Н. К. Кривулин

Алгебраические модели сетей с очередями*

В работе рассматривается класс моделей сетей с очередями, в которых наряду с обычными процедурами обслуживания требований могут выполняться вспомогательные операции «объединения» (join) и «разъединения» (fork). Указанные операции обеспечивают возможность объединения (сборки) нескольких требований в одно, а также разъединения (расщепления) требования на несколько новых требований в процессе работы системы. Такие модели обычно называют сетями с объединением-разъединением требований (fork-join queueing networks) или сетями с синхронизацией поступления и убытия требований [1].

Модели сетей с синхронизацией оказываются весьма полезными при описании производственных систем, бизнес-процессов, сетей передачи сообщений, вычислительных систем и т. п. Примером операций объединения-разъединения в реальных системах может служить разделение сообщения на отдельные пакеты, предназначенные для передачи по различным маршрутам в сети передачи сообщений, и восстановление сообщения из пакетов в конечном пункте его доставки. Другие примеры можно найти в [1].

Особенностью рассматриваемого класса моделей является возможность применения аппарата идемпотентной алгебры [2, 3] для описания и анализа динамики системы. Ниже будет показано, что любая система рассматриваемого класса может быть описана при помощи обобщенного линейного уравнения

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k) \otimes \mathbf{x}(k-1), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}(k)$ – вектор, описывающий k-е состояние системы, $\mathbf{A}(k)$ – некоторая переходная матрица, $\otimes$ – операция умножения идемпотентной алгебры.

Применение аппарата идемпотентной алгебры, который позволяет описывать динамику сетей в компактной форме при помощи уравнений вида (1), открывает новые возможности для исследования сетей с очередями. В частности, алгебраический подход оказывается достаточно продуктивным при изучении стохастических моделей сетей, для которых вектор $\mathbf{x}(k)$ и матрица $\mathbf{A}(k)$ являются случайными, а уравнение (1) представляет собой стохастическое обобщенное разностное уравнение (см., например, [4–7]).

Наконец, возможность описания динамики системы при помощи уравнения (1) оказывается весьма полезной при разработке эффективных универсальных алгоритмов и процедур имитационного моделирования сетей с очередями, включая алгоритмы и процедуры, предназначенные для моделирования с использованием многопроцессорных параллельных вычислительных систем [8].

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 00-01-00760.

Идемпотентная алгебра

Рассмотрим множество вещественных чисел R_ε, расширенное путем добавления элемента $\varepsilon = -\infty$, и предположим, что на множестве R_ε заданы операции $\oplus$ и $\otimes$, которые для любых $x, y \in R_\varepsilon$ определяются следующим образом:

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \otimes y = x + y,$$

причем $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$.

Нетрудно видеть, что операции $\oplus$ и $\otimes$ обладают многими свойствами обычного сложения и умножения, включая коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операции $\otimes$ относительно $\otimes$. В силу этих свойств в рассматриваемой алгебре могут применяться многие обычные правила записи и преобразования алгебраических выражений, включая порядок выполнения операций и правила раскрытия скобок.

Заметим, что для любого числа $x \neq \varepsilon$ существует обратный относительно операции $\otimes$ элемент x^{-1}, который равен числу $-x$ в обычной арифметике. В то же время, операция $\oplus$ является идемпотентной, т. е. для любого $x \in R_\varepsilon$ выполняется $x \oplus x = x$.

Множество с указанными свойствами обычно называют идемпотентной алгеброй (см., например, [3]).

Идемпотентная алгебра вещественных матриц вводится обычным путем: для любых двух матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ размера $n \times n$ выполнение операций $\oplus$ и $\otimes$ осуществляется по формулам

$$\{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

Матрицы

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & 0 \end{pmatrix}$$

являются нулевым и единичным элементами соответственно.

Пусть $\mathbf{A} \neq \boldsymbol{\mathcal{E}}$ – квадратная матрица. Как обычно, положим

$$\mathbf{A}^0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{A}^k = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^{k-1} = \mathbf{A}^{k-1} \otimes \mathbf{A}$$

для любого целого $k \geq 1$. Заметим, что в рассматриваемой алгебре обратная матрица существует только для диагональных матриц, которые имеют вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & d_n \end{pmatrix},$$

где $d_i > \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$, а также для матриц, которые могут быть получены из диагональных путем перестановки строк и столбцов.

