САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 3.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2001

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 3.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2001

Утверждено на заседании
кафедры общей математики и информатики
в качестве методических указаний
для студентов естественных факультетов

Составители: А.К.Пономаренко, Н.М.Салтыкова ,В.Ю.Сахаров
Рецензент: П.К.Черняев

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КОМБИНАТОРИКИ.

В книге [1] комбинаторика определяется как область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов; в [2]: " Комбинаторика — ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов."

Приведем очень краткие сведения об основных понятиях и методах комбинаторики, часто используемых в теории вероятностей.

Отметим прежде всего два основных правила комбинаторики: *правило умножения* и *правило сложения.*

Правило умножения. Если объект A можно выбрать m способами и если *после* каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пару (A, B) в указанном порядке можно выбрать mn способами.

Это правило распространяется и на большее число последовательно выбираемых объектов.

ПРИМЕР. Сколько различных четных пятизначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5 ?

В старшем разряде числа можно поместить одну из цифр 1,2,3,4,5 (всего 5 возможностей), в каждом из следующих трех разрядов — по одной из цифр 0,1,2,3,4,5 (по 6 возможностей для каждого разряда), в последнем (самом младшем) разряде либо 0, либо 2, либо 4 (3 возможности). По правилу умножения количество таких чисел равно $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 3240$.

Правило сложения. Если объект A можно выбрать m способами и если при этом *одновременно* с каждым таким выбором объект B можно выбрать n способами, то выбор "A или B" осуществляется $m + n$ способами.[1)]

Это правило распространяется и на большее число одновременно выбираемых объектов.

ПРИМЕР. Сколько различных трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если цифры в записи числа не повторяются ?

[1)] При использовании правила сложения нужно заботиться о том, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-либо способом выбора объекта B. Если же имеется s совпадений, то выбор "A или B" осуществляется $m + n - s$ способами.

Как хорошо известно, число делится на 3 в том и только в том случае, когда сумма его цифр делится на 3. Наборы трех таких цифр из данных пяти следующие: 1,2,3; 2,3,4; 1,3,5; 3,4,5. Для каждого из этих наборов имеется 6 чисел, полученных с помощью всевозможных перестановок цифр в наборе. (Например, для набора 1,2,3 эти числа таковы: 123, 132, 213, 231, 312, 321.) Используя правило сложения, находим, что количество искомых чисел равно 6+6+6+6=24.

Одним из классов объектов, рассмативаемых в комбинаторике, являются соединения, т.е. размещения, перестановки и сочетания.

Рассмотрим сначала соединеия без повторений.

Размещения без повторений.

Пусть имеется некоторое множество A, содержащее n элементов. Пусть $m \leqslant n$.

Размещениями из n элементов по m называются упорядоченные m–элементные подмножества множества A.

Размещения отличаются друг от друга либо порядком элементов, либо самими элементами.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m. Доказывается с помощью правила умножения, (например, в [1]), что

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1). \qquad (*)$$

ПРИМЕР. Сколько различных четырехзначных телефонных номеров, не содержащих одинаковых цифр, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 ?

Рассматриваемые номера телефонов отличаются либо цифрами, либо порядком, в котором написаны цифры. Следовательно записи номеров можно рассматривать как размещения из шести элементов по четыре, и их число равно $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Перестановки без повторений.

Перестановками n элементов называют размещения из n элементов по n.

Перестановки отличаются друг от друга лишь порядком элементов. Число P_n перестановок n элементов согласно формуле (*) равно

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

где при $1 < n \quad n! \stackrel{def}{=} n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$,[2) $\quad 0! \stackrel{def}{=} 1! \stackrel{def}{=} 1$.

2) $\stackrel{def}{=}$ означает "По определению".

ПРИМЕР. Сколько чисел можно получить из числа 56734 с помощью всевозможных перестановок его цифр?

Это число равно $P_5 = 5! = 120$.

Сочетания без повторений.
Пусть, как и выше, имеется некоторое множество A, содержащее n элементов. Пусть $m \leqslant n$.

Сочетаниями из n элементов по m называются неупорядоченные m–элементные подмножества множества A.

Сочетания отличаются друг от друга лишь самими элементами. Порядок их расположения безразличен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m, или $\binom{n}{m}$.

Из определений размещений и сочетаний следует, что можно получить всевозможные размещения из n элементов по m, если взять все сочетания из n элементов по m и в каждом из них сделать всевозможные перестановки. Поэтому $A_n^m = C_n^m \cdot m!$, откуда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \text{ при } 1 \leqslant m \leqslant n-1,$$

$C_n^0 \stackrel{def}{=} C_n^n \stackrel{def}{=} 1$.

ПРИМЕР. Каким количеством способов можно выбрать делегацию в составе трех студентов из группы в двадцать пять человек?

Делегации отличаются одна от другой составом ее членов, поэтому они образуют сочетания из двадцати пяти по три. Число таких сочетаний равно $C_{25}^3 = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулу для числа сочетаний из n элементов по m можно записать и в таком виде:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

откуда следует, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

При расмотрении соединений с повторениями удобно использовать *кортежи* — аналоги упорядоченных множеств, но, если в множествах все элементы различны, то в кортежах допускаются повторяющиеся элементы. Например, цифры в записи числа 110090 образуют кортеж длины шесть,[3] цифры 0,1 в нем повторяются. Семизначные номера телефонов в Петербурге образуют кортежи длины

[3] Кортеж $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ имеет длину n, элементы $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называются его координатами.

семь. Записи слов в русском языке являются кортежами различной длины, составленными из букв русского алфавита.

Размещения с повторениями.

Пусть имеется множество A, содержащее n элементов.

Кортежи длины m , образованные из элементов множества A, координаты которых повторяются, называются *размещениями с повторениями из n элементов по m* .

Размещения с повторениями различаются между собой как элементами, так и порядком элементов. Например, кортежи 1101001, 1010101 и 1111000 — различные размещения из двух элементов по семь.

Число размещений с повторениями из n элементов по m обозначается $\overline{A}_n^m$. Используя правило умножения, с помощью метода математической индукции нетрудно получить

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

ПРИМЕР. Каким количеством способов можно посадить 9 человек в три вагона поезда, если выбор вагона для каждого из них безразличен?

Каждое такое рассаживание 9 пассажиров есть размещение с повторениями из трех элементов по девять. Число способов рассаживания равно $\overline{A}_3^9 = 3^9 = 19683$.

Перестановки с повторениями.

Кортежи длины n, отличающиеся один от другого лишь порядком элементов и содержащие повторяющиеся элементы, называются *перестановками с повторениями.*

Пусть один из элементов кортежа повторяется n_1 раз, другой — n_2 раза, третий — n_3 раз, ..., k–й — n_k раз, $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$. Если бы повторений не было, то число всевозможных перестановок было бы равно $n!$. Переставляя повторяющиеся элементы между собой, мы получим каждый раз исходную перестановку. Используя правило умножения, найдем, что всего перестановок повторяющихся элементов $n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!$. Поэтому искомое число перестановок с повторениями, которое принято обозначать $P(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$, равно

$$P(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 \cdots + n_k)!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

ПРИМЕР. Сколько различных семизначных телефонных номеров можно составить, испрользуя три цифры 1 и четыре цифры 2?

Эти номера, например 2211212, образуют перестановки с повторениями, число которых равно

$$P(3,4)=\frac{(3+4)!}{3!4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6}=35.$$

<u>*Сочетания с повторениями.*</u>

Кортежи длины k, составленные из n элементов, отличающиеся один от другого лишь самими элементами и содержащие повторяющиеся элементы, называются *сочетаниями с повторениями из n элементов по k.*

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается $\overline{C}{}_n^k$. Оно равно (См., например [1,2])

$$\overline{C}{}_n^k=P(n-1,k)=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

ПРИМЕР. Имеются яблоки четырех сортов: анис, антоновка, пепин, шафран. Каким количеством способов можно выбрать семь яблок?

Всевозможные наборы по семь яблок отличаются друг от друга только сортами яблок: можно, например, взять 7 антоновок или 1 яблоко сорта анис, 3 яблока сорта пепин и 3 антоновки и т.д. Такие наборы яблок представляют собою сочетания с повторениями из четырех элементов по семь. Их число равно

$$\overline{C}{}_4^7=C_{4+7-1}^7=\frac{10!}{3!7!}=120.$$

ДЕЙСТВИЯ С СОБЫТИЯМИ. КЛАССИЧЕСКОЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ, СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. АКСИОМАТИКА. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Событием называют какой – либо исход испытания. Например, событие, состоящее в том, что при подбрасывании игральной кости выпало четное число очков. (Здесь испытание — подбрасывание игральной кости.) В теории вероятностей рассматривают результаты испытаний, повторяемых *многократно.*

Если в результате каждого из повторяемых испытаний событие A происходит, то это событие называют *достоверным.* Например, то, что при подбрасывании двух игральных костей сумма выпавших очков не меньше двух, — достоверное событие. Достоверное событие принято обозначать буквой U.

Если ни при каком из повторяемых испытаний событие A не происходит, то оно называется *невозможным.* Так появление при подбрасывании двух игральных костей суммы числа очков, меньшей двух, — невозможное событие. Невозможное событие обозначают символом $\varnothing$.

Если событие B происходит обязательно, когда происходит событие A, то говорят, что событие A *влечет* событие B. Это обозначают так: $A \subset B$.

События A и B называются *эквивалентными (равносильными)*, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Например, событие: при подбрасывании игральной кости выпало число очков, кратное трем, эквивалентно событию: выпало три или шесть очков.

Для большей иллюстративности действий с событиями события будем рассматривать как подмножества пространства элементарных событий. В простейших случаях *пространство элементарных событий* - множество исходов испытания. Его элементы — называются *элементарными событиями.* Например, при подбрасываниии игральной кости элементарными событиями являются ω_j — выпадение j очков, $j = 1, 2, \ldots 6$. Пространство элементарных событий — $U = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. События — подмножества пространства элементарных событий. Например, выпадение четного числа очков — событие $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Достоверное событие U есть тоже подмножество пространства элементарных событий U (само множество U).

Суммой $A + B = A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том , что произошло событие A или событие B. Пример: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$. $A + B = A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$.

Разностью $A - B = A \setminus B$ событий A и B называется событие: A произошло, B не произошло. Так при обозначениях последнего примера $A - B = \{\omega_2, \omega_4\}$.

Произведением $AB = A \cap B$ событий A и B называется событие: произошли события и A, и B. Пример: в условиях предыдущего примера $A \cap B = \{\omega_6\}$.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если

$A+\overline{A}=U$ и $A\overline{A}=\varnothing$. Пример: Пусть $\omega_г$ — выпадение герба при подбрасывании монеты, $\omega_ц$ — выпадение цифры. Тогда $\overline{\omega_г}=\omega_ц$.

Классическое определение вероятности.

Пространство элементарных событий конечное: $U=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n\}$. Элементарные события ω_j равновозможные(равновероятные). Это означает, что никакому из них не отдается предпочтение. Пусть $A=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},\ldots,\omega_{j_m}\}\subset U$.

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение $\dfrac{m}{n}$:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Часто события ω_{j_k}, $k=1,2,\ldots,m$, называют событиями, благоприятствующими появлению события A. Тогда определение (1) можно сформулировать следующим образом:

Вероятностью события A называют отношение числа исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, к числу всевозможных исходов испытания.

ПРИМЕР. Пусть,как и выше, $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ — выпадение четного числа очков при подбрасывании игральной кости. Здесь $m=3$, $n=6$. По определению $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Геометрическое определение вероятности.

Пространство элементарных событий бесконечное: $U=\{\omega_\alpha\}$, $U\subset\mathbf{R}^n$. Элементарные события равновозможные. Пусть $A=\{\omega_\beta\}$, $A\subset U$. ($U, A\subset\mathbf{R}^n$ — некоторые области n - мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$).

По определению

$$P(A)=\frac{mes\ A}{mes\ U}. \tag{2}$$

Здесь $mes\ A, mes\ U$ означает меру множеств A, B (например, если A, B — области на плоскости $\mathbf{R}^2$, то $mes\ A, mes\ U$ —площади фигур A, B).

В качестве примера приведем задачу о встрече [1]:

Двое договорились о встрече между 12-00 и 13-00. Пришедший первым ждет второго 20 мин (если не дождется в течение этого времени, уходит). Найти вероятность встречи, если моменты времени прихода каждого равновозможны.

