САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 4.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2002

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА. Часть 4.

Методические указания и контрольные задания

Санкт-Петербург
2002

Утверждено на заседании
кафедры общей математики и информатики
в качестве методических указаний
для студентов естественных факультетов

Авторы: А.К.Пономаренко, В.Ю.Сахаров, Т.В.Степанова,
П.К.Черняев

Р е ц е н з е н т ы : докт.физ.-мат.наук, зав.каф., проф. С.А. Назаров (Гос. морск. акад. им.адм. С.О. Макарова), докт.физ.-мат.наук, проф. А.В. Проскура (Гос. морск. техн. ун-т).

Настоящее пособие является сокращенным и частично измененным переизданием книги [15].

Пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. В нем представлены задачи и теоретические сведения по дифференциальным уравнениям первого и высших порядков, линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и линейным системам. Уделяется внимание и составлению дифференциальных уравнений для конкретных задач из области естествознания, в частности химии.

Необходимые теоретические сведения приводятся в каждом параграфе. Типовые задачи даются с решениями и иллюстрациями.

При написании пособия были использованы задачи из известных сборников, указанных в списке литературы, но большинство задач составлены авторами.

Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Окончания примеров обозначены символом □.

Содержание

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Если искомая функция $y = y(x)$ — функция одного аргумента x, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Если же уравнение содержит частные производные (неизвестная функция является функцией нескольких аргументов), то его называют *дифференциальным уравнением с частными производными.* А если в качестве неизвестной функции выступает вектор-функция, то соответствующее уравнение фактически задает *систему дифференциальных уравнений.*

Например: 1) $\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$, 2) $(y''')^2 + y' = x\sin x$,
3) $\left(x^2y^2 - 1\right)dx + 2xy^3dy = 0$, 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$,
5) $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, где $\mathbf{y}(t), \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ при фиксированных значениях t, $\mathbf{A}$ — матрица размером $n \times n$.

В первых трех примерах искомой является функция $y = y(x)$ — это обыкновенные дифференциальные уравнения. В четвертом примере неизвестное — функция $u = u(x, y, z)$. Это уравнение с частными производными. В пятом примере уравнение задает систему n дифференциальных уравнений.

В данном пособии будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения и системы из них.

Наивысший порядок производных (дифференциалов) неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.* Так, 1), 3) — примеры обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в примере 2) приведено дифференциальное уравнение третьего порядка.

Пусть $y = y(x)$ — искомая вещественная функция вещественного аргумента x. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка таков:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$*, $a < b$, вместе со своими производными до n-го порядка включительно и такая, что под-

* Знаки $\langle$ и $\rangle$ обозначают как включение, так и исключение соответствующего конца промежутка, т. е. промежуток $\langle a, b\rangle$ может быть любым из четырех возможных: (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$.

становка этой функции $y = \varphi(x)$ в уравнение (1) обращает его в тождество относительно x на $\langle a, b\rangle$, т. е. для любого $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

В этом определении величины a и b могут принимать и несобственные значения $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Пример 1.

Проверить что функция $y = \sin x + \cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е.

Дифференцируя функцию $y = \sin x + \cos x$ дважды, получаем

$$y' = \cos x - \sin x, \quad y'' = -\sin x - \cos x.$$

Подставляя выражения y и y'' в исходное дифференциальное уравнение, имеем

$$-\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0$$

для любого x из интервала $(-\infty, +\infty)$. Это и доказывает, что функция $y = \sin x + \cos x$ есть решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. □

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: в общей форме

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

где производная может быть представлена как отношение дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{4}$$

Так как с точки зрения геометрии координаты x и y равноправны, то наряду с уравнением $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ будем рассматривать при $f(x, y) \neq 0$ уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{5}$$

Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{6}$$

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (3) не содержит y, получается дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x). \tag{7}$$

Вся совокупность решений уравнения (7) дается формулой

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{8}$$

где $\int$ означает фиксированную первообразную, а C — произвольную постоянную.

Функция y, определенная равенством (8) и содержащая произвольную постоянную, называется *общим решением дифференциального уравнения* (7). Эта функция задает однопараметрическое семейство решений уравнения (7).

Если $f(x)$ — непрерывная на некотором интервале (a,b) функция и точка $x = x_0$ принадлежит этому интервалу, то для любого вещественного значения y_0 можно найти решение уравнения (7), удовлетворяющее *начальному условию*, или *условию Коши**,

$$y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

где y_0 — заданное число.
Это решение имеет следующий вид:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0. \tag{10}$$

Начальной задачей (задачей Коши) для уравнения первого порядка (3) называют задачу нахождения решения $y = y(x)$, удовлетворяющего дополнительно начальному условию (9) (другая запись этого условия такова: $y\big|_{x=x_0} = y_0$).

* О.Л. Коши (A.L. Cauchy, 1789—1857) — французский математик.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy.

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, *где функция* $f(x, y)$ *определена на прямоугольнике* $G = \{(x, y) \mid x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ (x_0, $y_0 \in \mathbf{R}$, a, b — *положительные числа*). *Если выполнены условия:*

а) $f(x, y)$ *есть непрерывная на* G *функция,*

б) $f(x, y)$ *имеет ограниченную там частную производную* $\frac{\partial f}{\partial y}$,

то имеется интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ (h – *наименьшее из чисел* a *и* $\frac{b}{M}$, *где* $M = \max\limits_{G}\{|f(x, y)|\}$),

на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ *данного уравнения, удовлетворяющее условию* $\varphi(x_0) = y_0$. (Теорема при более общих условиях доказана в монографии [4].)

Замечание. Если условия а) и б) выполнены в некоторой области D, содержащей в себе прямоугольник G, то полученное решение можно продолжить до значений x, сколь угодно близких к значениям, соответствующим границе D ([4]).

Теорема дает достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для уравнения $y' = f(x, y)$, но эти условия не являются необходимыми [7].

Общим решением дифференциального уравнения (3) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{11}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что:
1) она удовлетворяет уравнению (3) при любых допустимых значениях переменной C;
2) каково бы ни было начальное условие (9), существует такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному условию (9), т. е. $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

При этом предполагается, что точка (x_0, y_0) принадлежит области, где выполняются условия существования и единственности решения.

Частным решением дифференциального уравнения (3) называется решение, полученное из общего решения (11) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C (включая и $C = +\infty$, $C = -\infty$).

Геометрическая интерпретация этого определения состоит в том, что общее решение (11) определяет, как и общее решение (8) в случае уравнения (7), семейство интегральных кривых уравнения (3). Такое семейство может определяться и уравнением вида

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{или, в частности,} \quad \psi(x, y) = C, \tag{12}$$

задающим неявную функцию y, т. е. *общим интегралом** дифференциального уравнения.

Пример 2.

Проверить, что функция $y = Ce^{-x}$ есть общее решение уравнения $y' + y = 0$, и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0} = 2$.

Р е ш е н и е.

Имеем $y' = -Ce^{-x}$. Подставляя в данное уравнение выражения y и y', получаем $-Ce^{-x} + Ce^{-x} \equiv 0$, т. е. функция $y = Ce^{-x}$ является решением данного уравнения при любых значениях постоянной C.

Проверим, что это общее решение. Возьмем произвольное начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ и подставим x_0 вместо x, y_0 вместо y в равенство $y = Ce^{-x}$. Получим $y_0 = Ce^{-x_0}$, откуда $C = y_0e^{x_0}$, и соответствующее частное решение имеет вид $y = y_0e^{x_0 - x}$.

При $x_0 = 0$ и $y_0 = 2$ получаем, что $y = 2e^{-x}$ и есть искомое частное решение.

Найденное общее решение определяет семейство интегральных кривых, которыми являются графики показательных функций (рис . 1, $y = 0$ — тоже интегральная кривая!). Искомое частное решение есть интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(0, 2)$. □

Пример 3.

Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$x^2 + Cy^2 = 2y. \tag{13}$$

Р е ш е н и е.

Дифференцируем уравнение (13) по x, считая y функцией от x:

$$2x + 2Cyy' = 2y',$$

---

* Общее решение — частный случай общего интеграла.

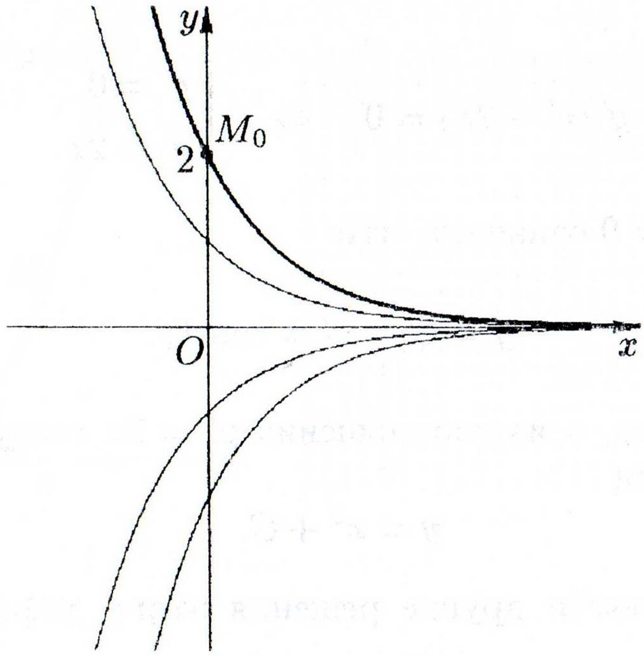

Рис. 1.

а затем из полученного уравнения и уравнения (13) исключаем произвольную постоянную C:

$$C = \frac{2y - x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{2y - x^2}{y^2}y' = 2y' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad xy + \left(2y - x^2\right) y' = yy' \quad \Rightarrow \quad \left(y - x^2\right) y' + xy = 0. \qquad (14)$$

Одновременно показано, что алгебраическое уравнение (13) является общим интегралом дифференциального уравнения (14). □

Не следует думать, что решение дифференциального уравнения может быть представлено только одним равенством $\Phi(x, y, C) = 0$. Дифференциальное уравнение аналогично недифференциальному может иметь несколько вариантов решений. Причем, как показывает следующий пример, для дифференциального уравнения, в отличие от недифференциального, возможны решения, являющиеся комбинацией полученных других решений.

Пример 4.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'\left(y' - 2x\right) = 0.$$

Р е ш е н и е.

$$y'(y'-2x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} y' &= 0, \\ y' &= 2x. \end{aligned}\right.$$

Соотношение $y'=0$ означает, что

$$y=C, \quad C=\mathrm{const},$$

является решением, а из соотношения $y'=2x$ следует, что второе решение имеет вид

$$y=x^2+C.$$

Однако существуют и другие решения этого дифференциального уравнения:

$$y=\begin{cases} C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2+C, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

и

$$y=\begin{cases} x^2+C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ C, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

поскольку, во-первых, указанные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению, а во-вторых, при $x=0$ функции $y=C$ и $y=x^2+C$ имеют равные производные и, следовательно, решения составленные из них, дифференцируемы. □

§2. Поле направлений, изоклины

Решение уравнения (3), которому соответствует интегральная кривая, проходящая через точку (x,y), должно иметь в точке x производную $y'=f(x,y)$, т. е. эта интегральная кривая должна касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha = \operatorname{arctg} f(x,y)$ к оси Ox (рис. 2).

Следовательно, *направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.*

Проведя в каждой точке (x,y) из области задания функции $f(x,y)$ отрезок с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, где $\operatorname{tg}\alpha = f(x,y)$, получим так называемое *поле направлений.* На рис. 3 показано поле направлений уравнения $y'=x-y^2$.

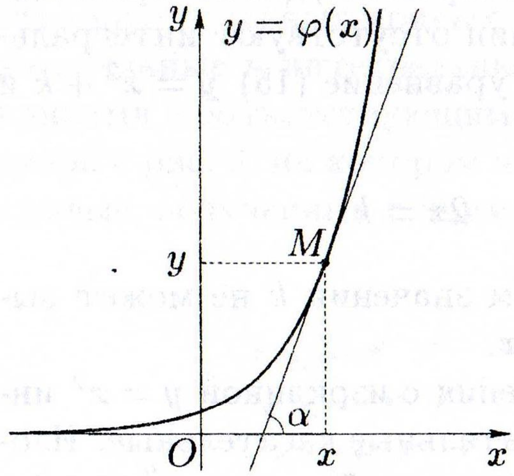

Рис. 2.

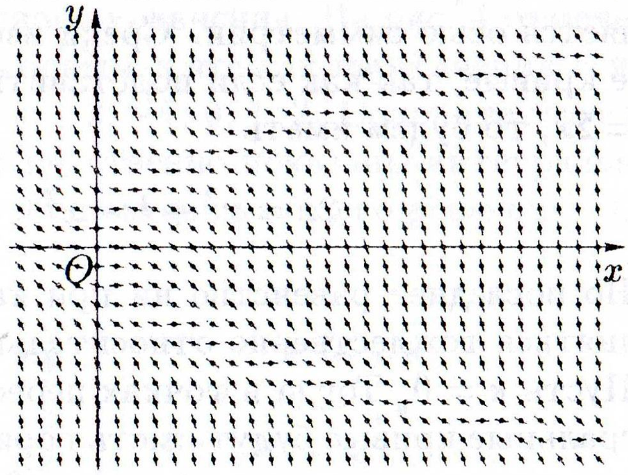

Рис. 3.

Если в точке (x_0, y_0) правая часть дифференциального уравнения (3) обращается в бесконечность, то в этой точке направление поля параллельно оси Oy. В этом случае можно рассматривать "перевернутое" дифференциальное уравнение (5).

Множество точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к интегральным кривым дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Чтобы приближенно построить решение уравнения (3), можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2, \ldots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k_2, \ldots$ соответственно.

Пример 5.

С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' = y - x^2. \tag{15}$$

Решение.

Для получения уравнения изоклин положим $y' = k$, $k = \text{const}$. Имеем

$$y - x^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 + k.$$

Таким образом, изоклинами являются параболы, для которых ось Oy является осью симметрии. Среди изоклин отсутствуют интегральные кривые, так как если подставить в уравнение (15) $y = x^2 + k$ и $y' = 2x$, то будем иметь

$$2x = x^2 + k - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = k.$$

Но последнее равенство ни при каком значении k не может выполняться тождественно относительно x.

Пусть $k = 0$. Тогда в точках пересечения с изоклиной $y = x^2$ интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные. Изоклина, определяемая условием $k = 0$, т. е. парабола $y = x^2$, разбивает плоскость Oxy на две части: в одной из них $y' > 0$ (решения y возрастают), а в другой $y' < 0$ (решения y убывают). А так как эта изоклина не является интегральной кривой, то на ней находятся точки экстремумов интегральных кривых, а именно: на той части параболы $y = x^2$, где $x < 0$, — точки минимума, и на другой части этой параболы, где $x > 0$, — точки максимума (тип экстремума определяется по близлежащим изоклинам).

В точках изоклин, определяемых равенствами $k = 1$, т. е. $y = x^2 + 1$, и $k = -1$, т. е. $y = x^2 - 1$, касательные к интегральным кривым имеют угловые коэффициенты, равные 1 и (-1) соответственно.

Для исследования направления вогнутости интегральных кривых найдем вторую производную. Имеем

$$y'' = (y - x^2)' = y' - 2x = y - x^2 - 2x.$$

Эта производная обращается в нуль только в точках, лежащих на параболе $y = x^2 + 2x$. В точках плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $y < x^2 + 2x$, интегральные кривые выпуклы ($y'' < 0$), а в точках, где $y > x^2$, они вогнуты ($y'' > 0$). Точки пересечения интегральных кривых с параболой $y = x^2 + 2x$ являются точками перегиба этих кривых. В частности, интегральная кривая, проходящая через точку $(0, 0)$, т. е. через вершину параболы $y = x^2$, в этой точке не имеет экстремума, так как точка $(0, 0)$ лежит и на параболе $y = x^2 + 2x$.

Правая часть $f(x, y) = y - x^2$ исходного уравнения во всех точках плоскости Oxy удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Полученные данные позволяют приближенно построить семейство интегральных кривых данного уравнения. На рис. 4 отмечены касательные к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами, соответствующими $k = -2, -1, 0, 1, 2$. Сравните этот рисунок с рис. 6, на котором непосредственно показаны интегральные кривые, полученные в примере 9 с помощью общего решения. □

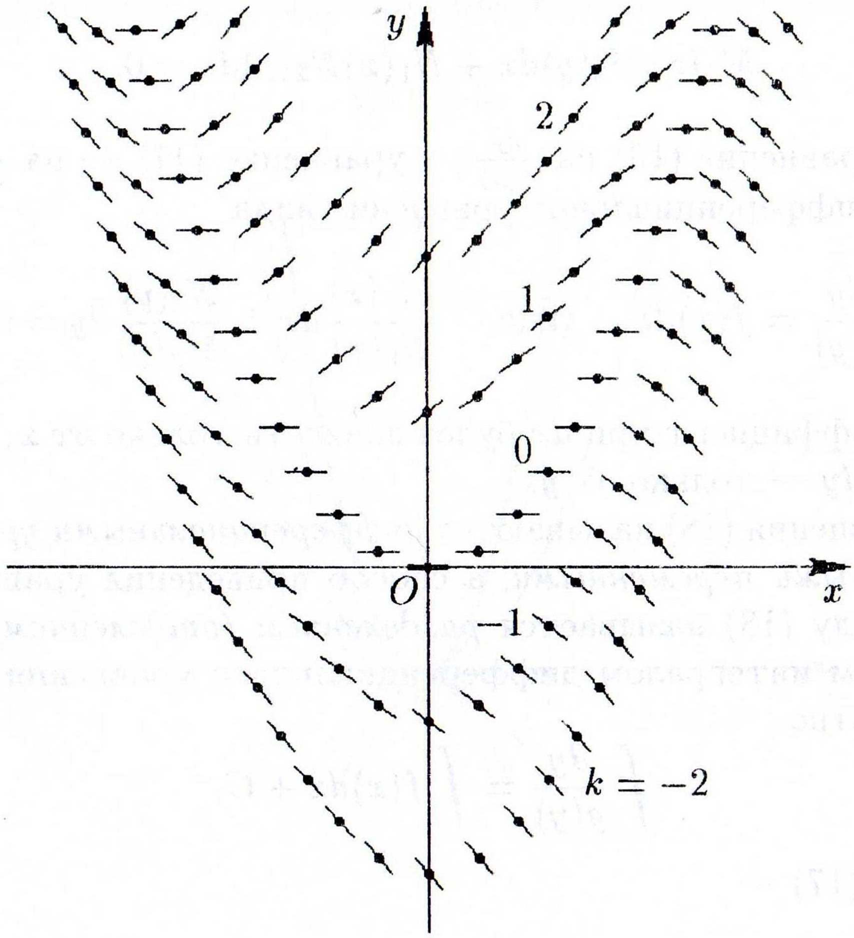

Рис. 4.

