закций и их реализаций *политранзакция* может быть определена как транзитивное замыкание всех транзакций, допустимых в независимой системе манипулирования данными. Дерево политранзакции строится в соответствии со взаимозависимостями между базами данных и предикатами, описывающими целостность данных. Порожденные транзакции будут выполняться в соответствии с описанными схемами.

Указатель литературы

1. **Agrawal D., Abbadi A. E.** A Non-Restrictive Concurrency Control for Object Oriented Databases // *Extending Data Base Technology. Proc. Int. Conf., EDBT-92.* Vol. 580. Vienna, 1992. P. 469–481.
2. **Leu Y., Elmagarmid A., Boudriga N.** Specification and execution of transactions for advanced database applications // *Inf. Syst.*, 1992. N 17(2). P.171–183
3. **Новиков Б.А.** Реализация сложных объектов в системе хранения // УСиМ. 1991. N7. С. 46–52.
4. **Dombrowska H., Kaprizkina I., Novikov B.** Representation and analysis of the SYNTHESIS data structures in the storage system // *Proc. of the workshop on advances in databases and information systems—ADBIS'93.* Moscow, 1993. P. 60–68.
5. **Калиниченко Л.А.** Синтез: язык определения, проектирования и программирования интероперабельных сред неоднородных информационных ресурсов М., 1992. 113 с.
6. **Kalinichenko L.** The interoperable environment of heterogeneous information resources: a generalization perspective // *Proc. of the First International Workshop on the Interoperability in Multidatabase Systems*, Kyoto, 1991. P. 196–199.
7. **Weikum G.** Principles and realization strategies of multilevel transaction management // *ACM Trans. Database Syst.* 1991. N 16(1). P.132–180.

Н.К. Кривулин

НЕСМЕЩЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМИ СОБЫТИЯМИ

Одной из главных задач исследования сложных систем, таких как сети связи, информационно-вычислительные системы, гибкие автоматизированные производственные системы и т.п., является повышение эффективности системы. При этом определяются параметры системы, вводится некоторый показатель эффективности и ставится задача нахождения оптимальных по отношению к нему значений параметров (задача оптимизации). Для сложных систем явный вид зависимости показателя эффективности от параметров системы обычно не известен, однако значение показателя эффективности при любых допустимых значениях параметров могут быть сколь угодно точно оценены при помощи имитационной модели системы. Как правило, решение задачи оптимизации некоторой системы может быть осуществлено наиболее успешно, если наряду с информацией о значениях показателя эффективности системы используется также информация о его градиенте.

В настоящей статье исследуется задача несмещенного оценивания градиента показателей эффективности для широкого класса моделей систем с дискретными событиями. Рассматриваются модели трех типов: модель надежности, сетевая модель и модель сети коммутации сообщений. Показатели эффективности в них определяются как математическое ожидание некоторых случайных функций. Показано, что в моделях рассматриваемых типов случайные функции могут быть выражены через заданные функции при помощи операций $\max, \min$ и сложения.

Указанные свойства случайных функций позволяют получить простые условия несмещенности для одного класса оценок градиента показателей эффективности. Эти условия имеют достаточно общий характер и обычно выполняются при имитационном моделировании систем.

Для рассматриваемых оценок градиента предложены эффективные алгоритмы вычисления на основе имитационного моделирования. Разработанные алгоритмы непосредственно связаны с логикой функционирования систем, что позволяет естественным образом сочетать эти алгоритмы с различными процедурами имитационного моделирования. При этом для вычисления оценок градиента не требуется проведение дополнительных имитационных экспериментов. Предложенные алгоритмы благодаря относительно небольшим дополнительным затратам времени ЭВМ позволяют вычислять значения оценок градиента одновременно с оцениванием показателя эффективности системы.

1. Модели динамических систем с дискретными событиями. Рассмотрим ряд типичных моделей, предназначенных для исследования сложных систем. В этих моделях исследуемая система представляется как динамическая система с дискретными событиями (ДСДС).

Модель для исследования надежности некоторой системы (модель надежности). Рассматривается сложная техническая система, состоящая из L элементов. Каждый элемент может выполнять свою функцию, если он исправен и исправны некоторые другие связанные с ним элементы. Элементы системы выходят из строя в случайные моменты времени, и их работоспособность не восстанавливается. Задача состоит в том, чтобы найти значения параметров системы, которые обеспечивают максимальное среднее время функционирования системы.

Связь между элементами описывается при помощи ориентированного графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{U})$, в котором множество вершин $\mathbf{V}$ соответствует множеству элементов системы. Дуга $(i, j) \in \mathbf{U}$, если работоспособность j–го элемента непосредственно зависит от работоспособности i–го элемента. Для каждой i–й вершины графа введем следующие два подмножества вершин:

$$\mathbf{V}_F(i) = \{j \in \mathbf{V} \mid (j, i) \in \mathbf{U}\},$$

$$\mathbf{V}_D(i) = \{j \in \mathbf{V} \mid (i, j) \in \mathbf{U}\}.$$

Пусть в графе G выделены подмножества вершин $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}$, такие, что для каждой вершины $i_0 \in \mathbf{V}_0$ не существует входящих дуг и для каждой вершины $i_1 \in \mathbf{V}_1$ не существует исходящих дуг, т.е.

$$\mathbf{V}_0 = \{i \in \mathbf{V} \mid \mathbf{V}_D(i) = \emptyset\},$$

$$\mathbf{V}_1 = \{i \in \mathbf{V} \mid \mathbf{V}_F(i) = \emptyset\}.$$

Любая вершина $i \in \mathbf{V} \setminus (\mathbf{V}_0 \cup \mathbf{V}_1)$ имеет как входящие, так и исходящие дуги. Система считается работоспособной, если для каждой вершины $i_1 \in \mathbf{V}_1$ существует в графе G путь из какойлибо вершины $i_0 \in \mathbf{V}_0$, для которого соответствующие элементы исправны.

