**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.**
**Современная математика и ее приложения.**
**Тематические обзоры.**
**Том 999 (2021). С. 1–11**

УДК 517.98

# О ПРОИЗВЕДЕНИИ $l_{s,r}$-ЯДЕРНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. **О. И. РЕЙНОВ**

Аннотация. Цель статьи — исследовать возможности факторизации различного типа ядерных операторов через гильбертовы пространства и применить получаемые результаты к задачам о распределении собственных чисел операторов из соответствующих классов.

***Ключевые слова:*** ядерный оператор, класс Шаттена, пространство Лоренца, факторизация, гильбертово пространство.

***AMS Subject Classification:*** 47B10, 46B28

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Введение

Пожалуй, впервые задача о распределении собственных чисел ядерных операторов появилась (неявно) в 1909 г. статье И. Шура [15]. Доказанное там неравенство для собственных чисел интегральных операторов в $L_2(a,b)$ с квадратично суммируемым ядром теперь известно как неравенство Шура (из него следует, что собственные числа этих операторов лежат в $l_2$). Заметим, что в случае, когда ядра непрерывны, эти интегральные операторы являются ядерными в $C[a,b]$.

В 1915 г. Т. Лалеско [10], обобщая теорему Шура, рассмотрел интегральные операторы , представляющие собой суперпозиции двух операторов Гильберта-Шмидта (такие операторы являются ядерными в $L_2(a,b)$), установив, что эти операторы имеют абсолютно суммируемую последовательности собственных чисел. В работе [10] Е. Лалеско не указывал явно пространство, в котором действуют его операторы, но если считать, например, что ядра операторов непрерывны и сами операторы заданы в пространстве $C[a,b]$, то они представят собой первые примеры произведений двух ядерных операторов. Полученная же им теорема тогда является первой теоремой о том, что произведение двух ядерных операторов имеет абсолютно суммируемую последовательность собственных чисел (что потом, в 1955 г., в абстрактной форме докажет А. Гротендик; см. ниже).

В 1916 г. Т. Карлеман [4] привел первый пример интегрального оператора с непрерывным ядром в $C[0,2\pi]$ (это ядерный оператор), собственные числа которого лежат в $l_2 \setminus \cup_{r<2} l_r$. Этим была установлена точность теоремы Шура (если рассматривать ее как теорему об интегральном операторе с непрерывным ядром).

Абстрактное понятие ядерного (более того, $s$-ядерного) оператора было введено в рассмотрение лишь в 1955 г. А. Гротендиком [5] (после известных работ Шаттена, фон Ноймана и др.). Им были получены основные на то время результаты о распределении собственных чисел $s$-ядерных операторов.

После этой фундаментальной работы А. Гротндика над проблемой распределения собственных чисел как ядерных, так и близких к ним операторов работало (и продолжает работать) огромное число математиков. Невозможно перечислить всех основных авторов. В сравнительно близкий к исследованиям А. Гротендика период этим серьезно занимались такие специалисты, как В. Б. Лидский, A. Pietsch, А.С. Маркус и В.И. Мацаев, H. König, B. Maurey, W.B. Johnson и многие другие. Соответствующие ссылки можно найти, например, в монографиях [12] и [13].

Следует отметить фундаментальную работу [8], в которой, помимо получения большого числа важных результатов, впервые был рассмотрен вопрос о распределении собственных чисел произведений нескольких операторов в банаховых пространствах , принадлежащих различным операторным идеалам (таких как идеалы абсолютно суммирующих операторов).

Эта заметка, как и предыдущие две [1, 2] возникла благодаря следующему вопросу Б.С. Митягина, заданному в 2014 г. на конференции, посвященной памяти А. Пелчинского, в Бедлево (Польша): верно ли, что произведение двух ядерных операторов в банаховых пространствах факторизуется через ядерный оператор в гильбертовом пространстве?

В [1], используя пример Карлемана, мы показали, что ответ отрицателен. Там же были приведены точные результаты о факторизации произведений $s$-ядерных операторов в банаховых пространствах через операторы из классов Шаттена [14]. Затем, в работе [2], были получены их конечномерные аналоги и, в частности, приведены доказательства анонсированных ранее утверждений.

Здесь мы исследуем более общие вопросы. Именно, при каких (желательно, *точных*) значениях параметров $p,q$ $p,q \in (0,+\infty]$, произведения нескольких так называемых $(s,r)$-ядерных (и близких к ним) операторов в банаховых пространствах факторизуется через операторы в гильбертовом пространстве, принадлежащие классам Лоренца-Шаттена $S_{p,q}$. Результаты применяются к некоторым задачам о распределении собственных чисел.

## 2. Предварительные сведения

Мы придерживаемся терминологии монографии [13].. Везде далее через $X, Y, \dots$ обозначаются банаховы пространства, $L(X,Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из $X$ в $Y$. Для банахова сопряженного к пространству $X$ используется обозначение $X^*$. Если $x \in X$ и $x' \in X^*$, то используем обозначение $\langle x', x\rangle$ для $x'(x)$. Элементы пространств $X, X^*, Y$ и т.д. будут обозначаться через $x, x', y$ и т.д.. Обозначения $c_0, l_p, L_p (0 < p \leqslant \infty)$ стандартны.

Пространство Лоренца $l_{p,q}$ $(0 < p < \infty, 0 \leqslant \infty)$ состоит из последовательностей $\alpha := (\alpha_n) \in c_0$, для которых

$$||\alpha||_{p,q} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^{*q} n^{q/p-1}\right)^{1/q} < +\infty \text{ при } q < \infty \text{ и } ||\alpha||_{p\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^* n^{1/p} < +\infty,$$

где $(\alpha_n^*)$ есть неубывающая перестановка последовательности $\alpha$, $n$-й элемент $\alpha_n^*$ которой определяется так:

$$\alpha_n^* := \inf_{|J|<n} \sup_{j \notin J} |\alpha_j|.$$

С указанными квазинормами пространства $l_{p,q}$ являются полными квазинормированными пространствами. При $p = q < \infty$ получаем пространства $l_p$ (с квазинормой $||\cdot||_p$). Естественно считать, что $l_{\infty\infty} = l_\infty$ (с квазинормой $||\cdot||_\infty$). Отметим, что $l_{p,q_1} \subsetneq l_{p,q_2}$ для $q_1 < q_2$ и $l_{p_1,q_1} \subsetneq l_{p_2,q_2}$для $p_1 < p_2$ и для всех $q_1, q_2$.

