

УДК 539.143

## ОПИСАНИЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР И ПАРНЫЕ ЭНЕРГИИ

© 2020 г. А. К. Власников<sup>1, \*</sup>, А. И. Зиппа<sup>1</sup>, В. М. Михайлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Санкт-Петербургский государственный университет”, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: a.vlasnikov@spbu.ru

Поступила в редакцию 02.03.2020 г.

После доработки 15.04.2020 г.

Принята к публикации 27.04.2020 г.

Исследована массовая поверхность нечетных ядер, представленная как полиномы второго порядков по отклонениям от  $N$  и  $Z$  нечетного ядра. Показано, что значения коэффициентов полиномов зависят от группы атомных ядер в окрестностях  $N$  и  $Z$ , по которой определяются эти коэффициенты.

DOI: 10.31857/S0367676520080335

### ВВЕДЕНИЕ

Описание массовой поверхности вблизи некоторого атомного ядра с массовым числом  $A$  и числами нейтронов  $N$  и протонов  $Z$  представляет интерес с нескольких точек зрения. Если такая гладкая поверхность существует в аналитическом виде, то возможны определенные предсказания неизвестных масс с числом нуклонов, не слишком удаленных от  $N$  и  $Z$ . Существование такой массовой поверхности вокруг нечетного ядра, описываемой аналитической формулой, позволяет найти парную энергию  $P_\tau$  ( $\tau = n, p$ ), определяемую как превышение массы нечетного ядра над соседними четно-четными. Величину этого превышения может дать аналитическое описание в точке, соответствующей  $N$  и  $Z$  нечетного ядра. Таким образом можно вычислить некоторую “гладкую” составляющую компоненту массы нечетного ядра  $\mathcal{M}$ , от которой необходимо отсчитывать, чтобы получить парную энергию:

$$M(N_n, Z) = \mathcal{M}(N_n, Z) + P_n(N_n, Z); \quad (1)$$

$$M(N, Z_n) = \mathcal{M}(N, Z_n) + P_p(N, Z_n). \quad (2)$$

Уравнение (1) соответствует нечетно-нейтронному ядру, уравнение (2) – нечетно-протонному.  $N_n, Z_n$  – нечетные числа;  $N, Z$  – четные.

В этой статье рассматривается возможность описания массовой поверхности с учетом линейных и квадратичных отклонений от  $N$  и  $Z$ , что способствует получению достоверных парных энергий, необходимых для уточнения выбора эффективных взаимодействий в частично-частичном канале [1–3].

В литературе используются разные определения парной энергии через массы ядер. Например, нейтронные парные энергии  $P_n$  обычно вычисляются с массами ядер при фиксированном четном  $Z$  (см. [4]):

$$P_n = [3M(N-1, Z) + M(N+1, Z) - M(N-2, Z) - 3M(N, Z)]/4, \quad (3)$$

здесь  $N$  и  $Z$  – четные числа.

В определении парной нейтронной энергии (3) входят две массы нечетного ядра  $M(N+1, Z)$  и  $M(N-1, Z)$ , т.е. усредняются  $P_n$  для двух нечетных ядер. Предложенное в [5] уравнение позволяет фиксировать квантовое состояние нечетного наклона

$$P_n = M(N_n, Z) - \frac{1}{16} \{9[M(N_n+1, Z) + M(N_n-1, Z)] - [M(N_n+3, Z) + M(N_n-3, Z)]\} \quad (4)$$

( $N_n$  – нечетное,  $Z$  – четное, как и в (1)). Применение (4) показало, что парные энергии нечетно-нейтронных ядер с  $N_n$  и  $N_n+2$  отличаются на  $\sim 100$  кэВ и более [5].