Введем $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$, где для всякого $i = 1, \ldots, L$ случайная функция $\tau_i : \mathbf{X} \times \Omega \to \mathbf{R}_+$ определяет время безотказной работы i–го элемента системы, X – множество допустимых значений параметров системы, Ω – множество элементарных событий некоторого вероятностного пространства. Обозначим момент потери работоспособности элементом i через t_i . Ясно, что t_i можно представить следующим образом:

$$t_i = \begin{cases} \min\left\{\max\limits_{j\in\mathbf{V}_F(i)} t_j, \tau_i\right\}, & \text{если } i \notin \mathbf{V}_0, \\ \qquad \tau_i, & \text{если } i \in \mathbf{V}_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Общее случайное время работы системы определяется как

$$\gamma(x;\omega) = \min_{i\in\mathbf{V}_1} t_i(x;\omega),$$

а среднее время – как

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{E}[\gamma(x;\omega)].$$

Из соотношения (1.1) следует, что случайная функция γ, при помощи которой определяется показатель эффективности системы, может быть выражена через функции множества T при помощи операций max и min.

Сетевая модель. Рассмотрим некоторую технологическую процедуру, состоящую в выполнении L различных операций. На множестве операций задан частичный порядок, который накладывает ограничения на последовательность их выполнения. С этой моделью связана задача минимизации среднего времени выполнения всей процедуры.

Частичное упорядочение множества операций описывается при помощи ориентированного графа $G = (\mathbf{V}, \mathbf{U})$, не содержащего петель и контуров. Вершины графа соответствуют операциям рассматриваемой технологической процедуры. Если операция i должна непосредственно предшествовать операции j, то дуга (i, j) включается в множество $\mathbf{U}$. Сохранив смысл обозначений, введенных для предыдущей модели, будем называть множество

$\mathbf{V}_0$ совокупностью начальных операций, а множество $\mathbf{V}_1$ – совокупностью конечных операций. Выполнение рассматриваемой технологической процедуры считается завершенным, когда завершено выполнение всех конечных операций. В начальный (нулевой) момент времени одновременно начинается выполнение всех начальных операций.

Введем множество $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$, где $\tau_i(x;\omega)$ – случайное время выполнения i-й операции. Тогда время ее завершения можно представить в виде

$$t_i = \begin{cases} \max\limits_{j \in \mathbf{V}_F(i)} t_j + \tau_i, & \text{если } i \notin \mathbf{V}_0, \\ \tau_i, & \text{если } i \in \mathbf{V}_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Время завершения всей технологической процедуры и соответствующий показатель эффективности системы определяются как

$$\gamma(x;\omega) = \max_{i \in \mathbf{V}_1} t_i(x;\omega) \text{ и } \mathbf{F}(x) = \mathbf{E}[\gamma(x;\omega)].$$

Нетрудно видеть, что для рассматриваемой системы случайная функция эффективности t выражается через функции из множества T только при помощи операций max и сложения.

Модель сети коммутации сообщений. Имеется замкнутая сеть, состоящая из L узлов, в которых осуществляется обслуживание сообщений. Узел состоит из обслуживающего устройства и накопителя (буфера) неограниченной емкости, в котором сообщения ожидают обслуживания. В любой момент обслуживающее устройство может быть занято не более чем одним сообщением. После завершения обслуживания в некотором узле сообщение мгновенно переходит в другой узел в соответствии с определенной процедурой выбора маршрута. Если обслуживающее устройство в этом узле свободно, сообщение занимает его. В противном случае оно помещается в буфер узла, где присоединяется к очереди ожидающих обслуживания в данном узле сообщений. Процедура выбора сообщений из очереди на обслуживание соответствует дисциплине FCFS (первым пришел – первым обслуживается). Будем предполагать, что в начальный момент все обслуживающие устройства свободны и в буфере узла i находится $n_i (0 \le i \le \infty)$ сообщений.

Для рассматриваемой модели введем множество случайных функций $T = \{\tau_{ij}\}$, где $\tau_{ij}(x;\omega)$ есть время обслуживания j-го в порядке поступления сообщения в узле i. Процедура выбора маршрута сообщений определяется множеством дискретных случайных величин $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}$, где $\sigma_{ij}(\omega)$ может принимать значения из множества $\{1, \dots, L\}$, и указывает следующий узел, в который должно перейти j-е обслуженное в узле i сообщение. В общем случае случайные величины $\sigma_{ij}(\omega)$ могут зависить от параметра x, т.е. представлять собой дискретные случайные функции $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x;\omega)$.

Пусть s_{ij} есть реализация случайной величины σ_{ij} при некотором фиксированном значении ω. Будем называть таблицей маршрутизации матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots \\ s_{21} & s_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L1} & s_{L2} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{S}$ пространство всех допустимых таблиц маршрутизации S в рассматриваемой сети. Если вместо случайных функций σ_{ij} выбор маршрута движения сообщений определяется некоторой фиксированной матрицей $S \in \mathbf{S}$, то будем говорить, что в сети задана детерминированная процедура маршрутизации. В противном случае процедуру маршрутизации назовем стохастической.