Любая квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ размера $n \times n$ может рассматриваться как обобщенная матрица смежности некоторого ориентированного графа с n вершинами. При этом предполагается, что любой элемент $a_{ij} \neq \varepsilon$ соответствует наличию дуги (i, j) в графе, а элемент $a_{ij} = \varepsilon$ – ее отсутствию.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}^m = (a_{ij}^{(m)})$. Нетрудно понять, что равенство $a_{ij}^{(m)} \neq \varepsilon$ выполняется тогда и только тогда, когда в графе существует путь из вершины i в вершину j, состоящий из m дуг. Очевидно, что если граф ациклический, то $\mathbf{A}^q = \boldsymbol{\mathcal{E}}$ для всех $q > p$, где p – длина наибольшего пути в графе.

Сети с синхронизацией передвижения требований

Рассмотрим сеть, состоящую из n узлов, в каждом из которых имеется обслуживающее устройство и накопитель, предназначенный для размещения требований, ожидающих обслуживания. Топология сети описывается ориентированным ациклическим графом $\langle N, A \rangle$, где $N = \{1,\dots,n\}$ – множество вершин графа, соответствующих узлам сети, а $A = \{(i, j)\} \subset N \times N$ – множество дуг графа, определяющих маршруты движения требований.

Для любого узла $i \in N$ определим множества узлов

$$P(i) = \{j \mid (j,i) \in A\}, \quad S(i) = \{j \mid (i,j) \in A\}.$$

Каждый узел i, для которого $P(i) = \varnothing$, рассматривается как источник бесконечного потока требований, поступающих в систему. Требования выводятся из системы после обслуживания в узлах i, для которых $S(i) = \varnothing$.

В начальный момент времени все обслуживающие устройства сети свободны, очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очередь в любом другом узле i содержит c_i, $0 \leq c_i < \infty$, требований.

Предполагается, что процессы обслуживания требований в узлах сети удовлетворяют некоторым ограничениям по синхронизации. Механизмы синхронизации реализуются при помощи вспомогательных операций объединения и разъединения, которые выполняются в узлах соответственно до и после обслуживания требования [1]. Выполнение операции объединения в узле i состоит в том, что требование не присоединяется к очереди до тех пор, пока в узел не поступит по одному требованию из каждого узла $j \in P(i)$. Указанные требования объединяются в одно, которое затем присоединяется к очереди требований, ожидающих обслуживания в узле i.

Операция разъединения в узле i выполняется всякий раз, когда завершается обслуживание очередного требования. При этом требование замещается новыми требования, количество которых равно числу узлов множества $S(i)$. Затем новые требования одновременно покидают узел i и направляются по одному в каждый из узлов $j \in S(i)$.

Предполагается, что операции объединения и разъединения, а также перемещение требований в сети от узла к узлу осуществляются мгновенно.

Обозначим через τ_{ik} продолжительность, а через $u_i(k)$ и $x_i(k)$ – моменты времени начала и завершения k-го обслуживания в узле i соответственно. При условии, что система начинает функционировать в нулевой момент времени, положим $x_i(0) = 0$ и $x_i(k) = \infty$ для всех $k < 0$, $i = 1,\dots,n$.

Нетрудно видеть, что динамика сети может быть описана следующими двумя уравнениями [9–11]:

$$x_i(k) = \max\{u_i(k), x_i(k-1)\} + \tau_{ik}, \tag{2}$$

$$u_i(k) = \begin{cases} \max\limits_{j\in P(i)} x_j(k-c_i), & \text{если } P(i) \neq \varnothing, \\ \varepsilon, & \text{если } P(i) = \varnothing. \end{cases} \tag{3}$$

Динамическое уравнение

Используя операции $\otimes$ и $\oplus$, можно представить уравнения (2) и (3) в эквивалентной форме:

$$x_i(k) = \tau_{ik} \otimes (u_i(k) \oplus x_i(k-1)), \tag{4}$$

$$u_i(k) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j\in P(i)} x_j(k-c_i), & \text{если } P(i) \neq \varnothing, \\ \varepsilon, & \text{если } P(i) = \varnothing. \end{cases} \tag{5}$$