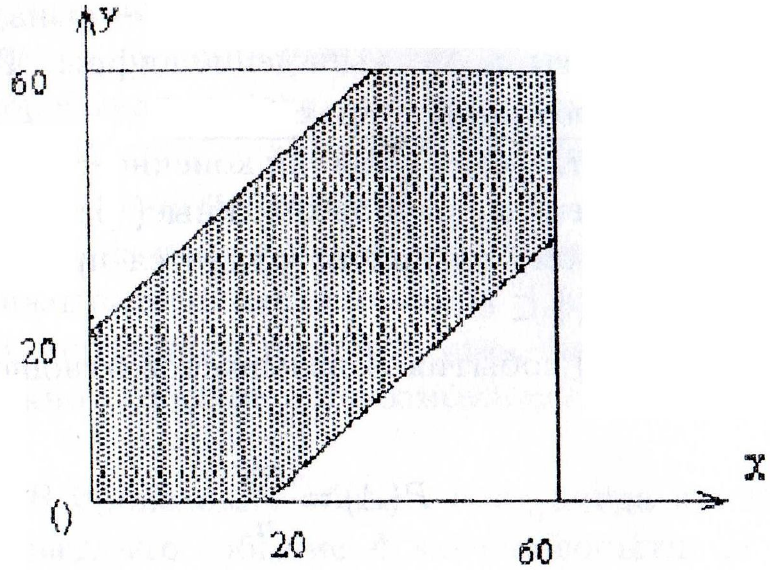

Рис. 1.

Обозначим время прихода первого буквой x, второго – y. Множество всевозможных комбинаций времен прихода первого и второго образует квадрат $\Omega = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$ (Рис.1).

Встреча (обозначим это событие буквой A) произойдет в том и только в том случае, когда $|y - x| \leqslant 20$, что эквивалентно неравенству $x - 20 \leqslant y \leqslant x + 20$. Множество точек (x, y), удовлетворяющих этому условию, заполняют затененный шестиугольник $\omega = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60, |y - x| \leqslant 20\}$. Поэтому

$$P(A) = \frac{\text{площадь } \omega}{\text{площадь } \Omega} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

Статистическое определение вероятности.

Пусть случайное событие A происходит (или не происходит) при некотором испытании. Пусть это испытание осуществлено n раз, а событие A произошло при этом m раз. Число $\nu = \nu_n \overset{def}{=} \frac{m}{n}$ называется *частотой (относительной частотой)* события A.

Отмечено, что при большом числе испытаний для многих событий их относительные частоты устойчивы и колеблются в разных сериях с большим количеством испытаний около некоторого числа (конечно, для каждого события своего). В книгах [3,4] приведены результаты серий экспериментов (Дж.Е.Керрих, Бюффон, К.Пирсон и др.), которые свидетельствуют о том, что при большом количестве подбрасываний монеты относительная частота события – выпадения герба – колеблется около числа $\frac{1}{2}$.

Еще пример оттуда же: П.С.Лаплас[4] , исследовав обширные статистические материалы для Лондона, Петербурга, Берлина, всей Франции, установил, что отношение числа рождения мальчиков к числу всех рождений детей во всех указанных местах практически постоянно и равно $\frac{22}{43}$.

Имеется много других примеров, свидетельствующих об устойчивости относительных частот случайных событий.

Число, около которого *при большом количестве испытаний* колеблется относительная частота события A, является объективной характеристикой события A; это число называют вероятностью p события A.

В частности, для независимых испытаний (см. стр. 17) можно привести более определенное высказывание, которое называют *законом больших чисел в форме Пуассона*:[5] :

Теорема. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A равна p, то для любого числа ε, $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$,

$$P(|\nu_n - p| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1,$$

где ν_n — частота появления события A в n испытаниях.
(Т.е. частота ν_n при $n \to \infty$ стремится к p по вероятности.)

В качестве приближенного значения вероятости события может быть взята сама относительная частота. (*При большом числе испытаний.*)

Замечание. Как следует из предыдущего, вероятность появления герба при подбрасывании монеты равна $\frac{1}{2}$. Используя классическое определение вероятности, мы получаем то же самое число.

Аксиоматическое введение вероятности. Теорема сложения.

Введем понятие вероятности аксиоматически (См.[3]).

Пространством элементарных событий называется произвольное непустое множество $U\{\omega_\alpha\}$. Его элементы называются *элементарными событиями.*

Любое множество A, $A \subset U$, называют *событием.*

Пусть множество $\mathfrak{A} = \{A | A \subset U\}$ — множество подмножеств U.

Множество $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй множеств*, если

---

[4] Лаплас, Пьер Симон (1749–1827) — французский математик, физик, астроном, член Парижской АН, многих других АН и научных обществ, иностранный почетный член Петербургской АН.

[5] Пуассон, Симеон Дени (1781–1840) — французский математик, механик и физик, член Парижской АН, почетный член Петербургской АН.

1) из того, что $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{A}$, следует, что $A \cup B \in \mathfrak{A}$, $A \setminus B \in \mathfrak{A}$,
2)$U \in \mathfrak{A}$.

Из этого определения вытекает, что и $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{A}$, $\varnothing = U \setminus U \in \mathfrak{A}$, $\overline{A} = U \setminus A \in \mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра множеств. Если для любого счетного множества множеств A_j, $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ называют *сигма–алгеброй множеств.*

Числовая функция $P = P(A)$ $(A \subset \mathfrak{A})$ называется *вероятностной мерой*, или *вероятностью* события A, если выполнены следующие аксиомы:
1. $P(A) \geqslant 0$,
2. $P(U) = 1$,
3. Если $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$. (*Теорема сложения вероятностй несовместных событий.*)

В случае, когда $\mathfrak{A}$ бесконечное множество, то аксиому 3 следует дополнить расширенной аксиомой сложения:
3.1. Для любого множества $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ попарно несовместных событий A_j $(A_j \cap A_k = \varnothing$ при $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots)$ $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A} \Rightarrow$ $P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Тройку $(U, \mathfrak{A}, P)$, где U — пространство элементарных событий, $\mathfrak{A} = \{A | A \subset U\}$ — алгебра (сигма–алгебра) множеств, $P = P(A)$ — вероятность события A, называют *вероятностным пространством.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Для классического, статистического, геометрического определений вероятности приведенные выше аксиомы являются теоремами, выражающими свойства вероятности.

Отметим другие основные свойства вероятности:
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\varnothing) = 0$.
6. Если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.
7. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
8. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. (*Теорема сложения вероятностей совместных событий.*)

Приведем примеры решения задач.

ЗАДАЧА 1. Из чисел $1, 2, 3, \ldots 1000$ наудачу выбирают число. Какова вероятность того, что это число делится на 3 или на 4?

Обозначим буквой A событие: "Взятое число делится без остатка на 3", буквой B — "Число делится без остатка на 4". Тогда $A+B$ есть событие: "Взятое число делится на 3 или на 4".

По теореме сложения вероятностей совместных событий $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Событие AB — "Взятое наудачу число делится и на 3, и на 4" (т.е. это число делится на 12). Из заданных 1000 чисел 333 делятся на 3: $3, 6, \ldots, 999$; 250 делятся на 4: $4, 8, \ldots, 1000$; 83 делятся на12: $12, 24, \ldots, 996$.

На основании классического определения вероятности $P(A)=\dfrac{333}{1000}=0.333$, $P(B)=\dfrac{250}{1000}=0.25$, $P(AB)=\dfrac{83}{1000}=0.083$. Имеем $P(A+B)=0.333+0.25-0.083=0.5$.

ЗАДАЧА 2. (Задача Яниса.) Янису нужно попасть в подъезд, на дверях которого установлен кодовый замок, на панели замка — 10 кнопок с цифрами $0, 1, \cdots, 9$. Янис не знает код, при наборе которого замок открывается. Знает только, что код то ли двузначный, то ли трехзначный, и что порядок набора цифр кода важен. Какова вероятность открыть замок при первой же попытке?

Рассматриваемые коды — размещения из десяти цифр по две и по три. Число двузначных кодов равно $A_{10}^2=10\cdot 9$, трехзначных — $A_{10}^3=10\cdot 9\cdot 8$. Общее число n возможных кодов равно $A_{10}^2+A_{10}^3=10\cdot 9^2=810$. Далее, $m=1$.

Искомая вероятность

$$p=\frac{m}{n}=\frac{1}{810}.$$

ЗАДАЧА 3. Коробка содержит P деталей, из них p стандартных. Наудачу выбирают Q деталей. Какова вероятность, что среди них окажется ровно q стандартных?

Обозначим A событие: среди взятых наудачу Q деталей содержится q стандартных.

Из P деталей можно выбрать Q деталей C_P^Q способами. Из p стандартных можно выбрать q стандартных C_p^q способами. Для каждого выбора q стандартных деталей к ним можно присоединить $Q-q$ нестандартных C_{P-p}^{Q-q} способами. Таким образом в формуле (1) имеем $m=C_p^q C_{P-p}^{Q-q}$, $n=C_P^Q$ и $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_p^q C_{P-p}^{Q-q}}{C_P^Q}$.

ЗАДАЧА 4. На отрезке OA длины l оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причем $y<x$. Найти вероятность того, что

длина отрезка BC окажется меньше, чем $\frac{l}{2}$, если вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна его длине и не зависит от расположения отрезка на оси Ox.

Координаты точек B и C (Рис.2, а)) должны удовлетворять

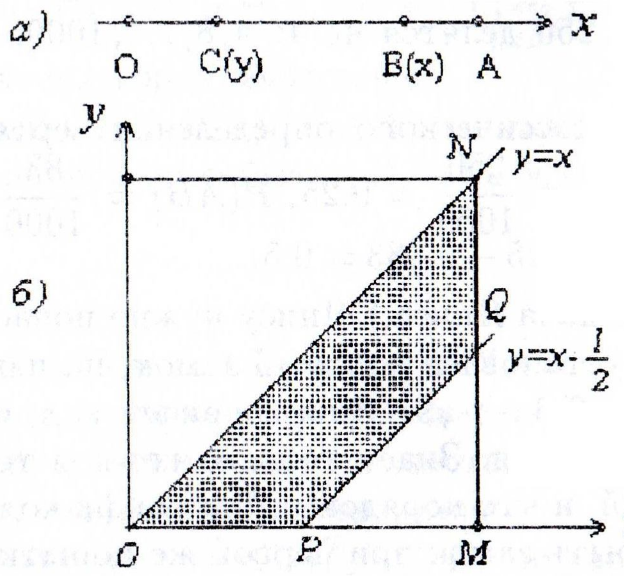

Рис. 2.

условиям $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant l$, $y \leqslant x$. В прямоугольной декартовой системе координат Oxy этим неравенствам соответствует множество точек (x, y), принадлежащих треугольнику OMN (Рис.2, б)), где $M(l, 0)$, $N(l, l)$. Условие $|BC| < \frac{l}{2}$, т.е. $x - y < \frac{l}{2}$, вместе с написанными выше неравенствами определяет затененную трапецию $ONQP$, $P(\frac{l}{2}, 0)$, $Q(l, \frac{l}{2})$, заполненную точками, "благоприятствующими" рассматриваемому событию $|BC| < \frac{l}{2}$. Искомая вероятность P находится по формуле (2):

$$P = \frac{\text{площадь трапеции } ONQP}{\text{площадь треугольника } OMN} = \frac{\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{8}l^2}{\frac{1}{2}l^2} = \frac{3}{4}.$$

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ.

Вероятность появления события A при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A. Условную вероятность обозначают $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

ЗАДАЧА 5. В урне имеется 6 белых и 4 черных шара, которые не различаются наощупь. Шары перемешаны. Наудачу достают шар из урны и назад в урну не опускают(схема без возвращения). Затем снова из урны наудачу достают шар. Пусть событие A: при втором извлечении вынут белый шар, событие B— при первом извлечении вынут черный шар. Найти условную вероятность $P(A/B)$.

После того, как из урны извлечен черный шар, в ней осталось 6 белых и три черных шара. Используя классическое определение вероятности, получаем $P(A/B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Имеет место

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{3}$$

ЗАДАЧА 6. Пусть выполнены условия последней задачи. Найти вероятность того, что при первом извлечении был вынут черный шар, а при втором белый.

Рассматриваемое событие есть произведение событий A и B. $P(AB) = P(B)P(A/B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если бы после каждого извлечения вынутые шары возвращались в урну (схема с возвращением), мы имели бы $P(AB) = P(B)P(A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{25}$.

Если $P(B/A) = P(B)$, то из равенства (3) следует, что и $P(A/B) = P(A)$. (И наоборот, из $P(A/B) = P(A)$ следует, что $P(B/A) = P(B)$). Если выполнено одно из этих условий, то события A и B называются *независимыми*. Другими словами, события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого (вероятностей остальных рассматриваемых событий, если говорят о независимости в совокупности событий, число которых больше двух).