Основными характеристиками сети являются среднее время пребывания сообщений в узле, среднее время ожидания обслуживания, коэффициент использования узла и др. Для того чтобы записать случайные функции, соответствующие этим показателям эффективности для каждого узла i, $i = 1, \dots, L$, введем следующие обозначения: α_{ij} – время поступления в узел j-го по порядку сообщения, β_{ij} – время начала обслуживания в узле j-го сообщения, γ_{ij} – время завершения обслуживания в узле j-го сообщения. Тогда логика работы узла может быть описана рекуррентными соотношениями

$$\beta_{ij} = \max\{\gamma_{i\,j-1}, \alpha_{ij}\},$$

$$\gamma_{ij} = \beta_{ij} + \tau_{ij} = \max\{\gamma_{i\,j-1}, \alpha_{ij}\} + \tau_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Отметим, что каждый момент α поступления сообщения в узел или момент β начала обслуживания непосредственно связаны и поэтому совпадают с моментами завершения обслуживания в другом или в том же самом узле. В силу этого особый интерес приобретает выяснение характера зависимости моментов завершения обслуживания γ от случайных функций множества T. Имеет место следующий важный результат.

Теорема 1.1 [3]. В сети коммутации сообщений с детерминированной процедурой маршрутизации любой момент завершения обслуживания γ может быть выражен через продолжительности обслуживания $\tau \in T$ при помощи операций $\max, \min$ и сложения.

Рассмотрим теперь случайные функции для основных показателей эффективности сети с детерминированной процедурой выбора маршрута передвижения сообщений. Пусть зафиксировано число k сообщений, которые должны быть обслужены в некотором узле i сети. Случайные функции $\alpha_{ij}(x;\omega)$, $\beta_{ij}(x;\omega)$, $\gamma_{ij}(x;\omega)$ определяют моменты поступления в узел i, начала и завершения обслуживания в этом узле j-го сообщения соответственно. Для основных показателей эффективности соответствующие случайные функции эффективности записываются в следующем виде:

1) общее время обслуживания сообщений в узле

$$F_1(x;\omega) = \gamma_{ik}(x;\omega);$$

2) общая продолжительность простоя узла

$$F_2(x;\omega) = \gamma_{ik}(x;\omega) - \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij}(x;\omega);$$

3) среднее время пребывания сообщений в узле

$$F_3(x;\omega) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \left[\gamma_{ij}(x;\omega) - \alpha_{ij}(x;\omega)\right];$$

4) среднее время ожидания сообщений в узле

$$F_4(x;\omega) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \left[\beta_{ij}(x;\omega) - \alpha_{ij}(x;\omega)\right];$$

5) коэффициент использования узла

$$F_5(x;\omega) = \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij}(x;\omega)/\gamma_{ik}(x;\omega);$$

6) коэффициент простоя узла

$$F_6(x;\omega) = \left[\gamma_{ik}(x;\omega) - \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij}(x;\omega)\right] /\gamma_{ik}(x;\omega);$$

7) среднее число сообщений в узле

$$F_7(x;\omega) = \sum_{j=1}^{k} \left[\gamma_{ij}(x;\omega) - \alpha_{ij}(x;\omega)\right] /\gamma_{ik}(x;\omega);$$

8) средняя длина очереди в узле

$$F_8(x;\omega) = \sum_{j=1}^{k} \left[\beta_{ij}(x;\omega) - \alpha_{ij}(x;\omega)\right] /\gamma_{ik}(x;\omega).$$

Показатели эффективности сети определяются соответственно как математическое ожидание $\mathbf{F}_l(x) = \mathbf{E}[F_l(x;\omega)]$, $l = 1,\ldots,8$.

Отметим, что для сети со стохастической и зависящей от параметра x процедурой маршрутизации случайная функция эффективности может быть представлена в виде

$$F(x;\omega,\Sigma(x;\omega)) = \sum_{S\in\mathbf{S}} \mathbf{1}_{[\Sigma(x;\omega)=S]} F_S(x;\omega),$$

где Σ понимается как дискретная случайная функция $\Sigma : \mathbf{X} \times \Omega \to \mathbf{S}$, $\mathbf{1}_{[\Sigma(x;\omega)=S]}$ – индикатор события $\{\Sigma(x;\omega) = S\}$, $F_S(x;\omega) = F(x;\omega,S)$ для любой фиксированной таблицы маршрутизации $S \in \mathbf{S}$.

Рассмотренные примеры моделей демонстрируют весьма важное их общее свойство. Для этих моделей моменты времени наступления в системе событий представляют собой функционалы определенного вида, заданные на множестве T. Такие функционалы выражают γ через элементы множества T при помощи операций $\max, \min$ и сложения. При имитационном моделировании непосредственное выполнение этих операций, как правило, не производится. Однако информация о виде функционала может быть использована для повышения эффективности исследования системы на основе имитаций. В частности, эта информация оказывается весьма полезной при построении несмещенных оценок градиента показателя эффективности в случае непрерывного параметра системы.

2. Оценивание градиента при имитационном моделировании ДСДС. Рассмотрим показатель эффективности

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{E}F(x;\omega) \tag{2.1}$$

некоторой системы, для которой множество значений параметров $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$. Если $\mathbf{F}(x)$ – дифференцируемая на $\mathbf{X}$ функция, то для решения задачи оптимизации ДСДС могут быть применены алгоритмы, использующие оценки градиента $\nabla\mathbf{F}(x) = (\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{F}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}(x))^T$. (Далее вместо символа градиента будем записывать частную производную, опуская индексы переменных.)