Чтобы записать полученные уравнения в матричном виде, введем обозначения:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Пусть $M = \max\{c_i \mid c_i < \infty, i = 1,\dots,n\}$. Введем матрицы $\mathbf{G}_m = (g_{ij}^m)$, элементы которых определяются для каждого $m = 1,\dots,M$ следующим образом:

$$g_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in P(j) \text{ и } m = c_j, \\ \varepsilon & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что каждая матрица $\mathbf{G}_m$ может рассматриваться как обобщенная матрица смежности частичного графа $\langle N, A_m \rangle$, где $A_m = \{(i,j) \mid i \in P(j),\ c_j = m\}$.
Теперь уравнения (4) и (5) могут быть записаны в матричном виде так:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_k \otimes (\mathbf{u}(k) \oplus \mathbf{x}(k-1)), \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(k) = \bigoplus_{m=0}^{M} \mathbf{G}_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m). \tag{8}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим неявное относительно $\mathbf{x}(k)$ уравнение

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathbf{T}_k \otimes \bigoplus_{m=1}^{M} \mathbf{G}_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m). \tag{9}$$

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения [11].

Лемма 1. Пусть подграф сети, соответствующий матрице $\mathbf{G}_0$, ациклический, p – длина наибольшего пути в этом графе. Тогда уравнение (9) может быть решено относительно $\mathbf{x}(k)$ в виде

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} \mathbf{A}_m(k) \otimes \mathbf{x}(k-m), \tag{10}$$

где

$$\mathbf{A}_1(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes \mathbf{T}_k \otimes (\mathbf{E} \oplus \mathbf{G}_1^T),$$
$$\mathbf{A}_m(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_m^T, \quad m = 2, \ldots, M.$$

Введем расширенный вектор состояний и расширенную матрицу системы следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k-M+1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(k) & \mathbf{A}_2(k) & \ldots & \mathbf{A}_M(k) \\ \mathbf{E} & \boldsymbol{\varepsilon} & \ldots & \boldsymbol{\varepsilon} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon} & & \mathbf{E} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, динамическое уравнение системы может быть представлено в виде:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{A}}(k) \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k-1). \tag{11}$$

Сети с конечной емкостью накопителей и блокированием

Будем предполагать, что емкость накопителей в некоторых узлах сети является конечной. В сетях с ограниченной емкостью накопителей возможно блокирование (запрет) передвижения требований от одного узла к другому, например из-за отсутствия свободного места в накопителе узла, в который направляется требование. Различают два основных типа блокировки: производственный тип (manufacturing blocking) и коммуникационный тип (communication blocking) [8, 12, 13].

Производственный тип блокировки. Этот тип блокировки является характерным для моделей производственных процессов. Например, сборка готовых изделий и передача их на склад готовой продукции могут быть приостановлены ввиду отсутствия свободного места на складе. Производственный механизм блокирования заключается в том, что требование после завершения обслуживания не может освободить обслуживающее устройство и перейти в следующий узел, если накопитель этого узла заполнен другими требованиями. Обозначим через b_i, $0 \le b_i \le \infty$, емкость накопителя в узле i, а через $v_i(k)$ – момент времени, когда накопители во всех узлах $j \in S(i)$ сети будут иметь по крайне мере одно свободное место. Ясно, что тогда уравнение (4) примет вид

$$x_i(k) = \tau_{ik} \otimes (u_i(k) \oplus x_i(k-1)) \oplus v_i(k), \tag{12}$$

где

$$v_i(k) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j \in S(i)} x_j(k - b_j - 1), & \text{если } S(i) \neq \varnothing, \\ \varepsilon, & \text{если } S(i) = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть

$$M_1 = \max\{c_i \mid c_i < \infty,\ i = 1,\dots,n\} \quad \text{и} \quad M_2 = \max\{b_i + 1 \mid b_i < \infty,\ i = 1,\dots,n\}$$

Введем вектор $\mathbf{v}(k) = (v_1(k),\dots,v_n(k))^T$ и матрицы $\mathbf{H}_m = (h_{ij}^m)$, $m = 1,\dots,M_2$, с элементами

$$h_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in S(i) \text{ и } m = b_j + 1, \\ \varepsilon & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь запишем уравнение (10) в матричной форме:

$$\mathbf{v}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M_2} \mathbf{H}_m \otimes \mathbf{x}(k - m).$$

Ясно, что можно считать $M_1 = M_2 = M$. Если на самом деле $M_2 > M_1$, то положим $\mathbf{G}_m = \boldsymbol{\mathcal{E}}$ для всех $m = M_1 + 1, M_1 + 2,\dots, M_2$.