Уравнения (3), (4) используют предположение, что массы четно-четных ядер, соседних с нечетными, изменяются довольно плавно с  $N$  и  $Z$ , и если бы не  $P_\tau$ , то масса нечетного ядра могла бы быть вычислена из этих масс четно-четных ядер. Это предположение было формализовано в [6], когда масса ядра с  $N+s$  и  $Z+t$  ( $s$  и  $t$  предполага-

ются малыми:  $|s/N| < 1$  и  $|t/Z| < 1$ ) была представлена в виде ряда по степеням  $s$  и  $t$ :

$$M(N + s, Z + t) = M(N, Z) + \sum_{\substack{i,k=0,1,2,\dots \\ i+k>0}} d_{inkp} \frac{s^i t^k}{i!k!}. \quad (5)$$

Уравнение (5) справедливо и при разложении энергии ядра  $E(N + s, Z + t)$  при замене  $M(N, Z)$  на  $E(N, Z)$ , а  $d_{1n0p}$  на  $\bar{d}_{1n0p}$  и  $d_{0n1p}$  на  $\bar{d}_{0n1p}$

$$\bar{d}_{1n0p} = -m_n + d_{1n0p}; \quad \bar{d}_{0n1p} = -m_p + d_{0n1p}. \quad (6)$$

Далее обозначим  $d_{in0p} \equiv d_{in}$ ;  $d_{0nkp} \equiv d_{kp}$ . Всем параметрам может быть приписан порядок, равный  $i + k$ , так что  $d_{1n}$ ,  $d_{1p}$  являются параметрами первого порядка, а  $d_{1n1p}$  – второго и так далее. Параметры будут называться четными, если  $i + k$  – четное число, и нечетными, если  $i + k$  – нечетное число. Четно-четными и нечетно-нечетными будут соответственно называться параметры  $d_{2\mu n 2\nu p}$  и  $d_{2\mu + 1n 2\nu + 1p}$ .

“Гладкая” масса  $M$  нечетного ядра может появиться в разложении для четно-четного ядра, если разложение по  $s$  и  $t$  (5) проводится около точки  $N, Z$ , соответствующих нечетному ядру. Например, если  $s$  – нечетное число, то

$$M(N_n + s, Z) = M(N_n, Z) + s d_{1n}(N_n, Z) + \dots \quad (7)$$

Легко проверить, что определение  $P_n$  (3) не содержит  $d_{1n}$  и  $d_{2n}$ , а для  $P_p - d_{1p}$  и  $d_{2p}$ . В то же время определение в (4) исключает все нечетные параметры, а среди четных –  $d_{2\tau}$ .

Возможность описать массовую поверхность, основываясь на уравнении (5) с учетом того или иного порядка параметров, предполагает, что эти параметры будут близки по величине при определении по разным группам ядер, не слишком далеких от  $N$  и  $Z$ , около которых производится разложение (5). Однако исследование ряда четно-четных ядер [7] показывают, что параметры  $d_{inkp}$  при  $i \neq 0, k \neq 0$  существенно различаются при определении по разным группам ядер, за исключением  $d_{1n1p}$ .

В настоящей статье для массовой поверхности нечетных ядер мы ограничились учетом параметров до второго порядка, причем рассматриваются две группы ядер для установления параметров массовой поверхности. Одна – с фиксированным четным  $Z$  для нечетно-нейтронных ядер (четным  $N$  для нечетно-протонных), в этой группе к нечетному нуклону добавляется или отделяется нечетное число нуклонов ( $\pm 1, \pm 3$ ), так что вычисленные параметры происходят с массами четно-четных ядер. Во второй группе ядер для нечетно-нейтронных ядер изменяется  $Z$  на  $\pm 2, \pm 4$  единиц (для нечетно-протонных изменяется  $N$  на те же единицы). Формулы, по которым вычисляются па-

раметры, даны в следующем разделе. В последнем разделе приводятся численные значения параметров и дается обсуждение полученных результатов.

### ПРИБЛИЖЕНИЯ К МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ “ГЛАДКОЙ” СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МАССЫ НЕЧЕТНОГО ЯДРА $M$ И ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ $d_{inkp}$ ЧЕРЕЗ МАССЫ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

Как упоминалось во введении, параметры массовой поверхности определяются для двух групп ядер. В каждой из них рассматриваются приближения к массовой поверхности, содержащие параметры не выше второго порядка.

