Н.К.Кривулин

СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ЦИКЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ В АЦИКЛИЧЕСКИХ СЕТЯХ С ОПЕРАЦИЯМИ РАЗЪЕДИНЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

1. Введение.

Модели сетей с очередями находят широкое применение при анализе технических систем, производственных и бизнес-процессов. Среди различных моделей сетей, сети с операциями разъединения и объединения требований (Fork-Join Queueing Networks) [1] представляют широкий класс моделей, которые позволяют вполне адекватно описывать многие реальные процессы и системы. Например, при исследовании сетей связи, операция разъединения требований может соответствовать разбиению сообщений на отдельные пакеты, каждый из которых может передвигаться по отдельному маршруту в сети, а операция объединения – восстановление исходного сообщения из пакетов в пункте назначения. В случае производственных процессов эти операции могут означать распределение партии комплектующих изделий между производственными участками и сборку окончательного изделия на завершающем этапе производственного цикла. Наконец, операции разъединения и объединения требований могут моделировать динамику и взаимодействие различных элементов бизнес-процессов.

Одним из важных показателей эффективности систем является величина среднего времени цикла обслуживания требований в системе. В практических задачах этот показатель может интерпретироваться, например, как среднее время доставки сообщений в сети связи или среднее время, необходимое для осуществления некоторого бизнес-процесса.

В настоящей работе предлагается подход к определению среднего времени цикла, основанный на применении аппарата идемпотентной алгебры [3]. Показано, что в случае ациклических сетей с операциями разъединения и объединения требований при достаточно общих условиях среднее время цикла определяется только средним временем обслуживания в узлах сети и не зависит от топологии сети.

2. Идемпотентная алгебра.

Рассмотрим множество вещественных чисел R_ε, расширенное путем добавления элемента $\varepsilon = -\infty$. Пусть на R_ε заданы операции $\oplus$ и $\otimes$, которые для

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ N00-01-00760 и РГНФ N00-02-00228-А.
e-mail: Nikolai.Krivulin@pobox.spbu.ru

любых $x, y \in R_\varepsilon$ определяются следующим образом:

$$x \oplus y = \max(x, y), \qquad x \otimes y = x + y,$$

причем $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$.

Множество R_ε с операциями $\oplus$ и $\otimes$ является коммутативным полукольцом с идемпотентным сложением, нулевым и единичным элементами которого являются ε и 0 соответственно. Полукольцо с указанными свойствами обычно называют идемпотентной алгеброй (см., например, [2, 3]).

Заметим, что в идемпотентной алгебре для всякого $x \neq \varepsilon$ определен обратный элемент x^{-1} относительно операции $\otimes$, который представляет собой $-x$ в обычной арифметике.

Идемпотентная алгебра (полукольцо) вещественных матриц вводится обычным путем: для любых двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $n \times n$ выполнение операций $\oplus$ и $\otimes$ осуществляется по формулам:

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \quad \text{и} \quad \{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

Обе операции обладают свойством ассоциативности, однако только операция $\oplus$ является коммутативной. Матрицы

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \ldots & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & 0 \end{pmatrix}$$

играют роль нулевой и единичной матриц соответственно.

Операции $\oplus$ и $\otimes$ являются монотонными, т.е. из неравенств $A \leq C$ и $B \leq D$ следует: $A \oplus B \leq C \oplus D$ и $A \otimes B \leq C \otimes D$.

Пусть $A \neq \mathcal{E}$ – квадратная матрица. Как обычно, положим $A^0 = E$ и

$$A^k = A \otimes A^{k-1} = A^{k-1} \otimes A$$

для любого целого $k \geq 1$.

Будем называть матрицу D диагональной, если все ее внедиагональные элементы равны ε. Нетрудно проверить, что для любой матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ при условии, что $d_i > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$, существует обратная относительно операции $\otimes$ матрица $D^{-1} = \operatorname{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$.

Операция $\otimes$ обладает очевидным свойством дистрибутивности по отношению к $\oplus$. Другими словами, выполняются тождества

$$A \otimes (B \oplus C) = A \otimes B \oplus A \otimes C,$$
$$(A \oplus B) \otimes C = A \otimes C \oplus B \otimes C$$

где A, B и C – любые матрицы, для которых соответствующие операции имеют смысл.