Рассмотрим далее основные типы уравнений первого порядка. Это уравнения с разделяющимися переменными, однородное, линейное, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах и два вида уравнений, не разрешенных относительно производной: уравнение Клеро и уравнение Лагранжа.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися (отделяющимися) переменными* могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \tag{16}$$

а также в виде

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{17}$$

Умножая уравнение (16) на $\frac{dx}{g(y)}$, а уравнение (17) — на $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$, получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \text{или} \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0, \tag{18}$$

так что коэффициент при dx будет зависеть только от x, а коэффициент при dy — только от y.

Оба уравнения (18) называются *дифференциальными уравнениями с разделенными переменными*, а способ приведения уравнений (16) и (17) к виду (18) называется *разделением (отделением) переменных*. Общим интегралом дифференциального уравнения (16) является равенство

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{19.1}$$

уравнения (17) —

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C, \tag{19.2}$$

где C — произвольная постоянная.

Если в уравнениях (19.1), (19.2) выполним квадратуры (т. е. вычислим интегралы) и решим его относительно y, то получим уравнение семейства интегральных кривых в явной форме (общее решение)

$$y = \varphi(x, C).$$

---

* В современной литературе используется термин "с разделяющимися переменными". В классических учебниках, например [3], употреблялся более точный термин — "с отделяющимися переменными".

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее x и y, возможна потеря решений, обращающих это выражение в нуль.

Пример 6.
Решить дифференциальное уравнение

$$x\,dy = 2y\,dx \tag{20}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 3. \tag{21}$$

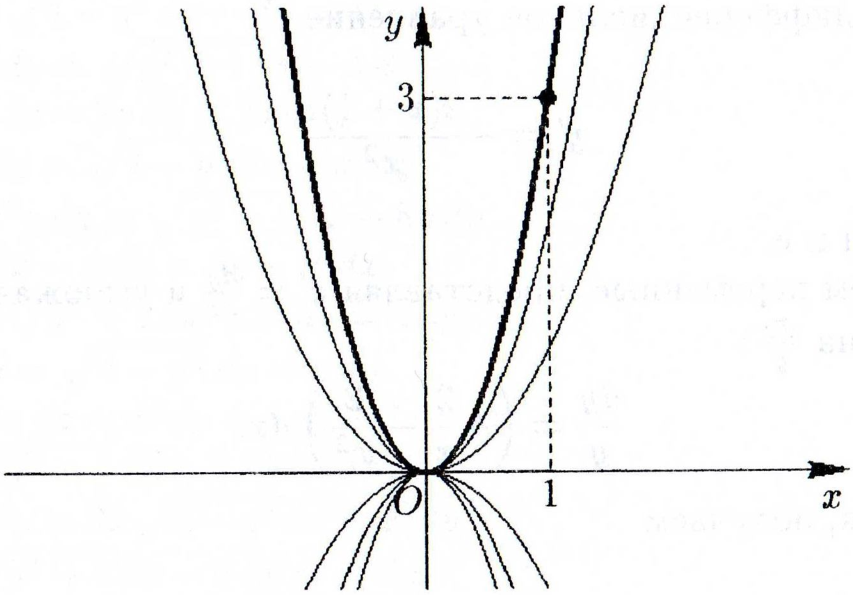

Рис. 5.

Р е ш е н и е.
Разделяем переменные, деля обе части на xy:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \quad \text{или} \quad |y| = e^{C_1}x^2.$$

Если обозначить $C = \pm e^{C_1}$, то последнее уравнение можно записать короче:

$$y = Cx^2. \tag{22}$$

Здесь $C \neq 0$. При делении на xy могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 0$. Подставляя их в дифференциальное уравнение (20), видим, что они действительно являются решениями уравнения (20). Но оба эти решения содержатся и в формуле (22): второе из них, $y = 0$, получается при $C = 0$ (если кроме $C = \pm e^{C_1}$ допустить еще и значение $C = 0$). Чтобы получить первое, $x = 0$, обе части формулы (22) следует разделить на C и затем положить $C = \infty$.

Решим теперь начальную задачу (20), (21). Положим $x = 1$, $y = 3$ в формуле (22). Тогда $C = 3$, и из (22) следует $y = 3x^2$ (рис. 5). □

Пример 7.

Решить дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{2(x+1)y}{x^2}.$$

Р е ш е н и е.

Разделяем переменные, представляя $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{y}$:

$$\frac{dy}{y} = \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y| = \left(-2\ln|x| + \frac{2}{x}\right) + C_1.$$

После потенцирования имеем

$$y = \frac{Ce^{2/x}}{x^2},$$

где $C = \pm e^{C_1}$. Здесь $C \neq 0$. При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$. Подставляя его в исходное уравнение, видим, что тождественный нуль — действительно решение. Но это решение так же содержится в полученной формуле при $C = 0$. Следовательно, если считать константу C любой, найденное общее решение содержит все решения исходного дифференциального уравнения. □

Задача №1

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1.1. $y^2\,dx - 2xy\,dy = 4y\,dy - dx$.

1.2. $\sqrt{9-y^2}\,dx - 4\,dy = x^2dy$.

1.3. $y\,dy + \sqrt{y^2+4}\,dx = 2x^2y\,dy$.

1.4. $y^2dx - x\,dy = 2\,dy - 4\,dx$.

1.5. $x^2dy = 2x\sqrt{y^2+4}\,dx - dy$.

1.6. $\sqrt{9-y^2}\,dx - 2\,dy = x\,dy$.

1.7. $2xy^2dx - dy = x^2dy - 8x\,dx$.

1.8. $dy = \sqrt{y^2+4}\,dx - x\,dy$.

1.9. $2x\sqrt{4-y^2}\,dx - dy = x^2dy$.

1.10. $x^2dy = \sqrt{y^2+1}\,dx - 4\,dy$.

1.11. $y^2dx - 2y\,dy = 2xy\,dy - 4\,dx$.

1.12. $9\,dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x^2dy$.

1.13. $2x^2y\,dy = \sqrt{y^2+1}\,dx + 8y\,dy$.

1.14. $9\,dx - x\,dy = dy - y^2dx$.

1.15. $2x\sqrt{y^2+1}\,dx - x^2dy = 4\,dy$.

1.16. $dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x\,dy$.

1.17. $18x\,dx - x^2dy = 4\,dy - 2xy^2dx$.

1.18. $\sqrt{y^2+1}\,dx - 2\,dy = x\,dy$.

1.19. $4\,dy = 2x\sqrt{9-y^2}\,dx - x^2dy$.

1.20. $\sqrt{y^2+4}\,dx - 9\,dy = x^2dy$.

1.21. $dy - 2xy\,dx = 4x\,dx - x^2dy$.

1.22. $4\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y^2dx$.

1.23. $2xy^2dx = \sqrt{x^2+4}\,dy + x\,dx$.

1.24. $4\,dy - y\,dx = 2\,dx - x^2dy$.

1.25. $dx = 2y\sqrt{x^2+4}\,dy - y^2dx$.

1.26. $2\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y\,dx$.

1.27. $8y\,dy - dx = y^2dx - 2x^2y\,dy$.

1.28. $\sqrt{x^2+4}\,dy - dx = y\,dx$.

1.29. $dx = 2y\sqrt{4-x^2}\,dy - y^2dx$.

1.30. $-y^2dx + \sqrt{x^2+1}\,dy = 4\,dx$.

§4. Однородные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{23}$$

К такому виду может быть приведено уравнение (6), если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени (функция $F(x,y)$ называется *однородной функцией степени* p, если для всех k имеем $F(kx,ky) \equiv k^p F(x,y)$; например, $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ есть однородная функция второй степени).

Дифференциальное уравнение (23) будем решать методом *замены переменных.* Именно, вместо неизвестной функции y введем неизвестную функцию z, положив $z = \frac{y}{x}$ *.

Подставляя в уравнение (23) $y = zx$, с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения $y' = z'x + x'z = z'x + z$, для новой неизвестной функции z получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными (см. §3).

Пример 8.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(y^2 + xy\right) dx - x^2 dy = 0. \tag{24}$$

Решение.

Уравнение является однородным, так как множители при dx и dy — однородные функции второй степени. Делением на $x^2 dx$ при $x \neq 0$ преобразуем уравнение (24) в уравнение (23):

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Полагаем здесь $y = zx$:

$$z'x + z = z^2 + z,$$

и разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| + C.$$

* Иногда бывает удобным функцию z ввести так: $z = \frac{x}{y}$.

Осталось сделать обратную замену:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + C}.$$

Полученные выражения дают общий интеграл и общее решение дифференциального уравнения (24) соответственно. Решение $y \equiv 0$ является частным, так как содержится в последней формуле при $C = \pm\infty$. Кроме того, исходное уравнение имеет решение $x = 0$, которое было потеряно при делении обеих частей исходного уравнения на $x^2 dx$. □

Задача №2

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

2.1. $(2x - y)dy = (4x + 2y)dx$.

2.2. $\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) dx = 2x(x + y)dy$.

2.3. $\left(6y^3 + 2x^2 y\right) dx = \left(5xy^2 + x^3\right) dy$.

2.4. $2xy' = 2y + x \ \operatorname{tg} \dfrac{2y}{x}$.

2.5. $(x + 3y)dx = (3x - y)dy$.

2.6. $\left(4x^2 + 4xy + 3y^2\right) dx = \left(4x^2 + 2xy\right) dy$.

2.7. $\left(6y^3 + 4x^2 y\right) dx = \left(5xy^2 + 2x^3\right) dy$.

2.8. $xy' = y + (2x + y)\bigl(\ln(2x + y) - \ln x\bigr)$.

2.9. $(6x - y)dy = (9x + 6y)dx$.

2.10. $\left(2x^2 + 4xy\right) dy = \left(x^2 + 2xy + 5y^2\right) dx$.

2.11. $6y\left(x^2 + y^2\right) dx = \left(5xy^2 + 3x^3\right) dy$.

2.12. $xy' = \sqrt{9x^2 - y^2} + y$.

2.13. $(5x - y)dy = (x + 5y)dx$.

2.14. $\left(4x^2 + 6xy + 3y^2\right) dx = \left(6x^2 + 2xy\right) dy$.

2.15. $2x^2 y' = y^2 + 5xy + 2x^2$.

2.16. $(4x + 4y)dx = (4x - y)dy$.

2.17. $\left(3x^2 + 2xy\right) dy = \left(x^2 + 3xy + 3y^2\right) dx$.

2.18. $x\left(3y^2 + x^2\right) dy = \left(4y^3 + 2x^2 y\right) dx$.

2.19. $3xy' = 3y + x \ \operatorname{tg} \dfrac{3y}{x}$.

2.20. $(6x - y)dy = (x + 6y)dx$.

2.21. $\left(4x^2 + 4xy + 5y^2\right) dx = 4x(x + y)dy$.

2.22. $x\left(3y^2 + 2x^2\right) dy = 4y\left(y^2 + x^2\right) dx$.

2.23. $xy' = y + (x + 2y)\bigl(\ln(x + 2y) - \ln x\bigr)$.

2.24. $(9x + 3y)dx = (3x - y)dy$.

2.25. $\left(3x^2 + 4xy\right) dy = \left(x^2 + 3xy + 5y^2\right) dx$.

2.26. $3x \left(y^2 + x^2\right) dy = \left(4y^3 + 6x^2y\right) dx$.

2.27. $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$.

2.28. $(4x - y)dy = (x + 4y)dx$.

2.29. $\left(4x^2 + 6xy + 5y^2\right) dx = \left(6x^2 + 4xy\right) dy$.

2.30. $4x^2y' = y^2 + 9xy + 6x^2$.

Задача №3

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения (Указание: сделать замену неизвестной функции $y(x) = xz(x)$):

3.1. $\left(x^2 + 4\right) (x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2 + x^2}dx$.

3.2. $(1 + x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2 + 4x^2}\,dx$.

3.3. $\left(9 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx)x\sqrt{4x^2 - y^2}\,dx$.

3.4. $x(2x + y)dx = \sqrt{9 - x^2}(x\,dy - y\,dx)$.

3.5. $x\sqrt{9x^2 - y^2}\,dx = \left(4 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.6. $x\sqrt{y^2 + 4x^2}\,dx = \left(x^2 + 9\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.7. $(1 + x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{4x^2 - y^2}\,dx$.

3.8. $2x^2 \left(4x^2 - y^2\right) dx = \left(x^2 + 1\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.9. $2x^2\sqrt{y^2 + x^2}\,dx = \left(4 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.10. $\left(9x^2 + y^2\right) dx = (x + 1)(x\,dy - y\,dx)$.

3.11. $\left(4 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{9x^2 - y^2}$.

3.12. $2x \left(y^2 + 4x^2\right) dx = \left(x^2 + 1\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.13. $x^2\sqrt{y^2 + 4x^2}\,dx = y \left(2x^2 - 1\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.14. $\left(4x^2 + y^2\right) dx = \sqrt{9 - x^2}(x\,dy - y\,dx)$.

3.15. $x \left(y^2 + 4x^2\right) dx = 2y(x + 1)(x\,dy - y\,dx)$.

3.16. $\left(4 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx) = x(2x + y)dx$.

3.17. $\left(1 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx) = 2x^2(2x + y)dx$.

3.18. $2y \left(x^2 - 4\right) (x\,dy - y\,dx)x^2\sqrt{y^2 + x^2}dx$.

3.19. $x \left(x^2 + y^2\right) dx = 2y\sqrt{x^2 + 4}(x\,dy - y\,dx)$.

3.20. $\sqrt{x^2 + 1}(x\,dy - y\,dx) = \left(4x^2 + y^2\right) dx$.

3.21. $2x \left(x^2 + y^2\right) dx = \left(4 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx)$.

3.22. $\left(1 + x^2\right) (x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{y^2 + 4x^2}\,dx$.

3.23. $x\sqrt{y^2 + x^2}\,dx = (x + 2)(x\,dy - y\,dx)$.

3.24. $x \left(x^2 + y^2\right) dx = 2y\sqrt{4 - x^2}(x\,dy - y\,dx)$.

3.25. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y(x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.26. $2y\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = x\left(x^2+y^2\right)dx$.
3.27. $x\sqrt{9x^2-y^2}\,dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.28. $\left(y^2+4x^2\right)dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.29. $\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx) = x(x+y)dx$.
3.30. $x\left(2y^2-x^2\right)dx = \sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx)$.

§5. Линейные уравнения и уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{25}$$

$p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Для общего решения линейного дифференциального уравнения существует формула

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{26}$$

Если задано начальное значение y_0 искомого решения при $x = x_0$, т. е. $y(x_0) = y_0$, то решение начальной задачи дается формулой

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(u)e^{\int\limits_{x_0}^{u} p(t)dt}du\right).$$

Линейное дифференциальное уравнение (25) также может быть проинтегрировано *методом Бернулли** (см. пример 10).

Обобщением линейного дифференциального уравнения (25) является *уравнение Бернулли***

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{27}$$

причем показатель степени m можно считать отличным от нуля и единицы, так как в этих случаях уравнение будет линейным. При $m > 0$ уравнение (27) имеет решение $y = 0$. Если $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y^m:

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

* И. Бернулли (I. Bernoulli, 1667—1748) — швейцарский математик.

** Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1654—1705) — швейцарский математик.

и введем вместо y новую искомую функцию z:

$$z = y^{1-m}.$$

Так как $z' = (1-m)y^{-m}y'$, уравнение преобразовывается в уравнение вида

$$z' + p_1(x)z = q_1(x),$$

где $p_1(x) = (1-m)p(x)$ и $q_1(x) = (1-m)q(x)$, т. е. в уравнение вида (25).

На практике такое преобразование не обязательно (см. пример 11).

Пример 9.

Найти общее решение и построить интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' - y = -x^2.$$

Решение.

Воспользуемся готовой формулой (26). При этом

$p(x) = -1, \quad q(x) = -x^2, \quad \int p(x)dx = -x, \quad e^{\int p(x)dx} = e^{-x},$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int -x^2e^{-x}dx =$$

$$= -x^2\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}(-2x)dx = x^2e^{-x} - \int 2xe^{-x}dx =$$

$$= x^2e^{-x} - \left(-2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx\right) =$$

$$= x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}dx = e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right)$$

(при первом интегрировании по частям $u = -x^2, \quad dv = e^{-x}dx,$ $du = -2x\,dx, \quad v = -e^{-x}$, при повторном интегрировании по частям $u = 2x, \quad dv = e^{-x}dx, \quad du = 2\,dx, \quad v = -e^{-x}$). При вычислении неопределенных интегралов нигде не ставилась постоянная интегрирования. В ней нет необходимости, так как она уже присутствует в формуле (26). Окончательно имеем

$$y = e^x\left(C + e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right)\right) = Ce^x + x^2 + 2x + 2.$$

Интегральные кривые изображены на рис. 6. Данное дифференциальное уравнение уже рассматривалось в примере 5. Там было

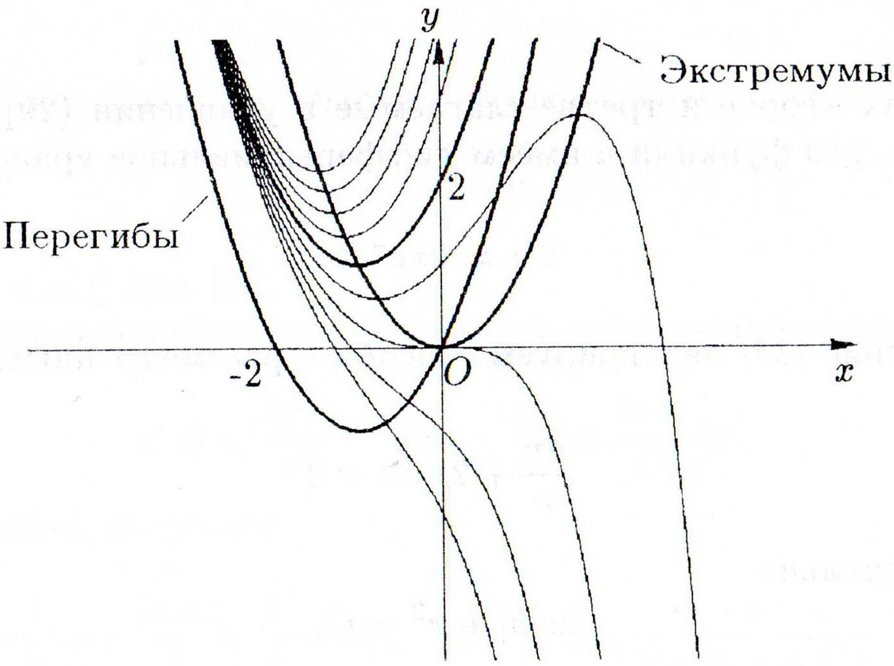

Рис. 6.