Оператор $T : X \to Y$ называется *$s$-ядерным* $(0 < s \leqslant 1$, см., например, [13]), если он представим в виде $Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle x_k', x\rangle y_k$ для $x \in X$, где

$$(x_k') \subset X^*, (y_k) \subset Y, \sum_k ||x_k'||^s\, ||y_k||^s < \infty.$$

Мы используем обозначение $N_s(X,Y)$ для линейного пространства всех таких операторов и $\nu_s(T)$ для соответствующей квазинормы $\inf(\sum_k ||x_k'||^s\, ||y_k||^s)^{1/s}$. В случае, когда $s = 1$, эти операторы называют просто *ядерными*. Оператор $T : X \to Y$ называется *$(s,r)$-ядерным* $(0 < s < 1, 0 < r \leqslant \infty$ или $s = 1, 0 < r \leqslant 1$; см., например, [6]), если он может быть представлен в виде $Tx = \sum_{n=1}^\infty a_n \langle x_n', x\rangle y_n$ для $x \in X$, где $(x_n') \subset X^*$, $(y_n) \subset Y$, $||x_n'||, ||y_n|| \leqslant 1$, $(a_n) \in l_{s,r}$. Отметим, что мы можем (и будем) предполагать, что $||x'_n|| = ||y_n|| = 1$ для всех $n$ и что последовательность $(a_n)$ неотрицательная и убывающая.. Мы используем обозначения $N_{s,r}(X,Y)$ для векторного пространства всех таких операторов и $\nu_{s,r}(T)$ для соответствующей квазинормы $\inf ||(a_n)||_{l_{s,r}}$. В случае, когда $s = r = 1$ эти операторы называются *ядерными.*

Ниже мы рассматриваем только $(s,r)$-ядерные операторы для показателей, удовлетворяющих неравенствам $0 < r \leqslant s \leqslant 1$. Каждый $(s,r)$-ядерный оператор $T: X \to Y$ допускает факторизацию следующего вида:

$$T:\, X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{V} Y, \tag{1}$$

где $||V|| = ||W|| = 1$ и $\Delta$ — диагональный оператор с диагональю $(d_n) \in l_{s,r}$. Действительно, достаточно положить $Wx := (\langle x'_k, x\rangle)$, $V(\alpha_n) := \sum \alpha_n y_n$ и $\Delta(\beta_n) := (d_n\beta_n)$ (где $d_n := a_n$). Для наших целей, удобно переписать указанную факторизацию следующим образом:

$$T:\, X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta_1} l_2 \xrightarrow{\Delta_0} l_2 \xrightarrow{\Delta_2} l_1 \xrightarrow{V} Y, \tag{2}$$

где $\Delta_1 := (\sqrt{n^{r/s-1}d_n^r})$, $\Delta_2 := (\sqrt{n^{r/s-1}d_n^r})$ и $\Delta_0 := (n^{1-r/s}d_n^{1-r})$.

Предположим, что $\varepsilon > 0$ и в факторизации (1) $||V|| = ||W|| = 1$ и $||(d_n)||_{l_{s,r}} \leqslant (1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T)$. Тогда

$$\begin{aligned} ||\Delta_2|| &= ||\Delta_1|| \leqslant \pi_2(\Delta_1) \leqslant ||\sqrt{n^{r/s-1}d_n^r})||_{l_2} \\ &= ||n^{r/s-1}d_n^r)||_{l_1}^{1/2} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T)]^{r/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Также $\Delta_0 \in S_{q,v}(l_2)$, где $1/q = 1/s - 1$ и $1/v = 1/r - 1$. Более того, так как $1/q - 1/v = 1/s - 1/r$, $1 - r = r/v$ и $v/q - 1 + v - vr/s = v(1/s - 1/r + r(1/r - 1/s)) = v(1-r)(1/s - 1/r) = r(1/s - 1/r)$, то

$$\begin{aligned} \sigma_{q,v}(\Delta_0) &= \left(\sum n^{v/q-1}[n^{1-r/s}d_n^{1-r}]^v\right)^{1/v} \\ &= \left(\sum [n^{1/s-1/r}d_n]^r\right)^{1/v} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s,r}(T)]^{r/v}. \end{aligned} \tag{4}$$

Факторизация $(s,r)$-ядерного оператора $T$, описанна в (2)–(4) будет называться *$\varepsilon$-допустимой факторизацией для $T$.*

Для нас очень важным будут классы $S_{p,q}$ (классы Лоренца-Шаттена) операторов в гильбертовых пространствах, представляющие собой обобщения хорошо известных классов Шаттена $S_p$. Класс $S_{p,q}$, $0 < p, q < \infty$, рассмотренный впервые Трибелем [16], определяется следующим образом. Пусть $U$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве $H$ и $(\mu_n)$ — последовательность его сингулярных чисел (см., например, [12], 2.1.13). Оператор $U$ принадлежит пространству $S_{p,q}(H)$, если $(\mu_n) \in l_{p,q}$. (см., например, [12], 2.11.15). Пространство $S_{p,q}(H)$ имеет естественную квазинорму

$$\sigma_{p,q}(U) = ||(\mu_n)||_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^\infty n^{(q/p)-1}\mu_n^q\right)^{1/q}.$$

При $p = q$ класс $S_{p,p}$ совпадает с классом $S_p$ (с квазинормой $\sigma_p$). Отметим, что для $p,q \in (0,1]$ выполняется равенство $N_{p,q}(H) = S_{p,q}(H)$ (см. например, [6]). Имеют место включения $S_{p,q} \subset S_{p',q'}$, если $0 < p < \infty$ и $0 < q \leqslant q' < \infty$ или $0 < p < p' < \infty, o < q, q' < \infty$ (см. [16], Lemma 2) и

$$S_{p,q} \circ S_{p',q'} \subset S_{s,r},\ 1/p + 1/p' = 1/s,\ 1/q + 1/q' = 1/r.$$

При этом, если $V \in S_{p,q}$ и $U \in S_{p',q'}$, то $\sigma_{s,r}(UV) \leqslant 2^{1/s}\sigma_{p',q'}(U)\,\sigma_{p,q}(V)$ (см. [11], p. 155).

