$	$M(2,5,-1)$	$N(-2,3,2)$
8.14.	$4x^2+2y^2-3z^2$	$M(2,3,4)$	$N(-2,-3,0)$
8.15.	$-3x^2-2y^2+z^2$	$M(1,2,-3)$	$N(-2,-1,3)$
8.16.	$x^2+3y^2-z^2$	$M(2,-2,1)$	$N(-1,3,-4)$
8.17.	$x^2-2y^2-4z^2$	$M(-3,2,0)$	$N(2,0,-1)$
8.18.	$2x^2+3y^2-5z^2$	$M(1,0,2)$	$N(-2,3,1)$
8.19.	$-3x^2-2y^2-z^2$	$M(2,-1,0)$	$N(0,1,-2)$
8.20.	$4x^2+y^2+2z^2$	$M(1,-3,2)$	$N(0,-2,1)$
8.21.	$-2x^2-y^2+4z^2$	$M(3,2,-1)$	$N(0,-2,1)$
8.22.	$-3x^2+y^2+2z^2$	$M(2,3,-4)$	$N(-3,2,-1)$
8.23.	$x^2+5y^2-z^2$	$M(0,3,-1)$	$N(-2,1,1)$
8.24.	$4x^2-y^2+3z^2$	$M(2,3,-5)$	$N(-1,0,-2)$
8.25.	$-2x^2-5y^2+3z^2$	$M(3,2,0)$	$N(-2,3,-1)$

Задача №9.

Вычислить расходимость и вихрь векторного поля
$\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ в точке $M(1,1,1)$.

Вар-т №	Функции		
	P	Q	R
9.1.	$x^2 - y^2 - 2z^2$	$x^2y - z$	$x^y z$
9.2.	$x^2y^2 - 3z$	x^2y^z	$x^3 - e^{yz}$
9.3.	$xy^2z + 3z - xy$	$x^2 + \sin(\pi yz)$	$e^{x^3} + 5yz - x$
9.4.	$\cos\pi(xy^2 + z^3) - xyz$	$x^{2z} - (yz)^2$	$x^3y - 5yz$
9.5.	$\ln(x + y^2 + z^3) + yz$	$z^{2xy} - yz^2$	$e^{xy} + 2xz$
9.6.	$2x^2 + y^2 - z^2$	$x^{2y} + z$	$y^{xz} + 1$
9.7.	$x^2 + 3y^{2z}$	$x^2 - xyz$	$y^3 + e^{xz}$
9.8.	$xy^{2z} - xy$	$y^2 + \sin(\pi xz)$	$e^{y^3} + 5xz - 2y$
9.9.	$\cos\pi(zy^2 + x^3) + xyz$	$y^{2z} - (xz)^2$	$xy^{3y} + 5xz$
9.10.	$\ln(x^2y + z^3) + xz$	$x^{2y} - xz^2$	$e^{xz} + 2yz$
9.11.	$\dfrac{x^2y + z^3}{x + yz} + xz$	$\sin\pi(x + 2y) - x^2z^2$	$e^{xy} + xyz$
9.12.	$\ln(xy^2 + 3z) + yz$	$y^{2x} - xz^2$	$xe^{y+z} + 2yz$
9.13.	$\ln(x^2z + y^3) + 2xz$	$\dfrac{x^2 + y}{z} - 2$	$e^{x+z^2} + 2y$
9.14.	$\cos\pi(x^2y - z) + y$	$z^{2y} - x^2z$	$\dfrac{e^{xz}}{2yz}$

Вар-т №	Функции		
	P	Q	R
9.15.	$\dfrac{x^2y - z^3}{xz + 1}$	$x^{-y} + xz^2$	$e^{xz} + 2y$
9.16.	$\dfrac{x^2 - y^2}{z^2 + x} - y$	$x^{2y} - z^2 + 2$	$x + yz - \sin \pi z$
9.17.	$\dfrac{x^2 + 3z}{y^2 - 3z} + xz^2$	$z^y + xyz$	$x^2 - e^{yz}$
9.18.	$xy^{2z} + 3z - \dfrac{x}{y}$	$y^2 + \cos(\pi yz)$	$e^{y^2} + 5xz - 3$
9.19.	$\sin \pi(x^2z + y^2) - xyz$	$y^{2z} - xz^2$	$\dfrac{x^3 + y}{5yz} - 3z$
9.20.	$\ln(xy^3 + 2z^2) + \dfrac{y}{z}$	$z^{2xy} - y^2z$	$e^{x+zy} + 2yz$
9.21.	$\dfrac{2x^2 + y^2}{z^2 + 2} - x$	$xy + z^y$	$y^2xz + 1$
9.22.	$x^2 + z^{2y}$	$\dfrac{x^2 + yz}{x + 2} + y^z$	$x^3 + e^{yz}$
9.23.	$2xz^{2y} - \dfrac{x}{y}$	$x^2 + \sin(\pi yz)$	$e^{z^2} + 5xy + z$
9.24.	$\cos \pi(xy^2 + z^3) + \dfrac{xy}{z}$	$x^{2z} - (yz)^2$	$xy^{3z} + 5yz$
9.25.	$\ln(z^2y + x^3) + \dfrac{x}{z}$	$x^{2z} - xz^2$	$e^{yz} + 2xz$

6. *ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.*

6.1. *Поверхностные интегралы первого рода.*

Поверхностные интегралы первого рода — интегралы по площади поверхности.