показано, как, не решая дифференциальное уравнение, можно получить форму линий из экстремумов и перегибов семейства решений. На рис. 6 выделена еще одна линия. Это график решения, отделяющего части координатной плоскости, заполняемые графиками решений с точкой перегиба (ниже выделенной линии) и без точки перегиба (выше). □

Пример 10.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}. \tag{28}$$

Решение.

Можно было бы использовать формулу (26), и решение свелось бы к нахождению двух квадратур. Однако возможно применить *метод Бернулли*, позволяющий обойтись без запоминания формулы (26), которую также можно получить методом Бернулли.

С помощью замены неизвестной функции $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две новые неизвестные функции, уравнение (28) преобразуем в уравнение вида

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \tag{29}$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана совершенно произвольно (поскольку лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению), за v примем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \tag{30}$$

Так как второе и третье слагаемые в уравнении (29) при этом исчезают, для функции u имеем дифференциальное уравнение

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \tag{31}$$

Уравнение (30) интегрируем способом, рассмотренным в §3:

$$\frac{dv}{v} + 2x\,dx = 0$$

и, следовательно

$$\ln|v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить $C_1 = 0$ и взять решение $v = e^{-x^2}$. Далее подставляем найденное $v(x)$ в уравнение (31):

$$u' = 2x,$$

и находим

$$u = x^2 + C.$$

Окончательно, применяя замену неизвестной функции, получаем общее решение дифференциального уравнения (28):

$$y = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}. \quad \square$$

Пример 11.

Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + y = y^2 \ln x. \tag{32}$$

Р е ш е н и е.

Делением на $x > 0$ (это область определения дифференциального уравнения, и, следовательно, при таком делении никакие решения не теряются) уравнение приводится к дифференциальному уравнению Бернулли (27). Проинтегрируем его методом Бернулли. Положим $y = u(x)v(x)$ и подставим в уравнение, сгруппировав члены, содержащие функцию $u(x)$ в первой степени:

$$xvu' + u\left(xv' + v\right) = u^2v^2 \ln x.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения

$$xv' + v = 0,$$

например, $v = \frac{1}{x}$ (см. §3).

Для нахождения функции $u(x)$ имеем дифференциальное уравнение

$$u' = u^2 \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C, \quad \text{или} \quad u = \frac{x}{1 + \ln x + Cx}.$$

Таким образом,

$$y = uv = \frac{x}{x\,(1 + \ln x + Cx)} = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}$$

есть общее решение дифференциального уравнения (32). □

Задача №4

В каждом варианте найти решение задачи с начальным условием:

4.1. $y' - \dfrac{1}{x} y = xe^x, \quad y(1) = e.$

4.2. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.3. $y' - \dfrac{4}{x} y = x^4 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}.$

4.4. $y' - \dfrac{1}{x \ln x} y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.5. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2} \arcsin \frac{x}{3}} y = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}}, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

4.6. $y' - \dfrac{1}{x} y = 2xe^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

4.7. $y' - 3 \operatorname{tg} x \cdot y = 3 \operatorname{tg}^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.8. $y' - \dfrac{3}{x} y = x^3 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$

4.9. $y' - \dfrac{1}{x \ln x} y = \dfrac{2 \ln^2 x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.10. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{16 - x^2} \arcsin \frac{x}{4}} y = \dfrac{1}{2\sqrt{16 - x^2}}, \quad y(2) = \frac{\pi}{3}.$

4.11. $y' - \frac{1}{x}y = 3xe^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.12. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 2\sin^2 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.13. $y' - \frac{1}{x}y = x, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \frac{1}{x\ln x}y = \frac{3}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.15. $y' - \frac{1}{2\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}y = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$

4.16. $y' - \frac{1}{x}y = x^2e^x, \quad y(1) = e.$

4.17. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 3\sin^3 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.18. $y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

4.19. $y' - \frac{1}{x\ln x}y = \frac{4\ln^4 x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.20. $y' - \frac{1}{\left(4+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}y = \frac{1}{4+x^2}, \quad y(2) = \frac{\pi}{4}.$

4.21. $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2e^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

4.22. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = 2\operatorname{tg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.23. $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

4.24. $y' - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

4.25. $y' - \frac{3}{2\left(9+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}y = \frac{3}{2\left(9+x^2\right)}, \quad y(3) = \frac{\pi}{4}.$

4.26. $y' - \frac{1}{x}y = 3x^2e^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.27. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 4\sin^4 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.28. $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}y = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}, \quad y(1) = \frac{\pi}{3}.$

4.30. $y' - \frac{2}{\left(16+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{4}}y = \frac{2}{16+x^2}, \quad y(4) = \frac{\pi}{4}.$

Задача №5

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли:

5.1. $y' - y\operatorname{tg} x = y^{-2}\operatorname{tg}^2 x.$

5.2. $xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}$.

5.3. $y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1} \sin^4 x$.

5.4. $xy' - 4y = y \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.

5.5. $y' x \ln x - y = y^{-1} \ln^4 x$.

5.6. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^{-2} \operatorname{tg}^5 x$.

5.7. $xy' - y = 2x^3 e^{4x} y^{-1}$.

5.8. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^3 \operatorname{ctg}^7 x$.

5.9. $xy' - 3y = x^{-2} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.

5.10. $y' x \ln x - y = 2y^{-1} \ln^6 x$.

5.11. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^{-2} \operatorname{tg}^8 x$.

5.12. $xy' - y = 3x^3 e^{6x} y^{-1}$.

5.13. $y' \operatorname{tg} x - y = 2y^{-1} \sin^6 x$.

5.14. $xy' - y = x^6 y^{-2}$.

5.15. $y' x \ln x - y = 3y^{-1} \ln^8 x$.

5.16. $y' - 5y \operatorname{tg} x = 5y^3 \operatorname{ctg}^{11} x$.

5.17. $xy' - y = x^5 e^{2x} y^{-1}$.

5.18. $y' \operatorname{tg} x - y = 3y^{-1} \sin^8 x$.

5.19. $xy' - 2y = x^{-1} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.

5.20. $y' x \ln x - y = 4y^{-1} \ln^{10} x$.

5.21. $y' - 4y \operatorname{tg} x = 4y^2 \operatorname{ctg}^5 x$.

5.22. $xy' - y = 2x^5 e^{4x} y^{-1}$.

5.23. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^3 \operatorname{ctg}^5 x$.

5.24. $xy' - y = y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.

5.25. $y' x \ln x - y = 5y^2 \ln^{-6} x$.

5.26. $y' - y \operatorname{tg} x = y^3 \operatorname{ctg}^3 x$.

5.27. $xy' - y = 3x^5 e^{6x} y^{-1}$.

5.28. $y' \operatorname{tg} x - y = 4y^{-1} \sin^{10} x$.

5.29. $xy' - y = 2x^9 y^{-2}$.

5.30. $y' x \ln x - y = 6y^2 \ln^{-7} x$.

§6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{33}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть равна полному дифференциалу от некоторой функции $u(x, y)$, т. е. равна $u'_x\, dx + u'_y dy = du$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции M'_y и N'_x были непрерывными в рассматриваемой области и выполнялось тождество

$$M'_y \equiv N'_x. \tag{34}$$

Тогда равенство $u(x, y) = C$ дает общий интеграл уравнения в полных дифференциалах (33).

Для нахождения функции $u(x, y)$ следует проинтегрировать по x равенство $u'_x = M$, взяв вместо произвольной постоянной любую функцию от y, т. е. $u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$, а затем найти $\varphi(y)$ из условия $u'_y = N$ (см. пример 12).

Кроме того, если использовать понятие криволинейного интеграла, то функцию $u(x, y)$ можно найти по формуле:

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} du = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy, \tag{35}$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка, (x, y) — произвольная точка на плоскости Oxy, а путь, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y), может быть любым [3, т. II]. Формула (35) может быть записана и через определенные интегралы, например, таким образом [8]:

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, z)dz. \tag{36}$$

Очень часто удается и непосредственно угадать выражение для $u(x, y)$.

Пример 12.

Решить уравнение

$$\left(2xy + 3x^2\right) dx + \left(x^2 - 5y^4\right) dy = 0. \tag{37}$$

Решение.

Проверим выполнение равенства (34):

$$\left(2xy + 3x^2\right)'_y = 2x = \left(x^2 - 5y^4\right)'_x .$$

Следовательно, уравнение (37) является уравнением в полных дифференциалах.

Способ 1.

Найдем функцию $u(x, y)$ из равенств

$$u'_x = 2xy + 3x^2, \quad u'_y = x^2 - 5y^4. \tag{38}$$

Интегрируем по x первое из уравнений, считая y постоянной:

$$u(x,y)=\int\left(2xy+3x^2\right)dx=x^2y+x^3+\varphi(y).$$

Отсюда $u'_y=x^2+\varphi'(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение (38), находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=-\int 5y^4dy=-y^5+\mathrm{const}\,.$$

Можно взять $u(x,y)=x^2y+x^3-y^5$. Общий интеграл дифференциального уравнения (37) имеет вид

$$x^2y+x^3-y^5=C. \tag{39}$$

Способ 2.

Воспользуемся формулой (36):

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(2ty_0+3t^2\right)dt+\int\limits_{y_0}^{y}\left(x^2-5z^4\right)dz=$$

$$=\left[t^2y_0+t^3\right]_{t=x_0}^{t=x}+\left[x^2z-z^5\right]_{z=y_0}^{z=y}=$$

$$=x^2y_0+x^3-x_0^2y_0-x_0^3+x^2y-y^5-x^2y_0+y_0^5=x^3+x^2y-y^5+\mathrm{const}\,.$$

Здесь $\mathrm{const}=-x_0^2y_0-x_0^3+y_0^5$. Следовательно, общий интеграл выражается той же формулой (39). □

Задача №6

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

6.1. $\left(3x^2+2xy^6\right)dx+\left(3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.2. $\left(3x^2+y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(2xy+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.3. $\left(2xy+y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+2xy+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.4. $\left(y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(2xy+3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.5. $\left(2xy+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.6. $\left(3x^2+y^2+2xy^6\right)dx+\left(2xy+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.7. $\left(3x^2+2xy+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.8. $\left(2xy+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.9. $\left(3x^2+5x^4y^3\right)dx+\left(3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.10. $\left(y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(2xy+3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.11. $\left(3x^2+2xy+2xy^6\right)dx+\left(x^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.12. $\left(2xy+y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+2xy+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.13. $\left(y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(2xy+3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.14. $\left(3x^2+y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(2xy+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.15. $\left(3x^2+2xy+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.16. $\left(2xy+y^2+2xy^6\right)dx+\left(x^2+2xy+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.17. $\left(2xy+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+3y^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.18. $\left(3x^2+4x^3y^4\right)dx+\left(3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.19. $\left(3x^2+2xy+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.20. $\left(2xy+y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+2xy+2x^6y\right)dy=0.$

6.21. $2\left(xy+xy^6\right)dx+\left(x^2+3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.22. $\left(y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(2xy+3y^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.23. $\left(3x^2+y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(2xy+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.24. $\left(2xy+y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+2xy+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.25. $\left(3x^2+6x^5y^2\right)dx+\left(3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.26. $\left(y^2+2xy^6\right)dx+\left(2xy+3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.27. $3x^2\left(1+y^5\right)dx+y^2\left(3+5x^3y^2\right)dy=0.$

6.28. $\left(3x^2+2xy+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.29. $\left(2xy+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.30. $\left(3x^2+y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(2xy+2x^6y\right)dy=0.$

Задача №7

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

7.1. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$

7.2. $\left(\operatorname{tg} y+\cos(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.3. $\dfrac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.4. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.5. $\left(y\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\sin x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.6. $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0.$

7.7. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)} - \dfrac{2x}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)} + \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$

7.8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^4}} + \dfrac{2}{x}\right) dx + \left(\dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} - \dfrac{2}{y}\right) dy = 0.$

7.9. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right) dy = 0.$

7.10. $(\ln(1+y^2) - \sin(x+y))\, dx + \left(\dfrac{2xy}{1+y^2} - \sin(x+y)\right) dy = 0.$

7.11. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y}\right) dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{y^2}\right) dy = 0.$

7.12. $(3x^2 \operatorname{tg} y + \cos(x+y))\, dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + \cos(x+y)\right) dy = 0.$

7.13. $\dfrac{(2x-3y)dx + (3x+2y)dy}{x^2+y^2} = 0.$

7.14. $(4x^3 + e^{x/y})\, dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0.$

7.15. $\left(3y\sin^2 x\cos x + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\sin^3 x + \dfrac{1}{y}\right) dy = 0.$

7.16. $(3x^2\sin y + y\sin x)\, dx + (x^3\cos y - \cos x)\, dy = 0.$

7.17. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)} - \dfrac{6x^5}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)} + \dfrac{2x^6}{y^2}\right) dy = 0.$

7.18. $\left(\dfrac{x}{(x^2+y^4)^{5/6}} + \dfrac{6}{x}\right) dx + \left(\dfrac{2y^3}{(x^2+y^4)^{5/6}} - \dfrac{2}{y}\right) dy = 0.$

7.19. $\left(-\dfrac{3y}{x^2}\cos\dfrac{3y}{x} + \dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right) dx + \left(\dfrac{3}{x}\cos\dfrac{3y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right) dy = 0.$

7.20. $(\ln(1+y^6) - \sin(x+y))\, dx + \left(\dfrac{6xy^5}{1+y^6} - \sin(x+y)\right) dy = 0.$

7.21. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y^2}\right) dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{2x}{y^3}\right) dy = 0.$

7.22. $(\operatorname{tg} y + 2\cos(2x+y))\, dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 y} + \cos(2x+y)\right) dy = 0.$

7.23. $\dfrac{(4x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+y^2} = 0.$

7.24. $(2x + ye^{x/y})\, dx + e^{x/y}(2y-x)dy = 0.$

7.25. $\left(y^2\cos x + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(2y\sin x + \dfrac{1}{y}\right) dy = 0.$

7.26. $(\sin y + y^2 \sin x)\, dx + (x \cos y - 2y \cos x) dy = 0.$

7.27. $\left(\dfrac{y^2}{\cos^2(xy^2)} - \dfrac{2x}{y}\right) dx + \left(\dfrac{2xy}{\cos^2(xy^2)} + \dfrac{2x^2}{y^2}\right) dy = 0.$

7.28. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^6}} + \dfrac{2}{x}\right) dx + \left(\dfrac{3y^5}{\sqrt{x^2+y^6}} - \dfrac{4}{y}\right) dy = 0.$

7.29. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{2}{y}\sin\dfrac{2x}{y}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{2x}{y^2}\sin\dfrac{2x}{y}\right) dy = 0.$

7.30. $\left(\ln(1+y^2) - 2\sin(2x+y)\right) dx + \left(\dfrac{2xy}{1+y^2} - \sin(2x+y)\right) dy = 0.$

§7. Уравнения Клеро и Лагранжа

Отметим, что дифференциальные уравнения вида (2) или (3) могут иметь решения, которые и не заключаются в семействе общего интеграла, т. е. не могут быть получены из формулы (11) (или (12)) ни при каких частных значениях постоянной C. Такие решения называются *особыми решениями*. Они обладают тем свойством, что в каждой точке соответствующей интегральной кривой нарушается единственность решения начальной задачи.

Пример 13.

Найти общее и особые решения дифференциального уравнения

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \tag{40}$$

Р е ш е н и е.

Интегрируем уравнение методом разделения переменных (§3):

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \quad \Leftrightarrow \quad y^{1/3} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = (x+C)^3. \tag{41}$$

Общее решение уравнения (40) изображается семейством кубических парабол с вершинами на оси Ox (рис. 7).

При делении обеих частей уравнения (40) на $3\sqrt[3]{y^2} \neq 0$ могло быть потеряно решение $y = 0$. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что это решение действительно является решением дифференциального уравнения (40). Так как оно не может быть получено из формулы (41) ни при каком постоянном значении C, то решение $y = 0$ будет особым. Как видно из рис. 7, через каждую точку оси Ox проходит бесконечное множество решений: одна из

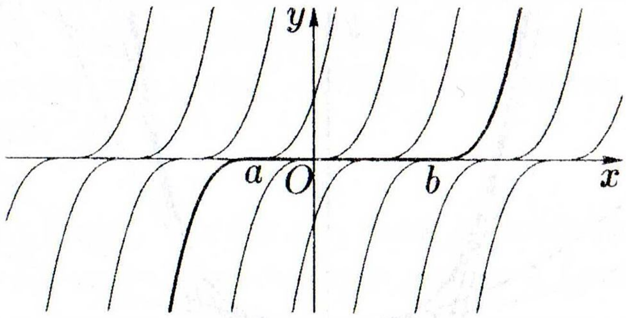

Рис. 7.

кубических парабол $y = (x + C)^3$, прямая $y = 0$ и различные кривые, "склеенные" из отрезка $[a, b]$ и двух половинок различных парабол $y = (x - b)^3$, $x > b$ и $y = (x - a)^3$, $x < a$ (см. рис. 7).

Кроме того, график особого решения $y = 0$ является касательной для каждой кубической параболы $y = (x + C)^3$. В этом и состоит характеристическое свойство особого решения — его график в каждой своей точке касается некоторой интегральной кривой, причем в разных точках — разных кривых. □

Такие кривые называются *огибающими* семейства интегральных кривых (рис. 8; см. пример 16). Если семейство интегральных кривых не имеет огибающей, то уравнение не имеет особых решений, и общее решение содержит все непрерывные решения уравнения. Отметим, что в точках оси Ox не выполнено условие б) из теоремы существования и единственности (§1), так как производная $\frac{\partial f}{\partial y} = y^{-1/3}$ обращается здесь в бесконечность.

*Уравнением Клеро** называется дифференциальное уравнение вида

$$y = xy' + g(y'), \tag{42}$$

где функция $g(y')$ не является линейной. При условии, что $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $g''(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$, проинтегрируем его с помощью *метода введения параметра*. Обозначив $y' = p$, уравнение (42) представим в виде

$$y = xp + g(p). \tag{43}$$

* А.К. Клеро (A.C. Clairaut, 1713—1765) — французский математик и астроном.

