МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОСМОРФЛОТ
**Государственная морская академия
имени адмирала С. О. Макарова**

Волкова Н.А., Овчинникова А.И., Сахаров В.Ю.

Абитуриенту-99

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ С КРАТКИМИ РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

Выпуск 2
(Олимпиады в С.-Петербурге и Мурманске)

Санкт-Петербург
1999

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОСМОРФЛОТ
Государственная морская академия
имени адмирала С. О. Макарова

Волкова Н.А., Овчинникова А.И., Сахаров В.Ю.

Абитуриенту-99

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ С КРАТКИМИ РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

Выпуск 2
(Олимпиады в С.-Петербурге и Мурманске)

Санкт-Петербург
1999

Олимпиада по математике в 1999 году проводилась в Санкт-Петербурге и Мурманске. Этот выпуск содержит примеры вариантов как петербургской, так и региональной олимпиады вместе с ответами и решениями. Так как варианты каждой из олимпиад однотипны, решения приведены к задачам некоторых из вариантов, к задачам других вариантов приведены только ответы.

Авторы выражают благодарность А.А.Кельзону, доценту кафедры высшей математики ГМА им.адм.С.О.Макарова, за помощь в подготовке рукописи.

I ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ.

Вариант 1

1. Хозяйка, придя на рынок обнаружила, что молоко подорожало на 20%, а новая цена творога составляла 130% от прежней. Купив обычное количество молока и творога, рачительная хозяйка вернулась домой и подсчитала, что в прошлый раз она заплатила на 20% меньше. Сколько она заплатила за молоко и творог в отдельности, если после подорожания за молоко было заплачено на 2 рубля меньше, чем за творог?

2. Построить график функции $y = \dfrac{\log_6 27 + \log_6 8}{\log_{\sqrt[9]{5-x}} 2 \cdot \log_{(x-1)^3}(5-x)}$.

3. Найти множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot 4^{x-\frac{5}{4}} - 3^{-1} \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot (216)^{-\frac{1}{3}}$$ на отрезке [0;3].

4. Найти точки максимума функции:

$$y = \sin\left(\pi x + 8\operatorname{arctg}\left(\cos 2 - 2\cos^2 1\right)\right)\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}} +$$
$$+ \cos\left(\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x\right)\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}.$$

5. Точки A, B, C – вершины равнобедренного треугольника. Точка B – центр окружности $(x-5)^2+(y-7)^2=16$, которая касается основания AC. Сторона AC лежат на прямой $y=3$, а сторона AB параллельна прямой $y=x$. Найти площадь треугольника и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 2

1. Владелец лихого «жигуленка», заехавший в автомастерскую после близкого знакомства с «Мерседесом», с грустью обнаружил, что раньше ремонт покореженной дверцы стоил на 30% дешевле, а стоимость ее покраски составляла 75% от настоящей. Всего восстановление дверцы обошлось дороже на 40%. Сколько пришлось заплатить опечаленному лихачу за ремонт дверцы и ее покраску в отдельности, если раньше ремонт стоил на 400 рублей дороже покраски?

2. Построить график функции $y=\dfrac{\log_6 32+\log_6 243}{\log_{(x-3)^2}(x-1)\cdot\log_{10\sqrt{x-1}}2}$.

3. Найти множество значений функции

$y=16\cdot 2^{-3}+2^{2(x+1)}-\sqrt{8}\cdot 2^{4x-\frac{1}{2}}$ на отрезке [-1;1].

4. Найти точки минимума функции:

$$y=\cos\left(6x\cdot\arcsin\frac{1}{2}\right)\cos^2\frac{3\pi}{4}+$$

$$+\sqrt{3}\sin\left(4x\cdot\operatorname{arctg}\left(\cos 4+2\sin^2 2\right)+18\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin^2\frac{\pi}{4}.$$

5. Точки A, B, C, D являются вершинами квадрата. Стороны AB и BC лежат на прямых $y=(1/3)x+11/3$ и $y=-3x+7$ соответственно. Центр вписанной окружности находится в точке (5;2). Найти площадь квадрата и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 3

1. Неунывающий фермер в надежде на хорошее лето увеличил площадь под посевы картофеля на 60%, а площадь под морковью составила 200% от прежней. Всего оказалось, что в предыдущем году под морковью и картофелем было занято посевных площадей на 40% меньше. Сколько в отдельности площадей занял под картофель и морковь в этом году фермер, если под картофель было отведено на 6 га больше, чем под морковь?

2. Построить график функции $y=\dfrac{\log_{7/2}49-\log_{7/2}4}{\log_{\sqrt[6]{4-x}}2\cdot\log_{(x+1)^3}(4-x)}$

3. Найти множество значений функции

$y=\sqrt{27}\cdot 9^{x-\frac{7}{4}}-\dfrac{2}{9}\cdot 3^{x+2}+63\cdot 3^{-2}$ на отрезке [0;3].