Сформулируем определение поверхностного интеграла первого рода и приведем правила его вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть на гладкой поверхности (S) задана произвольная функция $f(M)$, $M = M(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S) на n частей (ΔS_j), $j = 1, 2, \ldots, n$, в каждой части возьмем произвольную точку N_j (рис. 17). Обозначим ΔS_j площадь части (ΔS_j), $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\Delta d_j\}$, где d_j — диаметр части (ΔS_j).

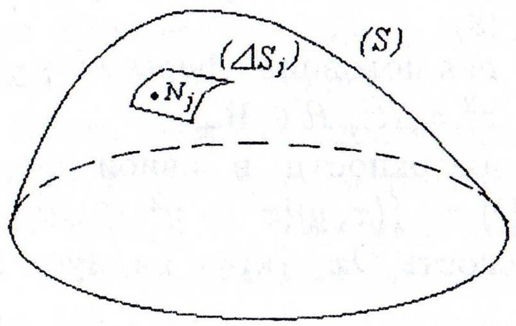

Рис. 17.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(N_j) \Delta S_j,$$

не зависящий ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек N_j ,то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S. (или поверхностным интегралом по площади поверхности). Величина этого предела обозначается

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS$$

Свойства поверхностного интеграла первого рода аналогичны свойствам определенного интеграла. Следует отметить однако,что поверхностный интеграл первого рода *не зависит от выбора стороны поверхности*, по которой производится интегрирование.

Поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS$ в случае, когда гладкая поверхность (S) задана явным уравнением [14]

[14] Случай параметрического задания поверхности при вычислении поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода разобран в учебниках по математическому анализу (например, в [5]) и здесь из-за недостатка места рассматриваться не будет.

$z = g(x, y)$, $(x, y) \in (D)$ (см. рис 18), вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x'^2(x, y) + g_y'^2(x, y)}\, dxdy. \tag{39}$$

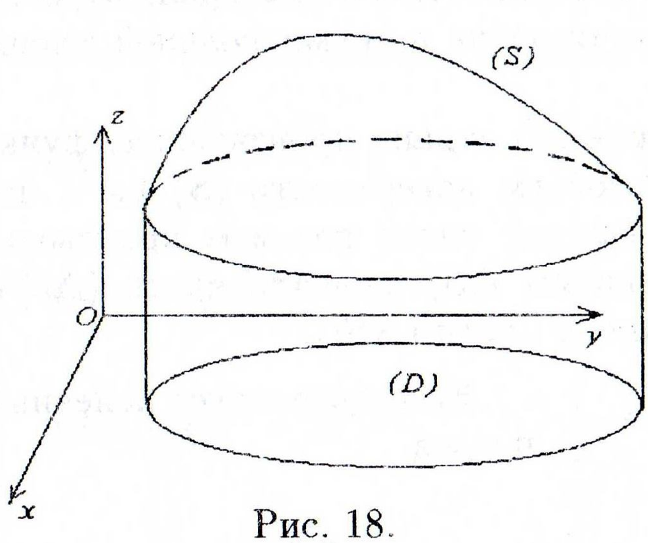

Рис. 18.

Здесь (D) – проекция поверхности (S) на плоскость Oxy. Аналогичные формулы могут быть записаны и тогда, когда поверхность (S) задается одним из уравнений $x = h(y, z)$, $y = q(x, z)$.

ПРИМЕР 1. Вычислить $I_1 = \iint\limits_{(S)} z(x^2 + y^2)\, dS$, где (S) — верхняя половина сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R \in \mathbf{R}_+$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в явной форме $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in (D)$, $(D) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ — проекция данной полусферы на плоскость Oxy (круг радиуса R с центром в начале координат).

Вычислим $z_x' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y' = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ и воспользуемся формулой (39):

$$I_1 = \iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \tfrac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \tfrac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= R \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и учтя, что якобиан преобразования $J = r$, получаем

$$I_1 = R \iint\limits_{(\tilde{D})} r^2 \cdot r dr\, d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\, dr = R\, \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^5}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить $I_2 = \iint\limits_{(S)} z(x^2 + y^2)\, dS$, где (S) — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R \in \mathbf{R}_+$.

Решение. Для того, чтобы воспользоваться формулой (39), поверхность (S) следует разбить на две части: $(S_в)$ с уравнением

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, и $(S_н)$ с уравнением $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in (D)$, где, как и выше, (D) — проекция (S) на плоскость Oxy (круг радиуса R с центром в начале координат). Так как обе части $(S_в)$ и $(S_н)$ имеют одну и ту же проекцию на плоскость Oxy, то

$$I_2 = \iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}(x^2 + y^2)\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(D)} \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)(x^2 + y^2)\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = 0.$$

6.2.*Поверхностные интегралы второго рода.*

Поверхностные интегралы второго рода — интегралы по координатам.

Сформулируем определение поверхностного интеграла второго рода и приведем правила его вычисления в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть выбрана определенная сторона S^+ [15] гладкой поверхности (S), на ней заданы произвольные функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, $M = M(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S^+) на n частей (ΔS_j^+), $j = 1, 2, \ldots, n$, в каждой части возьмем произвольную точку N_j (рис. 19). Обозначим ΔS_j площадь части (ΔS_j^+), $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\Delta d_j\}$, где d_j — диаметр части (ΔS_j^+).

Обозначим $\overline{n}_j{}^0$ орт нормали к поверхности S^+ в точке N_j, α_j, β_j, γ_j — углы, образованные вектором $\overline{n}_j{}^0$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно.