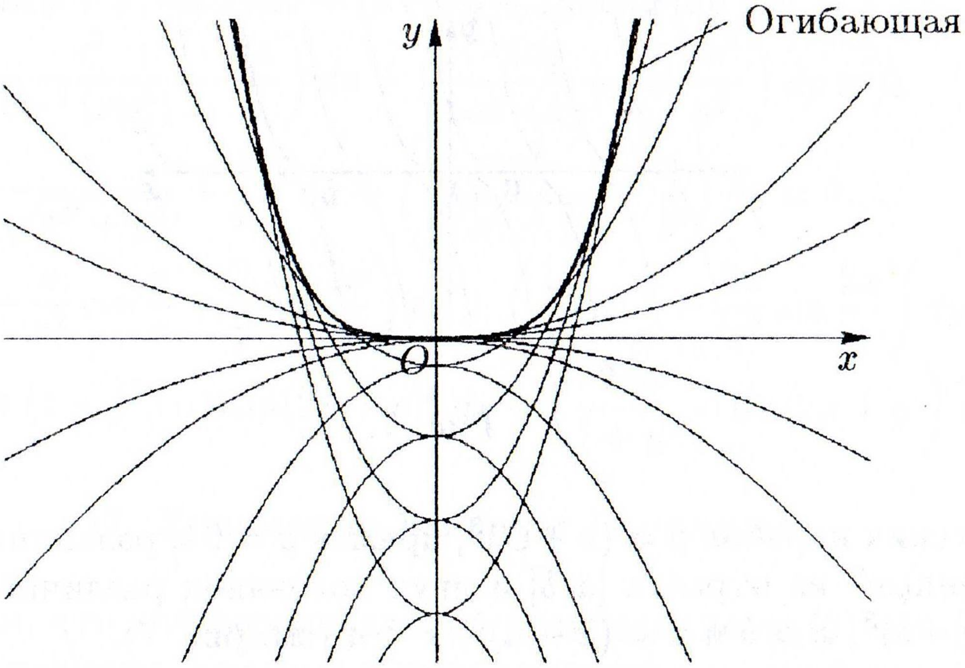

Рис. 8.

Взяв дифференциалы от обеих частей и положив слева $dy = y'\,dx = p\,dx$, запишем дифференциальное уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + g'(p)dp \quad \text{или} \quad \big(x + g'(p)\big)\,dp = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из множителей, получаем два уравнения. Уравнение $dp = 0$ дает $p = C$, где C — произвольная постоянная. Подставляя $p = C$ в уравнение (43), приходим к общему решению уравнения Клеро:

$$y = xC + g(C).$$

Во втором случае имеем уравнение

$$x + g'(p) = 0, \tag{44}$$

которое вместе с уравнением (43) дает решение дифференциального уравнения (42) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -g'(p)p + g(p), \end{cases} \qquad p \in (\alpha, \beta).$$

Исключая, если возможно, p из этих уравнений, получаем решение уравнения (42), уже не содержащее произвольной постоянной. Это решение обычно является особым решением дифференциального уравнения (42) [4].

Пример 14.

Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a (рис. 9).

Р е ш е н и е.

Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке (x, y) запишется так:

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

Определяя отсюда координаты точек $T_1\left(\frac{xy'-y}{y'}, 0\right)$ и $T_2\,(0, y - xy')$, находим

$$a^2 = |T_1T_2|^2 = \left(\frac{xy'-y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2$$

или

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

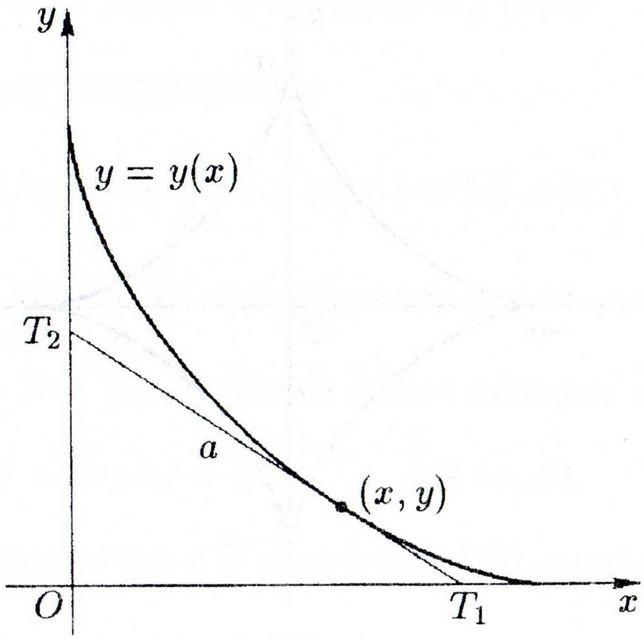

Рис. 9.

Полученное дифференциальное уравнение искомой кривой является уравнением Клеро. Его общий интеграл

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} \tag{45}$$

представляет собой семейство прямых линий, длина отрезка которых между координатными осями равна a. Особое решение получится в результате исключения p из уравнения

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \tag{46}$$

и уравнения

$$x \pm a\frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} = 0,$$

которое имеет вид

$$x \pm \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} = 0.$$

Полагая $p = \operatorname{tg} t$, получаем

$$x = \mp a\cos^3 t,$$

и из уравнения (46) находим

$$y = \mp a\cos^3 t \cdot \operatorname{tg} t \pm a\sin t = \pm a\sin^3 t.$$

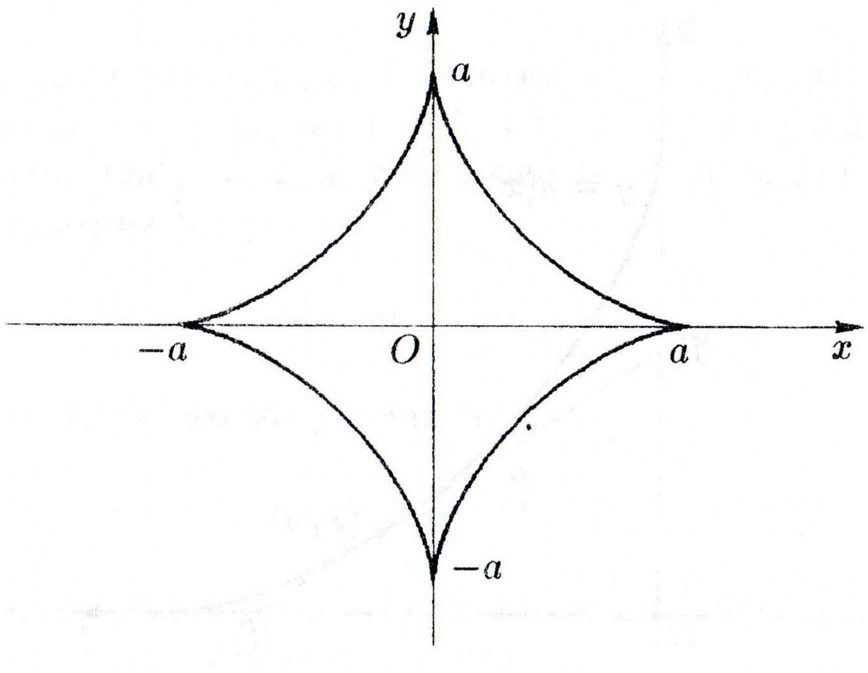

Рис. 10.

Возводя два последних равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно, исключаем t:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Искомая кривая есть астроида (рис. 10). Прямые (45) образуют семейство касательных к ней. $\square$

*Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение вида

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{47}$$

т. е. уравнение, линейное относительно x и y, но не решенное относительно y'. В случае $f(y') \equiv y'$ имеем уравнение Клеро.

Пусть $f(t) \not\equiv t$ и функции $f(t)$, $g(t)$ — непрерывно дифференцируемы при $t \in (\alpha, \beta)$. Применим к уравнению (47) тот же метод (метод введения параметра), что и к уравнению Клеро. Обозначив $y' = p$, перепишем уравнение (47) в виде

$$y = xf(p) + g(p). \tag{48}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей, найдем уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp. \tag{49}$$

Разделив на dp, получим уравнение

$$\big(f(p) - p\big)\frac{dx}{dp} + f'(p)x + g'(p) = 0, \tag{50}$$

которое является линейным дифференциальным уравнением, если считать x функцией от p.

Интегрируя его (см. §5), находим общее решение в виде

$$x = \varphi(p)C + \psi(p), \qquad p \in (\alpha, \beta). \tag{51}$$

Подставляя это выражение x в уравнение (48), приходим к уравнению вида

$$y = \varphi_1(p)C + \psi_1(p). \tag{52}$$

---

* Ж.Л. Лагранж (J.L. Lagrange, 1736—1813) — французский математик и механик.

Формулы (51) и (52) выражают x и y через произвольную постоянную C и переменный параметр p, т. е. дают параметрическое представление общего интеграла уравнения Лагранжа. Если исключить из уравнений (51) и (52) параметр p, то получим обычное уравнение для общего интеграла.

При делении уравнения на dp могли быть потеряны решения, соответствующие значению $dp = 0$, т. е. соответствующие постоянным значениям p или, что то же, y'. Но постоянное значение y' приводит к линейной функции для y, а значит интегральные кривые, соответствующие потерянным решениям (если таковые есть), должны быть прямыми линиями. Заметим, что при постоянном $p = a$ уравнение (49) дает уравнение

$$a\,dx = f(a)dx,$$

и, следовательно, значение постоянной a должно определяться из уравнения

$$f(a) = a. \tag{53}$$

Решая это уравнение и подставляя найденные для $y' = a$ значения в уравнение (47), получаем искомые решения:

$$y = xf(a) + g(a) \quad \text{или} \quad y = ax + g(a), \tag{54}$$

среди которых должны заключаться и особые решения.

Пример 15.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{55}$$

Решение.

Это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$, тогда

$$y = xp^2 + p^2. \tag{56}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей равенства (56) и проведя замену $dy = p\,dx$, придем к уравнению

$$p\,dx = p^2dx + 2px\,dp + 2p\,dp.$$

Отсюда, разделив обе части на $p \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными (§3):

$$(1-p)dx = 2(x+1)dp.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + \ln C \quad \text{или} \quad x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Используя (52), получаем $y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}$.

Таким образом, уравнение Лагранжа (55) имеет общее решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}. \end{cases} \tag{57}$$

Чтобы получить общее решение дифференциального уравнения (55) в непараметрической форме, следует исключить p из (57) и решить полученное уравнение относительно y. В итоге будем иметь:

$$y = x + 1 + C \pm 2\sqrt{C(x+1)}.$$

Для нахождения особых решений уравнения (55) рассмотрим уравнение (53): $a^2 = a$. Оно имеет корни $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, которым соответствуют решения (54):

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = x + 1.$$

Первое из них является особым решением, а второе получается из общего решения при $C = 0$. □

Пример 16.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'^2 - 2x^3y' + 4x^2y = 0. \tag{58}$$

Р е ш е н и е.

Это дифференциальное уравнение не является ни уравнением Клеро, ни уравнением Лагранжа. Тем не менее, оно интегрируется описанным выше способом. Положим $y' = p$, тогда

$$p^2 - 2x^3 p + 4x^2 y = 0. \tag{59}$$

Разделив на x^2, взяв дифференциалы от обеих частей равенства, проведя замену $dy = p\,dx$ и упростив, придем к дифференциальному уравнению

$$p\,dx - \frac{p^2}{x^3} dx - x\,dp + \frac{p}{x^2} dp = 0.$$

Разложив левую часть на множители, имеем уравнение

$$\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)(p\,dx - x\,dp) = 0.$$

Отсюда, деля обе части на $1 - \frac{p}{x^3} \neq 0$, получаем уравнение с разделяющимися переменными (§3):

$$p\,dx = x\,dp.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln|p| = \ln|x| + 2C \quad \text{или} \quad p = 2Cx.$$

Используя (59), получаем общее решение:

$$y = Cx^2 - C^2.$$

При делении на x^2 и $\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y' = p = x^3$.

Чтобы проверить, является ли $x = 0$ решением, следует, используя формулу для производной обратной функции $\left(y'_x = \frac{1}{x'_y}\right)$, переписать дифференциальное уравнение (58) в виде

$$1 - 2x^3 x'_y + 4x^2 y {x'_y}^2 = 0. \tag{60}$$

Подставляя $x = 0$ и $x'_y = 0$ в уравнение (60), убеждаемся, что оно не обращается в верное равенство и, следовательно, $x = 0$ не является решением исходного уравнения (58).

Равенство $y' = x^3$ дает $y = \frac{x^4}{4} + \text{const}$. Подставляя эти два равенства в уравнение (58), получаем $\text{const} = 0$. Это означает, что $y = \frac{x^4}{4}$ является особым решением дифференциального уравнения (58).

На рис. 8 изображено поле интегральных кривых $y = Cx^2 - C^2$. Эти кривые имеют огибающую $y = \frac{x^4}{4}$. $\square$

Задача №8

В каждом варианте проинтегрировать дифференциальное уравнение Клеро:

8.1. $y = xy' - e^{y'} + y'$.
8.2. $3y = 3xy' - (y')^3 + 3y'$.
8.3. $y = xy' - \ln y' + 2y'$.
8.4. $2y = 2xy' - (y')^2 + 6y'$.
8.5. $y = xy' - e^{3y'} + 2y'$.
8.6. $y = xy' - e^{2y'} + y'$.
8.7. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'$.
8.8. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'$.
8.9. $y = xy' - (y')^2 + 3y'$.
8.10. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'$.
8.11. $y = xy' - e^{y'} + 2y'$.
8.12. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'$.
8.13. $y = xy' - \ln y' + y'$.
8.14. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'$.
8.15. $y = xy' - e^{3y'} + y'$.
8.16. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'$.
8.17. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y'$.
8.18. $y = xy' - 2\ln y' + y'$.
8.19. $y = xy' - (y')^2 + 2y'$.
8.20. $y = xy' - e^{4y'} + y'$.
8.21. $y = xy' - e^{y'} + 3y'$.
8.22. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'$.
8.23. $y = xy' - \ln y' + 3y'$.
8.24. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'$.
8.25. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'$.
8.26. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'$.
8.27. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'$.
8.28. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'$.
8.29. $y = xy' - (y')^2 + y'$.

8.30. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'$.

Задача №9

В каждом варианте проинтегрировать дифференциальное уравнение Лагранжа:

9.1. $y = x\,(y')^2 + (y')^3 + 3\,(y')^2$.

9.2. $y = 2xy' + (y')^4$.

9.3. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{3}{y'}$.

9.4. $y = 3xy' + (y')^5$.

9.5. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 2\,(y')^3 + 3\,(y')^2$.

9.6. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2}$.

9.7. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 2\,(y')^{3/2}$.

9.8. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{5/2}$.

9.9. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{4}{y'}$.

9.10. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{3/2}$.

9.11. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{2}{y'}$.

9.12. $y = 3xy' + (y')^4 + (y')^2$.

9.13. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 4\,(y')^3 + 6\,(y')^2$.

9.14. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2} + (y')^{3/2}$.

9.15. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y')^{3/2}$.

9.16. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{3/2}$.

9.17. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{5}{y'}$.

9.18. $y = \dfrac{4x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 4}$.

9.19. $y = x\,(y')^2 + (y')^3 + 2\,(y')^2$.

9.20. $y = 2xy' + (y')^5 + (y')^3$.

9.21. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 6\,(y')^3 + 9\,(y')^2$.

9.22. $2y = xy' + 4\,(y')^{5/2} + 2\,(y')^{3/2}$.

9.23. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y' - 1)^{3/2}$.

9.24. $y = \dfrac{x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 1}$.

9.25. $y = x\left(2(y')^2 + y'\right) + \dfrac{6}{y'}$.

9.26. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{5/2}$.

9.27. $y = x(y')^2 + 2(y')^3 + (y')^2$.

9.28. $y = 2xy' + 2(y')^4 + 3(y')^2$.

9.29. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{1}{y'}$.

9.30. $y = 3xy' + 5(y')^3 + 2(y')^2$.

§8. Общие сведения об уравнениях высших порядков

В этом параграфе приведем лишь теоретические результаты.

Для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка вида (1) или решенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{61}$$

начальные условия (условия Коши) состоят в задании значений функции y и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно при некотором определенном значении $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \tag{62}$$

В этих условиях y_0, y_{01}, …, y_{0n-1} — заданные числа.

Для уравнения n-го порядка (61), как и для уравнения первого порядка, имеет место

2. Теорема существования и единственности.

Если функция $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна при всех значениях x, близких к x_0, и значениях y, y', y'', …, $y^{(n-1)}$, близких к (62), и непрерывны ее частные производные первого порядка по y, y', y'', …, $y^{(n-1)}$, то начальным условиям (62) соответствует одно определенное решение дифференциального уравнения (61) для x, близких к x_0.

Изменяя в начальных условиях постоянные y_0, y_{01}, …, y_{0n-1}, получаем бесчисленное множество решений, зависящее от n произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные могут входить в решение и не как начальные условия, а в более общей форме:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{63}$$

Такое решение уравнения (61), содержащее n произвольных постоянных, называется *общим решением дифференциального* уравнения (61). Уравнение (63) может быть записано и в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{64}$$

Уравнение (64) называется *общим интегралом дифференциального* уравнения (61). Придавая постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в (63) или (64) определенные значения, получаем *частное решение* или *частный интеграл* соответственно дифференциального уравнения (61).

Всякое решение, которое не заключается в семействе общего интеграла, т. е. не может быть получено из формулы (63) (или (64)) ни при каких значениях постоянных C_k, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

§9. Уравнения, допускающие понижение порядка

9.1. Уравнения, содержащие только независимую переменную и производную высшего порядка

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x) \tag{65}$$

является непосредственным обобщением уравнения $y' = f(x)$.

Его общее решение дается формулой

$$y = \int dx \int dx \ldots \int dx \int f(x)\, dx + C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}, \tag{66}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Укажем еще несколько частных случаев, когда порядок дифференциального уравнения может быть понижен.

9.2. Уравнения, не содержащие искомой функции и ее последовательных первых производных

Если дифференциальное уравнение не содержит искомой функции y и ее нескольких последовательных производных $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, т. е. имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то его порядок можно понизить на k единиц, взяв за новую неизвестную функцию $z = y^{(k)}$:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Если найдем общее решение этого последнего уравнения:

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

то y определится из уравнения типа (65):

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

которое далее решается так, как указано в п. 9.1.

Пример 17.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + 2xy' = 0. \tag{67}$$

Решение.

Обозначим $z = z(x) = y'$. Тогда $z' = y''$. Подставляя это соотношение в уравнение (67), получаем

$$z' + 2xz = 0.$$

Отделяя переменные, интегрируем (см. §3):

$$\frac{dz}{z} + 2x\,dx = 0,$$

$$\ln|z| + x^2 = C, \qquad \text{или} \qquad z = C_1 e^{-x^2}.$$

Заменяя z на y', получаем

$$y' = C_1 e^{-x^2}.$$

Следовательно, выражение

$$y = C_1 \int e^{-x^2}\,dx + C_2 \tag{68}$$

является общим решением дифференциального уравнения (67), записанным в квадратурах (интеграл от e^{-x^2} не выражается через элементарные функции). □

9.3. Уравнения, не содержащие независимой переменной

Если дифференциальное уравнение не содержит переменной x, т. е. имеет вид

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{69}$$

то его порядок можно понизить на единицу, взяв за новую независимую переменную y и новую неизвестную функцию $z = z(y) = y'$. Считая, что z, являясь функцией от y, зависит от x, и применяя правило дифференцирования сложных функций, для производных от y по x получаем выражения

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = z''z^2 + z'^2 z,$$

$$\vdots$$

откуда видно, что в новых переменных порядок уравнения будет $(n-1)$.

Пример 18.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 3y^5 \tag{70}$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y'(0) = y(0) = 1$.