Для независимых событий теорема умножения принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{3.1}$$

В общем случае теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1)P(A//_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \cdots$$
$$\cdots P(A_n/A_1A_2 \cdots A_{n-1}). \tag{3.2}$$

Для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_n). \tag{3.3}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие A может произойти лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих *полную группу* (т.е. таких, что $\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j) = 1$). Тогда имеет место формула:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j). \tag{4}$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности.*

ЗАДАЧА 7. Имеются две урны с шарами, неразличимыми наощупь, в первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй — 3 белых и 7 черных. Наудачу выбирают урну, из нее наудачу достают шар. Какова вероятность того, что вынут белый шар?

Обозначим A событие: вынут белый шар, B_1 — взята первая урна, B_2 — взята вторая урна. Т.к. урна выбирается наудачу, то $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. Далее $P(A/B_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(A/B_2) = \frac{3}{10}$. По формуле (4)

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{20}.$$

Пусть, как и выше, событие A может произойти лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Пусть событие A произошло. Какова вероятность того, что оно произошло вместе с событием B_k, $1 \leqslant k \leqslant n$?

Ответ на этот вопрос дает *формула Байеса*[6] , или *теорема гипотез*:

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k)(P(A/B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j)}. \tag{5}$$

ЗАДАЧА 8. Пусть выполнены условия последней задачи. Пусть событие A произошло. Какова вероятность того, что оно произошло вместе с событием B_2? т.е., что белый шар вынут из второй урны?

[6] Байес, Томас (1702–1761) — английский математик.

Требуется найти $P(B_2/A)$. По формуле Байеса

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)(P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{3}.$$

НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМЫ МУАВРА–ЛАПЛАСА.

Пусть при отдельном испытании вероятность появления события A равна p. Пусть производится серия таких испытаний. Если вероятность появления события A не зависит от исходов предыдущих испытаний, то испытания называются *независимыми*. (В каждом из независимых испытаний вероятность появления события A равна p.)

Пусть проделано n независимых испытаний. Вероятность $p_n(m)$ того ,что при n испытаниях событие A произошло ровно m раз, дается *формулой Бернулли*[7]

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{6}$$

где $q = 1 - p$.

Здесь C_n^m — биномиальные коэффициенты, введенные выше на стр.5.

ЗАДАЧА 9. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $\frac{4}{5}$. Найти вероятность трех попаданий при пяти выстрелах.

Здесь $n = 5$, $m = 3$, $p = \frac{4}{5}$, $q = 1 - p = \frac{1}{5}$. По формуле Бернулли находим

$$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{128}{625} \cong 0.205.$$

При больших n формулой Бернулли (6) пользоваться затруднительно. Вместо нее прибегают к помощи теорем Муавра–Лапласа.[8]

Локальная теорема Муавра – –Лапласа.

Пусть в каждом из независимых испытаний вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$. Вероятность $P_n(m)$ того, что

[7] Бернулли, Якоб (1654–1705) — швейцарский математик.

[8] Муавр де Абрахам (1667–1754) — английский математик, член Лондонского королевского общества, иностранный член Парижской и Берлинской АН.

при n испытаниях событие A произойдет (безразлично, в какой последовательности) ровно m раз, $0 \leqslant m \leqslant n$, приближенно равна

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{7}$$

где

$$q = 1 - p, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Равенство (7) тем точнее, чем больше n.

Интегральная теорема Муавра – –Лапласа.

Пусть в каждом из независимых испытаний вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$. Вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что при n испытаниях событие A произойдет (безразлично, в какой последовательности) не менее m_1 и не более m_2 раз, $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n$, приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{8}$$

где

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Равенство (8) тем точнее, чем больше n.

Замечание..

Функцию $\varphi(x)$ называют *функцией Гаусса.*[9)]

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа.*

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ протабулированы (Например, их таблицы содержатся в [3] и др., см. также приложения 1 и 2.). В системах математического обеспечения компьютеров имеются программы, которые вычисляют значения этих функций.

ЗАДАЧА 10. Монета подбрасывается 1000 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет

а) 495 раз;

[9)] Гаусс, Карл Фридрих (1777–1855) — крупнейший немецкий математик, астроном, физик и геодезист.

б) от 495 до 510 раз.

Здесь $n = 1000$, $p = q = \frac{1}{2}$.

а) $m = 495$,

$$\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \cong 15.811,$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{495 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{5\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \cong -0.3162.$$

По таблице функции Гаусса $\varphi(x)$ находим

$$\varphi(x) \cong 0.3795.$$

По формуле (7) получаем

$$P_{1000}(495) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \cong \frac{0.3795}{15.811} \cong 0.024.$$

б) По условию $m_1 = 495$, $m_2 = 510$, $x_1 = x$ пункта а). Вычисляем далее

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{510 - 500}{5\sqrt{10}} = \frac{10}{5\sqrt{10}} = \sqrt{0.4} \cong 0.6325.$$

По таблице интеграла вероятностей $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(x_1) \cong -0.1240, \quad \Phi(x_2) \cong 0.2367,$$

откуда по формуле (8) получаем

$$P_{1000}(495; 510) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \cong 0.2367 + 0.1240 \cong 0.361.$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Как и случайное событие, случайную величину связывают с исходами эксперимента. Для случая конечного пространства элементарных событий случайную величину рассматривают как числовую функцию от элементарного события. Например, можно ввести случайную величину ξ, которая принимает значение $x_1 = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$, если при подбрасывании монеты выпадет герб, и $x_2 = 0$ с такой же вероятностью, если выпадет цифра. Случайную величину ξ можно задать с помощью таблицы, в первой строке которой указываются значения случайной величины, а во второй — вероятности, с которыми эти значения принимаются:

ξ	1	0
$p(x_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

Аналогично можно ввести случайную величину ξ, которая принимает значения $x_1, x_2, \cdots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \cdots, p_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(x_j)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

. (9)

Можно рассматривать и случайную величину, имеющую счетное множество значений. Для ее задания нужно указать закон, по которому она принимает свои значения и вероятности, соответствующие этим значениям. Например, случайная величина ξ, имеющая распределение Пуассона, задается следующим образом:

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, \; m = 0, 1, 2, \cdots, \quad a\text{— положительное число.}$$

Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений , называется *дискретной случайной величиной.*

Рассматривают также и случайные величины, значения которых заполняют промежуток (интервал, сегмент и т. п., ограниченный или нет) или даже систему промежутков. Такие случайные величины называют *непрерывными случайными величинами.* Например, момент времени, в который потребуется вмешательство оператора, обслуживающего некоторую техническую систему, представляет собой непрерывную случайную величину.

Непрерывную случайную величину задают с помощью *плотности распределения*, или *дифференциальной функции распределения*, т.е. такой неотрицательной на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функции $p(x)$, что для любых вещественных чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \leqslant x_2$, имеем

$$P(x_1 \leqslant x < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx. \tag{10}$$

Отсюда при $x_1 \to -\infty$ и $x_2 \to +\infty$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1. \tag{11}$$

Рассматривают случайные величины и более общего вида (См., например, [3]).

Каждую случайную величину ξ можно задать с помощью ее *функции распределения*, или *интегральной функции распределения* $F(x)$:

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{12}$$

Для дискретной случайной величины $F(x)$ является кусочно-постоянной функцией.

ЗАДАЧА 11. Дискретная случайная величина ξ задана с помощью таблицы

ξ	0	1	3
$p(x_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Найти ее функцию распределения $F(x)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1)$-\infty < x \leqslant 0$.

$$F(x) = P(\xi < x) = 0.$$

$2) 0 < x \leqslant 1.$

$$F(x) = P((-\infty < \xi < 0) \vee (\xi = 0) \vee (0 < \xi < x)) =$$

$$P(-\infty < \xi < 0) + P(\xi = 0) + P(0 < \xi < x) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

$3) 1 < x \leqslant 3.$

$$F(x) = P((-\infty < \xi < 1) \vee (\xi = 1) \vee (1 < \xi < x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4}.$$

$4)\ 3 < x < +\infty.$

$$F(x) = P((-\infty < x < 3) \vee (\xi = 3) \vee (3 < \xi < +\infty)) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 1.$$

Ее график имеет вид:

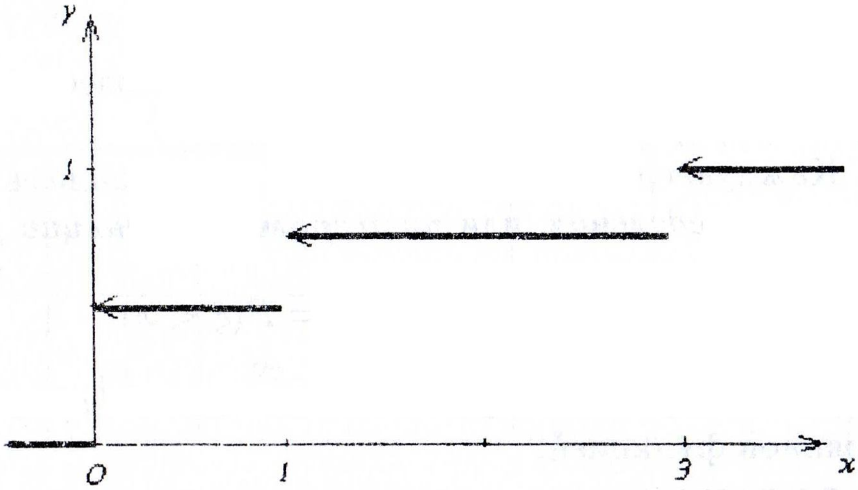

Рис. 3.

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x)$ функцию распределения $F(x)$ получают из равенства (10) при $x_1 \to -\infty$ и $x_2 = x$:

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt. \tag{12}$$

Если функция $p(x)$ непрерывна в точке x, то из равенства (12) по теореме Барроу находим

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x), \quad dF(x) = p(x)dx.$$

Перечислим основные свойства функции распределения $F(x)$.

1). Для любого вещественного x $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

2). $F(x)$ монотонно возрастает на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

3). Для любых x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$, $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

4). $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x.

5). $\lim\limits_{n \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} F(x) = 1.$

С позиций качественного описания *случайной величиной* можно назвать переменную, принимающую в результате эксперимента случайные значения, для которой определена функция распределения вероятностей $F(x)$.[10)]

Способ задания случайной величины (с помощью ее функции распределения или каким–либо другим образом, например, с помощью таблицы для дискретной случайной величины или плотности распределения для непрерывной случайной величины, при котором можно определить интегральную функцию распределения этой случайной величины) называют *законом распределения случайной величины.*

Основными числовыми характеристиками случайной величины являются ее *математическое ожидание и дисперсия.*[11)]

Математическое ожидание случайной величины.

Математическое ожидание $M\xi$ характеризует среднее значение случайной величины.

Для дискретной случайной величины ξ, заданной таблицей (9)

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(x_j)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

,

определяется следующим образом:

$$M\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j;$$

[10)] Более строгое определение случайной величины см., например, в [3].

[11)] Имеются и другие числовые характеристики случайной величины: моменты различного порядка, мода, медиана и др. См., например, [3].

для дискретной случайной величины ξ, принимающей счетное множество значений x_j с вероятностями $p_j = P(\xi = x_j)$, $j = 1, 2, \cdots$:

$$M\xi = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j p_j;$$

для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x)$:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x).$$

Замечание. Наряду с обозначением $M\xi$ для математического ожидания используют обозначение $E\xi$.

Перечислим основные свойства математического ожидания.

1). $MC = C$, если $C = const$.

2). $M(C\xi) = C \cdot M\xi$, $C = const$.

3). $M(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} M(\xi_j)$.

4). $M(\xi\eta) = M(\xi)(M\eta)$, если ξ, η — *независимые* случайные величины.[12)]

Для *независимых в совокупности* случайных величин $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ это свойство принимает вид:

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \cdots \cdot \xi_n) = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2) \cdot \cdots M(\xi_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из свойств 2) и 3) вытекает *свойство линейности математического ожидания*:

$$M(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M(\xi_j),$$

где $\alpha_j = const$, $j = 1, 2, \cdots, n$

Дисперсия случайной величины.

[12)] Случайные величины ξ, η называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не изменяется в зависимости от того, какое значение приняла в результате эксперимента вторая из этих случайных величин. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ называются *независимыми в совокупности*, если закон распределения любой из них не изменяется в зависимости от того, какие значения приняли в результате эксперимента остальные случайные величины.

Дисперсия случайной величины характеризует величины отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания. Определение дисперсии $D\xi$ случайной величины ξ:

$$D\xi \overset{def}{=} M\left((\xi - M\xi)^2\right). \tag{13}$$

Для дискретной случайной величины ξ, заданной таблицей (9),

$$D\xi = \sum_{j=1}^{n}(x_j - M\xi)^2 p_j;$$

для дискретной случайной величины ξ, принимающей счетное множество значений x_j с вероятностями $p_j = P(\xi = x_j)$, $j = 1, 2, \cdots$:

$$M\xi = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j - M\xi)^2 p_j \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(x_j - M\xi)^2 p_j;$$

для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x)$:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2\,dF(x).$$

Из определения (13) дисперсии следует, что

$$D\xi = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{14}$$

Перечислим основные свойства дисперсии.
1). $D\xi \geqslant 0$.
2). $DC = 0$, если $C = const$.
3). $D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$, $C = const$.
4). $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$, $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta - 2cov(\xi, \eta)$, где $cov(\xi, \eta) = M\left((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right)$.
В частности, $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$, если ξ, η — *независимые* случайные величины.