В случае, когда $p = q, p' = q'$, вместо $2^{1/s}$ в последнем неравенстве можно поставить 1 [7], [12], p. 128, [3], p.262.

Примерами $S_{p,q}$-операторов могут служить диагональные операторы $D$ в $l_2$ с диагоналями $(d_n)$ из $l_{p,q}$; в этих случаях мы пишем $D = (d_n)$.

Ниже мы используем понятие 2-абсолютно суммирующей нормы $\pi_2$ для операторов в банаховых пространствах (см. [13]). Отметим, что $\pi_2 = \sigma_2$ для операторов в гильбертовых пространствах (см. [13]).

## 3. Основные результаты

**Определение 1.** *Оператор $T : X \to Y$ факторизуется через оператор из $S_{p,q}(H)$ (через $S_{p,q}$-оператор), если существуют такие операторы $A \in L(X,H)$, $U \in S_{p,q}(H)$ и $B \in L(H,Y)$, что $T = BUA$. Если $T$ факторизуется через оператор из $S_{p,q}(H)$, то полагаем $\gamma_{S_{p,q}}(T) = \inf ||A||\, \sigma_{p,q}(U)\, ||B||$, где инфимум берется по всем возможным факторизациям оператора $T$ через оператор из $S_{p,q}(H)$.*

Ниже нам понадобится следующий факт.

**Предложение 1.** *Если оператор $T : X \to Y$ факторизуется через $S_{p,q}$-оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ факторизацию $T = BUA$, где $A \in L(X,H)$, $U \in S_{p,q}(H)$ и $B \in L(H,Y)$, можно выбрать таким образом, что оператор $B$ инъективен, $\overline{B(H)} = \overline{T(X)}$ и $||A||\, \sigma_{p,q}(U)\, ||B|| \leqslant (1+\varepsilon)\gamma_{S_{pq}}(T)$.*

*Доказательство.* Это простое упражнение. В любом случае, доказательство соответствующего факта в [2] о факторизации через $S_p$ оператор переносится и на этот случай. $\square$

**Следствие 1.** *Пусть $0 < p \leqslant 1, 0 < t \leqslant q \leqslant p$. В условиях предложения 1, если оператор $T$ конечномерен, то $\gamma_{S_{p,t}}(T) \leqslant (\dim T(X))^{1/t-1/q}\, \gamma_{S_{p,q}}(T)$.*

*Доказательство.* Если некоторый оператор $V : X \to Y$ факторизуется через $S_{s,r}$-оператор, то ассоциированный с ним оператор $V_0 : X \to \overline{V(X)}$ факторизуется через $S_{s,r}$-оператор с той же $S_{s,r}$-факторизационной квазинормой (предложение 1). У нас пространство $T(X)$ конечномерно. Поэтому, применяя к оператору $T$ теорему 1 и предложение 1, мы получаем соответствующую факторизацию $T = BUA$ нашего оператора через $S_{s,r}$-оператор в конечномерном гильбертовом пространстве (размерности $N := \dim T(X)$). Если $t \in (0, q]$, то наше утверждение следует из соответствующих неравенств для $S_{p,t}$-квазинорм в конечномерной ситуации: если $(\mu_k(U))_{k=1}^N$ — сингулярные числа оператора $U$, то, по неравенству Гельдера,

$$\left(\sum_{k=1}^N k^{t/p-1}\mu_k(U)^t\right)^{1/t} \leqslant N^{1/t-1/p} \left(\sum_{k=1}^N k^{q/p-1}\mu_k(U)^q\right)^{1/q}.$$

$\square$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$ $T_k \in N_{s_k,r_k}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$, то произведение $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ может быть факторизовано через оператор из $S_{s,r}(H)$, где $1/s = 1/s_1 + 1/s_2 + \dots + 1/s_m - (m+1)/2$ и $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + \dots + 1/r_m - (m+1)/2$. Более того,*

$$\gamma_{S_{s,r}}(T) \leqslant 2^{1/s}\tilde{c}\, \prod_{k=1}^m \nu_{s_k,r_k}(T_k),$$

*где $\tilde{c}$ — некоторая постоянная $\tilde{c} := c_{m;s_1,s_2,\dots,s_{m-1}}$, зависящая только от значений указанных параметров. Если $s = r$, то постоянная перед произведением равна единице.*

*Доказательство.* Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1: $m > 1$. Для каждого $T_k$, пусть

$$T_k := V_k D_2^{(k)} D_0^{(k)} D_1^{(k)} W_k$$

— его $\varepsilon$-допустимая факторизация (так что $1/q_k = 1/s_k - 1$ и $1/v_k = 1/r_k - 1$). Отщепим часть призведения $T$, а именно, рассмотрим оператор

$$D_0^{(m)} D_1^{(m)} W_m V_{m-1} D_2^{(m-1)} D_0^{(m-1)} D_1^{(m-1)} W_{m-1} \dots V_1 D_2^{(1)} D_0^{(1)} : l_2 \to l_2.$$