Р е ш е н и е.

В уравнение (70) явно не входит x. Полагаем $z(y) = y'$. Подставляя $y'' = z'z$ в уравнение, получаем

$$z'z = 3y^5.$$

Разделяя переменные (см. §3), интегрируем уравнение

$$z\,dz = 3y^5 dy \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = y^6 + C_1.$$

Заменяя z на y' и решая уравнение относительно y', приводим его к виду

$$\pm y' = \sqrt{y^6 + C_1}. \tag{71}$$

Общий интеграл имеет вид (см. §3):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^6 + C_1}} = \pm x + C_2 \tag{72}$$

и не выражается в элементарных функциях.

Для решения начальной задачи будем определять константы последовательно: из уравнения (71) получаем $C_1 = 0$. Тогда (71) примет вид

$$y' = y^3.$$

Интегрируя это уравнение методом §3, вместо (72) получаем

$$-\frac{1}{2y^2} = x + C_2,$$

откуда при учете условия $y(0) = 1$ имеем $C_2 = -\frac{1}{2}$. Окончательно,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}. \quad \square$$

9.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных

Если дифференциальное уравнение однородно относительно y и его производных, т. е. не изменяется при одновременной замене y, y', y'', ... на ky, ky', ky'', ..., то, вводя новую неизвестную функцию $z = z(x) = \frac{y'}{y}$, можно понизить порядок уравнения на единицу.

Это следует из формул

$$y' = zy, \quad y'' = z'y + zy' = y\left(z' + z^2\right), \quad \ldots$$

и из того, что после подстановки в левую часть рассматриваемого уравнения вынесется некоторая степень y (в силу однородности), и на этот множитель можно разделить обе части уравнения (возможно, потеряв при этом решение $y = 0$).

Пример 19.

Решить дифференциальное уравнение

$$x^2yy'' = (y - xy')^2 . \qquad (73)$$

Р е ш е н и е.

Данное уравнение однородно относительно y, y', y''. Полагаем $y' = zy$. Подставляя y' и $y'' = y(z' + z^2)$ в уравнение (73), получаем

$$x^2y^2(z' + z^2) = (y - xzy)^2 \quad \text{или} \quad y^2(x^2z' - 1 + 2xz) = 0.$$

Деля на y^2, приходим к линейному дифференциальному уравнению (см. §5):

$$x^2z' + 2xz = 1.$$

Упростим интегрирование. Для этого левую часть последнего уравнения запишем в виде

$$(x^2z)' = 1.$$

Тогда

$$x^2z = x + C_1 \quad \text{или} \quad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} .$$

Заменяя здесь z на $\frac{y'}{y}$ и интегрируя (см. §3), получаем общий интеграл дифференциального уравнения (73)

$$\ln|y| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2$$

или общее решение

$$y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}} .$$

Очевидное решение $y = 0$ является частным, так как содержится в этой формуле при $C_2 = 0$. □

Задача №10

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

10.1. $xy''' = y'' + 2$.

10.2. $x^3y''' + 3x^2y'' = 2\cos\ln x$.

10.3. $(x^2 - x)\,y''' = (2 - x)y''$.
10.4. $xy''' - 2y'' = 4$.
10.5. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y''$.
10.6. $\operatorname{tg} x \cdot y''' + 2y'' = 0$.
10.7. $y''' = \dfrac{3}{x} \cdot y'' + 12x$.
10.8. $y''' + 3\,(y'')^2\sqrt{1 - 2x} = 0$.
10.9. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 6y''$.
10.10. $x^3y''' + 3x^2y'' = 8\sin\ln x$.
10.11. $xy''' - y'' = 12x^2$.
10.12. $y''' = 6\,(y'')^2\sqrt{x + 1}$.
10.13. $(2x^2 - x)\,y''' = 2(1 - x)y''$.
10.14. $y''' - \dfrac{2}{x}y'' = 6$.
10.15. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = y''$.
10.16. $y''' = (y'')^2\sqrt{6x + 5}$.
10.17. $xy''' - 3y'' = 12x$.
10.18. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 3y''$.
10.19. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$.
10.20. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$.
10.21. $y''' = \dfrac{y''}{x} + 40x^2$.
10.22. $y''' = 3\,(y'')^2\sqrt{2x + 7}$.
10.23. $(x^2 - 2x)\,y''' = (4 - x)y''$.
10.24. $xy''' = 2y'' + 20x^3$.
10.25. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$.
10.26. $y''' = 2\,(y'')^2\sqrt{3x + 4}$.
10.27. $xy''' - 6 = 3y''$.
10.28. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6\sin\ln x$.
10.29. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$.
10.30. $y''' + (y'')^2\sqrt{1 - x} = 0$.

Задача №11

В каждом варианте найти решение задачи с начальными условиями:

11.1. $y'' = 8(1 + 3y)(1 + y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.
11.2. $y'' + {y'}^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.
11.3. $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.
11.4. $2yy''\ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(0) = e, \quad y'(0) = e$.

11.5. $y'' = 16y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1.$

11.6. $y^2 y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

11.7. $4y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$

11.8. $y^6 y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{32}.$

11.9. $y'' = 2\left(1 + 4y + 3y^2\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

11.10. $y'' + {y'}^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 2.$

11.11. $y'' = \dfrac{4\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$

11.12. $3yy''\ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(0) = e, \quad y'(0) = e.$

11.13. $y'' = 81y(2y-1)(4y-1), \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 1.$

11.14. $y^3 y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

11.15. $y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = 1.$

11.16. $y^8 y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{128}.$

11.17. $y'' = 8\left(1 + 4y + 3y^2\right), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 16\sqrt{3}.$

11.18. $y'' + {y'}^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

11.19. $y'' = \dfrac{9\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

11.20. $2yy''\ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e.$

11.21. $y'' = 256y(3y-1)(6y-1), \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = 1.$

11.22. $y^4 y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

11.23. $y'' = 4\sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = 2.$

11.24. $y^7 y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{64}.$

11.25. $y'' = 2(1+y)(1+3y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

11.26. $y'' + {y'}^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 1.$

11.27. $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{6}, \quad y'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

11.28. $3yy''\ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e.$

11.29. $y'' = 64y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 2.$

11.30. $y^5 y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Задача №12

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

12.1. $xyy'' - 2x{y'}^2 = 3yy'.$

12.2. $x^2{y'}^2 + y^2 = x^2yy'' + 2xyy'.$

12.3. $e^{2x}\left(2yy' + yy''\right) = 8\sin 2x \cdot y^2 + e^{2x}{y'}^2.$

12.4. $xyy'' + 3x{y'}^2 = 4yy'.$

12.5. $3xyy' + x^2yy'' = 2y^2 + x^2{y'}^2.$

12.6. $5xy'^2 = 7yy' - xyy''$.
12.7. $x^2y'^2 = x^2yy'' - xyy' + 2y^2$.
12.8. $e^x yy'' - 30\cos 3x \cdot y^2 = e^x(y'^2 - yy')$.
12.9. $2yy' + xyy'' = 4xy'^2$.
12.10. $x^2yy'' + 3y^2 = x^2y'^2 + 2xyy'$.
12.11. $xyy'' = 2xy'^2 + 2yy'$.
12.12. $x^2y'^2 - 2xyy' = x^2yy'' - 3y^2$.
12.13. $e^{2x}(2yy' - y'^2) = 145\sin 5x \cdot y^2 - e^{2x}yy''$.
12.14. $3xy'^2 = 5yy' - xyy''$.
12.15. $x^2yy'' = x^2y'^2 - 3xyy' + 4y^2$.
12.16. $xyy'' + 5xy'^2 = 8yy'$.
12.17. $x^2yy'' + 4y^2 = xyy' + x^2y'^2$.
12.18. $e^x yy' - 10\cos 2x \cdot y^2 = e^x(y'^2 - yy'')$.
12.19. $xyy'' - 4xy'^2 = -3yy'$.
12.20. $x^2y'^2 - 6y^2 = x^2yy'' - 2xyy'$.
12.21. $2xy'^2 = yy' + xyy''$.
12.22. $2xyy' + x^2yy'' = 5y^2 + x^2y'^2$.
12.23. $e^{2x}(yy'' - y'^2) = 39\sin 3x \cdot y^2 - 2e^{2x}yy'$.
12.24. $xyy'' = 6yy' - 3xy'^2$.
12.25. $x^2y'^2 + 6y^2 = 3xyy' + x^2yy''$.
12.26. $9yy' = 5xy'^2 + xyy''$.
12.27. $x^2yy'' - xyy' = x^2y'^2 - 8y^2$.
12.28. $130\cos 5x \cdot y^2 + e^x y'^2 = e^x(yy'' + yy')$.
12.29. $4xy'^2 = 4yy' + xyy''$.
12.30. $2xyy' + x^2y'^2 = 9y^2 + x^2yy''$.

Контрольное задание №1

Решить задачи №№1.s — 12.s для варианта №s (s = 1, 2, ... , 30).

§10. Линейные дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$Ly = f \tag{74}$$

или

$$Ly = 0. \tag{75}$$

Здесь

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + p_{n-1}\frac{d}{dx} + p_n,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n, f$ — непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции аргумента x. (В частности, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ могут быть и числами). (Соответственно

$$Ly = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y. \ )$$

L называют *линейным дифференциальным оператором порядка* n, уравнение (74) — *линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (ЛНДУ) *порядка* n, уравнение (75) — *линейным однородным дифференциальным уравнением* (ЛОДУ) *порядка* n.

Прежде чем рассматривать вопрос о строении общих решений ЛНДУ и ЛОДУ следует ввести понятия линейной зависимости и линейной независимости функций.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми на сегменте* $[a, b]$, если для любого x из $[a, b]$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x) = 0 \qquad (*)$$

($\alpha_j, j = 1, 2, \ldots, n,$ – числа),
причем хоть один из коэффициентов α_j отличен от нуля.
Например, функции $y_1(x) = \sin^2 x$, $y_2(x) = \cos^2 x$ и $y_3(x) = \frac{1}{2}$ линейно зависимы на любом сегменте $[a, b]$. Действительно, для любого вещественного x имеет место тождество $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$, т.е. $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) = 0$, где $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$.

Если же для любого x из $[a, b]$ равенство (*) имеет место лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми на сегменте* $[a, b]$.

Например, функции $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$, $\ldots$, $y_n(x) = x^{n-1}$ линейно независимы на любом сегменте $[a, b]$.
Действительно, если бы рассматриваемые функции были бы линейно зависимыми на сегменте $[a, b]$, то на нем тождественно выполнялось бы равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0,$$

причем не все коэффициенты $\alpha_j, j = 1, 2, \ldots, n$, были бы равны нулю, что невозможно, ибо многочлен $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1}$ не может иметь более $n - 1$ различных корней.

10.1. Общие теоремы

Любые n линейно независимых частных решений ЛОДУ (75) порядка n называются его *фундаментальной системой решений*(ФС).

Имеет место

Теорема 1.

Фундаментальная система решений существует.

Теорема 2. (О структуре общего решения ЛОДУ.)

Общее решение ЛОДУ (75) имеет вид

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{76}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — образуют ФС решений уравнения (75), а C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Другими словами:

Общее решение ЛОДУ (75) порядка n есть линейная комбинация его n линейно независимых частных решений, коэффициенты линейной комбинации суть произвольные постоянные.

Теорема 3. (О структуре общего решения ЛНДУ.)

Общее решение ЛНДУ (74) порядка n дается формулой

$$y_{o.н} = y_{o.o} + y_{ч.н}, \tag{77}$$

где $y_{o.o}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (75), а $y_{ч.н}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (74).*

Другими словами:

Общее решение ЛНДУ (74) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (75) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (74).

10.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ (75) с постоянными коэффициентами, т.е. будем считать, что коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ — *вещественные* числа.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y(x) = e^{\lambda x}, \tag{78}$$

* Соответствующее однородное уравнение — это уравнение (75) с теми же коэффициентами, что и левая часть исходного неоднородного уравнения (74).

где λ — комплексное число.

Подстановка функции (78) в уравнение (75) дает

$$e^{\lambda x} l(\lambda) = 0,$$

где

$$l(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n \qquad (79)$$

—*характеристический многочлен* уравнения (75).

Уравнение (75) т.о. перешло в алгебраическое уравнение

$$l(\lambda) = 0. \qquad (80)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для однородного уравнения (75).

Рассмотрим следующие случаи:

I. Все корни характеристического уравнения (80) простые, т.е. характеристическое уравнение имеет n различных корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n. \qquad (81)$$

Этим корням соответствуют следующие n частных решений ЛОДУ (75):

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x} \qquad (82)$$

Можно проверить, что эти решения линейно независимы на любом сегменте $[a, b]$. В соответствии с теоремой 2 общее решение ЛОДУ (75) будет иметь вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}, \qquad (83)$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Если все числа (81) вещественны, то и функция (83) также будет вещественной. (Разумеется, если все произвольные постоянные C_j — вещественные числа.)

Если же хоть одно из характеристических чисел (корней характеристического уравнения (80)) комплексно, то и функция (83) комплексная.

Покажем, как в этом случае получить вещественное решение.

Пусть для определенности число λ_1 комплексное. Пусть $\lambda_1 = a+bi$, где a, b – вещественные числа, $b \neq 0$, i – мнимая единица. Т.к. уравнение (80) — алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами, то наряду с корнем $\lambda_1 = a+bi$ оно будет иметь и комплексно сопряженный корень $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = a-bi$. Этой паре комплексно сопряженных корней будут соответствовать следующие частные решения уравнения (75): $e^{\lambda_1 x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$ и $e^{\lambda_2 x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$.

Можно показать, что если в ФС (82) функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\overline{\lambda}_1 x}$ заменить функциями

$$u(x) = Re(y_1(x)) = e^{ax}\cos bx \quad \text{и} \quad v(x) = Im(y_1(x)) = e^{ax}\sin bx, \tag{84}$$

то получится также ФС решений ЛОДУ (75).

II. Среди корней характеристического уравнения (80) имеются кратные корни.

Пусть для определенности λ_1 — корень кратности r характеристического уравнения (или, как еще говорят, характеристическое уравнение имеет r одинаковых корней λ_1), т.е.

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r l_1(\lambda), \tag{85}$$

где $l_1(\lambda)$ — некоторый многочлен степени $n-r$ относительно λ и $l_1(\lambda_1) \neq 0$.

Можно доказать, что в этом случае в ФС (82) корню λ_1 кратности r характеристического уравнения (80) соответствуют следующие r линейно независимые частные решения ЛОДУ (75):

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}, y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}. \tag{86}$$

Если λ_1 вещественно, то и все функции (86) также будут вещественными.

Если λ_1 — комплексный корень кратности r характеристического уравнения (80), т.е. $\lambda_1 = a+bi$, где a, b – вещественные числа, $b \neq 0$, i – мнимая единица, то уравнение (80) будет иметь и комплексно сопряженный корень $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = a-bi$ той же самой кратности r. Этой паре комплексно сопряженных корней в ФС уравнения (75) будут соответствовать следующие $2r$ вещественные частные решения ЛОДУ (75):

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx, y_2(x) = xe^{ax}\cos bx, \ldots, y_r(x) = x^{r-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$y_{r+1}(x) = e^{ax}\sin bx, y_{r+2}(x) = xe^{ax}\sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1}e^{ax}\sin bx. \tag{87}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 20.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет два простых корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$. Следовательно, уравнение имеет общее решение $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x}$. $\square$

Пример 21.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0$ имеет два простых корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = C_1e^{-x} + C_2$. $\square$

Пример 22.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+5 = 0$ имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = -2-i$ и $\lambda_2 = -2+i$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. $\square$

Пример 23.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$ имеет один корень $\lambda_1 = -1$ кратности 2. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} = (C_1 + C_2x)e^{-x}$. $\square$

Пример 24.

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Р е ш е н и е.

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

можно записать в виде

$$\left(\lambda^2 + 4\right)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Оно имеет двойной вещественный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, или, что то же самое, корень $\lambda_1 = 1$ кратности $r = 2$, и пару простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Общее решение исходного однородного уравнения

$$y_{o.o} = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x. \quad \square$$

Пример 25.

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Р е ш е н и е.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Найдем его корни $\lambda_1 = 0$ – простой корень, $\lambda_2 = 1$ — корень кратности $r = 3$. Следовательно, общее решение исходного однородного уравнения имеет вид

$$y_{o.o} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x. \quad \square$$

Пример 26.

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0.$$

Р е ш е н и е.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda - i)^2(\lambda+i)^2 = 0.$$

Найдем его корни. Это $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Каждый из корней имеет кратность $r = 2$. Следовательно, общее решение исходного однородного уравнения имеет вид

$$y_{o.o} = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x. \quad \square$$

10.3. ЛНДУ. Метод Лагранжа

Для линейного неоднородного дифференциального уравнения (74) с заданной непрерывной функцией $f(x)$ в правой части можно при помощи квадратур найти общее решение, пользуясь *методом вариации (изменения) произвольных постоянных Лагранжа.*

Как известно (теорема 2),

общее решение ЛОДУ (75) имеет вид (76):

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ — образуют ФС решений уравнения (75), а C_1, C_2, $\ldots$, C_n — произвольные постоянные.

При использовании метода Лагранжа частное решение неоднородного уравнения (74) следует искать в виде

$$y_{ч.н} = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x), \tag{88}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ — те же самые частные решения ЛОДУ (75), а $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$ — некоторые неизвестные функции.

Формула (88) означает, что частное решение ЛНДУ ищется в том же самом виде, что и общее решение соответствующего ЛОДУ, но произвольные постоянные C_1, C_2, $\ldots$,C_n заменяются функциями u_1, u_2, $\ldots$,u_n (варьируются).

Можно показать(например,[4]), что для отыскания этих функций используется следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \ldots + u_n'(x)y_n(x) = 0, \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \ldots + u_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \quad\vdots \\ u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{89}$$

Пример 27.
Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}\,.$$

Решение.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

и найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения определим по формуле (76):

$$y_{o.o} = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,.$$

Теперь будем искать частное решение $y_{ч.н}$ исходного неоднородного уравнения в виде

$$y_{ч.н} = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x, \qquad (*)$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — неизвестные функции от x. Для их нахождения составим систему (89):

$$\begin{cases} u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin(x) = 0, \\ -\,u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}\,. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение этой системы на $\cos x$, а второе на $(-\sin x)$ и сложим их:

$$u_1'(x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = -1, \qquad \text{или} \qquad u_1'(x) = -1.$$

Аналогично $u_2'(x) = \operatorname{ctg} x$. Отсюда, интегрируя, находим

$$u_1(x) = -x + \tilde{C}_1, \quad u_2(x) = \ln|\sin x| + \tilde{C}_2.$$

Подставляя выражения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в (*), получаем частное решение исходного ЛНДУ:

$$y_{ч.н} = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Замечание. Т.к. нам нужно хоть какое–нибудь частное решение, то положим $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$.