Свойство дистрибутивности можно также записать в виде

$$\bigotimes_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{m}A_{ij}=\bigoplus_{1\leq m_1,\dots,m_k\leq m}\bigotimes_{i=1}^{k}A_{im_i}, \tag{1}$$

где A_{ij} – произвольные квадратные матрицы для всех $i=1,\dots,k$, $j=$ $=1,\dots,m$. Из (1), в частности, следует неравенство

$$\bigotimes_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{m}A_{ij}\geq\bigoplus_{j=1}^{m}\bigotimes_{i=1}^{k}A_{ij}. \tag{2}$$

2.1 Арифметическое сложение.

Введем обычную операцию арифметического сложения как внешнюю по отношению к рассматриваемой алгебре. В силу того, что скалярные операции $\otimes$ и $+$ тождественны друг другу, представляет интерес только внешняя операция матричного сложения.

При записи алгебраических выражений будем предполагать, что в любой последовательности операций арифметическое сложение $+$ выполняется после операций $\otimes$ и $\oplus$. Для любой матрицы A положим $A+\mathcal{E}=\mathcal{E}+A=\mathcal{E}$.

Не трудно проверить, что имеет место свойство дистрибутивности операции $+$ относительно $\oplus$:

$$\sum_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{m}A_{ij}=\bigoplus_{1\leq m_1,\dots,m_k\leq m}\sum_{i=1}^{k}A_{im_i}, \tag{3}$$

из которого, в частности, следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{m}A_{ij}\geq\bigoplus_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}A_{ij}. \tag{4}$$

В общем случае трудно указать какие-либо простые свойства, связывающие операции $\otimes$ и $+$. Однако, как будет показано ниже, некоторые полезные соотношения могут быть получены для специальных типов матриц, включая диагональные и опорные матрицы.

2.2 Функции от матриц.

Рассмотрим произвольную $(n\times n)$-матрицу $A=(a_{ij})$ и введем следующие величины:

$$\|A\|=\bigoplus_{1\leq i,j\leq n}a_{ij},\qquad \mathrm{tr}(A)=\bigoplus_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

Пусть A и B - произвольные матрицы. Ясно, что из неравенства $A \leq B$ следует $\|A\| \leq \|B\|$. Кроме того, выполняются очевидные соотношения:

$$\begin{array}{ll} \|A \oplus B\| = \|A\| \oplus \|B\|, & \|A \otimes B\| \leq \|A\| \otimes \|B\|, \\ \operatorname{tr}(A \oplus B) = \operatorname{tr}(A) \oplus \operatorname{tr}(B), & \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \end{array}$$

Наконец, для любого числа $c > 0$ имеем $\|cA\| = c\|A\|$ и $\operatorname{tr}(cA) = c\operatorname{tr}(A)$.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A. Собственное число λ и соответствующий ему собственный вектор $\boldsymbol{x}$ матрицы A удовлетворяют равенству

$$A \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes \boldsymbol{x}.$$

Следующий фундаментальный результат был получен в [4] (см. также [2]).

Теорема 1 . *Для любой $(n \times n)$-матрицы A выполняется*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \|A^k\| = \rho(A),$$

где $\rho(A)$ - максимальное собственное число матрицы A,

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}\left(\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{k} A^k\right).$$

3. Модели сетей с очередями.

Пусть имеется сеть, состоящая из n узлов, топология которой описывается некоторым ациклическим графом. В каждом узле размещается обслуживающее устройство и неограниченный накопитель, предназначенный для размещения очереди требований, ожидающих обслуживания. Узел сети, который не имеет входящих дуг, рассматривается как источник неограниченного потока требований, поступающих в систему. В начальный (нулевой) момент времени все устройства свободны, очереди в узлах-источниках имеют бесконечное число требований, в то время как очереди всех остальных узлов пусты.

Обозначим через τ_{ik}, продожительность, а через $x_i(k)$ - момент времени завершения k-го обслуживания в узле i, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$ Предполагается, что $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с конечными средним и дисперсией для каждого $i = 1, \ldots, n$.

В рассматриваемых сетях наряду с обычной процедурой обслуживания требований могут осуществляться дополнительные операции объединения и разъединения требований [1, 6]. Операция объединения выполняется в узле перед обслуживанием требований и заключается в объединении поступивших требований, взятых по одному от каждого предшествующего узла, и замене их на новое требование, которое присоединяется к очереди. Операция разъединения выполняется всякий раз после завершения обслуживания требования в узле и состоит в замене этого требования на несколько новых требований по одному для каждого последующего узла, которые затем немедленно направляются в эти узлы.