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{j=1}^{n} P(N_j)\Delta S_j \cos\alpha_j, \quad \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{j=1}^{n} Q(N_j)\Delta S_j \cos\beta_j,$$

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{j=1}^{n} R(N_j)\Delta S_j \cos\gamma_j,$$

не зависящие ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек N_j, то они называются поверхностными интегралами второго рода по поверхности S^+ (или поверхностными интегралами по координатам) и обозначаются

[15] выбору стороны поверхности соответствует направление орта нормали $\overline{n}^0$ к ней.

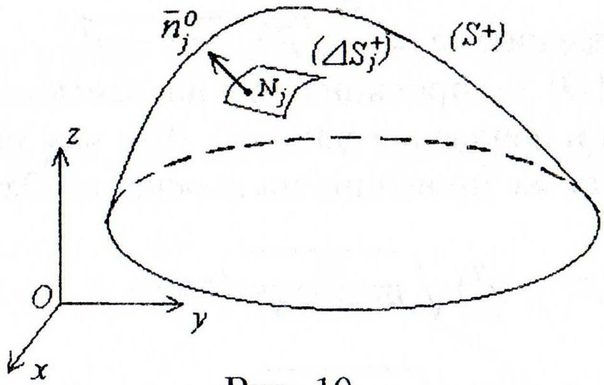

Рис. 19.

$$\iint\limits_{(S^+)} P(x,y,z)\,dydz,$$

$$\iint\limits_{(S^+)} Q(x,y,z)\,dzdx,$$

$$\iint\limits_{(S^+)} R(x,y,z)\,dxdy$$

соответственно.

По определению

$$\iint\limits_{(S^+)} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy \overset{def}{=} \iint\limits_{(S^+)} P\,dydz+ \iint\limits_{(S^+)} Q\,dzdx+ \iint\limits_{(S^+)} R\,dxdy. \tag{40}$$

Для вычисления каждого из интегралов в правой части последнего равенства нужно спроектировать поверхность S на плоскости Oxy, Oxz, Oyz соответственно и записать ее (поверхности) явные уравнения $x = g(y,z), (y,z) \in (D_{yz})$, $y = h(x,z), (x,z) \in (D_{xz})$, $z = f(x,y), (x,y) \in (D_{xy})$, где (D_{yz}), (D_{xz}), (D_{xy}) — указанные проекции. Тогда вычисление поверхностных интегралов в правой части равенства (40) сводится к вычислению следующих двойных интегралов:

$$\iint\limits_{(S^+)} P(x,y,z)\,dydz = \pm \iint\limits_{(D_{yz})} P\left(g(y,z),y,z\right)\,dydz,$$

$$\iint\limits_{(S^+)} Q(x,y,z)\,dxdz = \pm \iint\limits_{(D_{xz})} Q\left(x,h(x,z),z\right)\,dxdz, \tag{41}$$

$$\iint\limits_{(S^+)} R(x,y,z)\,dxdy = \pm \iint\limits_{(D_{xy})} R\left(x,y,f(x,y)\right)\,dxdy.$$

В этих формулах знак "+" ставится в том случае, если нормаль к поверхности (S_+) образует острый угол с осью, перпендикулярной плоскости проекции, и знак "−", если указанный угол тупой.

Замечание. Если поверхность (S) перпендикулярна плоскости проекции, то соответствующий интеграл равен ную.

Заметим, что поверхностный интеграл второго рода имеет свойства, аналогичные свойствам определенного интеграла.

Отметим особо, что *знак поверхностного интеграла второго рода изменяется при изменении выбора стороны поверхности*:

$$\iint\limits_{(S^-)} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy = -\iint\limits_{(S^+)} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy,$$

где (S^+) и (S^-) — разные стороны поверхности (S).

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $I_3 = \iint\limits_{(S^+)} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, где (S^+) — внешняя сторона куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Решение. Сначала вычислим $I_{3,1} = \iint\limits_{(S^+)} x\,dydz$. Воспользуемся свойством аддитивности интеграла: $I_{3,1} = \sum\limits_{j=1}^{6} \iint\limits_{(S_j^+)} x\,dydz$. Здесь (S_j^+) — грани указанного выше куба с соответствующим выбором нормали, расположенные в плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$. Обозначим (D_{yz}) квадрат $\{(y,z)|0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. По первой из формул (41) имеем

$$\iint\limits_{(S_1^+)} x\,dydz = -\iint\limits_{(D_{yz})} 0\,dydz = 0,\quad \iint\limits_{(S_4^+)} x\,dydz = +\iint\limits_{(D_{yz})} 1\,dydz = 1,$$

т.к. последний интеграл равен площади квадрата (D_{yz}). Далее $\iint\limits_{(S_j^+)} x\,dydz = 0$, $j = 2,3,5,6$, т.к. плоскости $y=0$, $z=0$, $y=1$, $z=1$ перпнпендикулярны плоскости Oyz. Таким образом, $I_{3,1} = 0+0+0+1+0+0 = 1$. Из симметрии области интегрирования следует $I_{3,2} = \iint\limits_{(S^+)} y\,dxdz = 1$, $I_{3,3} = \iint\limits_{(S^+)} z\,dxdy = 1$, и $I_3 = I_{3,1} + I_{3,2} + I_{3,3} = 1+1+1 = 3$.

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл $I_4 = \iint\limits_{(S^-)} y^2 z\,dxdy + x^2 z\,dydz$, где (S^-) — нижняя сторона части параболоида $z = x^2+y^2$, лежащей в первом октанте и ограниченной сверху плоскостью $z=1$ (рис.20 а).