Далее имеем

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н},$$

т.е.

$$y_{о.н} = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|,$$

или

$$y_{о.н} = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x. \quad \square$$

Пример 28.

Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' + y'' = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}.$$

Р е ш е н и е.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$y_{о.о} = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x.$$

Ищем общее решение исходного ЛНДУ в виде

$$y_{о.н} = u_1(x) + u_2(x)x + \big(u_3(x) + u_4(x)x\big)e^x. \qquad (**)$$

Для нахождения неизвестных функций u_k запишем систему (89):

$$\begin{cases} u_1'(x) + u_2'(x)x + \big(u_3'(x) + u_4'(x)x\big)e^x = 0, \\ u_2'(x) + \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+1)\big)e^x = 0, \\ \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+2)\big)e^x = 0, \\ \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+3)\big)e^x = \dfrac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \end{cases}$$

Вычитая из четвертого уравнения третье, получаем

$$u_4'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5} e^{-x}.$$

Далее последовательно определяем

$$u_3'(x) = -u_4'(x)(x+2) = -\frac{2x^3 + 16x^2 + 48x + 48}{x^5} e^{-x},$$

$$u_2'(x) = u_4'(x)e^x = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5},$$

$$u_1'(x) = -u_2'(x)x + 2u_4'(x)e^x =$$

$$= -\frac{24x + 12x^2 + 2x^3}{x^5} + 2\frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5} = \frac{-2x^3 - 8x^2 + 48}{x^5}.$$

Интегрируя эти равенства, находим

$$u_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C_1,$$

$$u_2(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C_2,$$

$$u_3(x) = \left(\frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x} + C_3,$$

$$u_4(x) = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-x} + C_4.$$

З а м е ч а н и е. При интегрировании можно воспользоваться рекуррентными формулами для интегралов $I_k = \int \frac{dx}{x^k e^x}$. При $k > 1$ справедливо

$$I_k = -\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{x^{k-1}e^x} + I_{k-1}\right).$$

Эти формулы могут быть получены простым интегрированием по частям.

Подставляя теперь функции u_k в равенство (**), приходим к общему решению исходного нелинейного уравнения:

$$y_{о.н} = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x + \frac{1}{x}. \quad \square$$

10.4. ЛНДУ. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть имеется *линейное неоднородное дифференциальное уравнение* (74) с <u>постоянными</u> коэффициентами и правой частью *специального вида*, т. е.

$$f(x) = e^{ax}\left(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right), \tag{90}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ и $P_l(x)$, $Q_m(x)$ — алгебраические полиномы от x степеней l и m.

В этом случае частное решение $y_{ч.н}$ ЛНДУ (74) можно найти методом *неопределенных коэффициентов* в виде

$$y_{ч.н} = x^r e^{ax}\left(\tilde{P}_s(x)\cos bx + \tilde{Q}_s(x)\sin bx\right). \tag{91}$$

Здесь

$$s = \max\{l, m\}, \tag{92}$$

$\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ — алгебраические полиномы степени s с неизвестными пока коэффициентами, r — кратность корня $\lambda = a + bi$ характеристического уравнения (80) (если $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то его кратность равна нулю: $k = 0$; если $a + bi$ — простой корень характеристического уравнения, то $r = 1$.) Коэффициенты полиномов определятся после того, как подставим функцию (91) в уравнение (74) и запишем условие равенства коэффициентов при одинаковых функциях (при $\cos bx$, $\sin bx$ и при одинаковых степенях x) в обеих частях получившегося равенства. Преимущество этого метода состоит в том, что решение будет найдено без вычисления неопределенных интегралов.

Замечание. Если правая часть ЛНДУ (74) равна сумме $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_p(x)$ нескольких функций, то частное решение такого уравнения равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_p(x)$ (*принцип суперпозиции*).

<u>Пример 29.</u>

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

Р е ш е н и е.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет два простых корня $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$. Следовательно, однородное уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0$$

имеет общее решение $y_{o.o} = C_1e^{-2x} + C_2e^x$.

Согласно формулам (90), (92) $a = 1$, $b = 0$, $P_l(x) = x$, $l = 1 = s$. Заметим, что параметры левой части в виде числа $a + bi = 1 + 0i$ совпадают с простым корнем $\lambda_2 = 1$, поэтому $r = 1$. Частное решение ищем в виде (91):

$$y_{ч.н} = xe^x(Ax + B).$$

Подставляя его в исходное уравнение, находим A и B:

$$y' = e^x\left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right),$$
$$y'' = e^x\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right) + e^x\left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right) -$$
$$- 2e^x\left(Ax^2 + Bx\right) = xe^x \quad \text{или}$$

$$e^x(6Ax + 2A + 3B) = xe^x \Rightarrow \begin{cases} 6A = 1, \\ 2A + 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6}, \\ B = -\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{ч.н} = \dfrac{xe^x(3x - 2)}{18}$.

Окончательно общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{o.н} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{xe^x(3x - 2)}{18}. \quad \square$$

Пример 30.

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y' = e^x + x + 2\sin x.$$

Р е ш е н и е.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda = 0$ имеет два простых корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, однородное уравнение

$$y'' - y' = 0$$

имеет общее решение $y_{o.o} = C_1e^x + C_2$.

Правая часть исходного уравнения является суммой трех функций специального вида. Рассмотрим вспомогательные уравнения:

а)
$$y'' - y' = e^x. \qquad (*)$$

Согласно формулам (90), (92) здесь $a = 1$, $b = 0$, $P_l(x) \equiv 1$, $l = 0 = s$. Заметим, что параметры левой части в виде числа $a+bi = 1+0i$ совпадают с простым корнем $\lambda_1 = 1$. Частное решение ищем в виде (91):

$$y_{ч.н1} = Axe^x.$$

Подставляя его в уравнение (*), находим A:

$$y' = A(x+1)e^x, \quad y'' = A(x+2)e^x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(x+2)e^x - A(x+1)e^x = e^x, \quad \text{или} \quad Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1.$$

Следовательно, $y_{ч.н1} = xe^x$.

б)
$$y'' - y' = x. \qquad (**)$$

Имеем $a = 0$, $b = 0$, $P_l(x) = x$, $l = 1 = s$ (см. (90), (92)). Снова параметры правой части образуют число $a+bi = 0+0i$, совпадающее с простым корнем $\lambda_2 = 0$. Частное решение будем искать в виде (91):

$$y_{ч.н2} = x(Bx + C).$$

Подставляя его в дифференциальное уравнение (**), находим B и C:

$$y' = 2Bx + C, \quad y'' = 2B \Rightarrow 2B - (2Bx + C) = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B - C = 0, \\ -2B = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{2}, \\ C = -1. \end{cases}$$

Отсюда $y_{ч.н2} = -\frac{x^2}{2} - x$.

в)
$$y'' - y' = 2\sin x. \qquad (***)$$

Здесь $a = 0, b = 1, P_l(x) = 0, Q_m(x) = 2, l = m = 0 = s$ (см. (90), (92)). Параметры правой части образуют число $a + bi = 0 + 1i$, не совпадающее ни с каким из λ_j, поэтому частное решение следует искать в виде (см. (91))

$$y_{ч.н3} = D\cos x + E\sin x.$$

Вычисляя последовательно производные $y' = -D\sin x + E\cos x$, $y'' = -D\cos x - E\sin x$ и подставляя их в уравнение (***), получаем

$$-D\cos x - E\sin x + D\sin x - E\cos x = 2\sin x.$$

Опираясь на линейную независимость $\cos x$ и $\sin x$, составляем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -D - E = 0, \\ -E + D = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = -1, \\ D = 1. \end{cases}$$

Значит, $y_{ч.н3} = \cos x - \sin x$, и

$$y_{ч.н} = y_{ч.н1} + y_{ч.н2} + y_{ч.н3} = xe^x - \frac{x^2}{2} - x + \cos x - \sin x.$$

Окончательно общее решение дифференциального уравнения (86) имеет вид

$$y_{о.н} = C_1e^x + C_2 + xe^x - \frac{x^2}{2} - x + \cos x - \sin x. \quad \square$$

Пример 31.
Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - y' = \sin x. \tag{I}$$

Р е ш е н и е.
Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (I), имеет вид

$$y_{о.о} = C_1e^{-x} + C_2 + C_3e^x. \tag{II}$$

Так как $a = 0$, $b = 1$, $l = m = s = 0$, $0 + i \neq \lambda_j$, $k = 0$ (см. (90), (92)), то ищем частное решение уравнения (I) в виде

$$y_{ч.н} = A\cos x + B\sin x. \tag{III}$$

Для нахождения A и B продифференцируем эту функцию три раза и подставим полученное в (I). Будем иметь

$$2A\sin x - 2B\cos x = \sin x \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Подставляя A и B в формулу (III) и, далее, (III) и (II) в (I), приходим к общему решению уравнения (102):

$$y_{о.н} = C_1e^{-x} + C_2 + C_3e^x + \frac{\cos x}{2}. \quad \square$$

10.5. Уравнение Эйлера

*Уравнение Эйлера** имеет вид

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x), \tag{93}$$

где все $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — известные постоянные, $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция. Оно приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, если вместо x ввести новую переменную t по формуле

$$t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t.$$

Пример 32.

Решить дифференциальное уравнение

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0. \tag{*}$$

Решение.

Способ 1.

Осуществим в уравнении (*) замену переменной $x = e^t$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = e^{-t}y'_t,$$

* Л. Эйлер (L. Euler, 1707—1783) — швейцарский математик, работал в Петербургской АН (1726—1741, 1766—1783).

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-t}\Big/e^t = e^{-2t}\left(y''_{t^2} - y'_t\right),$$

и уравнение (111) примет вид

$$y''_{t^2} - y'_t - 4y'_t + 6y = 0 \quad \text{или} \quad y''_{t^2} - 5y'_t + 6y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Поэтому общим решением последнего уравнения является

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}.$$

Делая здесь обратную замену, получаем общее решение уравнения (*):

$$y = C_1x^2 + C_2x^3.$$

Способ 2.

Будем искать решение уравнения (*) в виде $y = x^\lambda$, где λ — неизвестное число. Тогда после подстановки его в уравнение (*) получаем

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0 \quad \text{или} \quad x^\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 6\right) = 0.$$

Так как $x^k \not\equiv 0$, то $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Находя отсюда корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, записываем два линейно независимых решения уравнения (*): $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x^3$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1x^2 + C_2x^3. \quad \square$$

Пример 33.

Решить дифференциальное уравнение

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x. \tag{**}$$

Р е ш е н и е.

Осуществим в уравнении (**) замену переменной $x = e^t$. Тогда придем к уравнению

$$y''_{t^2} - 5y'_t + 6y = t. \tag{**.1}$$

Соответствующее однородное уравнение решено в примере 32. Осталось найти частное решение последнего уравнения. Согласно (90) и (92) $a = b = 0$, $m = 1$. Так как корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} \neq 0$ (см. пример 32), то частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н} = At + B.$$

Подставляя это выражение в уравнение (**.1), получаем

$$-5A + 6(At + B) = t \quad \text{или} \quad 6At + (-5A + 6B) = t,$$

откуда $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{5}{36}$, и $y_{ч.н} = \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$. Т.о. общее решение уравнения (**.1) имеет вид $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$. В результате общее решение уравнения (**) записывается в виде

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{6} \ln x + \frac{5}{36}. \quad \square$$

Задача №13

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

13.3. $y'' + 4y = 0.$

13.4. $y'' - y' - 2y = 0.$

13.5. $y'' - 2y' = 0.$

13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0.$

13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

13.9. $y'' + 25y = 0.$

13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0.$

13.11. $y'' + 3y' = 0.$

13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0.$

13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0.$

13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0.$

13.15. $y'' + 16y = 0.$

13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0.$

13.17. $y'' - 3y' = 0.$

13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0.$

13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
13.21. $y'' + 9y = 0$.
13.22. $y'' + y' - 2y = 0$.
13.23. $y'' + 2y' = 0$.
13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
13.26. $y'' - 4y = 0$.
13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0$.
13.28. $y'' + 2y' + y = 0$.
13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0$.
13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0$.

Задача №14

В каждом варианте написать вид частного решения с неопределенными коэффициентами (не находя их числовых значений):

14.1. $y'' - 5y' + 4y = xe^{4x} + \sin 4x + \cos x$.
14.2. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin x + e^{3x} + \cos x$.
14.3. $y'' + 25y = x^5e^{5x} + \sin 5x + \cos 25x$.
14.4. $y'' + 3y' = x^3e^{-3x} + x^3 + \sin 3x$.
14.5. $y'' - y' - 2y = x^2e^{2x} + \sin x + \cos 2x$.
14.6. $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin 2x + \cos x$.
14.7. $y'' - 4y' = x^4e^{4x} + x^4 + \sin 4x$.
14.8. $y'' + 16y = x^4e^{4x} + \sin 4x + \cos 16x$.
14.9. $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x} + \sin 4x + \cos x$.
14.10. $y'' + 9y = x^3e^{3x} + \sin 9x + \cos 3x$.
14.11. $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin x + e^x + \cos x$.
14.12. $y'' - 4y' + 3y = x^3e^x + \sin x + \cos 3x$.
14.13. $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{-3x} + \sin 3x + e^{3x}$.
14.14. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x + e^{-x} + \cos x$.
14.15. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} + \sin x + e^x$.
14.16. $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x + e^x + \sin 2x$.
14.17. $y'' - 2y' - 3y = x^3e^{3x} + \sin 3x + \cos x$.
14.18. $y'' - 5y' + 6y = x^3e^{2x} + \sin 2x + \cos 3x$.
14.19. $y'' + 2y' = x^2e^{-2x} + x^2 + \sin 2x$.
14.20. $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\cos x + e^{-3x} + \sin x$.
14.21. $y'' + 4y' + 3y = x^2e^{-x} + \sin x + \cos 3x$.
14.22. $y'' + 2y' - 3y = xe^x + \sin 3x + \cos x$.
14.23. $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x} + \sin 2x + \cos x$.
14.24. $y'' - 2y' = x^2e^{2x} + x^2 + \sin 2x$.

14.25. $y'' + 3y' - 4y = xe^x + \sin x + \cos 4x$.
14.26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x + e^{2x} + \sin x$.
14.27. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + \cos 2x + e^{2x}$.
14.28. $y'' - 3y' = x^3 e^{3x} + x^3 + \sin 3x$.
14.29. $y'' - 8y' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin x + \cos 4x$.
14.30. $y'' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 4x + \cos 2x$.

Задача №15

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

15.1. $y'' - 10y' + 26y = e^x(8\cos x + 24\sin x)$.
15.2. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60\cos x + 5\sin x)$.
15.3. $y'' - 8y' + 25y = e^x(45\cos x + 35\sin x)$.
15.4. $y'' + 6y' + 10y = e^x(72\cos x - 16\sin x)$.
15.5. $y'' - 6y' + 18y = e^x(56\cos x + 32\sin x)$.
15.6. $y'' + 4y' + 5y = e^x(60\cos x - 27\sin x)$.
15.7. $y'' - 4y' + 20y = e^x(110\cos x + 30\sin x)$.
15.8. $y'' + 2y' + 2y = e^x(36\cos x - 28\sin x)$.
15.9. $y'' + 10y' + 29y = e^x(363\cos x - 69\sin x)$.
15.10. $y'' - 10y' + 34y = e^x(232\cos x + 104\sin x)$.
15.11. $y'' + 8y' + 20y = e^x(318\cos x - 82\sin x)$.
15.12. $y'' - 8y' + 17y = e^x(102\cos x + 81\sin x)$.
15.13. $y'' + 6y' + 13y = e^x(255\cos x - 85\sin x)$.
15.14. $y'' - 6y' + 10y = e^x(52\cos x + 60\sin x)$.
15.15. $y'' + 4y' + 8y = e^x(186\cos x - 78\sin x)$.
15.16. $y'' - 4y' + 13y = e^x(142\cos x + 41\sin x)$.
15.17. $y'' + 2y' + 5y = e^x(123\cos x - 61\sin x)$.
15.18. $y'' + 10y' + 34y = e^x(804\cos x - 172\sin x)$.
15.19. $y'' - 10y' + 29y = e^x(353\cos x + 171\sin x)$.
15.20. $y'' + 8y' + 25y = e^x(670\cos x - 167\sin x)$.
15.21. $y'' - 8y' + 20y = e^x(246\cos x + 138\sin x)$.
15.22. $y'' + 6y' + 18y = e^x(536\cos x - 152\sin x)$.
15.23. $y'' - 6y' + 13y = e^x(157\cos x + 99\sin x)$.
15.24. $y'' + 4y' + 13y = e^x(414\cos x - 127\sin x)$.
15.25. $y'' - 4y' + 8y = e^x(98\cos x + 54\sin x)$.
15.26. $y'' + 2y' + 10y = e^x(316\cos x - 92\sin x)$.
15.27. $y'' + 10y' + 26y = e^x(984\cos x - 288\sin x)$.
15.28. $y'' - 4y' + 5y = e^x(26\cos x + 57\sin x)$.
15.29. $y'' + 4y' + 20y = e^x(702\cos x - 150\sin x)$.

15.30. $y'' - 6y' + 25y = e^x(566\cos x + 139\sin x)$.

Задача №16

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

16.1. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 16\sin 2x$.
16.2. $y'' + 9y = 12\cos 3x - 24\sin 3x$.
16.3. $y'' + 16y = 24\cos 4x - 32\sin 4x$.
16.4. $y'' + 25y = 40\cos 5x - 40\sin 5x$.
16.5. $y'' + 36y = 60\cos 6x - 48\sin 6x$.
16.6. $y'' + 49y = 84\cos 7x - 56\sin 7x$.
16.7. $y'' + 64y = 112\cos 8x - 64\sin 8x$.
16.8. $y'' + 81y = 144\cos 9x - 72\sin 9x$.
16.9. $y'' + 4y = 36\cos 2x - 16\sin 2x$.
16.10. $y'' + 9y = 60\cos 3x - 6\sin 3x$.
16.11. $y'' + 16y = 8\cos 4x - 8\sin 4x$.
16.12. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x$.
16.13. $y'' + 36y = 36\cos 6x - 12\sin 6x$.
16.14. $y'' + 49y = 56\cos 7x - 14\sin 7x$.
16.15. $y'' + 64y = 80\cos 8x - 16\sin 8x$.
16.16. $y'' + 81y = 108\cos 9x - 18\sin 9x$.
16.17. $y'' + 4y = 28\cos 2x - 4\sin 2x$.
16.18. $y'' + 9y = 48\cos 3x - 6\sin 3x$.
16.19. $y'' + 16y = 72\cos 4x - 8\sin 4x$.
16.20. $y'' + 25y = 100\cos 5x - 20\sin 5x$.
16.21. $y'' + 36y = 12\cos 6x - 24\sin 6x$.
16.22. $y'' + 49y = 28\cos 7x - 28\sin 7x$.
16.23. $y'' + 64y = 48\cos 8x - 32\sin 8x$.
16.24. $y'' + 81y = 72\cos 9x - 36\sin 9x$.
16.25. $y'' + 4y = 20\cos 2x - 8\sin 2x$.
16.26. $y'' + 9y = 36\cos 3x - 12\sin 3x$.
16.27. $y'' + 16y = 56\cos 4x - 16\sin 4x$.
16.28. $y'' + 25y = 80\cos 5x - 20\sin 5x$.
16.29. $y'' + 36y = 108\cos 6x - 24\sin 6x$.
16.30. $y'' + 49y = 140\cos 7x - 42\sin 7x$.