3.1 Алгебраическая модель.

Динамика сетей с операциями объединения и разъединения требований может быть описана при помощи аппарата идемпотентной алгебры. Как показано в [6], для ациклических сетей справедливо динамическое уравнение

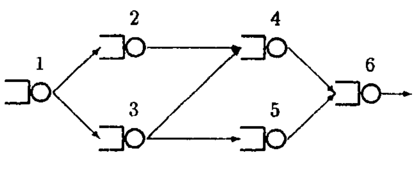
$$\boldsymbol{x}(k) = \mathcal{A}(k) \otimes \boldsymbol{x}(k-1), \quad \mathcal{A}(k) = \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{T}_k \otimes (G^T \otimes \mathcal{T}_k)^j,$$

где $\boldsymbol{x}(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^T$, $\mathcal{T}_k = \operatorname{diag}(\tau_{1k}, \ldots, \tau_{nk})$ – диагональная матрица, $G = (g_{ij})$ – матрица смежности графа сети с элементами

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если существует дуга } (i,j), \\ \varepsilon, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

l – длина наибольшего пути в графе.

В качестве примера рассмотрим сеть с $n = 6$ узлами, представленную вместе с соответствующей матрицей смежности G на рис. 1.



(а) Модель сети

$$G = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

(б) Матрица смежности

Рис. 1: Модель сети с очередями.

В силу того, что для графа сети длина наибольшего пути $l = 3$, матрица системы принимает вид

$$\mathcal{A}(k) = \mathcal{T}_k \otimes (E \oplus (G^T \otimes \mathcal{T}_k) \oplus (G^T \otimes \mathcal{T}_k)^2 \oplus (G^T \otimes \mathcal{T}_k)^3) =$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{3k} & \varepsilon & \tau_{3k} & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes (\tau_{2k} \oplus \tau_{3k}) \otimes \tau_{4k} & \tau_{2k} \otimes \tau_{4k} & \tau_{3k} \otimes \tau_{4k} & \tau_{4k} \end{pmatrix}.$$

3.2 Среднее время цикла.

Предполагается, что работа системы представляет собой последовательность циклов обслуживания. Первый цикл заканчивается, когда в каждом из узлов сети будет завершено обслуживание одного требования, второй – когда в каждом узле будет обслужено по два требования и т.д.

С учетом условия $\boldsymbol{x}(0) = 0$, время завершения k-го цикла можно определить как

$$\|\boldsymbol{x}(k)\| = \|\mathcal{A}_k\|, \qquad \mathcal{A}_k = \mathcal{A}(k) \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}(1).$$

Во многих практических задачах представляет интерес определение среднего времени цикла при условии, что число циклов неограниченно растет. Другими словами, ставится задача нахождения предела

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|\boldsymbol{x}(k)\| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|\mathcal{A}_k\|$$

при условии, что он существует.

4. Диагональные и опорные матрицы.

Пусть D – диагональная матрица с внедиагональными элементами, равными ε. Тогда для любых матриц A и B выполняются очевидные тождества

$$\begin{aligned} D \otimes (A+B) &= D \otimes A + B = A + D \otimes B, \\ (A+B) \otimes D &= A \otimes D + B = A + B \otimes D. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем называть любую квадратную матрицу с элементами 0 или ε опорной матрицей. Заметим, что опорную матрицу $G = (g_{ij})$ можно рассматривать как матрицу смежности некоторого графа при условии, что $g_{ij} = 0$ означает наличие дуги (i,j) в графе, а $g_{ij} = \varepsilon$ – ее отсутствие. Нетрудно проверить, что если граф является ациклическим, то для соответствующей матрицы G выполняется $G^m = \mathcal{E}$ для всех $m > l$, где l – длина наибольшего пути в графе.