Каждый кусок вида $U_{k-1} := D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)} D_0^{(k-1)}$ этого произведения ($k > 1$),

$$U_{k-1} : l_2 \overset{D_0^{(k-1)}}{\to} l_2 \overset{D_2^{(k-1)}}{\to} l_1 \overset{V_{k-1}}{\to} X_k \overset{W_k}{\to} l_\infty \overset{D_1^{(k)}}{\to} l_2,$$

есть композиция операторов, для которых

$$\sigma_2(D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)}) = \pi_2(D_1^{(k)} W_k V_{k-1} D_2^{(k-1)}) \leqslant$$
$$\leqslant ||n^{r_k/s_k - 1}(d_n^{(k)})^{r_k})||_{l_1}^{1/2} \, ||D_2^{(k-1)}|| \leqslant ||n^{r_k/s_k - 1}(d_n^{(k)})^{r_k})||_{l_1}^{1/2} \, ||n^{r_{k-1}/s_{k-1} - 1}(d_n^{(k-1)})^{r_{k-1}})||_{l_1}^{1/2}$$
$$\leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_k, r_k}(T_k)]^{r_k/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1}, r_{k-1}}(T_{k-1})]^{r_{k-1}/2}$$

и

$$\sigma_{q_{k-1}, v_{k-1}}(D_0^{(k-1)}) = \Big(\sum [n^{1/s_{k-1} - 1/r_{k-1}} d_n^{(k-1)}]^{r_{k-1}}\Big)^{1/v_{k-1}} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1}, r_{k-1}}(T_{k-1})]^{r_{k-1}/v_{k-1}}.$$

Следовательно, $U_{k-1} \in S_{u_{k-1}, w_{k-1}}(l_2)$, где $1/u_{k-1} = 1/2 + 1/q_{k-1}$, $1/w_{k-1} = 1/2 + 1/v_{k-1}$, и

$$\sigma_{u_{k-1}, w_{k-1}}(U_{k-1}) \leqslant 2^{1/u_{k-1}} [(1+\varepsilon)\nu_{s_k, r_k}(T_k)]^{r_k/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_{k-1}, r_{k-1}}(T_{k-1})]^{1 - r_{k-1}/2}$$

Теперь, $T = V_m D_2^{(m)} D_0^{(m)} U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1 D_1^{(1)} W_1$. Здесь

$$||V_m|| = ||W_1|| = 1, \, ||D_2^{(m)}|| \leqslant ||n^{r_m/s_m - 1}(d_n^{(m)})_m^r)||_{l_1}^{1/2} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{r_m/2},$$

$$\sigma_{q_m, v_m}(D_0^{(m)}) = \Big(\sum [n^{1/s_m - 1/r_m} d_n(m)]^{r_m}\Big)^{1/v_m} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{r_m/v_m},$$

$$||D_1^{(1)}|| \leqslant ||n^{r_1/s_1 - 1}(d_n^{(1)})_1^r)||_{l_1}^{1/2} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{r_1/2}.$$

Для произведения $U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1$, имеем: $U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1 \in S_{u,w}(l_2)$, где $1/u = 1/u_{m-1} + \dots + 1/u_1 = 1/s_{m-1} + \dots + 1/s_1 - (m-1)/2$ и $1/w = 1/w_{m-1} + \dots + 1/w_1 = 1/r_{m-1} + \dots + 1/r_1 - (m-1)/2$. Более того, для некоторой постоянной $\tilde{c} := c_{m; s_1, s_2, \dots, s_{m-1}}$, зависящей только от значений указанных параметров,

$$\sigma_{u,w}(U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1) \leqslant \tilde{c} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{r_m/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1}, r_{m-1}}(T_{m-1})]^{1 - r_{m-1}/2} \times$$
$$\times [(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1}, r_{m-1}}(T_{m-1})]^{r_{m-1}/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-2}, r_{m-2}}(T_{m-2})]^{1 - r_{m-2}/2} \dots$$
$$[(1+\varepsilon)\nu_{s_2, r_2}(T_2)]^{1 - r_2/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_2, r_2}(T_2)]^{r_2/2} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{1 - r_1/2}.$$

Положим

$$A = D_1^{(1)} W_1, \, B = V_m D_2^m, \, U = D_0^m U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1.$$

Тогда $T = BUA$ and, by (3)–(4),

$$||A|| \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{r_1/2}, ||B|| \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{r_m/2},$$

$$\sigma_{s,r}(U) \leqslant 2^{1/s} \sigma_{q_m, v_m}(D_0^m) \, \sigma_{u,w}(U_{m-1} U_{m-2} \dots U_1) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1/s} \tilde{c} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{1 - r_m} [(1+\varepsilon)\nu_{s_m, r_m}(T_m)]^{r_m/2} [(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-1}, r_{m-1}}(T_{m-1})] \times$$
$$[(1+\varepsilon)\nu_{s_{m-2}, r_{m-2}}(T_{m-2})] \dots [(1+\varepsilon)\nu_{s_2, r_2}(T_2)] [(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{1 - r_1/2}$$

(напомним, что $r_m/v_m = 1 - r_m$, $1/q_m = 1/s_m - 1$ and $1/v_m = 1/r_m - 1$). Следовательно,

$$\gamma_{S_{s,r}(T)} \leqslant 2^{1/s} \tilde{c} \, \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k, r_k}(T_k).$$

Случай 2: $m = 1$. Пусть $0 < r \leqslant s < 1$ или $o < r < s = 1$ (ситуация, в которой $s = r = 1$ рассмотрена в [2]). В этом случае $1/q_1 = 1/s_1 - 1$ и $1/v_1 = 1/r_1 - 1$) (и, следовательно, $r_1/v_1 = 1 - r_1$) Для $\varepsilon$-допустимой факторизации $T_1 := V_1 D_2^{(1)} D_0^{(1)} D_1^{(1)} W_1$ имеем:

$$||V_1 D_2^{(1)}|| \, ||D_1^{(1)} W_1|| \, \sigma_{q_1, v_1}(D_0^{(1)}) \leqslant$$
$$[(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{r_1} \, [(1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1)]^{r_1/v_1} = (1+\varepsilon)\nu_{s_1, r_1}(T_1).$$

Следовательно,

$$\gamma_{S_{s_1, r_1}(T_1)} \leqslant \nu_{s_1, r_1}(T_1).$$

□

Из доказательства теоремы получаем даже более сильное утверждение.