Задача №17

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

17.1. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \operatorname{cosec} x$.

17.2. $y'' + 100y = 10 \operatorname{tg} 5x$.

17.3. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

17.4. $y'' + 9y = 6 \operatorname{tg} 3x$.

17.5. $y'' + 2y' + 10y = \dfrac{\sec 3x}{e^{x}}$.

17.6. $y'' + 36y = 36 \sec 6x$.

17.7. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{1 + e^{3x}}$.

17.8. $y'' - y' - 6y = \dfrac{1 + 2x + 24x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.9. $y'' + 64y = 8 \operatorname{tg} 4x$.

17.10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2}$.

17.11. $y'' + 4y' = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.12. $y'' + 4y' + 8y = \dfrac{\sec 2x}{e^{2x}}$.

17.13. $y'' + 16y = 32 \operatorname{ctg} 4x$.

17.14. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16e^{8x}}{1 + e^{4x}}$.

17.15. $y'' + 4y = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

17.16. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} \operatorname{cosec} x$.

17.17. $y'' + 36y = 6 \operatorname{tg} 3x$.

17.18. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.

17.19. $y'' + 4y = 6 \operatorname{tg} 2x$.

17.20. $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{\sec x}{e^{2x}}$.

17.21. $y'' + 64y = 64 \sec 8x$.

17.22. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{e^{3x}\left(1 + e^{3x}\right)}$.

17.23. $y'' + y' - 2y = \dfrac{1 - 2x + 8x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.24. $y'' + 16y = 4 \operatorname{tg} 2x$.

17.25. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^3}$.

17.26. $y'' - 5y' = \dfrac{25}{1 + e^{5x}}$.

17.27. $y'' + 2y' + 17y = \dfrac{\sec 4x}{e^{x}}$.

17.28. $y'' + 9y = 18\ \operatorname{ctg} 3x$.

17.29. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.30. $y'' + y = \dfrac{x + 6}{x^4}$.

Задача №18

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

18.1. $y''' - 4y'' - 5y' = -15x^2 - 44x - 15$.

18.2. $y''' - 9y'' + 20y' = 60x^2 + 26x + 10$.

18.3. $y''' - 7y'' + 12y' = 36x^2 - 66x + 56$.

18.4. $y''' - 5y'' + 6y' = 18x^2 - 42x + 40$.

18.5. $y''' - 3y'' + 2y' = -6x^2 + 26x - 8$.

18.6. $y''' - 3y'' - 10y' = 30x^2 - 22x - 78$.

18.7. $y''' - 2y'' - 8y' = 24x^2 + 28x - 58$.

18.8. $y''' - y'' - 6y' = 18x^2 + 18x - 52$.

18.9. $y''' + y'' - 2y' = -6x^2 - 2x + 8$.

18.10. $y''' - 3y'' - 4y' = -12x^2 - 34x - 14$.

18.11. $y''' - 2y'' - 3y' = -9x^2 - 6x + 1$.

18.12. $y''' - y'' - 2y' = -6x^2 - 2x$.

18.13. $y''' - 8y'' + 15y' = -45x^2 + 108x + 37$.

18.14. $y''' - 7y'' + 10y' = -30x^2 + 82x + 26$.

18.15. $y''' - 6y'' + 5y' = -15x^2 + 26x + 41$.

18.16. $y''' - 5y'' + 4y' = -12x^2 + 22x + 36$.

18.17. $y''' - 6y'' + 8y' = 24x^2 - 4x - 10$.

18.18. $y''' - 4y'' + 3y' = 9x^2 - 12x - 4$.

18.19. $y''' - 2y'' - 15y' = -45x^2 + 18x - 35$.

18.20. $y''' - y'' - 12y' = -36x^2 + 18x - 40$.

18.21. $y''' + y'' - 6y' = 18x^2 - 30x - 32$.

18.22. $y''' + 2y'' - 3y' = 9x^2 - 24x - 16$.

18.23. $y''' + 3y'' - 4y' = 12x^2 - 10x - 40$.

18.24. $y''' + 2y'' - 8y' = 24x^2 + 4x - 74$.

18.25. $y''' + y'' - 12y' = -36x^2 - 42x - 2$.

18.26. $y''' - y'' - 20y' = -60x^2 - 86x - 38$.

18.27. $y''' + 4y'' - 5y' = -15x^2 + 34x - 17$.

18.28. $y''' + 3y'' - 10y' = -30x^2 + 38x - 40$.

18.29. $y''' + 2y'' - 15y' = 45x^2 - 72x - 73$.

18.30. $y''' + y'' - 20y' = 60x^2 - 86x - 122$.

Задача №19

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

19.1. $y''' + 5y'' - y' - 5y = e^{2x}(21x + 52)$.
19.2. $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = e^{x}(-12x - 20)$.
19.3. $y''' + 3y'' - 13y' - 15y = e^{x}(-24x - 76)$.
19.4. $y''' + 2y'' - 18y' + 20y = -e^{x}(35x + 151)$.
19.5. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = e^{x}(-16x - 92)$.
19.6. $y''' - 8y'' + 11y' + 20y = e^{x}(24x + 142)$.
19.7. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = e^{x}(12x + 80)$.
19.8. $y''' - 4y'' + y' + 6y = e^{x}(4x + 28)$.
19.9. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 4)$.
19.10. $y''' - 2y'' - 13y' - 10y = e^{x}(-24x - 62)$.
19.11. $y''' - y'' - 10y' - 8y = e^{x}(-18x - 63)$.
19.12. $y''' - 7y' - 6y = e^{x}(-12x - 52)$.
19.13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}(12x + 79)$.
19.14. $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = e^{x}(-12x - 80)$.
19.15. $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{x}(-8x - 60)$.
19.16. $y''' - 3y' - 2y = e^{x}(-4x - 32)$.
19.17. $y''' - 7y'' + 7y' + 15y = e^{x}(16x + 12)$.
19.18. $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = e^{x}(8x + 10)$.
19.19. $y''' - 5y'' - y' + 5y = e^{2x}(-9x - 36)$.
19.20. $y''' - 4y'' - y' + 4y = e^{2x}(-6x - 29)$.
19.21. $y''' - 5y'' + 2y' + 8y = e^{x}(6x + 25)$.
19.22. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 19)$.
19.23. $y''' - y'' - 17y' - 15y = e^{x}(-32x - 240)$.
19.24. $y''' - 13y' - 12y = e^{x}(-24x - 202)$.
19.25. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = e^{x}(-8x - 6)$.
19.26. $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}(15x + 53)$.
19.27. $y''' + 4y'' - y' - 4y = e^{2x}(18x + 81)$.
19.28. $y''' + 3y'' - 6y' - 8y = e^{x}(-10x - 37)$.
19.29. $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = e^{x}(-20x - 104)$.
19.30. $y''' - 21y' - 20y = e^{x}(-40x - 258)$.

Задача №20

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения Эйлера:

20.1. $x^3y''' - x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2(-6\ln x - 29)$.

20.2. $x^3y''' + 2x^2y'' - 5xy' - 3y = x(-8\ln x - 60)$.
20.3. $x^3y''' + x^2y'' - 14xy' - 10y = x(-24\ln x - 62)$.
20.4. $x^3y''' - 11xy' - 5y = x(-16\ln x - 92)$.
20.5. $x^3y''' + 3x^2y'' - 12xy' - 12y = x(-24\ln x - 202)$.
20.6. $x^3y''' - 2x^2y'' - 5xy' + 5y = x^2(-9\ln x - 36)$.
20.7. $x^3y''' + x^2y'' - 8xy' - 4y = x(-12\ln x - 80)$.
20.8. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 4)$.
20.9. $x^3y''' + 5x^2y'' - 15xy' - 20y = x(-35\ln x - 151)$.
20.10. $x^3y''' + 7x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2(18\ln x + 81)$.
20.11. $x^3y''' + 2x^2y'' - 17xy' - 15y = x(-32\ln x - 240)$.
20.12. $x^3y''' - 3x^2y'' - 2xy' + 10y = x(8\ln x + 10)$.
20.13. $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2(12\ln x + 79)$.
20.14. $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x(4\ln x + 28)$.
20.15. $x^3y''' + 6x^2y'' - 9xy' - 15y = x(-24\ln x - 76)$.
20.16. $x^3y''' + 5x^2y'' - 8xy' - 12y = x(-20\ln x - 104)$.
20.17. $x^3y''' + 6x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2(15\ln x + 53)$.
20.18. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 19)$.
20.19. $x^3y''' - 4x^2y'' + xy' + 15y = x(16\ln x + 12)$.
20.20. $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = x(-12\ln x - 52)$.
20.21. $x^3y''' - 3x^2y'' + 12y = x(12\ln x + 80)$.
20.22. $x^3y''' + 7x^2y'' - 2xy' - 10y = x(-12\ln x - 20)$.
20.23. $x^3y''' + 3x^2y'' - 20xy' + 20y = x(-40\ln x - 158)$.
20.24. $x^3y''' + 6x^2y'' - 2xy' - 8y = x(-10\ln x - 37)$.
20.25. $x^3y''' + 5x^2y'' - 2xy' - 6y = x(-8\ln x - 6)$.
20.26. $x^3y''' - 2x^2y'' - 2xy' + 8y = x(6\ln x + 25)$.
20.27. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = x(-4\ln x - 32)$.
20.28. $x^3y''' + 2x^2y'' - 10xy' - 8y = x(-18\ln x - 63)$.
20.29. $x^3y''' - 5x^2y'' + 4xy' + 20y = x(24\ln x + 142)$.
20.30. $x^3y''' + 8x^2y'' + 5xy' - 5y = x^2(21\ln x + 52)$.

§11. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{94}$$

где $y_k = y_k(t)$ — искомые функции, y'_k — их производные $\frac{dy_k}{dt}$ и a_{ij} — заданные постоянные коэффициенты.

Линейная система называется *однородной*, если все $f_i(t) \equiv 0$. *Решением системы дифференциальных уравнений* (94) *называется совокупность функций* $y_1 = \varphi_1(t)$, $y_2 = \varphi_2(t)$, ..., $y_n = \varphi_n(t)$, *определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале* (a, b), *таких, что при подстановке их в уравнения системы* (94) *те превращаются в тождества, справедливые для всех значений* $t \in (a, b)$.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений всегда имеет тривиальное решение

$$y_1 \equiv y_2 \equiv \ldots \equiv y_n \equiv 0.$$

Решения системы (94) интерпретируются геометрически в виде *интегральных кривых* в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами t, y_1, y_2, ..., y_n (ср. §1).

Как и в случае одного уравнения (см. §1, §9), имеет место

3.Теорема существования и единственности: *если функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны на (a, b), то существует одно и только одно решение системы (94) $y_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y_1(t_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(t_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_n^{(0)}, \tag{95}$$

где $t_0 \in (a, b)$, $y_i^{(0)}$ — любые заданные числа. Теорема доказана в работе [2].

Общим решением системы дифференциальных уравнений (94) называется совокупность функций

$$y_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{96}$$

зависящих от n произвольных постоянных C_k, такая что:

1) для любого фиксированного набора постоянных C_k совокупность (96) является решением (частным) системы (94);

2) для любых $t_0 \in (a, b)$, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ можно подобрать такие значения C_1°, C_2°, ..., C_n°, что соответствующее решение (96) будет удовлетворять условиям (95), т. е. будут выполнены равенства

$$\varphi_i\left(t_0, C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ\right) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для систем (94) разработано несколько методов интегрирования. Остановимся на самом простом — сведении системы к одному уравнению. Этот метод называется *методом исключения.* Другие методы см. [3, т. III, ч. 1; 6; 7; 8].

Пример 34.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases} \tag{*}$$

Решение.

Выражая z из первого уравнения

$$z = \frac{1}{5}\left(x' + 4x - 2y\right) \tag{**}$$

и дифференцируя его

$$z' = \frac{1}{5}\left(x'' + 4x' - 2y'\right),$$

подставляем эти выражения во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} y' = 6x - y - \dfrac{6}{5}\left(x' + 4x - 2y\right), \\ \dfrac{1}{5}\left(x'' + 4x' - 2y'\right) = -8x + 3y + \dfrac{9}{5}\left(x' + 4x - 2y\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{5}\left(-6x' + 6x + 7y\right), \\ x'' = 5x' + 2y' - 4x - 3y. \end{cases} \tag{***}$$

Исключая отсюда y':

$$x'' = 5x' + \frac{2}{5}\left(-6x' + 6x + 7y\right) - 4x - 3y,$$

выразим y: $y = -5x'' + 13x' - 8x$. Дифференцируя последнее равенство: $y' = -5x''' + 13x'' - 8x'$, подставляем последние выражения в первое уравнение системы (***):

$$-5x''' + 13x'' - 8x' = \frac{1}{5}\left(-6x' + 6x - 35x'' + 91x' - 56x\right)$$

$$\text{или} \quad x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Согласно п. 10.1 общее решение имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}.$$

Отсюда получаем

$$y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}.$$

Наконец, подставляя выражения x и y в уравнение (**), находим

$$z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

Итак, общее решение системы (*)

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases} \qquad \square$$

Задача №21

В каждом варианте решить систему дифференциальных уравнений методом исключения:

21.1. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ 21.2. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$ 21.3. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 7y - 8z. \end{cases}$ 21.5. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$ 21.6. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} y' = 5y + 3z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 21.8. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$ 21.9. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 13y - 3z. \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 7y - 9z. \end{cases}$ 21.11. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$ 21.12. $\begin{cases} y' = y - 9z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 2y + 5z. \end{cases}$ 21.14. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.15. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 13y - z. \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} y' = -5y + z, \\ z' = 2y - 4z. \end{cases}$ 21.17. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$ 21.18. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 5y + 9z. \end{cases}$ 21.20. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.21. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$

21.22. $\begin{cases} y' = -7y + 3z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ 21.23. $\begin{cases} y' = 9y - 5z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$ 21.24. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

21.25. $\begin{cases} y' = 8y - 3z, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$ 21.26. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.27. $\begin{cases} y' = 2y - 5z, \\ z' = 4y - 2z. \end{cases}$

21.28. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 4y - 9z. \end{cases}$ 21.29. $\begin{cases} y' = 7y - 4z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.30. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

§12. Составление дифференциальных уравнений

Математика для специалиста является инструментом решения профессиональных задач. Дифференциальные уравнения — один из важнейших таких инструментов. В исследовательской работе умение составить дифференциальное уравнение по условиям реальной задачи является даже более важным, нежели умение решить его, поскольку решение может быть получено с помощью компьютера. Составлению дифференциальных уравнений посвящена обширная литература, например работы [10—19].

Существует два основных метода составления дифференциальных уравнений: *метод производной* и *метод дифференциалов*. Первый применяется в случае, когда можно установить закон изменения скорости изучаемого процесса; он приводит к уравнению, содержащему производную. Ко второму методу обращаются, если можно составить баланс притока и оттока каких-то величин (уравнение с дифференциалами). Эти методы взаимосвязаны.

Одной из замечательных особенностей природы является то, что разнообразные процессы могут описываться одним уравнением. Познакомимся с таким типом процессов.

Известно, что многие процессы в природе изменяют скорость именно пропорционально накопленному количеству вещества. Термин "количество вещества", конечно, условный — это может быть число особей в популяции, число журнальных статей, число нейтронов в ядерных реакторах, количество химического вещества, размер кристалла и т. п.

О п р е д е л е н и е.

В начальный момент $t = 0$ имеется некоторое количество вещества y_0, и с течением времени оно увеличивается (или уменьшается). Если в каждый момент времени скорость процесса $v(t)$ пропорциональна накопленному (или оставшемуся) количеству вещества $y(t)$, т. е. если справедлив закон

$$v(t) = ay(t), \quad t \geqslant 0, \tag{97}$$

то этот процесс называется *естественным ростом*. Параметр a имеет свое фиксированное значение для каждого конкретного процесса и характеризует быстроту изменения скорости: чем меньше a, тем медленнее изменяется скорость.

Пример 35. Задача о естественном росте.

В начальный момент имеется количество вещества y_0, и с течением времени оно изменяется по закону естественного роста (97). Найти функцию $y = y(t)$, с поиощью которой можно рассчитать количество вещества в любой момент $t \geqslant 0$.

Р е ш е н и е.

Из определения скорости и определения производной следует, что $v(t) = y'(t)$. Характеристическое свойство (97) процесса превращается в дифференциальное уравнение

$$y' = ay. \tag{98}$$

Решая его методом из §3, находим общее решение $y = Ce^{at}$ и решение начальной задачи (*закон Мальтуса**)

$$y = y_0 e^{at}. \tag{99}$$

На рис. 11. изображены графики решений (99) при $a = 1$ и различных y_0. Видно, что чем больше вещества y_0 было в начале процесса, тем круче поднимается вверх график экспоненты, тем больше скорость процесса. На рис. 12 показан ход убывающих процессов при $a = -1$.

* Т.Р. Мальтус (T.R. Maltus, 1766—1834) — английский экономист и священник.

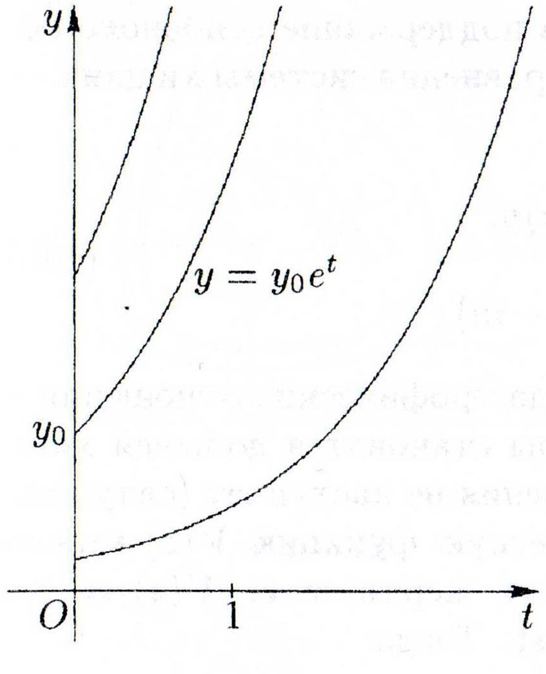

Рис. 11.