Пусть G – опорная матрица. Для любых матриц A и B выполняются неравенства

$$\begin{aligned} G \otimes (A+B) &\le G \otimes A + G \otimes B, \\ (A+B) \otimes G &\le A \otimes G + B \otimes G. \end{aligned} \tag{6}$$

Будем рассматривать произведения чередующихся диагональных матриц и некоторой опорной матрицы G вида

$$D_0 \otimes G \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes G \otimes D_k.$$

Введем также обозначения:

$$\Phi_j(D) = D \otimes (G \otimes D)^j, \qquad \Psi_j^i(D) = G^i \otimes D \otimes G^j.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 . *Для любых диагональных матриц* $D_0, D_1, ..., D_k$ *выполняется неравенство*

$$D_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^{k}(G \otimes D_j) \le \sum_{j=0}^{k} G^j \otimes D_j \otimes G^{k-j}. \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства можно применить метод математической индукции. При $k = 1$ из (5) и очевидного тождества $D_0 \otimes G = D_0 \otimes G + G$ следует

$$D_0 \otimes G \otimes D_1 = (D_0 \otimes G + G) \otimes D_1 = D_0 \otimes G + G \otimes D_1.$$

Заметим, что при $k = 2$ соотношение (7) снова выполняется в форме равенства:

$$\begin{aligned} D_0 \otimes G \otimes D_1 \otimes G \otimes D_2 &= D_0 \otimes (G^2 + G \otimes D_1 \otimes G + G^2) \otimes D_2 \\ &= D_0 \otimes G^2 + G \otimes D_1 \otimes G + G^2 \otimes D_2. \end{aligned}$$

Предположив, что утверждение леммы справедливо для некоторого k, докажем, что оно будет выполняться и для $k+1$. С учетом (6) будем иметь

$$D_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^{k+1}(G \otimes D_j) = D_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^{k}(G \otimes D_j) \otimes G \otimes D_{k+1} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{k} G^j \otimes D_j \otimes G^{k-j}\right) \otimes G \otimes D_{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} G^j \otimes D_j \otimes G^{k-j} + G^k\right) \otimes G \otimes D_{k+1} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{k} G^j \otimes D_j \otimes G^{k-j} + G^{k+1} \otimes D_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} G^j \otimes D_j \otimes G^{k-j+1}.$$

Лемма 2 . *Пусть* $D_1, ..., D_k$ *– диагональные матрицы,* $m_1, \ldots, m_k$ *– целые неотрицательные числа и* $m_1 + \cdots + m_k = m$.

Выполняется неравенство

$$\bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(D_i) \le \sum_{j=0}^{m} \Psi_j^{m-j}\left(\bigotimes_{i=r_j}^{s_j} D_i\right), \tag{8}$$

где $r_0 = 1$, $r_j = s_{j-1}$ *для всех* $j = 1, \ldots, m$, *и*

$$s_j = \begin{cases} k, & \text{если } m_1 + \cdots + m_k \le j, \\ \min\{i \mid m_1 + \cdots + m_i > j\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

для всех $j = 0, 1, \ldots, m$.

Доказательство. Применяя неравенство (7), получим

$$\bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(D_i) = \bigotimes_{i=1}^{k}(D_i \otimes (G \otimes D_i)^{m_i}) \le \sum_{j=0}^{m} G^j \otimes \widetilde{D}_j \otimes G^{m-j},$$

где $\widetilde{D}_j = D_{r_j} \otimes D_{r_j+1} \otimes \cdots \otimes D_{s_j}$. Нетрудно проверить, что индексы r_j и s_j вычисляются как указано в утверждении леммы.

Лемма 3 . *Для любых диагональных матриц* $D_0^{(1)}, D_1^{(1)}, \ldots, D_k^{(1)}$ *и* $D_0^{(2)}, D_1^{(2)}, \ldots,$ $\ldots, D_k^{(2)}$ *выполняется неравенство*

$$D_0^{(1)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)}) + D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(2)}) \geq D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)} \otimes D_i^{(2)}).$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. При $k=1$ с учетом (5) будем иметь

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} \otimes G \otimes D_1^{(1)} + D_0^{(2)} \otimes G \otimes D_1^{(2)} &= D_0^{(1)} \otimes G \otimes D_1^{(1)} + D_0^{(2)} \otimes G \otimes D_1^{(2)} + G = \\ &= G + G + D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes G \otimes D_1^{(1)} \otimes D_1^{(2)} = D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes G \otimes D_1^{(1)} \otimes D_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение леммы верно для некоторого k. Покажем, что тогда оно будет верно и для $k+1$. Применяя (5) и (6), последовательно получим:

$$\begin{aligned} & D_0^{(1)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1}(G \otimes D_i^{(1)}) + D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1}(G \otimes D_i^{(2)}) \quad = \\ = \quad & D_0^{(1)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)}) \otimes G \otimes D_{k+1}^{(1)} + D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(2)}) \otimes G \otimes D_{k+1}^{(2)} \\ = \quad & D_0^{(1)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)}) \otimes G + D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(2)}) \otimes G + G^{k+1} \otimes D_{k+1}^{(1)} \otimes D_{k+1}^{(2)} \\ \geq \quad & \left(D_0^{(1)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)}) + D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(2)})\right) \otimes G + G^{k+1} \otimes D_{k+1}^{(1)} \otimes D_{k+1}^{(2)} \\ \geq \quad & D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)} \otimes D_i^{(2)}) \otimes G + G^{k+1} \otimes D_{k+1}^{(1)} \otimes D_{k+1}^{(2)} \\ = \quad & D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k}(G \otimes D_i^{(1)} \otimes D_i^{(2)}) \otimes G \otimes D_{k+1}^{(1)} \otimes D_{k+1}^{(2)} \\ = \quad & D_0^{(1)} \otimes D_0^{(2)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1}(G \otimes D_i^{(1)} \otimes D_i^{(2)}). \end{aligned}$$

Следующее утверждение является прямым следствием предыдущей леммы.

Следствие 1 . *Пусть* $D_1^{(1)}, \ldots, D_k^{(1)}$ *и* $D_1^{(2)}, \ldots, D_k^{(2)}$ *– диагональные матрицы,* $m_1, \ldots, m_k$ *– целые неотрицательные числа.*

Выполняется неравенство

$$\bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(D_i^{(1)} \otimes D_i^{(2)}) \leq \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(D_i^{(1)}) + \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(D_i^{(2)}). \tag{9}$$

5. Случайные матрицы.

Будем рассматривать матрицы, элементы которых являются случайными величинами. Некоторые из элементов могут быть вырожденными случайными величинами, которые с вероятностью 1 принимают значение $\varepsilon = -\infty$.

Пусть $\mathcal{A}$ – случайная матрица. Будем обозначать через $E[\mathcal{A}]$ матрицу, полученную из $\mathcal{A}$ путем замены ее элементов на их математические ожидания при условии, что $E[\varepsilon] = \varepsilon$.

Для любых случайных матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ очевидно выполняются следующие неравенства:

$$E\|\mathcal{A}\| \geq \|E[\mathcal{A}]\|, \quad E[\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}] \geq E[\mathcal{A}] \oplus E[\mathcal{B}], \quad E[\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}] \geq E[\mathcal{A}] \otimes E[\mathcal{B}].$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$, независимые одинаково распределенные случайные величины со средним $E[\xi_1] = 0$ и дисперсией $D[\xi_1] < \infty$. Введем обозначения:

$$\eta_k = \max_{1 \leq r \leq s \leq k} \{\xi_r + \xi_{r+1} + \cdots + \xi_s\}, \qquad \zeta_{lk} = \max_{l \leq r \leq s \leq k} \{\xi_r + \xi_{r+1} + \cdots + \xi_s\},$$

и заметим, что $\eta_k = \zeta_{1k}$.

Нетрудно проверить, что семейство случайных величин $\{\zeta_{lk} | l \leq k,\, l, k \geq 1\}$ удовлетворяет условиям эргодической теоремы Кингмана [5]. Из этой теоремы следует, что существуют пределы

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \zeta_{1k} = a \quad \text{с в. } 1, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E[\zeta_{1k}] = a.$$

С другой стороны, как было показано в [9], $E[\eta_k] = O(\sqrt{k})$ при $k \longrightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E[\zeta_{1k}] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E[\eta_k] = 0.$$

Таким образом справедливо следующее утверждение.

Лемма 4 . *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$, независимые одинаково распределенные случайные величины со средним $E[\xi_1] = 0$ и дисперсией $D[\xi_1] < \infty$.*

Тогда с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq k} \bigotimes_{i=r}^{s} \xi_i = 0.$$

Полученный результат можно прямо распространить на случай последовательности случайных диагональных матриц $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, соответствующие диагональные элементы которых независимы и имеют одинаковые распределения вероятностей с нулевым средним и ограниченной дисперсией, а все внедиагональные элементы равны ε. В этом случае с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq k} \bigotimes_{i=r}^{s} \mathcal{D}_i = E.$$

6. Вычисление среднего времени цикла.