При решении задач оптимизации ДСДС на осове имитационного моделирования в основном используются конечно-разностные оценки градиента $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}(x)$ следующих двух типов:

1) оценка на основе обычного метода Монте-Карло

$$G_1(x, \Delta x; \omega_1, \ldots, \omega_{2N}) = \frac{1}{N\Delta x}\sum_{i=1}^{N}\left[F(x+\Delta x;\omega_i) - F(x;\omega_{N+i})\right];$$

2) оценка по методу зависимых испытаний

$$G_2(x, \Delta x; \omega_1, \ldots, \omega_N) = \frac{1}{N\Delta x}\sum_{i=1}^{N}\left[F(x+\Delta x;\omega_i) - F(x;\omega_i)\right],$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{2N}$ – независимые реализации ω.

Наряду с указанными иногда используются оценки, основанные на применении других разностных формул (центральные разностные отношения и т.п.). При использовании более сложных разностных формул обычно удается несколько улучшить точность оценок [1], однако объем необходимых при этом вычислений резко возрастает. В задачах оптимизации ДСДС, когда получение каждого значения функции $F(x;\omega)$ требует относительно продолжительного имитационного эксперимента на

ЭВМ, использование оценок G_1 и G_2, основанных на простейших разностных формулах, является, как правило, более предпочтительным.

Особенностью рассматриваемых задач является то, что получение аналитических выражений для $\mathbf{F}(x)$, а тем более для $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}(x)$, не представляется возможным, поэтому использование оценок G_1 и G_2 является вполне естественным, так как значения $F(x;\omega)$ могут быть получены алгоритмически. Организация вычислений этих оценок при помощи имитационной модели не представляет труда.

В работе [1] показано, что точность оценок по методу зависимых испытаний значительно выше, чем при использовании обычного метода Монте-Карло. В частности, для оценок типа G_1 и G_2 с использованием симметричных разностей при оценивании градиента гладкой функции ошибка убывает для G_1 как $N^{-1/3}$ и для G_2 как $N^{-1/2}$.

В методах оптимизации первого порядка применяется оценка градиента $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$, которая в общем виде может быть представлена как

$$G_3(x;\omega_1,\dots,\omega_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega_i), \tag{2.2}$$

где $\omega_1,\dots,\omega_N$ – независимые реализации ω. Предполагается, что имеется алгоритм вычисления значений градиента $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ при любых фиксированном $x \in \mathbf{X}$ и реализации ω.

Оценка G_3 непосредственно не использует значений $F(x;\omega)$, однако при применении метода возмущений [2,3] вычисление значения $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ осуществляется параллельно с вычислением $F(x;\omega)$ и требует весьма малой дополнительной вычислительной работы. Можно показать [3], что при вычислении оценки G_3 по методу возмущений обычно требуется почти в $n+1$ раз меньше времени ЭВМ, чем при вычислении оценки G_1 или G_2.

Численные результаты, полученные С.Цао [4], показывают, что в тех случаях, когда оценка G_3 является несмещенной и сильно состоятельной, она более точна, чем оценки G_1 и G_2. При этом для оценки G_3 среднеквадратическая ошибка убывает как N^{-1}.

В опубликованных современных работах получено весьма мало результатов, связанных с исследованием несмещенности оценок G_3 градиента показателя эффективности в задачах оптимизации ДСДС. Имеющиеся результаты связаны с изучением достаточно простых систем, для которых показатель эффективности может быть записан в явном виде и исследован традиционными методами [2,3].

Далее будут сформулированы весьма общие условия несмещенности оценки G_3 градиента произвольного показателя эффективности ДСДС.

3. Класс случайных функций $\mathcal{D}_{X,\Omega}$ и его свойства. Рассмотрим оценку (2.2) градиента показателя эффективности $\mathbf{F}(x)$. Очевидно, что для несмещенности (2.2) достаточно выполнения на $\mathbf{X}$ равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}F(x;\omega) = \mathbf{E}\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega). \tag{3.1}$$

В работе С.Цао [4] показано, что равенство (3.1) имеет место для функций, дифференцируемых на $\mathbf{X}$ с вероятностью единица. Классический результат, связанный с выполнением (3.1), представляет собой следствие из теоремы Лебега о сходимости мажорируемой последовательности [5] и является более удобным инструментом при анализе практических задач.

Теорема 3.1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{X} \times \Omega \to \mathbf{R}$ – случайная (измеримая по $\omega \in \Omega$ при любом $x \in \mathbf{X}$) функция. Если для любого $x \in \mathbf{X}$ существует градиент $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ с вероятностью единица и для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ выполняется

$$|f(x_1;\omega) - f(x_2;\omega)| \le \lambda(\omega)\|x_1 - x_2\| \text{ п.н.}, \tag{3.2}$$

причем $\mathbf{E}\lambda < \infty$, то для функции f на $\mathbf{X}$ выполняется равенство (3.1).

Если для некоторой случайной функции f выполнены условия теоремы 3.1, то будем говорить, что функция f принадлежит классу $\mathcal{D}_{X,\Omega}(f \in \mathcal{D}_{X,\Omega})$. В случае, когда $f \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$ и при любом $x \in \mathbf{X}$ случайная величина $F(x;\omega)$ имеет непрерывное распределение вероятностей, будем писать $f \in \tilde{\mathcal{D}}_{X,\Omega}$.

Рассмотрим основные свойства функций из $\mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Лемма 3.1 [6]. Пусть $f, g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$, λ_1, λ_2 – случайные величины из условия (3.2) для функций f и g соответственно, μ_1, μ_2, ν – положительно определенные случайные величины.