Если $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ — *независимые в совокупности* случайные величины, то

$$D\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} D(\xi_j).$$

Замечание. Наряду с дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ рассматривают и ее *среднее квадратическое отклонение* σ:

$$\sigma \stackrel{def}{=} \sqrt{D\xi}.$$

ЗАДАЧА 12. В первой урне 3 белых и 4 черных шара. Шары неразличимы наощупь. Вторая урна пустая. Из первой урны наудачу берут 4 шара и спускают во вторую. Найти распределение случайной величины ξ— числа белых шаров во второй урне, ее функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

Найдем вначале закон распределения ξ. Число белых шаров во второй урне может быть равным $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 3$. Вычислим
$p_1 = P(\xi = 0) = \frac{1}{C_7^4} = \frac{1}{35}$,
$p_2 = P(\xi = 1) = \frac{3 \cdot C_4^3}{C_7^4} = \frac{12}{35}$ (Из трех белых шаров один может быть выбран тремя способами, для каждого выбора белого шара три черных из четырех $C_4^3 = C_4^1$ способами).

Аналогично
$p_3 = P(\xi = 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_4^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}$,
$p_4 = P(\xi = 3) = \frac{1 \cdot C_4^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}$.
Имеем следующую таблицу расреределения:

ξ	0	1	2	3
$p(\xi = x_j)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Легко проверяется, что $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Функцию распределения находим так же, как в задаче 11. Имеем

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \leqslant 0, \\ \frac{1}{35} & , 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{35} + \frac{12}{35} = \frac{13}{35} & , 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{13}{35} + \frac{18}{35} = \frac{31}{35} & , 2 < x \leqslant 3, \\ \frac{31}{35} + \frac{4}{35} = 1 & , 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$M\xi = \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{7}.$$

Напишем распределение случайной величины ξ^2:

ξ^2	0	1	4	9
$p(\xi^2 = x_j^2)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Для отыскания $D\xi$ используем формулу (14) $D\xi = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$:

$$D\xi = \left(0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 4 \cdot \frac{18}{35} + 9 \cdot \frac{4}{35}\right) - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}.$$

ЗАДАЧА 13. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x, & \text{если } x \in (0,\, \pi], \\ 0, & \text{если } x \notin (0,\, \pi], \end{cases} \qquad a = const.$$

Найти значение коэффициента a, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию X.

Найдем a. По формуле (11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$. Отсюда

$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} p(x)\, dx + \int\limits_{\pi}^{+\infty} p(x)\, dx = 0 + \int\limits_{0}^{\pi} a \cdot \sin x\, dx + 0 = -a \cdot \cos x|_0^{\pi} = 2a$, $a = \frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & \text{если } x \in (0,\, \pi], \\ 0, & \text{если } x \notin (0,\, \pi]. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F(x)$. Рассмотрим случаи:
1). $-\infty < x \leqslant 0$.

$$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\, dt = 0;$$

2). $0 < x \leqslant \pi$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{x} p(t)\,dt = 0 + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{x} \sin t\,dt = \frac{1 - \cos x}{2};$$

3). $\pi < x < +\infty$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} p(t)\,dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant 0, \\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 1, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание EX.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x \sin x\,dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$EX = \frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию DX.

$$DX = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

После интегрирования по частям дважды получаем

$$DX = (\frac{\pi^2}{2} - 2) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

Основные распределения.

1.*Биномиальное распределение.*
Дискретная случайная величина ξ имеет *биномиальное распределение*, если ее закон распределения имеет вид:

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1-p, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Так например, число раз появления события A в n независимых испытаниях имеет биномиальное распределение (См. стр.17).

Здесь $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1.$

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq, \quad \sigma = \sqrt{npq}.$$

2. *Распределение Пуассона.*
Дискретная случайная величина ξ имеет *распределение Пуассона*, если ее закон распределения имеет вид:

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad a \in \mathbf{R}_+.$$

$$M\xi = D\xi = a.$$

3. *Равномерное распределение.*
Непрерывная случайная величина ξ имеет *равномерное распределение*, если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & b < x < +\infty. \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4. *Нормальное распределение.*
Непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальное распределение*, если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad a \in \mathbf{R}, \ \sigma \in \mathbf{R}_+.$$

Функцию $p(x)$ называют функцией Гаусса.

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma}), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ — функция Лапласа (См.стр.18). Далее

$$M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. То, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, обозначают так: $\xi \in N(a; \sigma^2)$.

5. *Показательное распределение.*
Непрерывная случайная величина ξ имеет *показательное распределение*, если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{если } O \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. *Распределение Коши.*
Непрерывная случайная величина ξ имеет *Распределение Коши*[13)], если ее плотность распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x.$$

Математическое ожидание и дисперсия ξ не существуют.

ЗАДАЧА 14. Случайные величины X, Y и Z независимы в совокупности. При этом X и Y распределены нормально, а Z — равномерно на интервале (a, b). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины V, если: $X \in N(-1; 2)$, $Y \in N(0; 3)$, $a = 2$, $b = 4$ и $V = 2X - 5Y + Z + 18$.

[13)] Коши, Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик, член Парижской АН и Петербургской АН.

На основании свойства линейности математического ожидания и того, что для равномерного распределения Z $MZ = \frac{a+b}{2}$, а также того, что по условию $MX = -1$, $MY = 0$, и $M(18) = 18$, имеем

$$MV = 2MX - 5MY + MZ + 18 = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 + \frac{2+4}{2} + 18 = 19.$$

Далее, учитывая независимость X, Y, Z и свойства 2)–4) дисперсии, получаем:

$$DV = 2^2 DX + 5^2 DY + DZ + 0 = 4 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{250}{3}.$$

(Т.к.случайная величина Z распределена равномерно, то $DZ = \frac{(b-a)^2}{12}$).

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Пусть имеется вещественная функция $y = f(x)$ вещественного аргумента x. Пусть все значения случайной величины ξ принадлежат области определения функции f. Можно ввести случайную величину η, значения которой равны значениям функции f от значений случайной величины ξ. Случайную величину η называют функцией случайной величины ξ и обозначают $\eta = f(\xi)$.

ПРИМЕР. Пусть дискретная случайная величина ξ задана таблицей

ξ	-1	1	2	3
$p(\xi = x_j)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Составить таблицу распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Значения 2^2 и 3^2 случайная величина η принимает с теми же вероятностями, что и ξ значения 2 и 3. Для значений -1 и $+1$ случайной величины ξ η имеет одно и то же значение, равное 1. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(\eta = 1) = P((\xi = -1) \vee (\xi = 1)) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) =$$

$$\frac{1}{35} + \frac{12}{35} = \frac{13}{35}.$$

Таким образом, имеем

η	1	4	9
p_j	$\frac{13}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

.

Пусть ξ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p_\xi(x)$. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая строго монотонная на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция. Нетрудно получить, что плотность распределения $p_\eta(y)$ случайной величины $\eta = f(\xi)$ находится по формуле

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(f^{-1}(y)\right)\left|\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right|. \tag{15}$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема и кусочно монотонна, то следует для каждого промежутка монотонности написать аналоги правой части формулы (15) и результаты сложить. Например, если функция f строго монотонно возрастает на промежутке $(-\infty, a)$ и строго монотонно убывает на $(a, +\infty)$, то будем иметь

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(f_1^{-1}(y)\right)\left|\frac{df_1^{-1}(y)}{dy}\right| + p_\xi\left(f_2^{-1}(y)\right)\left|\frac{df_2^{-1}(y)}{dy}\right|, \tag{15.1}$$

где $f_1^{-1}(y)$, $f_2^{-1}(y)$ — обратные функции для f_1 и f_2 — сужений функции f на промежутки $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$ соответственно. Аналогично и в более общих случаях.

ПРИМЕР. Случайная величина X равномерно распределена на промежутке $(0, \pi)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \sin X$.

По условию плотность распределения $p_X(x)$ случайной величины X имеет вид

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}, & \text{если } x \in (0, \pi), \\ 0, & \text{если } x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Функция $y = \sin x$ отображает интервал $(0, \pi)$ на $(0, 1)$. Обозначим $p_Y(y)$ — плотность рапределения Y. Ясно, что при $y \notin (0, 1)$ $p_Y(y) = 0$. Найдем $p_Y(y)$ для промежутка $(0, 1)$. Функция $y = \sin x$ строго монотонно возрастает на промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ и строго монотонно убывает на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Для промежутка $(0, \frac{\pi}{2})$ обратной для $y = \sin x$ служит функция $x = \arcsin y$, для $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ — функция $x = \pi - \arcsin y$. Поэтому

$$p_Y(y) = p_X(\arcsin y)\left|\frac{d(\arcsin y)}{dy}\right| + p_X(\pi - \arcsin y)\left|\frac{d(\pi - \arcsin y)}{dy}\right| =$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Итак,

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{если } y \in (0, 1), \\ 0, & \text{если } y \notin (0, 1). \end{cases}$$

Контроль:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{2}{\pi}\arcsin y\,\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Замечание. Нетрудно показать,что $M(f(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)\,dx$.

Замечание. Рассматривают и функции нескольких случайных величин.(См. список литературы.)

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.

Решить задачи №№$1.k$ — $15.k$ для варианта №k.

Задача №1

Янис набирает четырехзначный номер телефона. Какова вероятность набрать его правильно с первого раза, если Янис знает, что:

1.1. номер начинается на 21, две другие цифры нечетные и одинаковых цифр в номере нет?

1.2. номер начинается с 2, все его цифры четные и их сумма равна 8?

1.3. все цифры номера нечетные и разные?

1.4. все цифры номера нечетные, две последние одинаковые и более одинаковых цифр нет?

1.5. все цифры в номере разные, причем две первые цифры нечетные, а две последние — четные?

1.6. первые две цифры номера одинаковые нечетные и более одинаковых цифр нет?

1.7. первая и третья цифры одинаковые нечетные, а вторая и четвертая четные разные?

1.8. номер читается одинаково слева направо и справа налево и в нем нет нулей?

1.9. номер начинается с цифры 5 и делится на 50?

1.10. все цифры номера нечетные и ровно три из них пятерки?

1.11. номер начинается с 1 и все цифры номера разные?

1.12. все цифры номера нечетные?

1.13. все цифры номера разные, первая 2 и одна из двух последних(но не обе) 5?

1.14. три цифры номера восьмерки, стоящие подряд и одна цифра нечетная?

1.15. в номере есть ровно две восьмерки, стоящие подряд и две другие цифры нечетные?

1.16. номер состоит из двух последовательных пар одинаковых нечетных цифр?

1.17. первые две цифры номера одинаковые и нечетные, третья и четвертая — ненулевые, четные и разные?

1.18. в номере отсутствуют нули и сумма всех его цифр равна 6?

1.19. первая цифра номера 5, последняя 0, вторая и третья — ненулевые, четные и разные?

1.20. номер начинается с нечетной цифры, и каждая следующая цифра больше предыдущей на 1?

1.21. номер не содержит нулей, и все его цифры делятся на 3?

1.22. номер не содержит нулей, и все его цифры четные и разные?

1.23. первая цифра номера 7, последняя 0, сумма второй и третьей равна семи?

1.24. номер начинается с нечетной цифры, из трех других цифр два нуля, стоящие подряд и одна четная цифра отличная от нуля?

1.25. номер состоит из трех единиц и одной нечетной цифры отличной от 1?

1.26. номер начинается с нечетной цифры и содержит не менее двух нулей?

1.27. произведение первых двух цифр номера 8, а третьей и четвертой цифр 16?

1.28. первые три цифры номера нечетные, причем ровно две из них девятки, а последняя цифра четная?

1.29. номер состоит из единицы, пятерки и двух семерок?

1.30. номер состоит из четырех различных цифр 0, 1, 2, 3 и начинается с нечетной цифры?

Задача №2

Из колоды карт в 36 листов, по 9 карт каждой из четырех мастей, одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что:

2.1. эти карты разных мастей?

2.2. эти карты "красных" мастей (бубны или червы)?

2.3. среди этих карт две карты "красных" мастей (бубны или червы) и одна масти треф?

2.4. среди этих карт ровно две картинки (туз тоже картинка)?

2.5. среди этих карт хотя бы один туз?

2.6. среди этих карт нет картинок (туз тоже картинка)?

2.7. среди этих карт одна карта "черных" мастей (пики или трефы) и две масти бубны?