Запишем транспонированную матрицу

$$\mathcal{A}^T(k) = \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{T}_k \otimes (G \otimes \mathcal{T}_k)^j = \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{T}_k).$$

Тогда

$$\mathcal{A}_k^T = \mathcal{A}^T(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}^T(k) = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{T}_i \otimes (G \otimes \mathcal{T}_i)^j = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{T}_i).$$

Введем следующие обозначения:

$$S = E[\mathcal{T}_1], \qquad B^T = \bigoplus_{j=0}^{l} S \otimes (G \otimes S)^j = \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(S), \qquad \mathcal{R}_i = S^{-1} \otimes \mathcal{T}_i$$

для всех $i = 1, \ldots, k$.

Введем также матрицы

$$\mathcal{C}^T(k) = \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{R}_k \otimes (G \otimes \mathcal{R}_k)^j = \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{R}_k),$$

$$\mathcal{C}_k^T = \mathcal{C}^T(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}^T(k) = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{R}_i \otimes (G \otimes \mathcal{R}_i)^j = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{R}_i).$$

Лемма 5 . *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{A}_k \leq B^k + \mathcal{C}_k. \tag{10}$$

Доказательство. Применяя (1), (2) и (9), последовательно получим:

$$\begin{aligned}
(B^T)^k + \mathcal{C}_k^T &= \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(S) + \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{i} \Phi_j(\mathcal{R}_i) \\
&= \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(S) + \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{R}_i) \\
&\geq \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(S) + \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{R}_i) \right) \\
&\geq \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(S \otimes S^{-1} \otimes \mathcal{T}_i) \\
&= \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{T}_i) = \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{T}_i) = \mathcal{A}_k^T.
\end{aligned}$$

Лемма 6 . *Выполняется неравенство*

$$\mathcal{C}_k^T \leq \bigoplus_{m=0}^{l} \sum_{j=0}^{m} \Psi_j^{m-j} \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq k} \bigotimes_{i=r}^{s} \mathcal{R}_i \right). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $m = m_1 + \cdots + m_k$. Учитывая, что граф сети является ациклическим, представим $\mathcal{C}_k^T$ в виде

$$\mathcal{C}_k^T = \bigoplus_{0 \leq m_1, \ldots, m_k \leq l} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{R}_i) = \bigoplus_{m=0}^{l} \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_k = m} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{R}_i)$$

Применяя (8) и (4), последовательно получим

$$\bigoplus_{m_1 + \cdots + m_k = m} \bigotimes_{i=1}^{k} \Phi_{m_i}(\mathcal{R}_i) \leq \bigoplus_{m_1 + \cdots + m_k = m} \sum_{j=0}^{m} \Psi_j^{m-j} \left(\bigotimes_{i=r_j}^{s_j} \mathcal{R}_i \right) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{m} \bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq k} \Psi_j^{m-j} \left(\bigotimes_{i=r}^{s} \mathcal{R}_i \right) = \sum_{j=0}^{m} \Psi_j^{m-j} \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq s \leq k} \bigotimes_{i=r}^{s} \mathcal{R}_i \right).$$

Теперь докажем следующее утверждение.

Теорема 2 . *Пусть $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots,$ - одинаково распределенные независимые случайные диагональные матрицы и $E\|\mathcal{T}_1\| < \infty$, $D\|\mathcal{T}_1\| < \infty$.*

Тогда с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \|\mathcal{A}_k\| = \rho(B),$$

где $\rho(B)$ - максимальное собственное число матрицы B.

Доказательство. В [8] было показано, что существуют пределы

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \mathcal{A}_k = A \quad \text{с в. } 1, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E[\mathcal{A}_k] = A.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $\| \cdot \|$, в частности, следует существование пределов

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \|\mathcal{A}_k\| = \|A\| \quad \text{с в. } 1, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} E\|\mathcal{A}_k\| = \|A\|.$$

Покажем сначала, что $\|A\| \geq \rho(B)$.

$$E\|\mathcal{A}_k^T\| = E \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(\mathcal{T}_i) \right\| \geq \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(E[\mathcal{T}_i]) \right\| = \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{l} \Phi_j(S) \right\| =$$
$$= \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} B^T \right\| = \|(B^T)^k\|.$$

Переходя к пределу, получим

$$\|A\| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} E\|\mathcal{A}_k\| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|B^k\| = \rho(B).$$

Проверим справедливость противоположного неравенства. Из неравенства (10) следует:

$$\frac{1}{k}\|\mathcal{A}_k\| \leq \frac{1}{k}\|B^k\| + \left\|\frac{1}{k}\mathcal{C}_k\right\|.$$