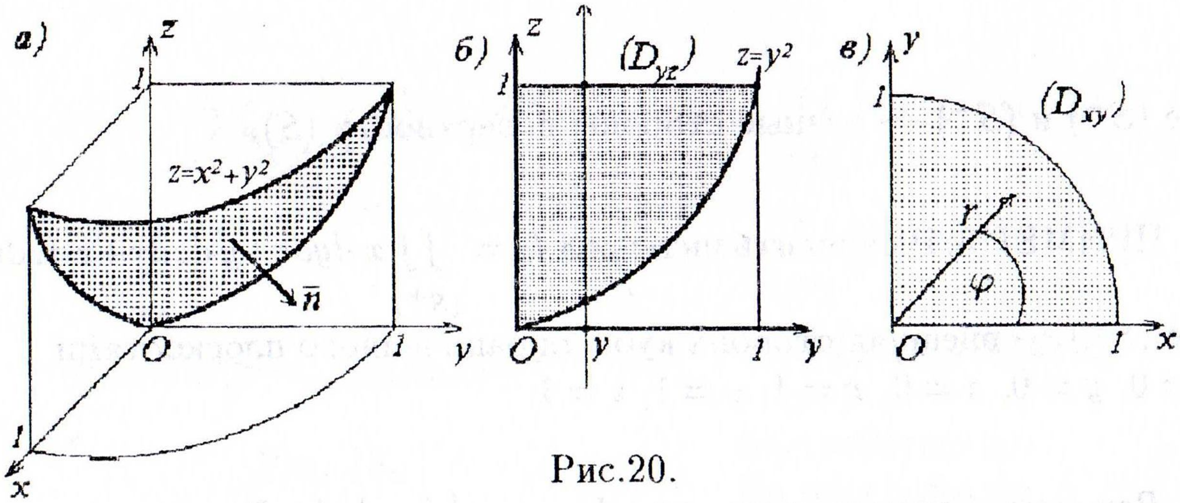

Рис.20.

Решение. Интеграл $I_4 = \iint\limits_{(S^-)} y^2 z\,dxdy + \iint\limits_{(S^-)} x^2 z\,dydz$. Рассмотрим

$$\iint\limits_{(S^-)} y^2 z\,dxdy = -\iint\limits_{(D_{xy})} y^2(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Здесь знак "$-$" перед интегралом поставлен потому, что нормаль $\overline{n}$ к нижней стороне рассматриваемой части параболоида образует тупой угол с осью Oz; (D_{xy}) — проекция поверхности (S) (четверть единичного круга с центром в начале кординат, лежащая в первом квадранте и изображенная на рис 20.в).

Перейдем к полярным координатам r, φ с помощью формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим

$$\iint\limits_{(D_{xy})} y^2(x^2+y^2)\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 r^5\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\varphi)\,d\varphi \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{24}.$$

Вычислим интеграл

$$\iint\limits_{(S^-)} x^2 z\,dydz = +\iint\limits_{(D_{yz})} (z-y^2)z\,dydz.$$

Знак "$+$" перед интегралом поставлен потому, что нормаль $\overline{n}$ к рассматриваемой стороне части параболоида образует острый угол с осью Ox; (D_{yz}) — проекция поверхности (S) на плоскость Oyz (рис.20б). Далее, множитель x^2 в подинтегральной функции выражен через y и z из уравнения $z = x^2 + y^2$.

Вычислим интеграл

$$\iint\limits_{(D_{yz})} (z-y^2)z\,dydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^1 (z-y^2)z\,dz = \int\limits_0^1 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2y^2}{2}\right)\Big|_{z=y^2}^{z=1} dy =$$
$$\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{3} + \frac{y^6}{2}\right) dy = \left(\frac{y}{3} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

Итак, $I_4 = -\frac{\pi}{24} + \frac{4}{21}$.

7. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА.

7.1. *Формула Остроградского.*[16]

Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в замкнутой области (Ω), ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью (S). Тогда имеет место формула Остроградского

$$\iint\limits_{(S^+)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{(\Omega)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \tag{42.1}$$

где (S^+) — внешняя сторона поверхности (S).

Если ввести векторы $\overline{F} = (P, Q, R)$ и $\overline{n}^0$ (орт внешней нормали к поверхности (S), рис. 21а), то формула Остроградского запишется в следующем виде:

$$\iint\limits_{(S^+)} \overline{F} \cdot \overline{n}^0\, dS = \iiint\limits_{(\Omega)} div\,\overline{F}\, dxdydz. \tag{42.2}$$

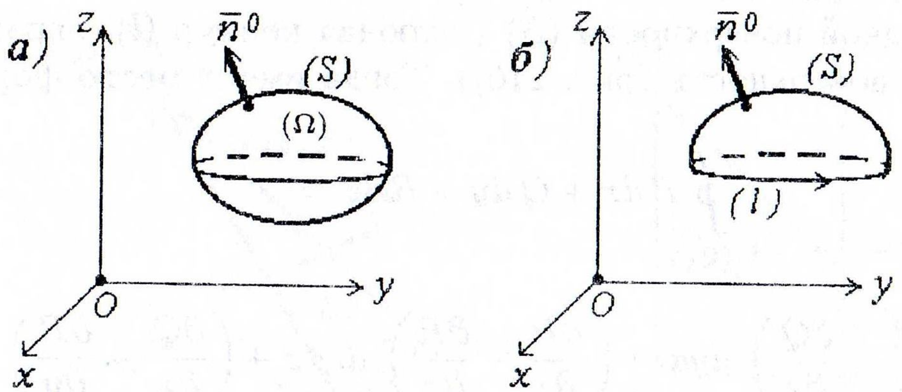

Рис.21.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(S^+)} y^2 z\,dxdy + x^2 z\,dydz$, где (S^+) — внешняя сторона поверхности (S), составленной из частей параболоида $z = x^2 + y^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, лежащих в первом октанте, и соответствующих частей координатных плоскостей Oxz, Oyz и Oxy (рис. 20а).