Первая группа ядер сохраняет для нечетно-нейтронных ядер четное неизменное  $Z$ , для нечетно-протонных – четное  $N$ .

#### Приближение А

В приближении А (А) для нечетно-нейтронных ядер  $N$  равны  $N_n \pm 1$  и  $N_n \pm 3$ , для нечетно-протонных  $Z$  равны  $Z_n \pm 1$  и  $Z_n \pm 3$ . В этом приближении необходимо найти 3 параметра  $M, d_{1\tau}, d_{2\tau}$  ( $\tau = n$  для нечетно-нейтронных ядер,  $\tau = p$  для нечетно-протонных).

Во вторую группу ядер входят для нечетно-нейтронных ядер  $Z$ , отличающиеся от  $Z$  нечетного ядра на четные числа, для нечетно-протонных аналогичная ситуация с  $N$ .

#### Приближение Б

В приближении Б (Б)  $Z \pm 2, Z \pm 4$  для нечетно-нейтронных ядер, при этом  $N_n \pm 1$  и  $N_n \pm 3$ . Соответствующие  $N$  и  $Z$  выбираются для нечетно-протонных ядер. В Б можно найти все параметры первого и второго порядка:  $M, d_{1n}, d_{1p}, d_{2n}, d_{2p}, d_{1n1p}$ , т.е. 6 параметров.

Ниже, так же как в [7], для определения параметров вводятся комбинации масс, содержащие четные параметры  $e(s, t)$ , и нечетные  $o(s, t)$ . Переменные  $s$  и  $t$  могут быть отрицательными, нулями и положительными.  $M$  можно считать четным параметром, формально  $M = d_{0n0p}$ . Уравнения для  $e(s, t)$  и  $o(s, t)$  записаны вплоть до второго порядка.

$$e(s, t) = M(N + s, Z + t) + M(N - s, Z - t) = 2M(N, Z) + s^2 d_{2n} + t^2 d_{2p} + 2std_{1n1p}; \quad (8)$$

$$o(s, t) = M(N + s, Z + t) - M(N - s, Z - t) = 2sd_{1n} + 2td_{1p}. \quad (9)$$

**Таблица 1.** Нечетные параметры  $\bar{d}_{1\tau}$  (кэВ),  $\bar{d}_{1\tau} = d_{1\tau} - m_\tau$  и четные параметры  $d_{2\tau}$  (кэВ) в приближениях А и Б (см. текст). Для нечетных параметров в каждом приближении приведены два значения, вычисленные с использованием четно-четных масс с различными массовыми числами

A	Z	$\tau$	А			Б		
			$\bar{d}_{1\tau}(\Delta A = 1)$	$\bar{d}_{1\tau}(\Delta A = 3)$	$d_{2\tau}$	$\bar{d}_{1\tau}(\Delta A = 1)$	$\bar{d}_{1\tau}(\Delta A = 3)$	$d_{2\tau}$
157	64	<i>n</i>	-7148.58(0.90)	-7110.62(0.30)	196.98(0.32)	-7013.4(2.5)	-7104(10)	203.5(2.3)
165	67	<i>p</i>	-6768.05(0.70)	-6839.20(0.79)	628.98(0.55)	-6921(41)	-6855(23)	597(20)
171	70	<i>n</i>	-7337.13(0.09)	-7298.42(0.20)	186.63(0.14)	-7202.1(9.3)	-7078(24)	181.1(7.0)
175	71	<i>p</i>	-6104.90(0.70)	-6276.2(2.6)	578.9(2.0)	-6380(85)	-6133.3(3.1)	552(44)
179	72	<i>n</i>	-6743.4(1.0)	-6550.2(1.1)	198.58(0.83)	-6612(90)	-6660(59)	236(44)

Эти уравнения применимы к четно-четным и нечетным ядрам. В последнем случае под  $M(N, Z)$  надо понимать  $\mathcal{M}$ .