**Следствие 2.** *В условиях теоремы 1, для любого $\delta > 0$ произведение $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ может быть факторизовано следующим образом*

$$T:\ X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2 \xrightarrow{\tilde{U}} l_2 \xrightarrow{\tilde{B}} X_m,$$

*где $\pi_2(\tilde{A}) \leqslant 1$, $\pi_2(\tilde{B}^*) \leqslant 1$ и*

$$\sigma_{s,r}(\tilde{U}) \leqslant (1+\delta) 2^{1/s} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

*Доказательство.* Рассмотрим операторы $A, U, B$ из доказательства теоремы 1 и положим

$$\tilde{A} := [(1+\varepsilon)\nu_{s_1,r_1}(T_1)]^{-r_1/2} A,\ \tilde{B} := [(1+\varepsilon)\nu_{s_m,r_m}(T_m)]^{-r_1/2} B,$$
$$\tilde{U} := (1+\varepsilon)^{r_1/2 + r_m/2} \nu_{s_1,r_1}(T_1)^{r_1/2} \nu_{s_m,r_m}(T_m)^{r_m/2} U.$$

Выбрав достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, получим желаемую факторизацию.

□

**Замечание 1.** *Если $s = r$ (тогда все $s_j$ и, соответственно, все $r_j$ равны между собой), постоянная в неравенстве из теоремы 1 (соотв., в Следствии 2) равна единице (соотв., $1+\delta$).)* [2]. *Действительно, в этом случае постоянные в неравенствах Гельдера для соотношений типа $S_r \subset S_p \circ S_q$ равны единице.*

**Следствие 3.** *В условиях теоремы 1, пусть $X_1 = X_m$ и $\delta > 0$. Последовательность $(\lambda_n(T))$ собственных чисел опертора $T$ лежит в пространстве $S_{\tilde{s},\tilde{r}}$, где $\tilde{s} = 1/2 + 1/s$, $\tilde{r} = 1/2 + 1/r$. При этом*

$$||(\lambda_n(T))||_{\tilde{s},\tilde{r}} \leqslant 2^{1/s + 1/\tilde{s}} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

*Если $s = r$, то постоянная справа в этом неравенстве равна 1.*

*Доказательство.* Пусть $\delta > 0$. В обозначениях следствия 2 и теоремы 1, рассмотрим следующую диаграмму:

$$\tilde{A}T:\ X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2 \xrightarrow{\tilde{U}} l_2 \xrightarrow{\tilde{B}} X_1 \xrightarrow{\tilde{A}} l_2.$$

Последовательность собственных чисел $(\lambda_n(T))$ оператора $T$ совпадает (с учетом их алгебраических кратностей) с полной последовательностью собственных чисел оператора $\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B}$ (см., например, [13]). Так как

$$\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B} \in S_2 \circ S_{s,r} \subset S_{\tilde{s},\tilde{r}}$$

и $r \leqslant s$, то, по неравенству Вейля (см. [9], 1.c.13),

$$||(\lambda_n(T))||_{\tilde{s},\tilde{r}} \leqslant \sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}(\tilde{A}\tilde{U}\tilde{B}) \leqslant 2^{1/\tilde{s}} \pi_2(\tilde{A}) \sigma_{s,r}(\tilde{U}) \leqslant (1+\delta) 2^{1/s + 1/\tilde{s}} \tilde{c} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k).$$

В силу произвольности $\delta$, наше утверждение доказано. □

**Замечание 2.** *Имеет место более сильный вариант последнего следствия. Пусть $\Sigma_{p,q}$ есть пространство всех неупорядоченных комплексных последовательностей $\alpha = (\alpha_k)$, для которых конечна величина $\rho_{p,q}(\alpha, \beta) := \inf dist_{p,q}(\alpha_k - \beta_k)$, где $dist_{p,q}$ — метрика на пространстве $l_{p,q}$, порождающая его естественную топологию (см., например, [[12], 6.1-6.2, а также [5], Chap. 2, pp. 20-21). Здесь infitum берется по всевозможным последовательностям $(\alpha_k)$ (соответственно, $(\beta_k)$) из $l_{p,q}$, которые определяют неупорядоченную последовательность $\alpha$ (соответственно, $(\beta_k)$). Тогда, в условияях теоремы 1 (и следствия 3), естественное отображение*

$$N_{s_m,r_m} \circ N_{s_{m-1},r_{m-1}} \cdots \circ N_{s_1,r_1} \to \Sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}$$

*непрерывно. Доазательство сводится к случаю гильбертова пространства, в котором непрерывность естественного отображения $S_{\tilde{s},\tilde{r}} \to \Sigma_{\tilde{s},\tilde{r}}$ получается, например, с помощью рассужений, аналогичных тем, что приведены в* [3], *Chap 11, §7. Впрочем, этот фкт для $s$-ядерных опраторов и операторов из класса $S_p$ был известен еще А. Гротендику* [5],*Chap. 2, pp. 20-21.*

**Замечание 3.** *Следствие 3 точно для случая, когда $s = r$ (см.* [2]*). В общем случае точным оказывается такой результат.*

**Предложение 2.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$ $T_k \in N_{s_k,r_k}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$, то собственные числа произведения $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ лежат в пространстве $l_{p,q}$, где $1/p = 1/s_1 + 1/s_2 + \cdots + 1/s_m - m/2$ $1/q = \sum_{k=1}^m 1/r_k$.*