Тогда:

1) $f + g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$;

2) если α – ограниченная случайная величина, то $\alpha f \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$;

3) если на $\mathbf{X}$ выполняются неравенства $|f| \le \mu_1$ и $|g| \le \mu_2$ п.н., $\mathbf{E}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) < \infty$, то $fg \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$;

4) если на $\mathbf{X}$ выполняются неравенства $|f| \le \mu_1$, $|g| \ge \mu_2$ п.н. и $\mathbf{E}\left[\lambda_2\mu_1/\nu^2 + \lambda_1/\nu\right] < \infty$, то $f/g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Из утверждений 1 и 2 леммы 3.1, в частности, следует, что $\mathcal{D}_{X,\Omega}$ является линейным пространством случайных функций относительно операций сложения и умножения на ограниченную случайную величину.

Как было показано ранее, при определении показателей эффективности ДСДС соответствующие случайные функции в соотношении (2.1) выражаются через известные функции семейства T при помощи операций $\vee$ (максимум) и $\wedge$ (минимум). Следующие результаты устанавливают условия, при которых эти операции не выводят за пределы класса $\mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Лемма 3.2 [7,8]. Пусть $f, g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$ и для любого $x_0 \in \mathbf{X}$ с вероятностью единица существует окрестность $\mathbf{U}_{x_0}(\omega)$ точки x_0, такая, что для всех $x \in \mathbf{U}_{x_0}(\omega)$ сохраняется одно из отношений

$$f(x;\omega) = g(x;\omega), \quad f(x;\omega) < g(x;\omega), \quad f(x;\omega) > g(x;\omega).$$

Тогда $f \vee g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$, $f \wedge g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Легко показать, используя лемму 3.2, что, если $f, g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$ и при любом $x \in \mathbf{X}$ случайные функции $f(x;\omega)$ и $g(x;\omega)$ являются независимыми случайными величинами и хотя бы одна из них имеет непрерывное распределение, то $f \vee g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$, $f \wedge g \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Обозначим через $\mathcal{DM}_{X,\Omega}$ множество случайных функций из $\mathcal{D}_{X,\Omega}$, такое, что для любых двух функций $f, g \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$ выполняются условия леммы 3.2.

Лемма 3.3 [3,8]. Пусть $f, g \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$, $v \in \mathcal{D}_{X,\Omega}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f \vee g \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$, $f \wedge g \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$;

2) если для каждой случайной функции $f \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$ при любом $x \in \mathbf{X}$ случайные величины $f(x;\omega)$ и $v(x;\omega)$ независимы, то $f+v \in \mathcal{DM}_{X,\Omega}$.

Доказательство этих утверждений может быть легко получено на основе применения леммы 3.2.

Отметим, что из леммы 3.3 следует, что множество $\mathcal{DM}_{X,\Omega}$ замкнуто относительно операций $\vee, \wedge$ и представляет собой алгебру случайных функций с внешней операцией – сложением с функциями из $\tilde{\mathcal{D}}_{X,\Omega}$, если такая функция и любая функция из $\mathcal{DM}_{X,\Omega}$ при каждом $x \in \mathbf{X}$ являются независимыми случайными величинами.

4. Условия несмещенности оценки градиента показателя эффективности в моделях сетей коммутации сообщений. В п.1 показатель эффективности ДСДС определялся как математическое ожидание некоторого функционала, заданного на множестве случайных функций $\Gamma = \{\gamma\}$. Там же было показано, что в рассматриваемых моделях любая случайная функция $\gamma \in \Gamma$ может быть выражена через случайные функции $\tau \in T$ при помощи операций $\max, \min$ и сложения. Имеет место следующее важное утверждение.

Утверждение 4.1 [7,8]. Пусть для любой из рассмотренных моделей справедливо $T \subset \tilde{\mathcal{D}}_{X,\Omega}$ и случайные функции $\tau \in T$ при любом $x \in \mathbf{X}$ являются взаимно независимыми случайными величинами. Тогда для этой модели выполняется $\Gamma \subset \mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Применим полученные результаты для анализа показателей эффективности, введенных в п.1, для моделей сетей коммутации сообщений с детерминированной и не зависящей от параметра x процедурой выбора маршрута передвижения сообщений.

Утверждение 4.2 [7,8]. Если для модели сети коммутации сообщений выполнены условия утверждения 4.1, то для следующих показателей эффективности некоторого узла i сети, определяемых по k обслуженным сообщениям, оценки градиента (2.2) являются несмещенными:

1) время обслуживания в узле F_1 ;

2) общая продолжительность простоя узла F_2 ;

3) среднее время пребывания сообщений в узле F_3 ;

4) среднее время ожидания сообщений в узле F_4.

Утверждение 4.3 [7,8]. Пусть для модели сети коммутации сообщений выполнены условия утверждения 4.1. Если для каждой случайной функции $\tau \in T$ при всех $x \in \mathbf{X}$ справедливо

$$\nu(\omega) \leq \tau(x;\omega) \leq \mu(\omega),$$

где ν, μ – неотрицательные случайные величины, и для любых $\tau_1, \tau_2 \in T$ выполняется неравенство

$$\mathbf{E}\left[\frac{\lambda_2\mu_1}{\nu_2^2} + \frac{\lambda_1}{\nu_2}\right] < \infty,$$

где λ_1, λ_2 – случайные величины из условия (3.2) для случайных функций τ_1 и τ_2 соответственно, то для следующих показателей эффективности некоторого узла i сети, определяемых по k обслуженным в узле сообщениям, оценки градиента (2.2) являются несмещенными:

1) коэффициент использования узла F_5 ;

2) коэффициент простоя узла F_6 ;

3) среднее число сообщений в узле F_7 ;

4) средняя длина очереди в узле F_8 .