Теперь с учетом (11) запишем

$$\frac{1}{k}\mathcal{C}_k^T \leq \frac{1}{k}\bigoplus_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\Psi_j^{m-j}\left(\bigoplus_{1\leq r\leq s\leq k}\bigotimes_{i=r}^{s}\mathcal{R}_i\right) = \bigoplus_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\Psi_j^{m-j}\left(\frac{1}{k}\bigoplus_{1\leq r\leq s\leq k}\bigotimes_{i=r}^{s}\mathcal{R}_i\right).$$

В силу того, что при $k\to\infty$ с вероятностью 1

$$\frac{1}{k}\bigoplus_{1\leq r\leq s\leq k}\bigotimes_{i=r}^{s}\mathcal{R}_i \longrightarrow E,$$

будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\mathcal{C}_k^T \leq \bigoplus_{m=0}^{l} G^m = G^* \quad \text{с в. 1.}$$

Так как $\|G^*\| = 0$, окончательно получим

$$\|A\| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\|\mathcal{A}_k\| \leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\|B^k\| = \rho(B) \quad \text{с в. 1.}$$

Следствие 2 . *Среднее время цикла γ определяется соотношением*

$$\gamma = \rho(S) = \|S\|.$$

Доказательство. Учитывая, что граф сети является ациклическим, матрице B можно придать верхнюю треугольную форму. Так как все циклы такой матрицы являются петлями (циклами единичной длины), то для нее выполняется

$$\rho(B^T) = \mathrm{tr}(B^T) = \mathrm{tr}\left(\bigoplus_{j=0}^{l}\Phi_j(S)\right) = \bigoplus_{j=0}^{l}\mathrm{tr}(\Phi_j(S)).$$

В силу того, что матрица S является диагональной, будем иметь $\mathrm{tr}(\Phi_j(S)) = \varepsilon$ для всех $j \geq 1$.

Так как $\Phi_0(S) = S$, окончательно получаем

$$\gamma = \rho(B^T) = \mathrm{tr}(S) = \rho(S) = \|S\|.$$

Рассмотрим как полученный результат может быть использован для вычисления среднего времени цикла для сети, представленной на рис. 1. В рассматриваемом случае матрица $S = \mathrm{diag}(E[\tau_{11}],\ldots,E[\tau_{16}])$. Тогда среднее время цикла вычисляется так

$$\gamma = E[\tau_{11}] \oplus \cdots \oplus E[\tau_{16}] = \max\{E[\tau_{11}],\ldots,E[\tau_{16}]\}.$$

Заметим, что величина среднего времени цикла не зависит от топологии сети.

Указатель литературы

[1] **Бачелли Ф., Маковски А.М.** Использование методов теории массового обслуживания для анализа систем с ограничениями по синхронизации. // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1989. Т. 1. N 1. С. 99-128.

[2] **Воробьев Н.Н.** Экстремальная алгебра положительных матриц. // Elektronische Informaionsverarbeitung und Kybernetik. 1967. Bd. 3. N 1. S. 39-72.

[3] **Маслов В.П., Колокольцов В.Н.** Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

[4] **Романовский И.В.** Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования. // Кибернетика. 1967. N 2. С. 66-78.

[5] **Kingman J.F.C.** Subadditive ergodic theory. // Annals of Probability. 1973. Vol. 1. P. 883-909.

[6] **Krivulin N.K.** Max-plus algebra models of queueing networks. // Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems WODES'96. London: IEE. 1996. P. 76-81.

[7] **Krivulin N.K.** Monotonicity properties and simple bounds on the mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks. // Recent Advances in Information Science and Technology. / Ed. by N. Mastorakis. World Scientific, 1998. P. 147-152.

[8] **Krivulin N.K.** Products of random matrices and queueing systems performance evaluation. // Simulation 2001: Proc. 4th St. Petersburg Workshop on Simulation / Ed. by S.M. Ermakov, Yu.N. Kashtanov and V.B. Melas. NII Chemistry St. Petersburg University Publishers, 2001. P. 304-309.

[9] **Krivulin N.K., Nevzorov V.B.** On evaluation of the mean service cycle time in tandem queueing systems. // Applied Statistical Science V / Ed. by M. Ahsanullah, J. Kennyon, S.K. Sarkar. New York: Nova Science Publishers, 2001. P. 145-155.