Решение. Используем формулу Остроградского. Здесь $P = x^2 z$,

$Q=0,\ R=y^2z$,
$(\Omega)=\{(x,y,z)|0\leqslant x, 0\leqslant y, 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2, x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Согласно формуле (42.1)

$$I=\iiint\limits_{(\Omega)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{(\Omega)}\left(2xz+0+y^2\right)dxdydz.$$

Сведем интеграл I к повторному (см. рис. 20в): $I=$

$$\iint\limits_{(D_{xy})}dxdz\int\limits_0^{x^2+y^2}\left(2xz+y^2\right)dz=\iint\limits_{(D_{xy})}\left(xz^2+y^2z\right)\Big|_{z=0}^{z=x^2+y^2}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(D_{xy})}\left(x(x^2+y^2)^2+y^2(x^2+y^2)\right)dxdy.$$ Перейдем к полярным координатам r, φ, положив $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Тогда $dxdy=rdrd\varphi$, и $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^6\,dr+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^5\,dr=$
$=\sin\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^7}{7}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{7}+\frac{\pi}{24}$.

7.2. *Формула Стокса.*[17]

Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ непрерывны на гладкой или кусочно–гладкой поверхности (S) (включая контур (l), ограничивающий эту поверхность (рис. 21б)). Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint\limits_{(l)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_{(S^+)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \tag{43.1}$$

Направление обхода контура (l) выбирается таким образом, чтобы наблюдающему его из конца нормали $\overline{n}^0$ к стороне (S^+) поверхности (S) обход казался бы совершающимся против часовой стрелки.

Используя векторы $rot\overline{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$,

---

[17] Стокс, Д.Ж. (1819–1903) — английский физик и математик, член Лондонского королевского общества.

$\overline{dr} \stackrel{def}{=} (dx, dy, dz)$ и орт нормали $\overline{n}^{\,0}$ к стороне (S^+), можно формулу Стокса записать в следующей форме:

$$\oint\limits_{(l)} \overline{F} \cdot \overline{dr} == \iint\limits_{(S^+)} rot\overline{F} \cdot \overline{n}^{\,0}\, ds. \qquad (43.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Криволинейный интеграл $\oint\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \oint\limits_{(l)} \overline{F} \cdot \overline{dr}$ называется *циркуляцией вектора* $\overline{F}$ *вдоль контура* (l).

Поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S^+)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$

$= \iint\limits_{(S^+)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\;dS \;=\; \iint\limits_{(S^+)} \overline{F} \cdot \overline{n}^{\,0} dS$, где $\overline{n}^{\,0} =$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, называется *потоком вектора* $\overline{F}$ *через сторону* (S^+) *поверхности* (S).

ПРИМЕР. Найти циркуляцию вектора $\overline{F} = (xy, x^2, z)$ вдоль контура треугольника ABC, если $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ (рис. 22а).

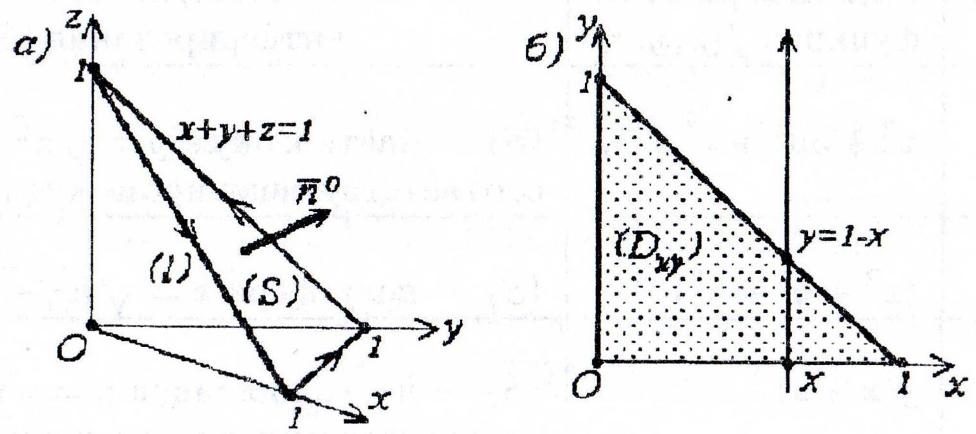

Рис.22.

Решение. Воспользуемся формулой Стокса. В качестве поверхности (S) возьмем часть плоскости $x + y + z = 1$, ограниченную указанным выше контуром (l). Обход контура будет совершаться против часовой стрелки, если нормаль $\overline{n}^{\,0}$ направить вверх (см. рис.22а). Здесь $P = xy$, $Q = x^2$, $R = z$. По формуле Стокса

$$\oint\limits_{(l)} xy\,dx + x^2\,dy + z\,dz = \iint\limits_{(S^+)} \left(z'_y - (x^2)'_z\right)\,dydz + \left((xy)'_z - z'_x\right)\,dzdx +$$

$$+\left((x^2)'_x - (xy)'_y\right)\,dxdy = \iint\limits_{(S^+)} x\,dxdy.$$

На основании последней из формул (41) (см., кроме того, рис. 22б) имеем

$$\iint\limits_{(S^+)} x\,dxdy = \iint\limits_{(D_{xy})} x\,dxdy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{1-x} dy = \int\limits_0^1 xy\big|_{y=0}^{y=1-x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x(1-x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №3.