Наконец, с учетом (9) уравнение (12) в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \bigoplus_{m=1}^{M} (\mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_m^T \oplus \mathbf{H}_m) \otimes \mathbf{x}(k-m). \quad (13)$$

Коммуникационный тип блокировки. Предположим, в сети действует правило, при котором обслуживание требования в узле i не начинается до тех пор, пока в каждом из узлов $j \in S(i)$ не окажется свободного места. Такой механизм блокирования отражает особенности работы коммуникационных сетей, в которых обработка пакета данных начинается только тогда, когда имеется свободный канал для его дальнейшей передачи.

Используя обозначения, введенные выше, можно записать соответствующее уравнение для $x_i(k)$:

$$x_i(k) = \tau_{ik} \otimes (u_i(k) \oplus x_i(k-1) \oplus v_i(k)),$$

а также векторное уравнение

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathbf{T}_k \otimes \bigoplus_{m=1}^{M} (\mathbf{G}_m^T \oplus \mathbf{H}_m) \otimes \mathbf{x}(k-m). \quad (14)$$

Справедливо следующее утверждение [11].

Лемма 2. Пусть в сети с ограниченной емкостью накопителей подграф, соответствующий матрице $\mathbf{G}_0$, является ациклическим, p – длина наибольшего пути в этом графе. Тогда уравнения (13) и (14) могут быть решены относительно $\mathbf{x}(k)$

в виде (10) с матрицами $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_M$, которые для уравнения (13) определяются так:

$$\mathbf{A}_1(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes (\mathbf{T}_k \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_1^T \oplus \mathbf{H}_1),$$
$$\mathbf{A}_m(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes (\mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_m^T \oplus \mathbf{H}_m), \quad m = 2,\ldots,M,$$

а для уравнения (14) так:

$$\mathbf{A}_1(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes \mathbf{T}_k \otimes (\mathbf{E} \oplus \mathbf{G}_1^T \oplus \mathbf{H}_1),$$
$$\mathbf{A}_m(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^p \otimes \mathbf{T}_k \otimes (\mathbf{G}_m^T \oplus \mathbf{H}_m), \quad m = 2,\ldots,M.$$

Примеры моделей сетей

Рассмотрим сеть с неограниченной емкостью накопителей в узлах, представленную на рис. 1 [11].

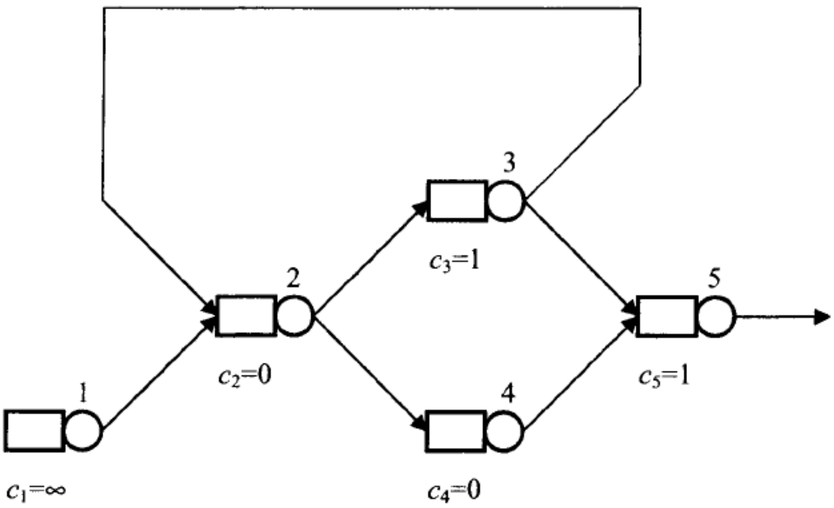

Рис. 1. Сеть с синхронизацией движения требований

Ясно, что для рассматриваемой сети $M = 1$. Используя (6), найдем матрицы:

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что длина набольшего пути $p=2$, приходим к уравнению (1) с матрицей

$$\mathbf{A}(k)=(\mathbf{E}\oplus\mathbf{T}_k\otimes\mathbf{G}_0^T)^2\otimes\mathbf{T}_k\otimes(\mathbf{E}\oplus\mathbf{G}_1^T)=$$

$$=\begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k}\otimes\tau_{2k} & \tau_{2k}\otimes\tau_{3k} & \tau_{2k}\otimes\tau_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{3k} & \tau_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k}\otimes\tau_{2k}\otimes\tau_{4k} & \tau_{2k}\otimes\tau_{3k}\otimes\tau_{4k} & \tau_{2k}\otimes\tau_{3k}\otimes\tau_{4k} & \tau_{4k} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{5k} & \tau_{5k} & \tau_{5k} \end{pmatrix}.$$

Многофазные системы

Многофазные системы могут рассматриваться как сети с простейшей (линейной) топологией [8–14]. Рассмотрим открытую многофазную систему с неограниченной емкостью накопителей, изображенную на рис. 2.