Ниже даны уравнения для  $\mathcal{M}$  и параметров нечетно-нейтронного ядра в А и Б. Уравнения для нечетно-протонного ядра получаются при заменах  $N \leftrightarrow Z$  (в частности  $N_n \leftrightarrow Z_n$ ), а также  $n \leftrightarrow p$ ,  $s \leftrightarrow t$ , и перестановкой: нейтронные числа должны быть первыми.

Для А:  $s = \pm 1, \pm 3; t = 0; \Delta A = |s| = 1; 3$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N_n, Z) &= [9e(1, 0) - e(3, 0)]/16; \\ P_n(N_n, Z) &= M(N_n, Z) - \mathcal{M}(N_n, Z), \end{aligned} \quad (10)$$

см. уравнения (1), (2).

$$d_{2n}(N_n, Z) = [e(3, 0) - e(1, 0)]/8. \quad (11)$$

В уравнениях (10), (11) использованы 4 массы, т.е. количество масс больше, чем параметров. Поэтому оказывается возможным определить  $d_{1n}$  из масс ядер с  $\Delta A = 1; 3$ .

$$\begin{aligned} d_{1n}(\Delta A = 1) &= o(1, 0)/2; \\ d_{1n}(\Delta A = 3) &= o(3, 0)/6. \end{aligned} \quad (12)$$

Для Б:  $s = \pm 1, \pm 3; t = \pm 2, \pm 4; \Delta A = |s + t| = 1, 3$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N_n, Z) &= \frac{5}{8}e(1, -2) + \\ &+ \frac{5}{48}e(1, 2) - \frac{1}{6}e(1, -4) - \frac{1}{16}e(3, -2); \end{aligned} \quad (13)$$

$$d_{2n}(N_n, Z) = [e(1, 2) + e(3, -2) - 2e(1, -2)]/8; \quad (14)$$

Число использованных масс равно 8, число параметров – 6, поэтому существует 2 варианта для получения  $d_{1n}$

$$d_{1n}(\Delta A = 1) = [o(3, -2) - o(1, -2)]/4; \quad (15)$$

$$d_{1n}(\Delta A = 3) = [o(1, -4) + 2o(1, 2)]/6. \quad (16)$$

Для Б приводятся уравнения только для нейтронных параметров, т.к. их можно сравнивать с параметрами, полученными в А.

### ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР И ОБСУЖДЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как указывалось во введении, все параметры  $\mathcal{M}$  и  $d_{inkp}$  могут быть вычислены либо через массы четно-четных ядер,  $M(N + s, Z + t)$ , либо через их энергии  $E(N + s, Z + t)$ , т.е. через энергии связи,  $B = -E$ . Ниже в табл. 1, 2 содержатся значения параметров, вычисленные с уравнениях (6)–(16) на основе последней публикации М. Вонга и др. [8]. Параметры приводятся для стабильных ядер  $^{157}_{64}\text{Gd}$ ,  $^{165}_{67}\text{Ho}$ ,  $^{171}_{70}\text{Yb}$ ,  $^{175}_{71}\text{Lu}$  и  $^{179}_{72}\text{Hf}$ , т.к. для стабильных ядер в их ближайшей окрестности имеется достаточное количество измеренных масс ядер. В табл. 1 указаны массовое число  $A$ , заряд  $Z$ ,  $\tau = n$  для нечетно-нейтронных и  $\tau = p$  для нечетно-протонных ядер. Эмпирические погрешности указаны в скобках рядом с параметрами. Все значения приведены в кэВ.

Табл. 1 показывает, что  $\bar{d}_{1\tau}$ , найденные как в разных приближениях, так и при разных  $\Delta A$  внутри приближения, максимально отличаются на  $\sim 200$  кэВ, т.е. относительное различие, отнесенное к  $\bar{d}_{1\tau}$ , составляет очень небольшую величину  $\sim 3\%$ . Напомним, что в А удерживается неизменное  $Z$  для нечетно-нейтронных ядер и неизменное  $N$  для нечетно-протонных, а в Б, соответственно,  $Z$  или  $N$  изменяются на четные числа ( $\pm 2, \pm 4$ ). Знак и величина  $\bar{d}_{1\tau}$  примерно соответствуют оценке на основе формулы Вайцзеккера [4].