Решить задачи №№10.k. — 13.k. для варианта №k.

Задача №5.

Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS$.

Вар-т №	Подинтегральная функция $f(x,y,z)$	Поверхность интегрирования (S)
10.1.	$x^2+3y^2+z^2+5$,	(S) — часть конуса $y=\sqrt{x^2+y^2}$, соответствующая промежутку $0\leqslant y\leqslant 2$.
10.2.	$(x^2+y^2+z^2)^{-1}$,	(S) — полусфера $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$.
10.3.	$y(x+z)$,	(S) — часть цилиндра $y=\sqrt{9-z^2}$, соответствующая промежутку $0\leqslant x\leqslant 2$.
10.4.	xy,	(S) — часть параболоида $4-z=x^2+y^2$, для которой $0\leqslant z$.
10.5.	$\sqrt{x^2+y^2}$,	(S) — часть конуса $z^2=x^2+y^2$, соответствующая промежутку $0\leqslant z\leqslant 5$.

Вар-т №	Подинтегральная функция $f(x, y, z)$	Поверхность интегрирования (S)
10.6.	$x + y + z$,	(S) — полу сфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
10.7.	$z(x + 2)$,	(S) — часть цилиндра $z = \sqrt{9 - x^2}$, для которой $0 \leqslant y \leqslant 1$.
10.8.	$x^2 + y^2 + 4z - 2$,	(S) — часть парабол оида $2z = 9 - x^2 - y^2$, для которой $0 \leqslant z$.
10.9.	$x^2 + y^2$,	(S) — часть к онуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, для которой $z \leqslant 1$.
10.10.	$x^2 + y^2 + z^2$,	(S) — полу сфера $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$.
10.11.	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$,	(S) — часть цилиндра $x^2 + y^2 = 121$, соответствующая $0 \leqslant z \leqslant 3$.
10.12.	$2x + y^2 + z^2$,	(S) — часть парабол оида $3 - x = y^2 + z^2$, соответствующая $0 \leqslant x$.
10.13.	$2x^2 + y^2 + z^2$,	(S) — часть к онуса $x^2 = y^2 + z^2$, соответствующая $0 \leqslant x \leqslant 13$.
10.14.	$x + y + 2z$,	(S) — полу сфера $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$.
10.15.	$y(2x + 3z)$,	(S) — часть цилиндра $y = -\sqrt{4 - z^2}$, соответствующая $0 \leqslant x \leqslant 3$.
10.16.	$x^2 + 4y + z^2 - 25$,	(S) — часть параболоида $9 - y = x^2 + z^2$, соответствующая $0 \leqslant y$.
10.17.	$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6$,	(S) — часть к онуса $4y^2 = x^2 + z^2$, соответствующая $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Вар-т №	Подинтегральная функция $f(x,y,z)$	Поверхность интегрирования (S)
10.18.	$3x+y+2z$,	(S) — полусфера $z=-\sqrt{16-x^2-y^2}$.
10.19.	$(x^2+y^2+z^2)^{-1}$,	(S) — часть цилиндра $z=-\sqrt{4-x^2}$, соответствующая $0\leqslant y\leqslant 5$.
10.20.	$3x^2+y^2+z^2-13$,	(S) — часть параболоида $x=5-y^2-z^2$, соответствующая $0\leqslant x$.
10.21.	$4x^2+y^2+z^2-3z+5$,	(S) — часть конуса $2x=\sqrt{y^2+z^2}$, соответствующая $x\leqslant 2$.
10.22.	$2x+3y-z$,	(S) — полусфера $y=-\sqrt{25-x^2-z^2}$.
10.23.	$z(5x+2z)$,	(S) — часть цилиндра $x^2+y^2=49$, соответствующая $0\leqslant z\leqslant 4$.
10.24.	xz,	(S) — часть параболоида $2y=9-x^2-z^2$, соответствующая $0\leqslant y$.
10.25.	$x^2+y^2+z^2+2x-2$,	(S) — часть конуса $4z^2=x^2+y^2$, соответствующая $0\leqslant z\leqslant 1$.

Задача №11.

Вычислить поток векторного поля $\overline{F}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$ через верхнюю сторону треугольника ABC, где A, B, C — точки пересечения плоскости (S) с осями координат.