2.8. все эти три карты разные по старшинству?

2.9. среди этих карт две шестерки и одна картинка (туз тоже картинка)?

2.10. эти карты семерка, дама и туз?

2.11. среди этих карт две и только две карты одной масти?

2.12. среди этих карт ровно два туза?

2.13. это три шестерки?

2.14. среди этих карт хотя бы две карты "красных" мастей (бубны или червы)?

2.15. среди этих карт нет карты масти пики?

2.16. среди этих карт хотя бы два туза?

2.17. все эти карты одной масти?

2.18. все эти карты одинаковые по старшинству?

2.19. хотя бы две из этих карт одинаковые по старшинству?

2.20. из этих карт две и только две карты одинаковые по старшинству?

2.21. это картинки, причем все различного старшинства (туз тоже картинка)?

2.22. среди этих карт только короли и тузы?

2.23. среди этих карт нет тузов?

2.24. эти три карты одного цвета (все "красные" или все "черные")?

2.25. среди этих карт два туза и один король?

2.26. эти три карты содержат пару король–дама одной масти?

2.27. эти три карты содержат пару король–дама одной масти и любого туза?

2.28. эти три карты одной масти и из них ровно одна картинка (туз тоже картинка)?

2.29. эти три карты содержат пару туз–король одной масти и еще одного туза?

2.30. среди этих карт ровно один туз и нет королей и дам?

Задача №3

3.1. На стороне BC треугольника ABC произвольно выбирается точка D и соединяется с вершиной A. Какова вероятность того, что площадь треугольника ADC будет не менее 1/4 площади треугольника ABC?

3.2. В прямоугольнике ABCD на стороне BC произвольно выбирается точка M и соединяется с вершиной A. Какова вероятность того, что площадь получившейся при этом трапеции AMCD составит не более 3/4 от площади прямоугольника ABCD?

3.3. В параллелограмме ABCD на стороне BC случайно выбирают точку M и соединяют ее с вершиной A. Какова вероятность того, что площадь трапеции AMCD составит не менее 2/3 от площади параллелограмма ABCD?

3.4. Полукруг ограничен дугой $A\ell C$ и диаметром AC. На дуге $A\ell C$ случайно выбирают точку Z, которую соединяют с точкой O — центром круга. Какова вероятность того, что площадь сектора AZO не превзойдет 1/3 площади полукруга?

3.5. Имеются две концентрические окружности с центром в точке O и радиусами $0 < r < R$. Радиус r выбран случайно. Какова вероятность того, что площадь получившегося при этом кольца составит не менее половины площади круга радиуса R?

3.6. Веер может быть развернут на угол α, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Угол выбирается случайно, но не менее $\pi/2$. Какова вероятность того, что угол разворота веера α будет удовлетворять условию $2\pi/3 \leqslant \alpha \leqslant \pi$?

3.7. В трапеции ABCD нижнее основание $AD = 2a$, верхнее — $BC = a$. На основании BC случайно выбирается точка M и соединяется с вершиной A. Какова вероятность того, что площадь треугольника ABM не превзойдет 1/9 площади трапеции ABCD?

3.8. В трапеции ABCD нижнее основание $AD = 2a$, верхнее — $BC = a$. На основании BC случайно выбирается точка M и соединяется с вершиной A. Какова вероятность того, что площадь трапеции AMCD составит не менее 4/5 площади трапеции ABCD?

3.9. В трапеции ABCD нижнее основание $AD = 2a$, верхнее — $BC = a$. На основании BC случайно выбирается точка M и соединяется с точкой N — серединой стороны AD. Какова вероятность того, что площадь трапеции NMCD составит не менее 17/45 площади трапеции ABCD?

3.10. В треугольнике ABC на стороне BC случайно выбирается точка
M и соединяется с точкой N — серединой стороны AC. Какова вероятность того, что площадь треугольника MNC составит не более 3/8 площади треугольника ABC?

3.11. В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AC и $4AM = AC$. На стороне BC случайно выбирается точка N и соединяется с точкой M. Какова вероятность того, что площадь треугольника MNC будет не менее половины и не более 5/8 площади треугольника ABC?

3.12. На стороне AB треугольника ABC случайно выбрана точка M, через которую проведена прямая, параллельная AC, до пересечения со стороной BC в точке N. Какова вероятность того, что площадь треугольника MBN составит не менее 16/25 площади треугольника ABC?

3.13. В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 случайно брошена точка M. Какова вероятность того, что точка M будет удалена от гипотенузы треугольника не более, чем на 2/5?

3.14. В квадрат ABCD со стороной a случайно брошена точка M. Какова вероятность того, что точка M будет удалена от диагонали квадрата AC не более, чем на $\sqrt{2}a/8$?

3.15. В круг радиуса R случайно бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние d до этой точки от центра круга будет удовлетворять неравенству $R/3 \leqslant d \leqslant R/2$?

3.16. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 4 и 3 соответственно. На AC случайно выбирают точку M и проводят через нее прямую, параллельную стороне BC, до пересечения с гипотенузой AB в точке N. Какова вероятность того, что сумма длин отрезков AM и AN не превзойдет 6?

3.17. В треугольнике ABC стороны $BC = 2AC = 2a$. На стороне AC случайно выбирают точку M и проводят через нее прямую, параллельную стороне AB, до пересечения со стороной BC в точке N. Какова вероятность того, что $MC + CN \leqslant 6a/5$?

3.18. В треугольнике ABC сторона $AB = 12$, угол при вершине A равен $\pi/6$. На стороне AB случайно выбирают точку M и проводят через нее прямую, параллельную стороне AC, до пересечения в точке N с высотой треугольника ABC, опущенной из вершины B. Какова вероятность того, что $MB + BN \leqslant 12$?

3.19. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB случайно выбрана точка M. Из этой точки на сторону BC опущен перпендикуляр MN. Какова вероятность того, что площадь треугольника BMN не превзойдет 1/9 площади треугольника ABC?

3.20. В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен $\pi/6$. На катете AC случайно выбирают точку M и опускают из нее перпендикуляр MN на гипотенузу AB. Какова вероятность того, что площадь треугольника AMN будет не менее 1/16 площади треугольника ABC?

3.21. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и CB равны 4 и 3 соответственно. Точка M лежит на катете CB на расстоянии 1 от точки C. На гипотенузе AB случайно выбирают точку N и соединяют ее с точкой M. Какова вероятность того, что площадь треугольника MNB не превзойдет 4?

3.22. В равностороннем треугольнике ABC на перпендикуляре, опущенном из вершины B на сторону AC, случайно выбрана точка M. Какова вероятность того, что площадь s окружности с центром в точке M вписанной в угол ABC и S — площадь треугольника ABC будут удовлетворять неравенству $s \leqslant \sqrt{3}\pi S/27$?

3.23. Имеются четыре концентрические окружности радиусов 3, 6, 9 и 12. Случайно бросают точку в наибольший из кругов. Каковы вероятности попадания в каждую из четырех зон (внутренний круг и три кольца)?

3.24. Круг разделен на 12 равных секторов, из которых 4 с денежными выигрышами, 4 — с вещевыми и 4 — проигрышные. По окружности этого круга движется точка, которая случайно останавливается на дуге, соответствующей одному из секторов. Какова вероятность 1) не проиграть; 2) получить денежный выигрыш?

3.25. На полуокружности AB случайно выбрана точка M. Какова вероятность того, что модуль разности длин дуг этой полуокружности AM и MB не превзойдет 1/4 длины всей полуокружности?

3.26. В квадрате со стороной $2a$ случайно выбирают точку O, являющуюся центром окружности радиуса $r = a/2$. Какова вероятность того, что окружность будет иметь хотя бы одну общую точку с какой-нибудь стороной квадрата?

3.27. Из круга с центром в точке O и радиусом R вырезана его четверть по радиусам OA и OB. В оставшейся части круга случайно выбирают точку M и проводят через нее дугу окружности с центром в точке O до пересечения с радиусами OA и OB в точках N и P соответственно. Какова вероятность того, что дуга NMP будет не менее 1/4 и не более 1/2 длины полной окружности радиуса R?

3.28. Из круга радиуса R с центром в точке O вырезана его четверть по радиусам OA и OB. На радиусе OA случайно выбрана точка M, через которую в оставшейся части круга проведена дуга окружности с центром в точке O до пересечения с радиусом OB в точке N. Какова вероятность того, что площадь фигуры образованной отрезками OM, ON и дугой окружности радиуса OM будет не менее 1/16 и не более 1/4 площади всего круга радиуса R?

3.29. Из круга радиуса R с центром в точке O вырезана его шестая часть по радиусам OA и OB. На радиусе OA случайно выбрана точка M, через которую в оставшейся части круга проведена дуга окружности с центром в точке O до пересечения с радиусом OB в точке N. Какова вероятность того, что площадь фигуры образованной отрезками OM, ON и дугой окружности радиуса OM будет не менее 1/24 и не более 1/6 площади всего круга радиуса R?

3.30. Из круга радиуса R с центром в точке O вырезана его треть по радиусам OA и OB. На радиусе OA случайно выбрана точка M, через которую в оставшейся части круга проведена дуга окружности с центром в точке O до пересечения с радиусом OB в точке N. Какова вероятность того, что площадь фигуры образованной отрезками OM, ON и дугой окружности радиуса OM будет не менее 1/12 и не более 1/3 площади всего круга радиуса R?

Задача №4

В прямоугольнике, вершинами которого являются точки O(0, 0), A(0, 3), B(2, 3) и C(2, 0) случайно выбирают точку $M(x, y)$. Какова вероятность того, что для x и y выполнены условия:

4.1. $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ y \geqslant x + 1. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x + y \geqslant 3, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} y \leqslant 1, \\ y \leqslant x. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} y \leqslant 2, \\ y \leqslant x + 1. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} y \leqslant x + 2, \\ y + x \leqslant 4. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} y \leqslant x + 1, \\ y \geqslant x. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 2y \leqslant x + 2, \\ y \geqslant x. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} y + 1 \geqslant x, \\ x + y \leqslant 4. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2y \leqslant x, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} y \leqslant 3x, \\ y \geqslant 1. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2y \geqslant x, \\ y \leqslant 3x. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} x + y \geqslant 1, \\ y - x \leqslant 1. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} y - x \leqslant 1, \\ x + 2y \geqslant 2. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 2x + y \geqslant 2, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x + y \geqslant 2, \\ 2y - x \geqslant 2. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x + 1 \geqslant y, \\ y \geqslant 3/2. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 2x + 1 \geqslant y, \\ y \geqslant x. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 2x + 1 \geqslant y, \\ x \leqslant 3/2. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 2x + 1 \geqslant y, \\ x \geqslant 1/2. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x + 1 \geqslant y, \\ x + y \geqslant 3. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x + 2 \geqslant y, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x + 2 \geqslant y, \\ 2x + 1 \leqslant y. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ x + y \leqslant 3. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} x + 2 \geqslant y, \\ x + 1 \leqslant y. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} x + 2 \geqslant y, \\ y + 3x \leqslant 6. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ y \leqslant x + 1. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x + 1 \geqslant y, \\ 3x \leqslant y + 3. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ y \leqslant 5/2. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ y \geqslant x. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 3x \geqslant y + 3, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$

Задача №5

5.1. Для борьбы с вредителями урожая последовательно применяют два препарата, которые действуют независимо. Первый уничтожает вредителей с вероятностью α, второй — с вероятностью β. Какова вероятность того, что 1) хотя бы один препарат окажется эффективным; 2) один и только один препарат окажется эффективным?

5.2. В команде три игрока. На соревнованиях игроки независимо друг от друга успешно выполняют свои задания с вероятностями

α_1, α_2 и α_3. Какова вероятность того, что 1) все три задания выполнены верно; 2) ровно одно задание выполнено верно; 3) хотя бы одно задание выполнено верно?

5.3. Рыбак А оставил в реке на ночь две донки, а рыбак В — одну. Вероятность поймать рыбу на каждую донку рыбака А равна α, а рыбака В — β. Какова вероятность того, что утром 1) рыбак А вытащит рыб больше чем рыбак В; 2) рыбак В вытащит рыб больше чем рыбак А?

5.4. Некто приобрел 3 электролампочки, каждая из которых является исправной с вероятностью α. Какова вероятность того, что 1) все 3 лампочки бракованные; 2) исправных лампочек не менее двух?

5.5. Качество изделия проверяется двумя контролерами независимо и признается кондиционным, если оба результата положительны. Вероятность положительного результата при проверке первым контролером равна α, а вторым — β. Случайно выбрано три изделия. Какова вероятность того, что 1) все три изделия признаны кондиционными; 2) кондиционным изделием признано не более одного?