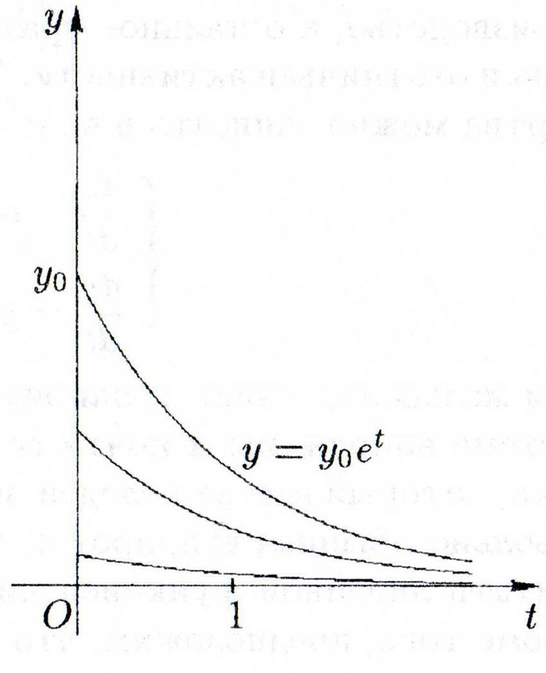

Рис. 12.

П р и м е ч а н и е. Решение реальной задачи свелось к решению математической задачи: найти частное решение уравнения (98), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$. Подобные математические аналоги реальных задач называют *математическими моделями*. □

Пример 36.Классическая модель Вольтерры – Лотки.*

Пусть $z(t)$ и $y(t)$ — численности жертв и хищников соответственно. Предположим, что единственным лимитирующим фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (числом жертв). Тогда в отсутствие хищников численность жертв должна расти экспоненциально с относительной скоростью α, а хищники в отсутствие жертв — также экспоненциально вымирать с относительной скоростью m. Коэффициенты α и m — коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно.

Пусть $V = V(z)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k-я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется хищником на вос-

* В. Вольтерра (V. Volterra, 1860—1940) — итальянский математик. А.Д. Лотка (A.J. Lotka, 1880—1949) — американский биолог.

производство, а остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности. Тогда уравнения системы хищник — жертва можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \alpha z - V(z)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y\big(kV(z) - m\big). \end{cases} \tag{100}$$

При малых значениях z, например, когда трофические отношения в системе напряжены и почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден, и насыщения не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию $V(z)$ можно считать линейной функцией численности жертв, т. е. $V(z) = \beta z$. Кроме того, предположим, что $k = \text{const}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \alpha z - \beta z y, \\ \dfrac{dy}{dt} = k\beta z y - m y. \end{cases} \tag{101}$$

В. Вольтерра показал, что эта система имеет интеграл вида

$$\left(\frac{e^Z}{Z}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = C, \tag{102}$$

где $Z = \frac{z}{z^*}$, $Y = \frac{y}{y^*}$, $z^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$. Если z_0 и y_0 — начальные значения численности жертв и хищников соответственно, то

$$C = \left(\frac{e^{z_0/z^*}}{z_0/z^*}\right)^m \left(\frac{e^{y_0/y^*}}{y_0/y^*}\right)^\alpha > 0,$$

и уравнение (102) описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, изображенных на рис. 13 (при построении графиков на компьютере приближенное решение уравнения $\frac{e^z}{z} - A = 0$ получено методом Ньютона* (см., например, [26]); для определенности полагались $m = \alpha = 1$ и $y^* = z^*$). При $\min C = C^* = e^{m+\alpha}$ кривые стягиваются в точку (z^*, y^*).

Графики функций $z(t)$ и $y(t)$ изображены на рис. 14. Обратите внимание на то, что функция $y(t)$ достигает экстремумов в те моменты, когда $z(t) = z^*$, а функция $z(t)$ — в те моменты, когда $y(t) = y^*$. □

---

* И. Ньютон (I. Newton, 1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

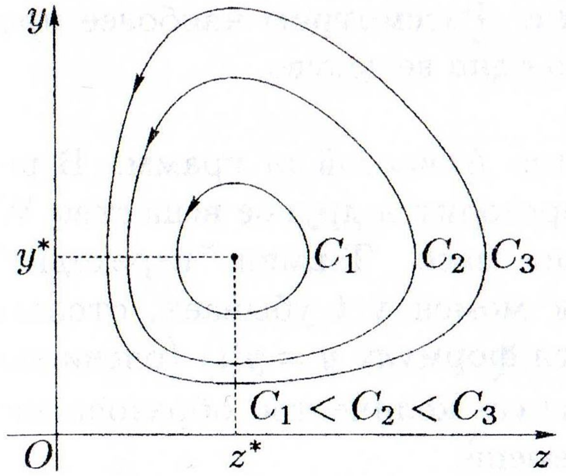

Рис. 13.

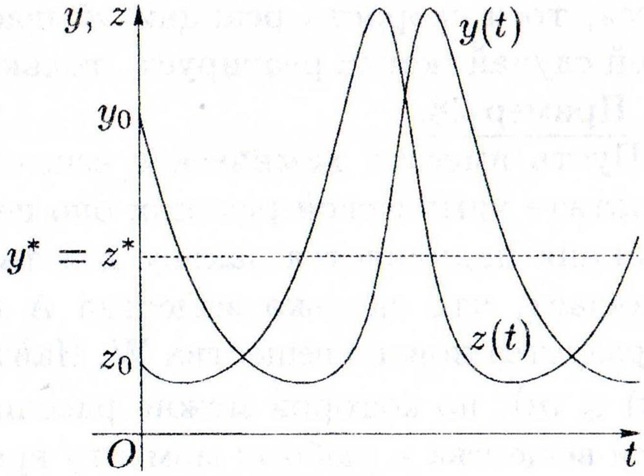

Рис. 14.

Пример 37.Модель химической реакции.

Составить дифференциальное уравнение очень легко, если известно, как связана скорость процесса с искомой функцией. Ответ на этот вопрос дает не математика, а та специальная область науки, к которой относится задача. Проследим это на примере задачи из области химии, где постоянно возникает проблема определения скорости реакции. Как правило, скорость убывает со временем, однако не пропорционально искомой функции. Вместе с тем химические процессы близки к естественному росту, и решения получаются также с помощью экспонент e^{at}.

Пусть химическая реакция состоит в том, что одно или несколько веществ–реагентов A, B, ... соединяются при определенных условиях и образуют новое вещество W. Этот процесс происходит не моментально: какое-то количество нового вещества образуется в первую тысячную секунды, еще некоторое — в следующую долю секунды и т. д. Количество нового вещества, следовательно, возрастает со временем. Естественно возникают вопросы: как быстро возрастает? до каких пределов может дойти рост?

Скорость реакции — это скорость образования нового вещества, приближенно — прирост вещества в единицу времени. Во многих простых реакциях скорость подчиняется закону, известному под названием *закона действия масс*: скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс, т. е. тех количеств веществ A, B ..., которые к данному моменту времени еще не вступили в соединение. Поскольку количества реагирующих веществ уменьшаются, то и скорость реакции убывает. Рассмотрим наиболее простой случай, когда реагирует только одно вещество.

Пример 38.

Пусть имеется химическое вещество A массой m грамм. В результате химической реакции оно переходит в другое вещество W. Реакция подчиняется закону действия масс. Термин "переходит" означает, что сколько вещества A к моменту t убывает, столько образуется нового вещества W. Найти формулу $y = y(t)$ $\big($очевидно, $y(t) \leqslant m\big)$, по которой можно рассчитать количество образовавшегося вещества к любому моменту времени.

Р е ш е н и е.

Закон действия масс для одного реагента гласит, что скорость реакции пропорциональна оставшемуся на момент t количеству вещества A, т. е. $v(t) = k\big(m - y(t)\big)$. Поскольку скорость реакции есть скорость роста искомой функции, то $v(t) = y'(t)$, и приходим к дифференциальному уравнению

$$y' = k(m - y). \tag{103}$$

Разделяя переменные (см. § 3), находим общее решение:

$$y = m + Ce^{-kt}.$$

В начальный момент $t = 0$ вещества W не было, следовательно, искомая функция должна удовлетворять условию $y(0) = 0$. Подставляя это начальное условие в общее решение, находим значение $C = -m$. Окончательно решение задачи дает функция

$$y = m\left(1 - e^{-kt}\right). \tag{104}$$

График решения (104) показан на рис 15. Видно, что решение (104) имеет горизонтальную асимптоту. Отсюда следует: 1) реакция никогда не закончится; 2) количество нового вещества асимптотически приближается к m. □

Итак, как было показано, построение математических моделей разнообразных задач из области естествознания приводит к дифференциальным уравнениям первого порядка. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического, биологического или другого процесса.

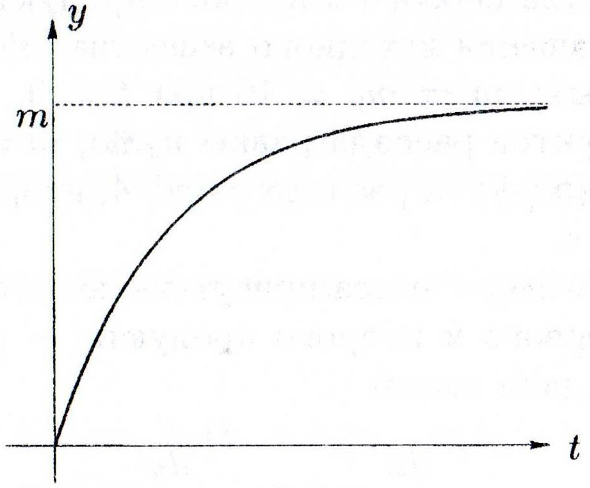

Рис. 15.

При решении таких задач необходимо:

1) составить дифференциальное уравнение по условию задачи, т. е. соотношение, связывающее независимую переменную t, трактуемую чаще всего как время, искомую функцию $x(t)$ и скорость ее изменения $\frac{dx}{dt}$;

2) определить тип полученного уравнения и выбрать метод его решения;

3) найти общее решение уравнения;

4) получить частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям;

5) в случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров (коэффициента пропорциональности и др.), входящих в общее решение дифференциального уравнения;

6) найти, если это требуется, численные значения искомых величин.

При составлении дифференциальных уравнений используется геометрический или механический смысл производной; кроме того, в зависимости от условия задачи применяются соответствующие законы физики, механики, химии, биологии и других наук.

Пример 39.

Некоторое радиоактивное вещество, начальная масса которого m_0, дает два продукта распада, каждый с разной скоростью. Известно, что скорость образования каждого продукта пропорциональна массе присутствующего исходного вещества. Найти зависимость количества первого и второго продукта распада от времени и закон превращения исходного вещества. Решить задачу при следующих данных: $m = m_0 = 10$ при $t = 0$, количества первого и второго продуктов распада равны нулю; $m = 5$ при $t = 3$, количество первого продукта распада равно 4, второго 1.

Р е ш е н и е.

Пусть к моменту t масса присутствующего вещества равна m, а количество первого и второго продукта — соответственно x и y. По условию задачи имеем

$$\frac{dx}{dt} = k_1 m, \quad \frac{dy}{dt} = k_2 m, \tag{105}$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности. Деля второе уравнение на первое, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1},$$

откуда получаем $y = \frac{k_2}{k_1}x + C$.

Из условия $y = 0$ при $x = 0$ определяем $C = 0$. Итак, $y = \frac{k_2}{k_1}x$. Так как $y = 1$ при $x = 4$, то $k_1 = 4k_2$. Далее из уравнений (105) получаем

$$\frac{d(x+y)}{dt} = (k_1 + k_2)m.$$

Но по условию задачи $x+y+m = m_0$, поэтому последнее уравнение примет вид

$$\frac{dm}{dt} = -5k_2 m.$$

Интегрируя, получаем $m = C_1 e^{-5k_2 t}$.

Из условия $m = 10$ при $t = 0$ определяем $C_1 = 10$. Аналогично, так как $m = 5$ при $t = 3$, имеем $k_2 = \frac{1}{15}\ln 2$. Итак,

$$m = 10 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}; \quad x = 8\left(1 - 2^{-\frac{t}{3}}\right), \quad y = 2\left(1 - 2^{-\frac{t}{3}}\right). \quad \square$$

<u>Пример 40.</u>

Некоторое вещество А превращается в вещество В через промежуточное вещество С. Происходят *реакции первого порядка*, т. е. скорость образования каждого вещества пропорциональна количеству присутствующего исходного вещества. Обозначив x, y, z число молей соответственно веществ A, C, B в момент t, найти зависимость x, y и z от времени.

Р е ш е н и е.
$\frac{dx}{dt} = -k_1 x$, $\quad \frac{dz}{dt} = k_2 y$, $\quad \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y$.

Дифференцируя второе уравнение и используя третье, получаем $\frac{d^2 z}{dt^2} = k_1 k_2 x - k_2^2 y$.

Пусть $x + y + z = a$, тогда $x = a - y - z$ и последнее уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = k_1 k_2 a - k_2(k_1 + k_2)y - k_1 k_2 z.$$

Подставляя значение y из второго уравнения, получаем

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{dz}{dt} + k_1 k_2 z = k_1 k_2 a.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами может быть записано так:

$$\frac{d^2(z-a)}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{d(z-a)}{dt} + k_1 k_2 (z-a) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 = 0$$

таковы: $\lambda_1 = -k_1$, $\quad \lambda_2 = -k_2$. Поэтому общее решение имеет вид

$$z = C_1 e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t} + a.$$

Далее находим

$$y = \frac{1}{k_2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{k_2}\left(k_1 C_1 e^{-k_1 t} + k_2 C_2 e^{-k_2 t}\right),$$

$$x = a - y - z = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) C_1 e^{-k_1 t}. \quad \square$$

Пример 41.

Некоторое вещество A превращается в вещество B. Вещество B превращается в A и C, а C — в B. Имеем две обратимые реакции первого порядка:

$$A \rightleftarrows B, \qquad B \rightleftarrows C.$$

Обозначив x, y, z число молей соответственно веществ А, В и С в момент времени t, найти зависимость их от времени t при условии, что в начале реакции имеется один моль исходного вещества.

Р е ш е н и е.

За время dt будем иметь $dx = k_2 y\,dt - k_1 x\,dt$, откуда

$$\frac{dx}{dt} = k_2 y - k_1 x. \tag{106}$$

Аналогично $dy = -k_2 y\,dt - k_3 y\,dt + k_1 x\,dt + k_4 z\,dt$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dt} = -(k_2 + k_3)y + k_1 x + k_4 z. \tag{107}$$

По условию задачи $x + y + z = 1$. Дифференцируя уравнение (106) и подставляя значения $\frac{dy}{dt}$, z и y, найденные из уравнений (106), (107) и из соотношения $x + y + z = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = m,$$

где $a = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, $\quad b = k_1k_3 + k_2k_4 + k_1k_4$, $\quad m = k_2k_4$. Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общий интеграл которого имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{m}{b},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ при $a^2 > 4b$, а C_1 и C_2 — постоянные, определяющиеся из условий $x = 1$, $\quad \frac{dx}{dt} = -k_1$ при $t = 0$. Имеем

$$C_1 = \frac{\lambda_2\left(1 - \frac{m}{b}\right) + k_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\lambda_2\left(1 - \frac{m}{b}\right) + k_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Далее находим

$$y = \frac{1}{k_2}\left(\frac{dx}{dt} + k_1 x\right) = \frac{1}{k_2}\left(C_1(\lambda_1 + k_1)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 + k_1)e^{\lambda_2 t} + \frac{k_1 m}{b}\right),$$

$$z = 1 - x - y = 1 - \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)\frac{m}{b} -$$
$$- C_1\left(1 + \frac{\lambda_1 + k_1}{k_2}\right)e^{\lambda_1 t} - C_2\left(1 + \frac{\lambda_2 + k_1}{k_2}\right)e^{\lambda_2 t}. \quad \square$$

Задача №22

В некоторой химической реакции вещество В разлагается на два вещества X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна количеству b вещества В. К началу реакции (т. е. к моменту $t = 0$) $b = b_0$, $x = 0$, $y = 0$, а по истечении одного часа $b = \frac{1}{2}b_0$, $x = \frac{b_0}{8}$, $y = \frac{3}{8}b_0$.

В каждом варианте для заданного $b_0 = 2s$ г. (s – номер варианта, $s = 1, 2, \ldots, 30$) найти законы изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t.

Указание.

Производная $\dfrac{dx}{dt}$ выражает скорость образования вещества X, $\dfrac{dy}{dt}$ — скорость образования вещества Y. В момент времени t масса b разложившегося вещества В определяется следующим образом: $b = b_0 - x - y$. По условию задачи получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k(b_0 - x - y), \quad \frac{dy}{dt} = l(b_0 - x - y),$$

где k, l — коэффициенты пропорциональности.
Решите эту систему, а затем для нахождения значений произвольных постоянных и параметров k, l используйте данные в условии задачи значения b, x и y при $t = 0$ и $t = 1$.

В заключение отметим, что имеется много задач, приводящих к дифференциальным уравнениям 2–го и более высокого порядка (см. список литературы в конце). Из–за недостатка места на них останавливаться не будем.

Контрольное задание №2

Решить задачи №№13.s — 22.s для варианта №s (s = 1, 2, ..., 30).

Рекомендуемая литература

Теоретические курсы

1. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. — М.: Просвещение, 1988, 256 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Физматгиз, 1961, 312 с.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2. — М.: Наука, 1974, 656 с., Т. 3., Ч. 1, 2. — М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1974, 323 и 627 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959, 468 с.

Сборники задач

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1971, 416 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов/ Под ред. Б.П. Демидовича. — М.: Физматгиз, 1959, 472 с.
7. Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1978, 287 с.
8. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышэйшая школа, 1987, 320 с.
9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1992, 128 с.

Приложения

10. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987, 160 с.
11. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. — Л.: Химия: 1971, 640 с.
12. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976, 288 с.
13. Костенко И.П. Дифференциальные уравнения и их приложения. — Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1991, 100 с.
14. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1973, 560 с.
15. Пономаренко А.К., Сахаров В.Ю., Степанова Т.В., Черняев П.К. Учебные и контрольные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб: Из-во С.Петербургского университета, 2000, 228 с.
16. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука: 1978, 352 с.
17. Турковский В.А. Сборник специализированных задач по дифференциальным уравнениям. — Киев: Киевск. политехн. ин-т, 1960, 52 с.
18. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями — М.: Мир: 1986, 244 с.
19. Hayes P. Mathematical Methods in the Social and Managerial Sciences. — N.Y.: Wiley & sons, 1975, 253 p.
20. Lotka A.J. Elements of mathematical biology. — N.Y.: Drower, 1956, 465 p.

ЛР № 040815 от 22.05.97.

Подписано к печати 26.09.2002 г. Формат бумаги 60X84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Объем 5,6 п.л. Тираж 160 экз. Заказ 2639.
Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинал-макета заказчика.
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 26.