*Доказательство.* Мы воспользуемся теми фактами, что идеал операторов Вейля $\mathfrak{L}_{p,q}^{(x)}$ [12] типа $l_{p,q}$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$ (т. е. последовательности собственные чисел операторов Вейля лежат в $l_{p,q}$; см. [12], 3.6.2) и идеал $(p_0, q)$-ядерных операторов, где $1/p_0 = 1/2 + 1/p$, вложен в этот идеал операторов Вейля [6], p. 243. Из этих фактов следует, что оператор $T$ лежит в соответсвующем произведении идеалов операторов Вейля. По теореме о произведениях [12], 2.4.18,

$$\mathfrak{L}_{p_1,q_1}^{(x)} \circ \mathfrak{L}_{p_2,q_2}^{(x)} \subset \mathfrak{L}_{p,q}^{(x)},$$

где $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$. Поэтому $(\lambda_n(T)) \in \mathfrak{L}_{\tilde{s},q}^{(x)}$, где и $1/q = \sum_{k=1}^m 1/r_k$. □

В работе [2], как видно из доказательства теоремы 3 той работы, мы на самом деле, кроме всего прочего, установили следующий результат, показывающий, что утверждение следствия 3 точно для случая, когда рассматриваются $p$-ядерные операторы и классы Шаттена $S_p$ (т. е. в следствии 3 $s = r$). Сформулируем результат в полной общности (используя и заключение теоремы 1 при $s = r$).

**Теорема 2.** *В условиях теоремы 1, пусть $\lambda := (\lambda_k(T))$ есть последовательность всех собственных чисел оператора $T$, взятых с учетом кратностей. Если $s_k = r_k, k = 1, 2, \dots, m$, то $\lambda \in l_q$, где $1/q = 1/r_1 + 1/r_2 + \cdots + 1/r_m - m/2$, причем $(\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^q)^{1/q} \leqslant \prod_{k=1}^m \nu_{r_k}(T_k)$. Неравенство неулучшаемо с точностью до абсолютной постоянной (для любого количества операторов и для любого набора чисел $0 < r_k = s_k \leqslant 1$.)*

## 4. Факторизация операторов из $N_{s;2}$

В этом разделе мы рассмотрим задачу о факторизации через операторы из классов Лоренца-Шаттена операторов типа $N_{s;2}$ (в индексе точка с запятой!). Здесь $0 < s \leqslant 2$. Для банаховых пространств $X, Y$ пространство $N_{s;2}(X, Y)$ состоит из ядерных операторов $T : X \to Y$, которые представимы в виде $Tx = \sum_{n=1}^\infty a_n \langle x'_n, x\rangle y_n$, для $x \in X$, где

$$||x'_n|| \leqslant 1, (a_n) \in l_s, ||(y_n)||_2^{\text{weak}} := \sup_{||y'|| \leqslant 1} \left( \sum_{n=1}^\infty |\langle y', y_n\rangle|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Такие операторы будем называть $(s; 2)$-ядерными. Отметим, то мы можем (и будем) предполагать, что $||x'_n|| = 1$, $||(y_n)||_2^{\text{weak}} = 1$ для всех $n$ и что последовательность $(a_n)$ неотрицательная и убывающая.. Мы используем обозначение $\nu_{(s;2)}(T)$ для естественной квазинормы $\inf ||(a_n)||_{l_s}$. Идеалы $(s; 2)$-операторов являются частными случаями идеалов $(s, r, q)$-ядерных операторов из [13], 18.1.

Каждый $(s; 2)$-ядерный оператор $T : X \to Y$ допускает факторизацию следующего вида:

$$T : X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_2 \xrightarrow{V} Y, \tag{5}$$

где $||V|| = ||W|| = 1$ и $\Delta$ — диагональный оператор с диагональю $(d_n) \in l_s$. Действительно, достаточно положить $Wx := (\langle x'_k, x\rangle)$, $V(\alpha_n) := \sum \alpha_n y_n$ и $\Delta(\beta_n) := (d_n \beta_n)$ (где $d_n := a_n$). Для наших целей, удобно переписать указанную факторизацию следующим образом (мы следуем идеям из[12], 3.8.6):

$$T: X \xrightarrow{W} l_\infty \xrightarrow{\Delta_1} l_2 \xrightarrow{\Delta_0} l_2 \xrightarrow{V} Y, \tag{6}$$

где $\Delta_1 := ({d_n}^{s/2})$ и $\Delta_0 := (d_n^{s/q})$, где $1/q = 1/s - 1/2$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ и в факторизации (6) $||V|| = ||W|| = 1$ и $||(d_n)||_{l_s} \leqslant (1+\varepsilon)\nu_{s;2}(T)$. Тогда

$$\pi_2(\Delta_1) \leqslant ||(d_n^{s/2})||_{l_2} = ||(d_n)||_{l_s}^{s/2} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s;2}(T)]^{s/2}. \tag{7}$$

Также $\Delta_0 \in S_q(l_2)$. и $\sigma_q(\Delta_0) \leqslant ||(d_n)||_{l_s}^{s/q} \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s,2}(T)]^{s/q}$. Поэтому $T = V\Delta_0\Delta_1 W \in S_q \circ \Pi_2$ и $||T||_{S_q \circ \Pi_2} \leqslant \nu_{s;2}(T)$.

Теперь нетрудно получить следующий результат.