Ясно, что для выполнения условий утверждения 4.3 достаточно потребовать для каждой случайной функции $\tau \in T$, кроме выполнения условия утверждения 4.1, ограниченности τ п.н. сверху и снизу положительными константами.

В практических задачах моделирования случайные функции $\tau \in T$ известны и задаются явно при помощи аналитических выражений либо посредством семейств функций распределения. В обоих случаях вычисление значений $\frac{\partial}{\partial x}\tau(x;\omega)$ не представляет труда. В рассматриваемых моделях ДСДС для каждой функции $\gamma \in \Gamma$ вычисление значений выборочного градиента $\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x;\omega)$ также может быть организовано весьма эффективно на основе метода возмущений, предложенного Ю.Хо [2]. Описание алгоритмов вычисления $\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x;\omega)$ будет дано в следующем пункте.

Рассмотрим теперь задачу несмещенного оценивания градиента показателя эффективности в моделях сетей с недетерминированной процедурой маршрутизации, которая, кроме того, может зависить от параметров системы. Как было показано в п.1, произвольный показатель эффективности такой системы может быть представлен в общем виде как

$$F(x;\omega,\Sigma(x;\omega)) = \sum_{S\in\mathbf{S}} \mathbf{1}_{[\Sigma(x;\omega)=S]} F_S(x;\omega), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{1}_{[\Sigma(x;\omega)=S]}$ – индикатор события $\{\Sigma(x;\omega)=S\}$, $F_S(x;\omega)=F(x;\omega,S)$ для любой таблицы маршрутизации $S\in\mathbf{S}$.

В случае стохастической процедуры маршрутизации, не зависящей от параметра x, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.4 [7]. Пусть при любом $S\in\mathbf{S}$ функция $F_S\in\mathcal{D}_{X,\Omega}$ и функция $\Sigma(x;\omega)=\Sigma(\omega)$ не зависит от x.

Тогда выполняется $F\in\mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Для доказательства леммы достаточно отметить, что при любом $S\in\mathbf{S}$ индикатор $\mathbf{1}_{[\Sigma(\omega)=S]}$ является ограниченной случайной величиной. Следовательно, по лемме 3.1, справедливо включение $F\in\mathcal{D}_{X,\Omega}$.

Из результата, сформулированного в лемме 4.4, вытекает следующее важное следствие. Ясно, что справедливость утверждений 4.2 и 4.3 остается в силе и для сетей с недетерминированной процедурой маршрутизации. Другими словами, если в некоторой модели детерминированная процедура выбора маршрута передвижения сообщений заменяется стохастической, которая при этом не зависит от параметров системы, то несмещенность оценок градиента (2.2) введенных выше показателей эффективности сохраняется. Следует также отметить, что при этом не требуется независимости для любых $x\in\mathbf{X}$ и $S\in\mathbf{S}$ случайных величин $F_S(x;\omega)$ и $\Sigma(\omega)$.

Пусть $F_S\in\mathcal{D}_{X,\Omega}$ при любом $S\in\mathbf{S}$. Если процедура маршрутизации зависит от параметра x, т.е. $\Sigma=\Sigma(x;\omega)$, то для случайной функции (4.1) обычно не выполняется условие (3.2) и, следовательно, оценка градиента (2.2) оказывается смещенной. Однако при некоторых дополнительных условиях независимости и дифференцируемости, которые обычно выполняются в моделях ДСДС, можно построить несмещенную оценку градиента показателя эффективности, определяемого случайной функцией (4.1), следующего вида

$$G_3'(x;\omega_1,\ldots,\omega_N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G(x;\omega_i), \tag{4.2}$$

где $\omega_1,\ldots,\omega_N$ – независимые реализации ω.

Теорема 4.5 [7]. Пусть для случайной функции (4.1) при любом $S\in\mathbf{S}$ выполняются следующие условия:

1) $F_S\in\mathcal{D}_{X,\Omega}$;

2) при любом $x\in\mathbf{X}$ случайные величины $F_S(x;\omega)$ и $\Sigma(x;\omega)$ независимы;

3) при любом $x\in\mathbf{X}$ функция $\Phi(x,S)=P\{\Sigma(x;\omega)=S\}$ непрерывно дифференцируема по x и $\Phi(x,S)>0$.

Тогда для любого $x_0\in\mathbf{X}$ оценка (4.2) градиента показателя эффективности $\mathbf{F}(x)=\mathbf{E}[F(x;\omega,\Sigma(x;\omega))]$ при

$$G(x_0;\omega)=\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega,\Sigma(x_0;\omega))|_{x=x_0}+F(x_0;\omega,\Sigma(x_0;\omega))\Psi(x_0,\Sigma(x_0;\omega)),$$

где $\Psi(x,S)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\Phi(x;S)$, является несмещенной.

5. Алгоритмы несмещенного оценивания градиента. Рассмотренные ранее показатели эффективности определяются случайной функцией эффективности $F(x;\omega)$, которая, в свою очередь, представляет функционал, заданный на множестве случайных функций Γ. Поэтому при вычислении градиента выборочной функции эффективности $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ основная задача состоит в получении значений градиентов $\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x;\omega)$. При решении этой задачи следует принимать во внимание, что случайные функции $\tau\in T$, от которых зависят $\gamma\in\Gamma$, обычно являются известными.

Таким образом, основой процедуры вычисления $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ являются алгоритмы вычисления значений градиентов выборочных функций $\gamma(x;\omega)$. Для моделей рассматриваемых типов эти алгоритмы непосредственно связаны с алгоритмами функционирования системы и весьма просты, что определяет их высокую эффективность и позволяет естественным образом сочетать эти алгоритмы с алгоритмами имитационного моделирования.