Вар-т №	Функции			Плоскость (S)
	P	Q	R	
11.1.	$x+2y-5z$	$9x+y$	z	$x+y+z=1$

Вар-т №	Функции			Плоскость (S)
	P	Q	R	
11.2.	$x+5y-3z$	$7x+y$	z	$x+y+z=3$
11.3.	$x-3y+2z$	$8x+y$	z	$x+y+z=2$
11.4.	$x-y+5z$	$6x+y$	$2z$	$x+y+2z=2$
11.5.	$x+4y-z$	$5x+2y$	z	$x+2y+z=2$
11.6.	$2x-2y+3z$	$4x+y$	z	$2x+y+z=2$
11.7.	$x-4y+z$	$3x+y$	$3z$	$x+y+3z=3$
11.8.	$x-5y+2z$	$2x+3y$	$2z$	$x+3y+z=3$
11.9.	$3x+y-6z$	$x+y$	z	$3x+y+z=3$
11.10.	$x-6y+3z$	$-x+2y$	$3z$	$x+2y+3z=6$
11.11.	$3x+3y-2z$	$-2x+y$	$2z$	$2x+y+2z=6$
11.12.	$2x+6y-4z$	$-3x+3y$	z	$2x+3y+z=6$
11.13.	$x-6y+z$	$-4x+2y$	$2z$	$x+2y+2z=2$
11.14.	$2x+6y-z$	$-5x+y$	$2z$	$2x+y+2z=2$
11.15.	$2x-2y+z$	$-6x+2y$	z	$2x+2y+z=2$
11.16.	$x+5y-z$	$-7x+3y$	$3z$	$x+3y+3z=3$
11.17.	$3x-3y+z$	$x+y$	$3z$	$3x+y+3z=3$
11.18.	$3x+4y-z$	$2x+3y$	z	$3x+3y+z=3$
11.19.	$x-4y+z$	$3x+y$	$4z$	$x+y+4z=4$
11.20.	$x+3y-z$	$4x+4y$	z	$x+4y+z=4$

Вар-т №	Функции			Плоскость (S)
	P	Q	R	
11.21.	$4x - 5y + z$	$5x + y$	z	$4x + y + z = 4$
11.22.	$x + 2y - z$	$6x + 2y$	$4z$	$x + 2y + 4z = 4$
11.23.	$2x - y + z$	$7x + y$	$4z$	$2x + y + 4z = 4$
11.24.	$4x + y - z$	$8x + 2y$	z	$4x + 2y + z = 4$
11.25.	$x - y + 3z$	$x + 3y$	$2z$	$x + 2y + 3z = 6.$

Задача №12.

Используя формулу Остроградского, вычислить поток векторного поля $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ через внешнюю сторону поверхности (S).

Вар-т №	Функции			Поверхность (S)
	P	Q	R	
12.1.	$\sqrt{z} + x$	$e^x + y$	$\ln y + z$	S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$
12.2.	$5x + \sin y$	$\cos z - 2y$	$\operatorname{tg} x$	(S) составлена из поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 3$.
12.3.	$\sin y + 5x$	$\arcsin x - -2y$	$\operatorname{arctg} y - -3z$	(S) образована плоскостями $x + 2y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12.4.	$\arccos y + +7x$	$z^3 - 2y$	$\operatorname{arcctg} x - -4z$	(S) составлена из поверхностей $z^2 = 9(x^2 + y^2)$, $z = 3$.
12.5.	$e^z + 2x$	$\sin x + 2y$	$\sqrt{y} - z$	(S) — сфера $x^2 + y^2 + +z^2 = 2(x + y - z - 1)$.

Вар-т №	Функции			Поверхность (S)
	P	Q	R	
12.6.	$\ln y + x$	$\arccos z - 2y$	$\operatorname{ctg} x+$ $+2z$	S составлена из поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 3$, $z = 6$.
12.7.	$3x + \cos z$	$\operatorname{arctg} x - 4y$	e^y+ $+2z$	(S) образована плоскостями $2x + 3y - z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12.8.	$\operatorname{tg} y + 2x$	$\operatorname{arctg} z + 3y$	$\cos x+$ $+2z$	(S) составлена из поверхностей $36(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 6$.
12.9.	$\operatorname{arctg} y+$ $+x$	$\sqrt{z} + 5y$	$\sin x-$ $-3z$	(S) составлена из поверхностей $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 3$.
12.10.	$\arcsin z+$ $+3x$	$\ln x - y$	$y^2 + z$	(S) — сфера $x^2 + y^2+$ $+z^2 = 2y + 3$.
12.11.	$z^2 y + 3x$	$\operatorname{ctg} x + 2y$	$\arcsin y+$ $+z$	S образована плоскостями $-x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12.12.	$\operatorname{arctg} y+$ $+3x$	$\operatorname{tg} x + 4y$	x^3+ $+5z$	(S) составлена из поверхностей $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $z = 3$.
12.13.	$\sqrt{z} - 2x$	$\arcsin x + 3y$	$\operatorname{tg} y+$ $+2z$	(S) — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$,
12.14.	$\sin y+$ $+2x$	$\operatorname{tg} z + 3y$	$\arccos y-$ $-4z$	(S) составлена из поверхностей $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 4$.

Вар-т №	Функции			Поверхность (S)
	P	Q	R	
12.15.	$\operatorname{ctg} z + x$	$x^5 + 6y$	$\arcsin y - 4z$	(S) образована плоскостями $x + y + 2z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12.16.	$\arccos y + 2x$	$\sin z + 6y$	$e^x - 5z$	S составлена из поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$.
12.17.	$e^z - 2x$	$\arccos x + y$	$\sin y + 4z$	(S) — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3$.
12.18.	$\ln y + 5x$	$\operatorname{arctg} z - 4y$	$\cos x + 2z$	(S) составлена из поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 2$.
12.19.	$\cos z + 2x$	$\operatorname{ctg} x - 3y$	$\arccos y + 2z$	(S) образована плоскостями $x + 2y - 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
12.20.	$\operatorname{tg} y + x$	$\sqrt{z} + 2y$	$\operatorname{arctg} x + 3z$	(S) составлена из поверхностей $8(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 2$.
12.21.	$\arcsin zy + 2x$	$\cos x - 3y$	$y^2 + 4z$	S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8$,
12.22.	$\operatorname{arctg} y + 6x$	$\ln z + 4y$	$\operatorname{ctg} x - 3z$	(S) составлена из поверхностей $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$, $z = 5$.
12.23.	$z^3 + x$	$\operatorname{arcctg} x + 2y$	$\ln y - 5z$	(S) образована плоскостями $2x + 2y - z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Вар-т №	Функции			Поверхность (S)
	P	Q	R	
12.24.	$\operatorname{arcctg} y-$ $-x$	$e^z + y$	$\sqrt{x} + 2z$	(S) составлена из поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.
12.25.	$\sqrt{z^2+1}+$ $+4x$	$\sin x + 3y$	$e^y - 4z$	S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$,

Задача №13.