Отметим, что параметры в Б по сравнению с А имеют большие эмпирические погрешности. Это связано с тем, что в Б используется большее число масс ядер, что обуславливает это различие.

Как следует из табл. 1, четные параметры  $d_{2\tau}$  оказываются ближе друг к другу, чем  $d_{1\tau}$ , определенные в разных приближениях. Различие параметров  $d_{2\tau}$  в А и Б в среднем равно  $\approx 22$  кэВ. Обращает на себя внимание существенная разница в

**Таблица 2.** Парные энергии  $P_\tau$  в приближении А и разности “гладких” масс нечетных ядер  $\mathcal{M}(A) - \mathcal{M}(B)$  в кэВ. Приближения А и Б – см. текст

$A$	$Z$	$\tau$	$P_\tau(A)$	$\mathcal{M}(A) - \mathcal{M}(B)$
157	64	$n$	887.2(1.4)	-19(11)
165	67	$p$	862.5(1.3)	-102(25)
171	70	$n$	796.16(0.07)	-82(28)
175	71	$p$	894.2(1.8)	-174(22)
179	72	$n$	743.6(2.0)	328(63)

$d_{2n}$  и  $d_{2p}$ . Однако формула Вайцзеккера как раз объясняет это. Если приближенно принять  $d_{2n} \approx -\partial^2 B / \partial N^2$  и  $d_{2p} \approx -\partial^2 B / \partial Z^2$ , где  $B$  – энергия связи Вайцзеккера с параметрами из [4], то  $d_{2n} \sim \sim 200$  кэВ и  $d_{2n} - d_{2p} \sim 400$  кэВ для  $150 < A < 190$ , что вполне разумно согласуется с данными табл. 1.

Парные энергии  $P_\tau$  (табл. 2) приводятся только в А,  $P_\tau$  в Б могут быть получены с помощью разности  $\mathcal{M}(A) - \mathcal{M}(B)$ , т. к., например,  $P_n(A) = \mathcal{M}(N_n, Z) - \mathcal{M}(A)$ . Абсолютные значения  $\mathcal{M}$  не приводятся, т. к. они имеют тот же порядок, что и массы соседних четно-четных ядер, и могут быть легко восстановлены, используя значения  $P_\tau$  и массу соответствующего нечетного ядра (см. (1) и (2)).

Подводя итог исследованию массовой поверхности вокруг нечетных ядер, аппроксимированной полиномами второго порядка по отклонениям от  $N$  и  $Z$  нечетного ядра, мы не можем отдать предпочтение А (постоянные  $Z(N)$  для нечетно-нейтронных (нечетно-протонных) ядер) или Б, где  $Z(N)$  изменяются. Оба эти приближения используют аппроксимацию массовой поверхности в виде полинома второго порядка. А использует для гладкой составляющей массы нечетного ядра  $\mathcal{M}$  четыре массы, Б – восемь, что не всегда воз-

можно, но оба приближения используют массы четно-четных ядер, отличающиеся от нечетного ядра на  $\Delta A = 1$ ; 3. По-видимому, микроскопический анализ может показать, какое приближение более адекватно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nilsson S.G., Tsang C.F., Sobiczewski A. et al. // Nucl. Phys. A. 1969. V. 131. P. 1.
2. Соловьев В.Г. Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971. 560 с.
3. Bender M., Heenen P.-H., Reinhard P.-G. // Rev. Mod. Phys. 2003. V. 75. P. 121.
4. Бор О., Моттельсон Б.Р. Структура атомного ядра. Т. 1. М.: Мир, 1971. 456 с.
5. Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 989; Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 905.
6. Madland D.G., Nix J.R. // Nucl. Phys. A. 1988. V. 476. P. 1.
7. Власников А.К., Зиппа А.И., Михайлов В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2017. Т. 81. С. 1325; Vlasnikov A.K., Zippa A.I., Mikhajlov V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2017. V. 81. P. 1184.
8. Wang M., Audi G., Kondev F.G. et al. // Chin. Phys. C. 2017. V. 41. № 3. Art. № 030003.