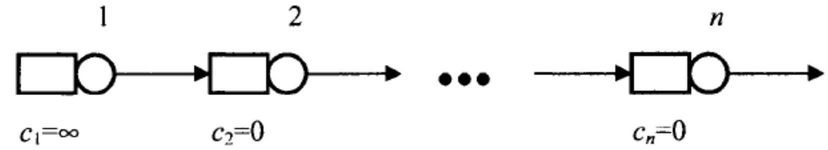

Рис. 2. Открытая многофазная система

Легко видеть, что уравнение (5) для многофазной системы принимает вид

$$u_i(k)=\begin{cases}\varepsilon, & \text{если } i=1,\\ x_{i-1}(k), & \text{если } i\neq 1.\end{cases}$$

В силу того, что теперь $M=0$, имеем одну матрицу

$$\mathbf{G}_0=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon \end{pmatrix},$$

которая совпадает с матрицей смежности графа, описывающего топологию всей системы, т. е. $\mathbf{G}_0=\mathbf{G}$.

Полагая $\mathbf{G}_1=\mathcal{E}$, получаем уравнение (1) с матрицей

$$\mathbf{A}(k)=(\mathbf{E}\oplus\mathbf{T}_k\otimes\mathbf{G}_0^T)^{n-1}\otimes\mathbf{T}_k=\begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \tau_{1k}\otimes\tau_{2k} & \tau_{2k} & & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_{1k}\otimes\cdots\otimes\tau_{nk} & \tau_{2k}\otimes\cdots\otimes\tau_{nk} & \dots & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Многофазная система с конечной емкостью накопителей. Предположим, что все узлы открытой многофазной системы, за исключением узла 1, могут иметь ограниченную емкость накопителей (рис. 3).

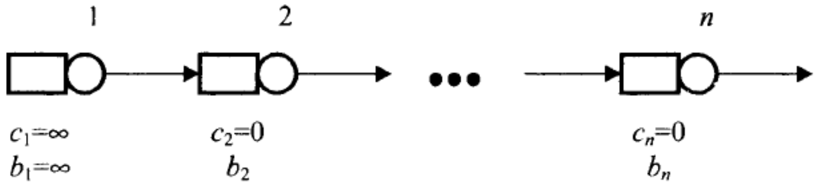

Рис. 3. Открытая многофазная система с конечной емкостью накопителей

Рассмотрим производственный тип блокировки. Пусть $b_2 = \ldots = b_n = 0$. Нетрудно видеть, что для рассматриваемой системы $M = 1$ и $\mathbf{H}_1 = \mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}_1 = \boldsymbol{\mathcal{E}}$. Матрица системы имеет вид

$$\mathbf{A}(k) = (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^{n-1} \otimes (\mathbf{T}_k \oplus \mathbf{G}_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{1k} & 0 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & \tau_{2k} & 0 & & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \tau_{1k} \otimes \cdots \otimes \tau_{n-1,k} & \tau_{2k} \otimes \cdots \otimes \tau_{n-1,k} & \tau_{3k} \otimes \cdots \otimes \tau_{n-1,k} & & 0 \\ \tau_{1k} \otimes \cdots \otimes \tau_{nk} & \tau_{2k} \otimes \cdots \otimes \tau_{nk} & \tau_{3k} \otimes \cdots \otimes \tau_{nk} & \ldots & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $b_2 = \ldots = b_n = 1$. Учитывая, что для системы $M = 2$, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{H}_1 = \boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{G}_0$ получим уравнение (11), где

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(k) = \begin{pmatrix} (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^{n-1} \otimes \mathbf{T}_k & (\mathbf{E} \oplus \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{G}_0^T)^{n-1} \otimes \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{E} & \boldsymbol{\mathcal{E}} \end{pmatrix}.$$

Замкнутая многофазная система с неограниченной емкостью накопителей. Пусть имеется замкнутая многофазная система, состоящая из n узлов (рис. 4).