5.6. Из-за неисправности лифт, отправляемый на пятый этаж, останавливается на пятом этаже с вероятностью $\alpha < 1$, и с равными вероятностями на четвертом и шестом. Трое пассажиров поочередно пытаются на лифте попасть на пятый этаж. Какова вероятность того, что 1) все трое пассажиров попадут на разные этажи; 2) на пятый этаж попадет не более одного пассажира?

5.7. Каждый из четырех отдыхающих независимо от других может пойти на пляж, в горы или остаться в гостинице. Отдых на пляже каждый выбирает с вероятностью α, поход в горы с вероятностью β. Какова вероятность того, что в случайно выбранный день 1) все четверо сделают одинаковый выбор; 2) не более двух из них окажется на пляже?

5.8. Лицо, посетившее магазин, приобретает телевизор фирмы А, В или С с вероятностями α, β и γ соответственно,

или вовсе не делает покупки. В магазине трое посетителей. Какова вероятность того, что 1) все трое приобретут телевизоры одной фирмы; 2) двое приобрели телевизоры различных фирм, а третий не приобрел ничего; 3) ровно один покупатель приобрел телевизор.

5.9. Лицо, посетившее магазин, с вероятностью α делает покупку.

В магазине пять посетителей. Какова вероятность того, что 1) будет сделана хотя бы одна покупка; 2) будет сделано не менее трех покупок?

5.10. В магазине имеются три отдела A, B и C. Лицо посетившее магазин, делает покупку в каждом из этих отделов, независимо от посещения остальных отделов, с вероятностями α, β и γ (соответственно). Какова вероятность того, что 1) покупка сделана хотя бы в одном отделе; 2) покупки сделаны не менее, чем в двух отделах?

5.11. В городе имеются три универмага A, B и C. Туристы при желании имеют возможность посетить только один из них. Эти универмаги турист посещает с вероятностями α, β и γ соответственно или вовсе отказывается от посещения. В город приехали три незнакомых друг с другом туриста. Какова вероятность того, что 1) все они посетят один универмаг; 2) двое из них пойдут в разные универмаги и один откажется от посещения?

5.12. Рыбак оставил в реке на ночь две донки. Вероятность поймать рыбу на каждую из них равна p. Какова вероятность того, что утром 1) он вытащит хотя бы одну рыбу; 2) хотя бы одна из донок окажется без рыбы.

5.13. У коллекционера не стене висят трое часов, которые показывают верное время независимо друг от друга с вероятностями α, β и γ. Какова вероятность того, что в тот момент, когда коллекционер смотрит на эти часы 1) ни одни их них не показывают верное время; 2) одни и только одни часы показывают верное время?

5.14. В городе, где туристы проводят неделю, в любые сутки атмосферные осадки возможны с вероятностью α. Какова вероятность того, что 1) в первые двое суток осадков не будет; 2) в течении недели будет не более одного дождливого дня?

5.15. В городе, где туристы проводят неделю, в любые сутки атмосферные осадки возможны с вероятностью α. Какова вероятность того, что 1) в последние трое суток осадков не будет; 2) дождливых суток будет не более двух?

5.16. В городе, где туристы проводят неделю, в любые сутки атмосферные осадки возможны с вероятностью α. Какова вероятность того, что 1) осадки будут только в первые или только в последние сутки; 2) будет не менее пяти суток подряд без дождя?

5.17. В городе, где туристы проводят неделю, в любые сутки атмосферные осадки возможны с вероятностью α. Какова вероятность того, что 1) только первые трое суток будут без дождя; 2) будет не менее шести суток подряд без дождя?

5.18. В некоторой группе людей голубые и карие глаза встречаются с вероятностями α и β соответственно. У остальных людей этой группы глаза серые. Случайно выбрано три человека. Какова вероятность того, что среди них 1) все имеют глаза разного цвета; 2) ровно двое имеют глаза одного цвета, причем не серые?

5.19. В некоторой группе людей голубые и карие глаза встречаются с вероятностями α и β соответственно. У остальных людей этой группы глаза серые. Случайно выбрано пять человек. Какова вероятность того, что среди них 1) все имеют глаза серого цвета; 2) ровно у одного глаза карие и не более двух голубоглазых?

5.20. В некоторой группе людей голубые и карие глаза встречаются с вероятностями α и β соответственно. У остальных людей этой группы глаза серые. Случайно выбрано пять человек. Какова вероятность того, что среди них 1) все имеют глаза одного цвета, причем не серые; 2) сероглазых не менее трех?

5.21. В некоторой группе людей голубые и карие глаза встречаются с вероятностями α и β соответственно. У остальных людей этой группы глаза серые. Случайно выбрано пять человек. Какова вероятность того, что среди них 1) ровно один имеет карие глаза; 2) не менее трех голубоглазых и ни одного кареглазого?

5.22. В некоторой группе людей голубые и карие глаза встречаются с вероятностями α и β соответственно. У остальных людей этой группы глаза серые. Случайно выбрано пять человек. Какова вероятность, что среди них 1) ровно двое имеют карие глаза; 2) не более двух голубоглазых и ни одного кареглазого?

5.23. Две сестренки Марина и Катя после завтрака моют свою посуду. Каждая моет свои тарелку и чашку. Вероятность того, что Марина разбивает каждый из предметов равна α, а Катя — β. Какова вероятность того, что 1) ничего не будет разбито; 2) будет разбит ровно один предмет?

5.24. Орудие попадает в цель при каждом выстреле с вероятностью p. Производится три выстрела. Какова вероятность того, что 1) не будет ни одного попадания; 2) будет не менее двух попаданий?

5.25. Орудие попадает в цель при каждом выстреле с вероятностью p и имеет боезапас на 6 выстрелов. Стрельба ведется до первого попадания. Какова вероятность того, что 1) орудие израсходует весь свой боезапас; 2) будет произведено не более четырех выстрелов?

5.26. Семена сорта А всходят с вероятностью α, а семена сорта В с вероятностью β. Посеяно по 5 семян каждого сорта. Какова вероятность того, что 1) взойдут все семена сорта А и ровно одно сорта В; 2) будет ровно 7 всходов, причем 4 одного из сортов и 3 другого?

5.27. Семена сорта А всходят с вероятностью α, а семена сорта В с вероятностью β. Посеяно по 5 семян каждого сорта. Какова вероятность того, что 1) взойдут все семена сорта В и ровно два сорта А; 2) взойдет хотя бы одно семя сорта А и не более двух сорта В?

5.28. Семена сорта А всходят с вероятностью α, а семена сорта В с вероятностью β. Посеяно по 5 семян каждого сорта. Какова вероятность того, что 1) взойдут ровно 5 семян, причем все одного сорта; 2) общее число всходов будет равно трем?

5.29. Стрелки А и В попадают каждый в свою мишень с вероятностями α и β соответственно. Каждый стрелок делает по своей мишени три выстрела. Какова вероятность того, что 1) каждый стрелок попадет в мишень только 1 раз; 2) у стрелка А попаданий будет на одно больше, чем у стрелка В?

5.30. Стрелки А и В попадают каждый в свою мишень с вероятностями α и β соответственно. Каждый стрелок делает по своей мишени три выстрела. Какова вероятность того, что 1) общее количество попаданий будет равно одному; 2) количество попаданий у стрелков А и В будет одинаковым и отличным от нуля?

Задача №6

В первой урне a белых шариков и b черных, во второй — c белых и d черных, в третьей — e белых и f черных. Наугад выбирается урна и из нее 2 шарика. Какова вероятность того, что они:

6.1. оба белые ($a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 1$)?

6.2. разных цветов ($a = 3$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 1$, $f = 2$)?

6.3. одного цвета ($a = 3$, $b = 7$, $c = 7$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 1$)?

6.4. одного цвета ($a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 3$, $f = 4$)?

6.5. разных цветов ($a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 1$, $f = 3$)?

6.6. оба черные ($a = 3$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 5$, $e = 7$, $f = 5$)?

6.7. оба черные ($a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 1$, $f = 1$)?

6.8. разных цветов ($a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 1$, $f = 1$)?
6.9. разных цветов ($a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 5$, $f = 1$)?
6.10. разных цветов ($a = 1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 3$)?
6.11. разных цветов ($a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 7$, $e = 3$, $f = 2$)?
6.12. оба белые ($a = 3$, $b = 8$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 2$)?
6.13. оба черные ($a = 1$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$, $e = 2$, $f = 4$)?
6.14. оба черные ($a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$, $e = 3$, $f = 4$)?
6.15. разных цветов ($a = 7$, $b = 1$, $c = 8$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$)?
6.16. оба белые ($a = 2$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 1$)?
6.17. оба белые ($a = 1$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 6$, $e = 2$, $f = 2$)?
6.18. одного цвета ($a = 3$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 3$, $e = 2$, $f = 3$)?
6.19. одного цвета ($a = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 3$)?
6.20. одного цвета ($a = 2$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 3$)?
6.21. одного цвета ($a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 2$)?
6.22. оба белые ($a = 3$, $b = 2$, $c = 7$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 2$)?
6.23. одного цвета ($a = 2$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 4$)?
6.24. одного цвета ($a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 2$, $f = 2$)?
6.25. одного цвета ($a = 2$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 3$, $e = 3$, $f = 6$)?
6.26. оба белые ($a = 7$, $b = 1$, $c = 8$, $d = 2$, $e = 1$, $f = 2$)?
6.27. оба белые ($a = 8$, $b = 1$, $c = 8$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 1$)?
6.28. оба белые ($a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 3$, $f = 1$)?
6.29. оба белые ($a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$)?
6.30. оба белые ($a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 8$, $e = 3$, $f = 1$)?

Задача №7

7.1–7.30. В предположении, что осуществилось событие задачи №6, найти условную вероятность того, что шары извлекались из первой урны.

Задача 8

Производится серия из n выстрелов по мишени с вероятностью попадания в каждом выстреле p. Предполагая, что результаты выстрелов — события независимые в совокупности, найти вероятность того, что:

8.1. будет ровно 3 попадания ($n = 5$, $p = 1/10$)?
8.2. будет ровно 4 попадания ($n = 5$, $p = 1/5$)?
8.3. будет ровно 5 попаданий ($n = 6$, $p = 2/3$)?
8.4. будет не более 2 попаданий ($n = 4$, $p = 1/10$)?
8.5. будет хотя бы 2 попадания ($n = 4$, $p = 1/4$)?

8.6. будет ровно 2 попадания ($n = 5$, $p = 1/2$)?
8.7. попаданий будет не 4 ($n = 6$, $p = 1/6$)?
8.8. попаданий будет не 4 ($n = 8$, $p = 1/2$)?
8.9. попаданий будет не 2 ($n = 5$, $p = 1/3$)?
8.10. будет не более двух попаданий ($n = 6$, $p = 1/2$)?
8.11. будет не более трех попаданий ($n = 9$, $p = 1/3$)?
8.12. будет хотя бы 2 попадания ($n = 5$, $p = 1/7$)?
8.13. будет хотя бы 2 попадания ($n = 6$, $p = 2/3$)?
8.14. будет ровно 4 попадания ($n = 7$, $p = 1/3$)?
8.15. будет ровно 4 попадания ($n = 6$, $p = 2/5$)?
8.16. будет ровно 3 попадания ($n = 5$, $p = 1/6$)?
8.17. будет ровно 5 попадания ($n = 6$, $p = 4/5$)?
8.18. будет не более четырех попаданий ($n = 6$, $p = 1/2$)?
8.19. будет не более пяти попаданий ($n = 6$, $p = 1/3$)?
8.20. будет не более одного попадания ($n = 4$, $p = 1/10$)?
8.21. будет не более одного попадания ($n = 5$, $p = 1/3$)?
8.22. будет ровно 3 попадания ($n = 4$, $p = 3/8$)?
8.23. будет ровно 2 попадания ($n = 4$, $p = 4/5$)?
8.24. будет не менее двух попаданий ($n = 5$, $p = 3/4$)?
8.25. будет не более двух попаданий ($n = 5$, $p = 1/3$)?
8.26. будет не более четырех попаданий ($n = 6$, $p = 1/3$)?
8.27. будет не более одного попадания ($n = 8$, $p = 1/2$)?
8.28. будет не более двух попаданий ($n = 4$, $p = 2/5$)?
8.29. будет не более одного попадания ($n = 5$, $p = 2/5$)?
8.30. будет хотя бы 2 попадания ($n = 6$, $p = 1/4$)?