Впервые указанные алгоритмы были построены Ю.Хо и С.Цао [2] в рамках предложенного ими метода возмущений. Основой разработки алгоритмов оценивания градиента показателя эффективности в этой работе послужило изучение особенностей, присущих алгоритмам функционирования ДСДС. Далее рассматриваются алгоритмы оценивания градиента для сетей коммутации сообщений. Соответствующие алгоритмы для модели надежности и сетевой модели описаны в [7–9].

Используя в качестве основы уравнения (1.3), описывающие динамику сети коммутации сообщений с детерминированной процедурой маршрутизции, для некоторого узла l и $k \in N$ нетрудно построить следующий алгоритм вычисления $\frac{\partial}{\partial x}\gamma_{lk}(x;\omega)$ при фиксированных $x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^1$, $\omega \in \Omega$.

Алгоритм 5.1. Перед началом имитационного эксперимента определить вспомогательные величины $g_1, \ldots, g_L$ и положить $g_i = 0$, $i = 1, \ldots, L$.

В имитационной модели всякий раз в момент завершения обслуживания в узле i сообщения j $(i = 1, \ldots, L,\ j = 1, 2, \ldots)$ выполнить следующие действия:

1) увеличить значение g_i на $\frac{\partial}{\partial x}\tau_{ij}(x;\omega)$;

2) если $i = l$ и $j = k$, то эксперимент необходимо закончить. Значение производной $\frac{\partial}{\partial x}\gamma_{lk}(x;\omega)$ равно значению g_l ;

3) если следующий для данного сообщения узел $r = s_{ij}$ в этот момент свободен, то значение g_r положить равным g_i.

Для случая $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ соответствующий алгоритм принципиально не отличается от алгоритма 5.1. При этом потребуется вместо величин g_i ввести векторы $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, \ldots, g_{in})^T$ и указанные в алгоритме 5.1 операции понимать как операции над векторами.

Алгоритм вычисления градиента выборочной функции эффективности, например, для коэффициента использования узла l за время обслуживания k первых сообщений

$$F(x;\omega) = \sum_{j=1}^{k} \tau_{lj}(x;\omega)/\gamma_{lk}(x;\omega)$$

записывается следующим образом.

Алгоритм 5.2. Перед началом имитационного эксперимента определить вспомогательные величины g_i, h, t, d и положить $t, d = 0$ и $g_i = 0\, i = 1, \ldots, L$.

В имитационной модели всякий раз в момент завершения в узле i сообщения j ($i = 1, \ldots, L$, $j = 1, 2, \ldots$) выполнить следующие шаги:

1) увеличить значение g_i на величину $\frac{\partial}{\partial x}\tau_{ij}(x;\omega)$;

2) если $i = l$, то увеличить значение t на $\tau_{lj}(x;\omega)$, а d на $\frac{\partial}{\partial x}\tau_{lj}(x;\omega)$. Если, кроме того, $j = k$, то положить $h = \gamma_{lk}(x;\omega)$ и эксперимент закончить. Значение производной $\frac{\partial}{\partial x}F(x;\omega)$ равно значению выражения $(dh - tg_l)/h^2$;

3) если следующий для данного сообщения узел $r = s_{ij}$ в этот момент свободен, то значение g_r положить равным g_i.

Пусть в модели сети задана недетерминированная процедура выбора маршрута передвижения сообщений при помощи набора дискретных случайных функций $\sigma_{ij}(x;\omega)$. Если процедура маршрутизации Σ на самом деле не зависит от x ($\Sigma = \Sigma(\omega)$), то согласно результатам п.4 (теорема 4.4) для построения несмещенных оценок градиента показателя эффективности могут быть использованы те же алгоритмы, что и в случае детерминированной процедуры маршрутизации. Для модели с такой процедурой выбора маршрута алгоритмы 5.1 и 5.2 необходимо уточнить следующим образом. При определении следующего узла в шаге 3 рассматриваемых алгоритмов теперь следует писать: $r = \sigma_{ij}(\omega)$.

Рассмотрим модель сети коммутации сообщений с недетерминированной процедурой маршрутизации $\Sigma = \Sigma(x;\omega)$, зависящей от параметра x. Пусть рассматриваемая модель удовлетворяет условиям теоремы 4.5. Для процедуры маршрутизации Σ будем предполагать, что при любом $x \in \mathbf{X}$ случайные величины σ_{ij} являются взаимно независимыми.

Пусть для некоторого узла $l \in \{1, \ldots, L\}$ и фиксировнного номера k момент завершения обслуживаания k-го сообщения в этом узле с вероятностью 1 наступает после конечного числа заавершений обслуживания сообщений в сети. Тогда при исследовании характеристик нестационарного режима работы системы на интервале времени до завершения обслуживания k-го сообщения в узле l достаточно рассматривать только конечные маршруты передввижения сообщений, для которых

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1K} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L1} & s_{L2} & \cdots & s_{LK} \end{pmatrix} \quad \text{и } K \geq k. \tag{5.1}$$

В силу независимости при каждом $x \in \mathbf{X}$ случайных величин $\sigma_{ij}(x;\omega)$ будем иметь

$$P\{\Sigma(x;\omega) = S\} = \prod_{i=1}^{L}\prod_{j=1}^{K} P\{\sigma_{ij}(x;\omega) = s_{ij}\}.$$