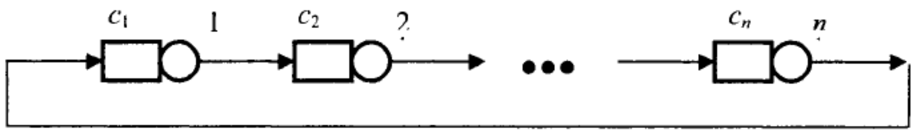

Рис. 4. Замкнутая многофазная система

Для рассматриваемой системы уравнение (5) принимает вид

$$u_i(k) = \begin{cases} x_n(k - c_1), & \text{если } i = 1, \\ x_{i-1}(k - c_i), & \text{если } i \neq 1. \end{cases}$$

В простейшем случае, когда $r_i = 1$ для всех $i = 1,\dots,n$, имеем матрицы

$$\mathbf{G}_0 = \mathcal{E}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать уравнение (1) с матрицей

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{T}_k \otimes (\mathbf{E} \oplus \mathbf{G}_1^T) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \tau_{1k} \\ \tau_{2k} & \tau_{1k} & & \varepsilon & \varepsilon \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \varepsilon & \varepsilon & & \tau_{nk} & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Система с карусельным механизмом маршрутизации. В рассмотренных выше моделях систем использовалась некоторая постоянная для всех требований процедура маршрутизации, при которой требования, покидающие узел, направлялись к одним и тем же заранее определенным узлам. Однако модели сетей с синхронизацией могут быть также применены к описанию систем с переменной регулярной маршрутизацией. В таких системах требования после обслуживания в узле могут направляться к различным узлам, выбор которых осуществляется в соответствии с некоторой регулярной (например, циклической) процедурой определения маршрута.

Рассмотрим открытую систему, изображенную на рис. 5, которая состоит из $n = l + 1$ узлов [9, 10].

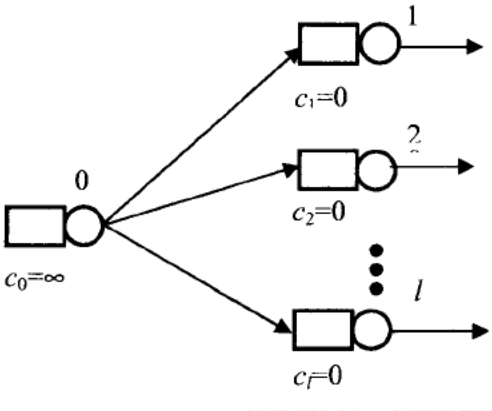

Рис. 5. Система с карусельным механизмом маршрутизации

Узел 0 представляет внешний источник требований. Каждое требование, поступающее в систему, направляется в один из узлов $i = 1,\dots,l$ в соответствии с круговым (карусельным) механизмом маршрутизации, который состоит в следующем. Первое требование переходит в узел 1, второе – в узел 2, и т. д. После l-го требования, переданного в узел l, следующее $(l+1)$-е требование направляется в узел 1, и вся процедура повторяется снова. Подобный карусельный механизм маршрутизации используется, например, в гибких автоматизированных производственных системах, а также в моделях вычислительных систем и процессов.

Нетрудно видеть, что рассматриваемая система может быть заменена эквивалентной сетью с синхронизацией, представленной на рис. 6.

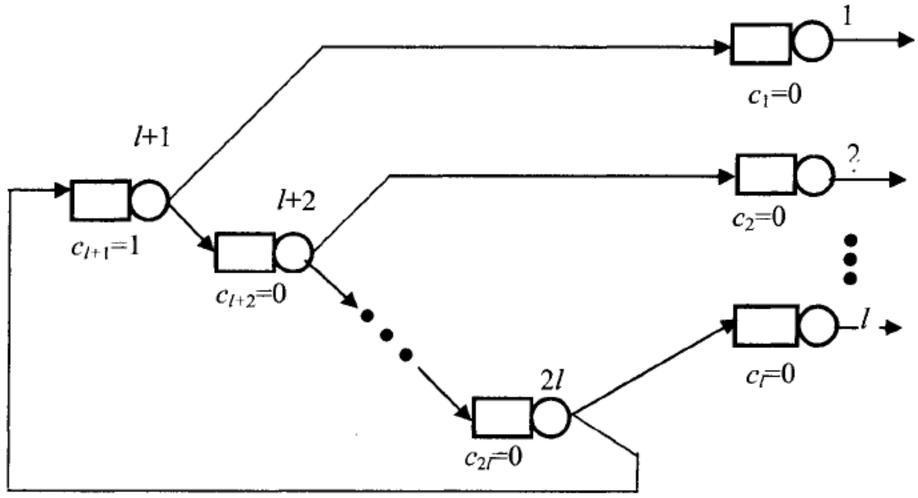

Рис. 6. Эквивалентная система с синхронизацией

Определим для новой системы продолжительность обслуживания k-го требования в узле i следующим образом: $\tau_{ik} = \tau_{0,lk-2l+i}$. Учитывая, что $n = 2l$, $M = 1$, уравнение для $u_i(k)$ записываем в виде

$$u_i(k) = \begin{cases} x_{l+i}(k), & \text{если } i = 1,\dots,l, \\ x_{2l}(k-1), & \text{если } i = l+1, \\ x_{i-1}(k), & \text{если } i = l+2,\dots,n, \end{cases}$$