**Теорема 3.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < s_k \leqslant 2$ и $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$, то произведение $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ может быть факторизовано через оператор из $S_s(H)$, где $1/s = \sum_{k=1}^m 1/s_k - 1/2$. Более того,*

$$\gamma_{S_s}(T) \leqslant \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k),$$

*Доказательство.* Следуя предыдущим рассуждениям, факторизуем каждый из операторов $T_k$ как произведение $V^k \Delta_0^k \Delta_1^k W^k$ Тогда на "стыке"двух операторов появится оператор вида $\Delta_1^{k+1} W^{k+1} V^k$, у которого $\sigma_2$-норма не превосходит $\pi_2$-нормы оператора $\Delta_1^{k+1}$, т. е. $[(1+\varepsilon)\nu_{s_{k+1};2}]^{s_{k+1}/2}$. За ним следует оператор $\Delta_0^{k+1}$, для которого $\sigma_{q_{k+1}}(\Delta_0^{k+1}) \leqslant [(1+\varepsilon)\nu_{s_{k+1};2}]^{s_{k+1}/q_{k+1}}$. Поэтому

$$T \in L \circ S_{q_m} \circ S_2 \circ S_{q_{m-1}} \circ S_2 \circ \cdots \circ S_{q_2} \circ S_2 \circ S_{q_1} \circ \Pi_2 \circ L.$$

Здесь слева и справа в получаемой факторизации $T$ появляются операторы $V^m$ и $\Delta_1^1 W^1$ соответственно. Между ними находятся произведения вида $S_{q_k} \circ S_2$ ($m-1$ штука). Особняком входит в произведение оператор из $S_{q_1}$. Таким образом, используя неравенство Гельдера для произведений операторов из классов Шаттена, получаем: $T \in L \circ S_s \circ \Pi_2,\ \gamma_{S_s} \leqslant \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k)$. □

Важно отметить, что в полученном неравенстве постоянная оценки справа ($= 1$) не зависит от параметров.

**Следствие 4.** *В услвиях теоремы 3, для любого $\delta > 0$ оператор $T$ представим в виде произведения $BUA \in L \circ S_s \circ \Pi_2$, где*

$$||B|| = 1,\ \sigma_s(U) \leqslant (1+\delta) \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k) \ \text{и}\ \pi_2(A) = 1.$$

*Доказательство.* Это вытекает непосредственно из доказательства теоремы 3. □

**Следствие 5.** *В условиях теоремы 3, пусть $X_1 = X_m$ и $\delta > 0$. Последовательность $(\lambda_n(T))$ собственных чисел оператора $T$ лежит в пространстве $S_{\tilde{s}}$ где $\tilde{s} = \sum_{k=1}^m 1/s_k$. При этом*

$$||(\lambda_n(T))||_{\tilde{s}} \leqslant \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k).$$

*Доказательство.* Применяем предыдущее следствие. Так как наборы собственных чисел операторов $T = BUA : X_1 \xrightarrow{A} l_2 \xrightarrow{U} l_2 \xrightarrow{B} X_1$ и $ABU : l_2 \xrightarrow{U} l_2 \xrightarrow{B} X_1 \xrightarrow{A} l_2$ совпадают (вместе с кратностями) и $\Pi_2(l_2) = S_2(l_2)$ изометрично, то $(\lambda_n(T)) \in l_{\tilde{s}}$. Неравенство следует из неравенства Гельдера для произведений $S_p$-операторов и из неравенства Вейля между $l_p$-квазинормами последовательностей собственных и сингулярных чисел. □

Приведем конечномерные варианты теоремы 3 и следствия 5.

**Следствие 6.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < s_k \leqslant 2$ и $T_k \in N_{s_k,2}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$. Пусть, далее, $1/s = \sum_{k=1}^m 1/s_k - 1/2$ и $0 < t \leqslant s$. Если оператор $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ конечномерен, то*

$$\gamma_{S_s}(T) \leqslant (\dim T(X_1))^{1/t-1/s} \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k),$$

*Доказательство.* Достаточно применить следствие 1. □

**Следствие 7.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < s_k \leqslant 2$ и $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$. Пусть, далее, $1/s = \sum_{k=1}^m 1/s_k - 1/2$ и $0 < t \leqslant s$. Если оператор $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ конечномерен, то*

$$||(\lambda_n(T))||_{\tilde{s}} \leqslant (\dim T(X_1))^{1/t-1/\tilde{s}} \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(T_k).$$

*где $1/\tilde{s} = \sum_{k=1}^m 1/s_k$.*

*Доказательство.* Применяем предыдущее следствие и рассуждения из доказательства следствия 5. □

Результаты, полученные в последних двух следствиях, не улучшаемы (с точностью до абсолютной постоянной в неравенстве). По-существу, соответствующий пример имеется в работе [2], теорема 2. Удобно сформулировать в виде отдельного утверждения результат, установленный в доказательстве теоремы 2 в той статье (мы изменим здесь обозначения параметров из [2] для согласования с нашими обозначениями).

**Предложение 3.** *Существует постоянна $G > 0$ такая, что для любого натурального числа $n$ найдется оператор $A_n : l_1^n \to l_1^n$, обладающий следующим свойством. Если $m \in \mathbb{N}$, $p_k \in (0, 1]$ для $k = 1, 2, \dots, m$, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m - (m + 1)/2$ и $u \in (0, p]$, то*

$$\gamma_{S_u}(A_n^m) \geqslant G n^{1/u-1/p} \prod_{k=1}^m \nu_{p_k}(A_n) = G n^{1/u-1/p} \left( \sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^v \right)^{1/v},$$

*где $(\lambda(A_n^m))$ — полный набор собственных чисел оператора $A_n^m$ и $1/v = 1/2 + 1/p$.*

Теперь о точности неравенств из следствий 6 и 7.