Задача №9

Посажено n семян, всхожесть которых оценивается вероятностью p. Используя локальную теорему Муавра–Лапласа приближенно вычислить вероятность того, что будет ровно m всходов если:

9.1. $n = 514$, $m = 270$, $p = 27/52$.
9.2. $n = 505$, $m = 195$, $p = 19/49$.
9.3. $n = 493$, $m = 298$, $p = 17/28$.
9.4. $n = 484$, $m = 223$, $p = 8/17$.
9.5. $n = 462$, $m = 334$, $p = 37/51$.
9.6. $n = 523$, $m = 229$, $p = 24/55$.
9.7. $n = 545$, $m = 347$, $p = 26/41$.
9.8. $n = 506$, $m = 209$, $p = 21/50$.
9.9. $n = 496$, $m = 233$, $p = 19/40$.
9.16. $n = 463$, $m = 318$, $p = 33/49$.
9.17. $n = 544$, $m = 253$, $p = 11/24$.
9.18. $n = 519$, $m = 245$, $p = 6/13$.
9.19. $n = 492$, $m = 140$, $p = 8/27$.
9.20. $n = 499$, $m = 137$, $p = 16/59$.
9.21. $n = 483$, $m = 135$, $p = 11/40$.
9.22. $n = 483$, $m = 310$, $p = 37/58$.
9.23. $n = 469$, $m = 315$, $p = 35/53$.
9.24. $n = 450$, $m = 311$, $p = 30/43$.

9.10. $n = 459$, $m = 322$, $p = 19/27$.
9.11. $n = 524$, $m = 326$, $p = 5/8$.
9.12. $n = 470$, $m = 148$, $p = 5/16$.
9.13. $n = 466$, $m = 314$, $p = 31/45$.
9.14. $n = 510$, $m = 141$, $p = 11/41$.
9.15. $n = 485$, $m = 334$, $p = 35/51$.
9.25. $n = 549$, $m = 232$, $p = 25/58$.
9.26. $n = 471$, $m = 320$, $p = 2/3$.
9.27. $n = 481$, $m = 138$, $p = 7/25$.
9.28. $n = 471$, $m = 353$, $p = 31/42$.
9.29. $n = 520$, $m = 366$, $p = 5/7$.
9.30. $n = 457$, $m = 229$, $p = 1/2$.

Задача №10

Посажено n семян, всхожесть которых оценивается вероятностью p. Используя интегральную теорему Муавра–Лапласа приближенно оценить вероятность того, что m, число всходов, будет удовлетворять неравенству $m_1 \leqslant m < m_2$ если:

10.1. $n = 460$, $m_1 = 181$, $m_2 = 356$, $p = 2/5$.
10.2. $n = 451$, $m_1 = 301$, $m_2 = 424$, $p = 20/29$.
10.3. $n = 462$, $m_1 = 95$, $m_2 = 325$, $p = 32/45$.
10.4. $n = 515$, $m_1 = 282$, $m_2 = 354$, $p = 11/16$.
10.5. $n = 482$, $m_1 = 203$, $m_2 = 287$, $p = 25/42$.
10.6. $n = 453$, $m_1 = 233$, $m_2 = 264$, $p = 15/28$.
10.7. $n = 498$, $m_1 = 158$, $m_2 = 277$, $p = 3/10$.
10.8. $n = 479$, $m_1 = 88$, $m_2 = 225$, $p = 21/43$.
10.9. $n = 487$, $m_1 = 107$, $m_2 = 194$, $p = 17/41$.
10.10. $n = 530$, $m_1 = 179$, $m_2 = 349$, $p = 37/56$.
10.11. $n = 505$, $m_1 = 67$, $m_2 = 235$, $p = 21/47$.
10.12. $n = 510$, $m_1 = 324$, $m_2 = 478$, $p = 29/47$.
10.13. $n = 454$, $m_1 = 220$, $m_2 = 401$, $p = 19/40$.
10.14. $n = 537$, $m_1 = 196$, $m_2 = 202$, $p = 21/58$.
10.15. $n = 456$, $m_1 = 245$, $m_2 = 324$, $p = 21/41$.
10.16. $n = 480$, $m_1 = 275$, $m_2 = 305$, $p = 29/44$.
10.17. $n = 500$, $m_1 = 151$, $m_2 = 272$, $p = 15/46$.
10.18. $n = 511$, $m_1 = 211$, $m_2 = 361$, $p = 31/43$.
10.19. $n = 495$, $m_1 = 128$, $m_2 = 286$, $p = 31/52$.
10.20. $n = 465$, $m_1 = 179$, $m_2 = 390$, $p = 7/19$.
10.21. $n = 491$, $m_1 = 169$, $m_2 = 366$, $p = 8/23$.
10.22. $n = 468$, $m_1 = 192$, $m_2 = 265$, $p = 33/59$.
10.23. $n = 469$, $m_1 = 130$, $m_2 = 298$, $p = 35/54$.
10.24. $n = 466$, $m_1 = 90$, $m_2 = 157$, $p = 13/41$.
10.25. $n = 475$, $m_1 = 165$, $m_2 = 212$, $p = 15/43$.
10.26. $n = 511$, $m_1 = 176$, $m_2 = 345$, $p = 33/49$.
10.27. $n = 482$, $m_1 = 34$, $m_2 = 243$, $p = 1/2$.

10.28. $n = 467,\ m_1 = 174,\ m_2 = 226,\ p = 19/55.$
10.29. $n = 495,\ m_1 = 318,\ m_2 = 330,\ p = 9/14.$
10.30. $n = 467,\ m_1 = 254,\ m_2 = 311,\ p = 14/25.$

Задача №11

В корзине лежат n_1 красных и n_2 зеленых яблок. Янис случайным образом выбирает m $(0 < m < n_1 + n_2)$ яблок и кладет их в вазу. Количество красных яблок в вазе — случайная величина X. Написать ряд распределения X, построить график функции распределения X, найти MX и DX, если:

11.1. $n_1 = 2, n_2 = 3, m = 2.$
11.2. $n_1 = 2, n_2 = 4, m = 3.$
11.3. $n_1 = 3, n_2 = 2, m = 2.$
11.4. $n_1 = 3, n_2 = 2, m = 3.$
11.5. $n_1 = 3, n_2 = 4, m = 2.$
11.6. $n_1 = 3, n_2 = 4, m = 3.$
11.7. $n_1 = 3, n_2 = 4, m = 4.$
11.8. $n_1 = 3, n_2 = 4, m = 5.$
11.9. $n_1 = 5, n_2 = 3, m = 2.$
11.10. $n_1 = 4, n_2 = 3, m = 3.$
11.11. $n_1 = 4, n_2 = 3, m = 4.$
11.12. $n_1 = 4, n_2 = 3, m = 5.$
11.25. $n_1 = 3, n_2 = 3, m = 3.$
11.26. $n_1 = 3, n_2 = 3, m = 4.$
11.27. $n_1 = 3, n_2 = 3, m = 5.$
11.13. $n_1 = 2, n_2 = 5, m = 3.$
11.14. $n_1 = 2, n_2 = 5, m = 4.$
11.15. $n_1 = 2, n_2 = 5, m = 5.$
11.16. $n_1 = 3, n_2 = 5, m = 3.$
11.17. $n_1 = 3, n_2 = 5, m = 4.$
11.18. $n_1 = 3, n_2 = 5, m = 5.$
11.19. $n_1 = 4, n_2 = 2, m = 2.$
11.20. $n_1 = 4, n_2 = 2, m = 3.$
11.21. $n_1 = 4, n_2 = 2, m = 4.$
11.22. $n_1 = 6, n_2 = 2, m = 4.$
11.23. $n_1 = 6, n_2 = 2, m = 5.$
11.24. $n_1 = 6, n_2 = 2, m = 6.$
11.28. $n_1 = 6, n_2 = 6, m = 3.$
11.29. $n_1 = 6, n_2 = 6, m = 4.$
11.30. $n_1 = 6, n_2 = 6, m = 5.$

Задача №12

Плотность вероятности случайной величины X задана соотношением $f(x) = \begin{cases} ax^\alpha, & \text{если } x \in (\beta_1, \beta_2), \\ 0, & \text{если } x \in (-\infty, \beta_1) \cup (\beta_2, +\infty). \end{cases}$ Найти a, $F(x)$ — функцию распределения случайной величины X, построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$, вычислить MX и DX, если:

12.1–12.10.
$\alpha = 2.$
12.1. $\beta_1 = -1, \beta_2 = 2.$
12.2. $\beta_1 = -2, \beta_2 = 3.$
12.3. $\beta_1 = -2, \beta_2 = 1.$
12.4. $\beta_1 = -3, \beta_2 = 2.$
12.5. $\beta_1 = -3, \beta_2 = 3.$

12.11–12.20.
$\alpha = 3.$
12.11. $\beta_1 = 0, \beta_2 = 2.$
12.12. $\beta_1 = 0, \beta_2 = 4.$
12.13. $\beta_1 = -2, \beta_2 = 0.$
12.14. $\beta_1 = -4, \beta_2 = 0.$
12.15. $\beta_1 = 1, \beta_2 = 3.$

12.21–12.30.
$\alpha = -4, \beta_2 = +\infty.$
12.21. $\beta_1 = 1.$
12.22. $\beta_1 = 2.$
12.23. $\beta_1 = 3.$
12.24. $\beta_1 = 4.$
12.25. $\beta_1 = 5.$

12.6. $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = 2$.
12.7. $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = 4$.
12.8. $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -3$.
12.9. $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -1$.
12.10. $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = 1$.
12.16. $\beta_1 = -3$, $\beta_2 = -1$.
12.17. $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 5$.
12.18. $\beta_1 = -5$, $\beta_2 = -1$.
12.19. $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 4$.
12.20. $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = -2$.
12.26. $\beta_1 = 6$.
12.27. $\beta_1 = 7$.
12.28. $\beta_1 = 8$.
12.29. $\beta_1 = 9$.
12.30. $\beta_1 = 10$.

Задача №13

Случайная величина $X \in N(1;2)$. Случайная величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = kX + b$. Найти $g(y)$ — плотность вероятности случайной величины Y, MY, $DY = \sigma_Y^2$. С помощью таблиц приближенно вычислить $p = P\{|Y - MY| < \delta\sigma_Y\}$ и $P\{B\}$, если:

13.1. $k = 2$, $b = -1$, $\delta = 0{,}9$, $B = \{Y < 1\} \cup \{Y \geqslant 8\}$.
13.2. $k = 3$, $b = -1$, $\delta = 1{,}0$, $B = \{1 \leqslant Y < 20\}$.
13.3. $k = 3$, $b = 2$, $\delta = 1{,}1$, $B = \{Y < -1{,}5\} \cup \{Y \geqslant 5\}$.
13.4. $k = -1$, $b = -1$, $\delta = 1{,}2$, $B = \{-2 \leqslant Y < 40\}$.
13.5. $k = 2$, $b = -3$, $\delta = 1{,}3$, $B = \{Y < -6\} \cup \{Y \geqslant 0{,}5\}$.
13.6. $k = 2$, $b = -4$, $\delta = 1{,}4$, $B = \{-4 \leqslant Y < 10\}$.
13.7. $k = -2$, $b = 3$, $\delta = 1{,}5$, $B = \{-1 \leqslant Y < 22\}$.
13.8. $k = -5$, $b = 6$, $\delta = 1{,}6$, $B = \{-1 \leqslant Y < 18\}$.
13.9. $k = 7$, $b = -5$, $\delta = 1{,}7$, $B = \{Y < 3{,}2\}$.
13.10. $k = 4$, $b = -2$, $\delta = 1{,}8$, $B = \{-20 \leqslant Y < 3{,}5\}$.
13.11. $k = 4$, $b = -5$, $\delta = 1{,}9$, $B = \{-30 \leqslant Y < 0{,}5\}$.
13.12. $k = 4$, $b = 6$, $\delta = 2{,}0$, $B = \{-1 \leqslant Y < 90\}$.
13.13. $k = -4$, $b = 3$, $\delta = 2{,}1$, $B = \{-6 \leqslant Y < 70\}$.
13.14. $k = -4$, $b = 2$, $\delta = 2{,}2$, $B = \{-8 \leqslant Y < 60\}$.
13.15. $k = -4$, $b = 1$, $\delta = 2{,}3$, $B = \{-4{,}5 \leqslant Y < 60\}$.
13.16. $k = 2$, $b = 1$, $\delta = 2{,}4$, $B = \{-6 \leqslant Y < 70\}$.
13.17. $k = 2$, $b = 4$, $\delta = 2{,}5$, $B = \{-70 \leqslant Y < 9\}$.
13.18. $k = -2$, $b = 4$, $\delta = 2{,}6$, $B = \{-60 \leqslant Y < 4\}$.
13.19. $k = -2$, $b = 1$, $\delta = 2{,}7$, $B = \{-3 \leqslant Y < 40\}$.
13.20. $k = 5$, $b = 1$, $\delta = 0{,}95$, $B = \{-1 \leqslant Y < 6\} \cup \{Y \geqslant 20\}$.
13.21. $k = 5$, $b = -1$, $\delta = 0{,}85$, $B = \{-10 \leqslant Y < 50\}$.
13.22. $k = 6$, $b = -3$, $\delta = 1{,}15$, $B = \{-10 \leqslant Y < 0\} \cup \{Y \geqslant 3\}$.
13.23. $k = 6$, $b = -4$, $\delta = 2{,}25$, $B = \{-1 \leqslant Y < 42\}$.
13.24. $k = 6$, $b = 3$, $\delta = 2{,}35$, $B = \{-10 \leqslant Y < 66\}$.
13.25. $k = 6$, $b = -2$, $\delta = 2{,}45$, $B = \{-8 \leqslant Y < 4\} \cup \{Y \geqslant 25\}$.
13.26. $k = 6$, $b = -9$, $\delta = 2{,}55$, $B = \{-70 \leqslant Y < -3\} \cup \{Y \geqslant 18\}$.
13.27. $k = 6$, $b = -7$, $\delta = 0{,}65$, $B = \{-11 \leqslant Y < 0\} \cup \{Y \geqslant 24\}$.