а матрицы $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}_1$ – в виде

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)} & \boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)} \\ \mathbf{E}_{(l\times l)} & \mathbf{F}_{(l\times l)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)} & \boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)} & \mathbf{H}_{(l\times l)} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{(l\times l)}$ и $E_{(l\times l)}$ – нулевая и единичная матрицы размера $l \times l$,

$$\mathbf{F}_{(l\times l)}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & & \varepsilon\\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0\\ \varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}_{(l\times l)}=\begin{pmatrix}\varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ \varepsilon & & \ddots & \vdots\\ 0 & \varepsilon & \dots & \varepsilon\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что граф, соответствующий матрице $\mathbf{G}_0$, является ациклическим, причем длина его наибольшего пути $p=l$. Следовательно, динамика системы описывается уравнением (1) с матрицей

$$\mathbf{A}(k)=(\mathbf{E}\oplus\mathbf{T}_k\otimes\mathbf{G}_0^T)^l\otimes\mathbf{T}_k\otimes(\mathbf{E}\oplus\mathbf{G}_1^T).$$

В частном случае при $l=3$ получим матрицу

$$\mathbf{A}(k)=\begin{pmatrix}\tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{1k}\otimes\tau_{4k}\\ \varepsilon & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{2k}\otimes\tau_{4k}\otimes\tau_{5k}\\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{3k} & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{3k}\otimes\tau_{4k}\otimes\tau_{5k}\otimes\tau_{6k}\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k}\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k}\otimes\tau_{5k}\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k}\otimes\tau_{5k}\otimes\tau_{6k}\end{pmatrix}.$$

Показатели эффективности в многофазных системах

Для некоторых типов моделей описанный выше алгебраический подход позволяет записать динамические уравнения не только для вектора состояний системы, но также и для ряда показателей эффективности систем [8].

Рассмотрим открытую многофазную систему с неограниченной емкостью накопителей (рис. 2). Обозначим через $s_i(k)$ время пребывания k-го требования в узлах с 1-го по i-й. Учитывая, что первый узел служит для представления внешнего потока требований, положим $s_1(k)=0$. Нетрудно видеть, что для всех $i=1,\dots,n$ выполняется следующее равенство: $s_i(k)=x_i(k)-x_1(k)$. Введем вектор $\mathbf{s}(k)=(s_1(k),\dots,s_n(k))^T$ и перейдем к матричной записи:

$$\mathbf{s}(k)=\mathbf{x}(k)\otimes x_1^{-1}(k).$$

Используя динамическое уравнение для вектора $\mathbf{x}(k)$, а также очевидное равенство $x_1(k)=x_1(k-1)\otimes\tau_{1k}$, получаем

$$\mathbf{s}(k)=\mathbf{A}(k)\otimes\mathbf{x}(k-1)\otimes x_1^{-1}(k-1)\otimes\tau_{1k}^{-1}.$$

Последнее уравнение может быть приведено к виду

$$\mathbf{s}(k)=\mathbf{B}(k)\otimes\mathbf{s}(k-1), \tag{15}$$

где $\mathbf{B}(k)=\tau_{1k}^{-1}\otimes\mathbf{A}(k)$.

Время ожидания требований

Обозначим через $w_i(k)$ суммарное время ожидания обслуживания требованием k в узлах с 1-го по i-й. Учитывая, что время пребывания требования в системе складывается из времени обслуживания и времени ожидания, можно записать

$$s_1(k) = w_1(k) = 0, \; s_i(k) = w_i(k) + \sum_{j=2}^{i} \tau_{jk}$$

для всех $i = 2,\dots,n$. Ясно, что эти уравнения можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{s}(k) = \tau_{1k}^{-1} \otimes \mathbf{P}_k \otimes \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon & \varepsilon & & \tau_{1k} \otimes \dots \otimes \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $\mathbf{P}_k$ является диагональной матрицей, для которой существует обратная матрица, полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\mathbf{w}(k) = \tau_{1k} \otimes \mathbf{P}_k^{-1} \otimes \mathbf{s}(k).$$