**Теорема 4.** *Существует постоянна $G > 0$ такая, что для любого натурального числа $n$ найдется оператор $A_n : l_1^n \to l_1^n$, обладающий следующим свойством. Если $m \in \mathbb{N}$, $s_k \in (0, 1]$ для $k = 1, 2, \dots, m$, $1/s = 1/s_1 + 1/s_2 + \dots + 1/s_m - (m + 1)/2$ и $t \in (0, r]$, то*

$$\gamma_{S_t}(A_n^m) \geqslant G n^{1/t-1/s} \prod_{k=1}^m \nu_{s_k}(A_n) \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(A_n) = \left( \sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^{\tilde{s}} \right)^{1/\tilde{s}}.$$

*Доказательство.* Оператор, о котором говорится в предложение 3, порождается унитарной матрицей

$$\left( n^{-1/2} \, e^{\frac{2\pi jl}{n} i} \right) \ (j, l = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим несколько новых параметров. Пусть $1/p_k = 1/s_k + 1/2$, $1/p = 1/s + 1/2$, $1/u = 1/t + 1/2$, $1/q = 1/2 + 1/u = 1/t + 1$ Для любого $k$ имеют место соотношения

$$\nu_{s_k;2}(A_n) \leqslant \nu_{p_k}(A_n) \leqslant n^{1 \cdot s_k} = (\sum_{\lambda(A_n)} |\lambda(A_n)|^{s_k})^{1/s_k} \leqslant \nu_{s_k;2}(A_n).$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^m \nu_{s_k;2}(A_n) = n^{\sum 1/s_k} = n^{1/\tilde{s}}.$$

Кроме того, $1/u - 1/p = 1/t - 1/s$ и $\gamma_{S_u}(A_n^m) \leqslant \gamma_{S_t}(A_n^m) \cdot n^{1/2}$ (неравенство Гельдера). По предложению 3,

$$\gamma_{S_t}(A_n^m) \geqslant n^{-1/2} G n^{1/t-1/s} \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k;2}(A_n) = n^{1/2} G n^{1/t-1/s} \left( \sum_{\lambda(A_n^m)} |\lambda(A_n^m)|^{\tilde{s}} \right)^{1/\tilde{s}}.$$

□

В работе [2] мы использовали предложение 3 для построения примера произведения $N_s$-операторов в $l_1$, для которого утверждения следствий 3 и 4 точны (при $s = r$; см. теорему 3 в [2]. В наших последних утверждениях (следствия 6 и 7 ) получены оценки факторизационных $\gamma_{S_p}$-квазинорм, а также $l_p$-квазинорм последовательностей собственных чисел произведений $N_{s;2}$операторов. Предыдущая теорема показывает, что эти оценки точны в конечномерных ситуациях.

С другой стороны, в доказательстве теоремы 4 существенно использовался тот факт, что для рассматриваемого там оператора $A_n$ его $\nu_{p_k}$- и $\nu_{s_k;2}$-квазинормы совпадают. Это приводит нас к результату, соответствующему теореме 3 из [2]. Доказательство буквально то же, с заменой обозначений (одной квазинормы на другую). Основное совпадение рассматриваемых сейчас квазинорм (и это существенно в доказательстве той теоремы) — это то, что обе они, как $\nu_{p_k}$, так и $\nu_{s_k;2}$ $(1/p_k = 1/2 + 1/s_k)$ являются полными $p_k$-нормами. Поэтому доказательство теоремы 3 из [2] почти дословно проходит в нашем случае для произведений операторов из $N_{s;2}$, приводя к следующей теореме.

**Теорема 5.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $s_k \in (0, 2]$ для $k = 1, 2, \ldots, m$ и $1/s = 1/s_1 + 1/s_2 + \cdots + 1/s_m - 1/2$. Существуют операторы $T_k \in N_{s_k;2}(X_k, X_{k+1})$ в банаховых пространствах такие, что композиция $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ факторизуется через оператор из $S_s(H)$, но не факторизуется ни через какой оператор из $S_t(H)$, если $t \in (0, r)$. В качестве всех пространств $X_k$ можно взять пространство $l_1$.*

Итак, для произведений $(s; 2)$-ядерных и для произведений $p$-ядерных операторов, действующих из в $L_1$-пространств в $L_1$-пространства, получены точные ответы на вопросы о факторизации через операторы из классов Шаттена и о распределении их собственных чисел (но оставаясь в шкалах $S_p$ и $l_s$).

*Как выглядят ответы на соответствующие вопросы для произведений операторов, которые (произведения) действуют в $L_p$-пространствах?*

Мы оставим ответы на этот и другие (более тонкие) вопросы до следующей статьи. Между прочим, для случая $L_2$-пространств ответы почти очевидны. Для того, чтобы сформулировать некоторые результаты об операторах в $L_p$-пространствах, надо "интерполировать"полученные выше утверждения между $L_1$- и $L_2$-случаями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейнов О. И., О произведении ядерных операторов, Функц. анализ и его прил., том 51, выпуск 4, 2017, 90–91
2. Рейнов О. И., О произведении s-ядерных операторов, Матем. заметки, том 107, выпуск 2, 2020, 311–316.
3. Michael Sh. Birman, M.Z. Solomjak, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Pub. Co., 1987
4. T. Carleman, Uber die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion: Aus einem Brief an Herrn A. Wiman. Acta Math. 41 (1916), 377–384. [Ca16]
5. A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., Volume 16, 1955, 196 + 140. [Groth]
6. A. Hinrichs, A. Pietsch, p -nuclear operators in the sense of Grothendieck, Math. Nachr. 283, No. 2, 232–261 (2010).
7. Horn, A. (1950) On the singular values of a product of completely continuous operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, 374–375.
8. W.B. Johnson, H. Konig, B. Maurey, J.R. Retherford ? [1979] Eigenvalues of p-summing and lp-type operators in Banach spaces, J. Funct. Anal. 32, 353–380.

9. Hermann Konig, Eigenvalue Distribution of Compact Operators, Springer Basel AG, 1986.
10. T. Lalesco, Un theoréorème sur les noyaux composés, Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine 3, 1915, 271–272
11. A. Pietsch, Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces, Math. Ann. 247, 1980, 149–168.
12. A. Pietsch, Eigenvalues and s-numbers (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
13. A. Pietsch, History of Banach Spaces and Linear Operators (Birkhauser, Boston, 2007).
14. Schatten, R. , A theory of cross-spaces. Annals of Math. Studies 26, Princeton Univ. Press 1950.
15. I. Schur, Uber die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann. 66, 1909, 488–510.
16. H. Triebel, Uber die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev- Besov-Raumen, Invent. Math. 4, 1967, 275–293.

Рейнов Олег Иванович
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: orein51@mail.ru