Используя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ вдоль контура (l).[18]

Вар-т №	Функции			Уравнения контура (l)
	P	Q	R	
13.1.	yz	$z(x+1)$	$y(x+2)$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x=2\sqrt{2}. \end{cases}$
13.2.	$z(2xy+3)$	x^2z	$x(xy+1)$	$\begin{cases} x^2+z^2= 1, \\ y= 3. \end{cases}$
13.3.	$y(yz+1)$	$2x(yz+2)$	xy^2	$\begin{cases} x^2+y^2= z^2, \\ z= 1. \end{cases}$
13.4.	yz^2	$z(xz+1)$	$y(2xz+5)$	$\begin{cases} y^2+z^2= x, \\ x= 1. \end{cases}$
13.5.	$z(y^2z+6)$	$2xyz^2$	$x(2y^2z+1)$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5, \\ y=2. \end{cases}$

[18] В качестве поверхности (S) удобно взять часть плоскости, содержащей этот контур (l).

Вар-т №	Функции			Уравнения контура (l)
	P	Q	R	
13.6.	$y(2xz^2+1)$	$x(xz^2+7)$	$2x^2yz$	$\begin{cases} x^2+y^2= & 1, \\ z= & 6. \end{cases}$
13.7.	$2xy^2z$	$z(2x^2y+1)$	$(x^2y+8)y$	$\begin{cases} y^2+z^2= & x^2, \\ x= & 1. \end{cases}$
13.8.	$z(2xy^2z+9)$	$2x^2yz^2$	$x(2xy^2z+1)$	$\begin{cases} x^2+z^2= & y^2, \\ y= & 1. \end{cases}$
13.9.	$y(3x^2z-1)$	$x(x^2z+8)$	x^3y	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10, \\ z=3. \end{cases}$
13.10.	y^3z	$z(3xy^2-1)$	$y(xy^2+9)$	$\begin{cases} y^2+z^2= & 1, \\ x= & 10. \end{cases}$
13.11.	$z(2yz^2+9)$	xz^3	$x(3yz^2-2)$	$\begin{cases} x^2+z^2= & y^2, \\ y= & 6. \end{cases}$
13.12.	$y(x^2y^2z^3-1)$	$z(2x^2y^2+3)$	$x^3y^3z^2$	$\begin{cases} x^2+y^2= & z, \\ z= & 1. \end{cases}$
13.13.	xz	$xy-4$	$(y+9)z$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8, \\ y=2. \end{cases}$
13.14.	$y(yz-5)$	$x(2yz+9)$	xy^2	$\begin{cases} x^2+y^2= & 2, \\ z= & 1. \end{cases}$
13.15.	yz^2	$z(xz-6)$	$y(2xz+9)$	$\begin{cases} y^2+z^2= & x^2, \\ x= & 2. \end{cases}$
13.16 .	$(2xy+9)z$	x^2z	$x(xy-7)$	$\begin{cases} x^2+z^2= & y, \\ y= & 2. \end{cases}$

Вар-т №	Функции			Уравнения контура (l)
	P	Q	R	
13.17.	$(2xz^2-8)y$	$x(xz^2+9)$	$2x^2yz$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8, \\ z=2. \end{cases}$
13.18.	$2xy^2z$	$(2x^2y-9)z$	$(x^2y+9)y$	$\begin{cases} y^2+z^2=2, \\ x=0. \end{cases}$
13.19.	$(y^2z+10)z$	$2xyz^2$	$(2y^2z-9)x$	$\begin{cases} x^2+z^2=y^2, \\ y=2. \end{cases}$
13.20.	$2(x^2yz-6)z$	$2x(xyz^2+4)$	$2x^2y^2z$	$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=2. \end{cases}$
13.21.	y^3z	$3(xy^2-3)z$	$(xy^2+12)y$	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=13, \\ x=2. \end{cases}$
13.22.	$(3yz^2-10)x$	$z(yz^2+12)$	xz^3	$\begin{cases} x^2+z^2=1, \\ y=2. \end{cases}$
13.23 .	$(3x^2z-8)y$	$(x^2z+16)x$	x^3y	$\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=\sqrt{2}. \end{cases}$
13.24.	$3x^2y^3z^3$	$3z(x^3y^2z^2-$ $-3)$	$3y(x^3y^2z^2+$ $+5)$	$\begin{cases} y^2+z^2=2x, \\ x=1. \end{cases}$
13.25.	$(z-10)y$	$(z+15)x$	xy	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=7, \\ z=2. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И.И.Аналитическая геометрия. М., Наука, 1969.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Наука, 1966.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.т.1-3.М., Наука, 1958.
4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М., Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, ч.1,2. М., ГИТТЛ, 1955.
6. Рудин У. Основы математического анализа. М. Мир, 1976.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
8. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Физматгиз, 1963.
10. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М., Высшая школа, 1994.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 03.03.2002 г. Формат бумаги 60X84 1/16. Бумага офсетная
Печать офсетная. Объем 4.4 п.л. Тираж 160 экз. Заказ 2323.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 26.