13.28. $k = 6,\ b = 2,\ \delta = 0{,}55\ ,\ B = \{0 \leqslant Y < 8\} \cup \{Y \geqslant 18\}$

13.29. $k = 6,\ b = -1,\ \delta = 0{,}75\ ,\ B = \{-2 \leqslant Y < 5\} \cup \{Y \geqslant 30\}$.

13.30. $k = 6,\ b = 4,\ \delta = 2{,}75\ ,\ B = \{0 \leqslant Y < 10\} \cup \{Y \geqslant 25\}$.

Задача №14

Плотность вероятности случайной величины X задана соотношением $f(x) = \begin{cases} kx, & \text{если } x \in (a,b), \\ 0, & \text{если } x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \end{cases}$ Случайная величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = X^2$. Найти $g(y)$ — плотность вероятности случайной величины Y, $G(y)$ — функцию распределения случайной величины Y, MY, DY, $p = P\,(Y < MY/3)$, если:

14.1. $k = 1/2,\quad a = 0,\quad b = 2.$
14.2. $k = 2/9,\quad a = 0,\quad b = 3.$
14.3. $k = 1/8,\quad a = 0,\quad b = 4.$
14.4. $k = 2/25,\quad a = 0,\quad b = 5.$
14.5. $k = 1/18,\quad a = 0,\quad b = 6.$
14.6. $k = 2/49,\quad a = 0,\quad b = 7.$
14.7. $k = 1/32,\quad a = 0,\quad b = 8.$
14.8. $k = 2/81,\quad a = 0,\quad b = 9.$
14.9. $k = 1/50,\quad a = 0,\quad b = 10.$
14.10. $k = -1/2,\quad a = -2,\quad b = 0.$
14.11. $k = -2/9,\quad a = -3,\quad b = 0.$
14.12. $k = -1/8,\quad a = -4,\quad b = 0.$
14.13. $k = -2/25,\quad a = -5,\quad b = 0.$
14.14. $k = -1/18,\quad a = -6,\quad b = 0.$
14.15. $k = -2/49,\quad a = -7,\quad b = 0.$
14.16. $k = -1/32,\quad a = -8,\quad b = 0.$
14.17. $k = -2/81,\quad a = -9,\quad b = 0.$
14.18. $k = -1/50,\quad a = -10,\quad b = 0.$
14.19. $k = 1/4,\quad a = 1,\quad b = 3.$
14.20. $k = -1/4,\quad a = -3,\quad b = -1.$
14.21. $k = 1/12,\quad a = 1,\quad b = 5.$
14.22. $k = -1/12,\quad a = -5,\quad b = -1.$
14.23. $k = 1/24,\quad a = 1,\quad b = 7.$
14.24. $k = -1/24,\quad a = -7,\quad b = -1.$
14.25. $k = 1/6,\quad a = 2,\quad b = 4.$
14.26. $k = -1/6,\quad a = -4,\quad b = -2.$
14.27. $k = 2/5,\quad a = 2,\quad b = 3.$
14.28. $k = 2/21,\quad a = 2,\quad b = 5.$
14.29. $k = 2/15,\quad a = 1,\quad b = 4.$
14.30. $k = 2/3,\quad a = 1,\quad b = 2.$

Задача №15

Случайные величины X, Y и Z независимы в совокупности. При этом X и Y распределены нормально, а Z — равномерно на интервале (a, b). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины V, если:

15.1. $X \in N(-1; 2)$, $Y \in N(0; 3)$, $a = 2$, $b = 4$,
$V = 2X - 3Y + Z - 4$.

15.2. $X \in N(0; 2)$, $Y \in N(-1; 3)$, $a = 2$, $b = 6$,
$V = -2X + 3Y + Z - 5$.

15.3. $X \in N(-2; 1)$, $Y \in N(-3; 2)$, $a = -2$, $b = 0$,

$V = 2X - 3Y - Z + 4$.

15.4. $X \in N(-2;2)$, $Y \in N(-1;3)$, $a = 0$, $b = 2$, $V = -2X - 3Y + Z + 5$.

15.5. $X \in N(-3;2)$, $Y \in N(0;3)$, $a = -1$, $b = 3$, $V = -X + 2Y - Z + 6$.

15.6. $X \in N(-2;3)$, $Y \in N(-2;6)$, $a = -1$, $b = 5$, $V = X - 2Y - Z + 6$.

15.7. $X \in N(-1;4)$, $Y \in N(-2;4)$, $a = -2$, $b = 4$; $V = X - 2Y + Z + 6$.

15.8. $X \in N(4;1)$, $Y \in N(2;2)$, $a = -3$, $b = 1$, $V = -X - 2Y + Z + 6$.

15.9. $X \in N(-2;3)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -5$, $b = -1$, $V = 2X + 5Y - Z - 8$.

15.10. $X \in N(-2;3)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -5$, $b = -1$, $V = -2X + 5Y - Z + 8$.

15.11. $X \in N(-2;3)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -5$, $b = -1$, $V = 2X - 5Y - Z - 8$.

15.12. $X \in N(-5;1)$, $Y \in N(0;3)$, $a = -4$, $b = 2$, $V = -3X + 4Y + Z - 12$.

15.13. $X \in N(-5;1)$, $Y \in N(0;3)$, $a = -4$, $b = 2$, $V = 3X - 4Y + Z + 12$.

15.14. $X \in N(-5;1)$, $Y \in N(0;3)$, $a = -4$, $b = 2$, $V = X - 4Y + 2Z - 15$.

15.15. $X \in N(-5;1)$, $Y \in N(-1;5)$, $a = -6$, $b = 2$, $V = X + Y + Z + 1$.

15.16. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -2$, $b = 6$, $V = 2X - 3Y + 2Z - 9$.

15.17. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -2$, $b = 6$, $V = -2X + 3Y + 2Z - 3$.

15.18. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(-1;2)$, $a = -2$, $b = 6$, $V = 2X + 3Y - 2Z + 9$.

15.19. $X \in N(-6;2)$, $Y \in N(2;1)$, $a = 2$, $b = 6$, $V = 5X + 6Y - 2Z - 1$.

15.20. $X \in N(-6;2)$, $Y \in N(2;1)$, $a = 2$, $b = 6$, $V = -5X + 6Y + 2Z - 1$.

15.21. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(0;4)$, $a = 2$, $b = 8$,
$V = 4X - 3Y + 7Z + 5$.

15.22. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(0;4)$, $a = 2$, $b = 8$,
$V = -4X - 3Y + 7Z - 5$.

15.23. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(0;4)$, $a = 2$, $b = 8$,
$V = 2X - 5Y + 3Z + 6$.

15.24. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(0;4)$, $a = 2$, $b = 8$,
$V = -2X + 5Y + 3Z + 6$.

15.25. $X \in N(6;2)$, $Y \in N(0;4)$, $a = 2$, $b = 8$,
$V = -2X + 5Y - 3Z - 6$.

15.26. $X \in N(-2;6)$, $Y \in N(4;4)$, $a = 10$, $b = 16$,
$V = 3X - 7Y + Z - 11$.

15.27. $X \in N(-2;6)$, $Y \in N(4;4)$, $a = 10$, $b = 16$,
$V = -3X + 7Y + Z - 11$.

15.28. $X \in N(-2;6)$, $Y \in N(4;2)$, $a = -16$, $b = -10$,
$V = -X + 3Y - 2Z + 15$.

15.29. $X \in N(-2;6)$, $Y \in N(4;2)$, $a = -16$, $b = -10$,
$V = X - 3Y + 2Z - 15$.

15.30. $X \in N(-2;6)$, $Y \in N(4;2)$, $a = -16$, $b = -10$,
$V = X - 3Y - 2Z + 15$.

Рекомендуемая литература

1. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. — М., Наука: 1969.
2. Н. Я. Виленкин. Популярная комбинаторика. — М., Наука: 1975.
3. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. — М., Наука: 1965.
4. Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас Вероятность. — М., Мир: 1969.
5. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей. — М., Наука: 1973.
6. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Прикладные задачи теории вероятностей. — М., Радио и связь: 1983.
7. В. С. Лютикас. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей: Учеб. пособие для 10–11 кл. сред. шк. — М., Просвещение: 1990.
8. Г. И. Агапов. Задачник по теории вероятностей. — М., Высшая школа: 1994.
9. Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — Л., Изд-во ЛГУ: 1967.
10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ под ред. А. А. Свешникова. — М., Наука: 1970.
11. В.Е.Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М., Высш. школа: 1979.

*Приложение*1. Функция Гаусса $\varphi(z) = 1/\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$.

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2207
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0045

*Приложение*1. Функция Гаусса $\varphi(z) = 1/\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$ (Продолжение).

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0019	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	002	0001	0001

*Приложение*2. Функция Лапласа $\Phi(z) = 1/\sqrt{2\pi}\, \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv$

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	1026	1064	1103	1141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	583	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	4015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177

*Приложение*2. Функция Лапласа (Продолжение 1.)

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	315	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	860	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	759	559	296	969	581	133	625	060	437	758
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	759	559	296	969	581	133	625	060	437	758
2,4	918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	493	309	128
2,5	937	939	941	942	944	946	947	949	950	952
	903	634	323	969	574	139	664	151	600	612
2,6	953	954	956	957	958	959	960	962	963	964
	388	729	035	308	547	754	930	074	189	274
2,7	965	966	967	968	969	970	971	971	972	973
	330	358	359	333	280	202	099	972	821	646
2,8	0,4 974	975	975	976	977	978	978	979	980	980
	449	229	988	726	443	140	818	476	116	738
2,9	981	981	982	983	983	984	984	985	985	986
	342	929	498	052	589	111	618	110	588	051
3,0	986	986	987	987	988	988	988	989	989	989
	501	938	361	772	171	558	933	297	650	992

<u>УКАЗАНИЕ.</u> Для значений $2.2 \leq z \leq 5.0$ под основными четырьмя десятичными цифрами функции $\Phi(z)$ даются мелким шрифтом еще три десятичных цифры следующих разрядов. Например, при $z = 2.51$ получаем, что $\Phi(2.51) \quad = 0.4939634$.

Приложение2. (Продолжение 2.)

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	990 324	990 646	990 957	991 260	991 553	991 836	992 112	992 378	992 636	992 886
3,2	993 129	993 363	993 590	993 810	994 024	994 230	994 429	994 623	994 810	994 991
3,3	995 166	995 335	995 499	995 658	995 811	995 959	996 103	996 242	996 376	996 505
3,4	996 631	996 752	996 869	996 982	997 091	997 197	997 299	997 398	997 493	997 585
3,5	997 674	997 759	997 842	997 922	997 999	998 074	998 146	998 215	998 282	998 347
3,6	998 409	998 469	998 527	998 583	998 637	998 689	998 739	998 787	998 834	998 879
3,7	998 922	998 964	999 004	999 043	999 080	999 116	999 150	999 184	999 216	999 247
3,8	999 274	999 305	999 333	999 359	999 385	999 409	999 433	999 456	999 478	999 499
3,9	999 519	999 539	999 557	999 575	999 593	999 609	999 6253	999 641	999 655	999 670
4,0	999 683	999 696	999 709	999 721	999 733	999 744	999 755	999 765	999 775	999 784
4,1	999 793	999 802	999 811	999 819	999 826	999 834	999 841	999 848	999 854	999 861
4,2	999 867	999 872	999 878	999 883	999 888	999 893	999 898	999 902	999 907	999 911
4,3	999 915	999 918	999 922	999 925	999 929	999 932	999 935	999 938	999 941	999 943
4,4	999 946	999 948	999 951	999 953	999 955	999 957	999 959	999 961	999 963	999 964
4,5	999 966	999 968	999 969	999 971	999 972	999 973	999 974	999 976	999 977	999 978
5,0	0,4999 997									

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 10.01.2002 г. Формат бумаги 60X90 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 3,5 п.л. Тираж 160 экз. Заказ 2235.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 26.