4. Найти точки максимума функции:

$$y=\sin\left(3x\cdot\arccos\frac{\cos 2+2\sin^2 1}{2}\right)\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}-$$

$$-\cos\left(3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}+12\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}.$$

5. Точки A, B, C, D являются вершинами ромба. Стороны AB и AD лежат на прямых $y = -(2/3)x+20/3$ и $y = -2x+8$ соответственно. Диагональ BD является диаметром окружности, заданной уравнением $(x-4)^2+(y-3)^2=2$. Найти площадь ромба и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 4

1. Известный кутюрье Тришка, создавая новую модель кафтана, решил сделать его подлиннее и слегка укоротить рукава. При этом расход сукна на рукава уменьшился на 20%, а на полы кафтана пошло 105% от прежнего количества ткани. Оказалось, что всего на старую модель уходило ткани на 0% меньше. Сколько сукна требуется на в отдельности на полы и рукава кафтана нового покроя, если на полы уходит на 1,7 аршина сукна больше, чем на рукава?
2. Построить график функции $y = \dfrac{\lg 125 + \lg 8}{\log_{\sqrt[6]{x-3}} 3 \cdot \log_{(x-5)^2}(x-3)}$.
3. Найти множество значений функции
$$y = \frac{\sqrt{169}}{125^{1/3}} + 20 \cdot 5^{x-1} - 2\sqrt{5} \cdot 25^{x+\frac{1}{4}}$$ на отрезке [-2;0].
4. Найти точки минимума функции:
$$y = \sqrt{3}\sin\left(x \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(2\sin^2 5 + \cos 10\right) + 3\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\sin^2\frac{\pi}{4} -$$
$$-\cos(2x \cdot \arcsin 1)\cos^2\frac{3\pi}{4}.$$
5. Точки A, B, C, D являются вершинами равнобочной трапеции. Стороны AB и BC лежит на прямых $y=4x-10$ и $y=6$ соответственно. Для окружности, заданной уравнением $(x-7)^2+(y-2)^2=16$, основание AD является диаметром, а BC — касательной. Найти площадь трапеции и координаты ее вершин. Сделать чертеж.

Вариант 5

1. Фирма «Rog and Copit», занимавшаяся сбором вторсырья увеличила закупочные цены на рога на 5%, а новая цена копыт составила 190% от прежней. Сдатчик, увидев новые цены, порадовался, что опоздал вчера сдать свое сырье по старым ценам, так как получил бы на 25% денег меньше. Сколько получит сдатчик за рога и копыта в отдельности, если за рога он получит на 2 рубля больше, чем за копыта?

2. Построить график функции $y=\dfrac{\log_{21}27+\log_{21}343}{\log_{9\sqrt{3-x}}\dfrac{1}{2}\cdot\log_{(x+2)^3}(3-x)}$.

3. Найти множество значений функции

$$y=\sqrt[4]{64}\cdot 2^{4x-\frac{1}{2}}-2^{2(x+1)}-16\cdot 2^{-3} \text{ на отрезке } [-1;2].$$

4. Найти точки максимума функции

$$y=\cos\left(4x\cdot\operatorname{arctg}\left(\cos 6-2\cos^2 3\right)\right)\sqrt{\cos\frac{5\pi}{3}}+$$
$$+\sin\left(x\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)\sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}}.$$

5. Точки A, B, C, D являются вершинами прямоугольника. Стороны AB и BC лежат на прямых $y=-x+2$ и $y=x-2$ соответственно. Окружность, заданная уравнением $(x-3)^2+(y-3)^2=2$, касается сторон AD и BC и ее центр совпадает с центром прямоугольника. Найти площадь прямоугольника и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 6

1. Издательство «Мак-Латур» увеличило выпуск «крутых» детективов в новом году на 20%, а количество прибыльных «дамских» романов составило 135% от тиража прошлого года, в котором общий тираж детективов и дамских романов был на 20% меньше. Сколько было издано этой популярной литературы в прошлом году, если в текущем детективов было издано больше чем «дамских» романов на 21 тысячу экземпляров?

2. Построить график функции $y=\dfrac{\log_{2/3}16-\log_{2/3}81}{\log_{8\sqrt{x+1}}\dfrac{1}{2}\cdot\log_{(x-1)^2}(x+1)}$.