Обозначим $\phi_{ij}(x,s) = P\{\sigma_{ij}(x;\omega) = s\}$ вероятность при фиксированном $x \in \mathbf{X}$ выбрать в качестве следующего узел s для j-го обслуженного в узле i сообщения. Тогда функции Φ и Ψ, введенные при определении оценки градиента в теореме 4.5, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x,S) &= \prod_{i=1}^{L}\prod_{j=1}^{K} \phi_{ij}(x,s_{ij}), \\ \Psi(x,S) &= \frac{\partial}{\partial x}\ln\Phi(x,S) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{K}\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi(x,s_{ij}). \end{aligned}$$

По теореме 4.5 несмещенная оценка градиента для функции $F_1(x) = \mathbf{E}\gamma_{lk}(x;\omega)$ может быть записана в виде (4.2), где

$$G(x;\omega) = \frac{\partial}{\partial x}\gamma_{lk}(x;\omega) + \gamma_{lk}(x;\omega)\Psi(x,S), \quad S = \Sigma(x;\omega).$$

Алгоритм вычисления значений $G(x;\omega)$ при фиксированных $x \in \mathbf{X}$ и реализации ω записывается следующим образом.

Алгоритм 5.3. Перед началом имитационного эксперимента определить вспомогательные величины g_i, h, q и положить $q = 0$, $g_i = 0$, $i = 1,\ldots,L$.

В имитационной модели всякий раз в момент завершения обслуживания в узле i сообщения j ($i = 1,\ldots,L$, $j = 1,2,\ldots$) выполнить следующие действия:

1) увеличить значение g_i на $\frac{\partial}{\partial x}\tau_{ij}(x;\omega)$;

2) если $i = l$ и $j = k$, то положить $h = \gamma_{lk}(x;\omega)$ и закончить. Значение $g_{lk}(x;\omega)$ равно значению выражения $g_l + hq$.

3) определить $r = s_{ij}(x;\omega)$ – следующий для данного сообщения узел и увеличить значение q на величину $\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi(x,r)$. Если узел r в этот момент свободен, то значение g_r положить равным g_i.

Для оценивания градиента коэффициента использования узла $F_5(x;\omega) = \sum_{j=1}^{k}\eta_j(x;\omega)/\gamma_{lj}(x;\omega)$ можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 5.4. Перед началом имитационного эксперимента определить вспомогательные величины g_i, h, t, d, q и положить $t, d, q = 0$, $g_i = 0$, $i = 1,\ldots,L$.

В имитационной модели всякий раз в момент завершения в узле i сообщения j ($i = 1,\ldots,L$, $j = 1,2,\ldots$) выполнить следующие шаги:

1) увеличить значение g_i на величину $\frac{\partial}{\partial x}\tau_{ij}(x;\omega)$;

2) если $i = l$, то выполнить следующие действия:

увеличить значение t на величину $\eta_j(x;\omega)$,

увеличить d на величину $\frac{\partial}{\partial x}\eta_j(x;\omega)$;

если, кроме того, $j = k$, то положить $h = \gamma_{lk}(x;\omega)$ и эксперимент закончить. Значение производной $\frac{\partial}{\partial x}F_5(x;\omega)$ равно значению выражения $(dh - tg_l)/h^2 + tq/h$;

3) определить $r = s_{ij}(x;\omega)$ – следующий для данного сообщения узел, и увеличить значение q на величину $\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi(x,r)$. Если узел r в этот момент свободен, то значение g_r положить равным g_i.

Отметим, что построенные алгоритмы 5.3 и 5.4, вообще говоря, не гарантируют несмещенности оценки типа (4.2), так как в процессе их работы не учитываются различия в числе завершений обслуживания сообщений в узлах $i \neq l$, которые могут появиться при имитационных экспериментах для разных реализаций ω. Эти различия влияют на точность подсчета значений $\Psi(x,\Sigma(x;\omega))$ и становятся несущественными с возрастанием числа l.

Несмещенную оценку можно получить, устанавливая достаточно большое значение числа K столбцов в матрице (5.1). В этом случае после завершения работы алгоритмов потребуется модифицировать значение q, включив в него слагаемые, соответствующие тем переходам сообщений, которые потребовалось бы совершить, чтобы их общее число для каждого узла было равно числу K.

Указатель литературы

1. **Ермаков С.М.** Метод Монте–Карло и смежные вопросы. М., 1975. 472 с.

2. **Ho Y.C.** Performance evaluation and perturbation analysis of discrete event dynamic systems// IEEE Trans. Autom. Contr. 1987. Vol.32. N 7. P.563-572.

3. **Suri R.** Infinitesimal perturbation analysis for general discrete event systems // J. ACM. 1987. Vol.34. N 3. P.686-717.

4. **Cao X.R.** Convergence of parameter sensitivity estimates in a stochastic experiment// IEEE Trans. Autom. Contr. 1985. Vol.30. N 9. P.845-853.

5. **Лоэв М.** Теория вероятностей. М. 1962. 710 с.

6. **Кривулин Н.К.** Оптимизация сложных систем при имитационном моделировании// Вестн. Ленингр. ун–та. 1990. N 8. С. 100-102.

7. **Кривулин Н.К.** Оптимизация динамических систем с дискретными событиями на основе имитационного моделирования: Автореф. канд. дисс. Л., 1990. 17 с.

8. **Krivulin N.K.** Unbiased estimates for gradients of stochastic network performance measures// Acta Applic. Math. 1993. Vol.33. P.21-43.

9. **Krivulin N.K.** An analysis of gradient estimates in stochastic network optimization problems// Model Oriented Data Analysis: Proc. of the 3rd International Workshop in Petrodvorets. Russia, May 25-30, 1992/ W.G. Müller, H.P. Wynn and A.A. Zhigljavsky (eds). - Heidelberg: Physica-Verl., 1993. P.227-240.