Применяя (15), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k) &= \tau_{1k} \otimes \mathbf{P}_k^{-1} \otimes \tau_{1k}^{-1} \otimes \mathbf{A}(k) \otimes \mathbf{s}(k-1) = \\ &= \tau_{1,k-1}^{-1} \otimes \mathbf{P}_k^{-1} \otimes \mathbf{A}(k) \otimes \mathbf{P}_{k-1} \otimes \mathbf{w}(k-1). \end{aligned}$$

Теперь можно записать динамическое уравнение для времени ожидания в виде

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{C}_{k,k-1}(k) \otimes \mathbf{w}(k-1), \tag{16}$$

где

$$\mathbf{C}_{k,k-1} = \tau_{1,k-1}^{-1} \otimes \mathbf{P}_k^{-1} \otimes \mathbf{A}(k) \otimes \mathbf{P}_{k-1}.$$

Заметим, что уравнение (16) остается в силе для многофазных систем с ограниченной емкостью накопителей. При этом, однако, величина $w_i(k)$ будет включать не только время ожидания обслуживания, но и время, в течении которого требование было заблокировано.

Литература

1. *Бачелли Ф., Маковски А. М.* Использование методов теории массового обслуживания для анализа систем с ограничениями по синхронизации // ТИИЭР. 1989. Т. 1. № 1. С. 99–128
2. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра положительных матриц // EIK. 1967. Bd. 3, N 1. S. 39–72.
3. *Маслов В.П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

4. *Кривулин Н.К., Милов Д. С.* Оценивание среднего времени работы для одного класса сетей с очередями // Дискретные модели. Анализ, синтез и оптимизация / Под ред. М.К. Чиркова, С.П. Маслова. СПб.: СПбГУ, 1998. С. 228–242 (Вычислительная техника и вопросы кибернетики; Вып. 29).
5. *Krivulin N. K.* Bounds on mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks // Proc. Intern. workshop on discrete event systems, Cagliari, Italy, Aug. 26–28, 1998. London: IEE, 1998. P. 469–474.
6. *Krivulin N. K.* Monotonicity properties and simple bounds on the mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks // Recent advances in information science and technology / Ed. N. Mastorakis. World Scientific, 1998. P. 147–152.
7. *Krivulin N. K.* Algebraic modelling and performance evaluation of acyclic fork-join queueing networks // Advances in stochastic simulation methods / Ed. N. Balakrishnan, V. Melas and S. Ermakov (Statistics for industry and technology). Boston: Birkhäuser, 2000. P. 63–81.
8. *Krivulin N.K.* A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems // Mathematical and computer modelling. 1995. Vol. 22. N 3. P. 25–37.
9. *Krivulin N. K.* An algebraic approach in modelling and simulation of queueing networks // Circuits, systems and computers'96: Proc. Intern. conf., July 15–17, 1996, Piraeus, Greece. Hellenic Naval Academy 1996. Vol. 2. P. 668–672.
10. *Krivulin N. K.* The max-plus algebra approach in modelling of queueing networks // Proc. 1996 SCS Summer computer simulation conf., July 21–25, 1996, Portland, OR / Ed. V.W. Ingalls, J. Cynamon, A. Saylor. San Diego: SCS, 1996. P. 485–490.
11. *Krivulin N. K.* Max-plus algebra models of queueing networks // Proc. Intern. workshop on discrete event systems, University of Edinburgh, UK, Aug. 19–21, 1996. London: IEE, 1996. P. 76–81.
12. *Krivulin N. K.* An algebraic approach to modeling and simulation of tandem queueing systems // Proc. Europ. simulation multiconf., Prague, Czech Republic, June 5–7, 1995 / Ed. M. Snorek, M. Sujansky, A. Verbraeck. P. 271–275.
13. *Krivulin N. K.* Algebraic models in simulation of tandem queueing systems // Proc. 1995 Summer computer simulation conf. / Ed. T.I. Oren, L.G. Birta San Diego: Simulation Councils Inc., 1995. P. 9–14.
14. *Krivulin N. K.* Using max-algebra linear models in the representation of queueing systems // Proceedings of the 5th SIAM conference on applied linear algebra (Snowbird, UT, June 15–18, 1994). Philadelphia: SIAM. P. 155–160.