3. Найти множество значений функции

$$y=2\cdot 6^{-1}+3^{-1}\cdot 2^{x+1}-\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot 4^{x-\frac{5}{4}} \text{ на отрезке } [0;3].$$

4. Найти точки минимума функции:

$$y=\sqrt{3}\cos\left(x\left(\arccos 0-\arcsin\left(\cos 8-2\cos^2 4\right)\right)\right)\sin^2\frac{5\pi}{4}-$$

$$-\sin\left(6x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos^2\frac{3\pi}{4}.$$

5. Точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма. Стороны AB и BC лежат на прямых $y=3x$ и $y=1/2\ x$ соответственно. Окружность, заданная уравнением $(x-3)^2+(y-4)^2=5$, касается сторон AD и BC в точках A и C. Найти площадь параллелограмма и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 7

1. Страстный поклонник футбольной команды «Надир» в конце сезона подсчитал, что количество забитых голов составило 60% от числа мячей, забитых в прошлом сезоне, а количество пропущенных уменьшилось по сравнению с прошлым сезоном на 50%, и разница забитых и пропущенных мячей в прошлом сезоне была на 50% больше, чем в нынешнем. Сколько голов забила и сколько голов пропустила команда «Надир» в этом сезоне, если всего в этом сезоне в матчах с ее участием было забито 80 голов?

2. Построить график функции $y=\dfrac{\log_{5/3}125-\log_{5/3}27}{\log_{\sqrt[15]{6-x}}\frac{1}{3}\cdot\log_{(x-2)^5}(6-x)}$.

3. Найти множество значений функции
$$y=2\sqrt{5}\cdot 25^{x+\frac{1}{4}}-20\cdot 5^{x-1}-\frac{\sqrt{169}}{\sqrt[4]{625}}$$ на отрезке [-1;0].

4. Найти точки максимума функции
$$y=\sin\left(3x\cdot\arccos\frac{\cos 14+2\sin^2 7}{2}+4\arcsin 1\right)\sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}}-$$
$$-\cos\left(6x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}.$$

5. Точки A, B, C являются вершинами треугольника. Стороны AB и BC лежат на прямых $y=x-4$ и $y=-x+4$ соответственно. Вокруг треугольника описана окружность, заданная уравнением $(x-3)^2+(y-3)^2=10$. Найти площадь треугольника и координаты его вершин. Сделать чертеж.

Вариант 8

1. Юная кокетка, решив обновить по весне гардероб, отправилась в магазин, где она увидела, что шляпка и плащ, к которым она присматривалась зимой, несколько изменились в цене: новая цена плаща составляла 120% от старой, а цена шляпки «взлетела» на 40%. Если бы она купила их тогда сразу, то покупка ей обошлась бы на 25% дешевле. Сколько пришлось заплатить огорченной кокетке за шляпку и сколько за плащ, если за плащ она заплатила на 800 рублей меньше, чем за шляпку?

2. Построить график функции $y = \dfrac{\log_{4/3} 256 - \log_{4/3} 81}{\log_{\sqrt[8]{x+1}} \dfrac{1}{3} \cdot \log_{(x-3)^2}(x+1)}$.

3. Найти множество значений функции

$$y = -63 \cdot 3^{-2} + \frac{2}{9} \cdot 3^{x+2} - \sqrt{27 \cdot 9^{x-\frac{7}{4}}}$$ на отрезке [0;3].

4. Найти точки минимума функции:

$$y = \cos\left(6x \cdot \arcsin\left(\frac{\cos 16}{2} + \sin^2 8\right)\right) \sin^2 \frac{5\pi}{4} +$$
$$+ \sqrt{3} \sin\left(3x\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cos^2 \frac{3\pi}{4}.$$

5. Точки A, B, C, D являются вершинами прямоугольной трапеции. Стороны AB и BC лежат на прямых $y=-2x+4$ и $y=x/2+4$ соответственно. Окружность, заданная уравнением $(x-3)^2+(y-3)^2=5$ касается трех сторон трапеции, причем BC в точке C и пересекает боковую сторону CD в ее середине. Найти площадь трапеции и координаты ее вершин. Сделать чертеж.

Варианты 9 — 16 посвящаются 200-летию со дня рождения Александра Сергеевича Пушкина

Вариант 9

1. *«Белка там живет ручная,*
Да затейница такая,
Белка песенки поет
Да орешки все грызет,
А орешки не простые
Все скорлупки золотые,
Ядра – чистый изумруд...
Из скорлупки льют монету
Да пускают в ход по свету...».

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Думный дьяк, ведавший у князя Гвидона чеканкой монеты, решил отливать не только рублевики, но и пятиалтынные монеты, радиус которых он сделал на 50% меньше, чем у рублевика, а толщину оставил той же. Сколько пятиалтынных монет выйдет из 10 скорлупок, которых хватает ровно на 15 рублевиков?

2. Найти область определения функции $y = \sqrt{2^4 - \frac{4^{x+1}}{32^{1/5}} + \sqrt[3]{64} \cdot 2^x}$.

3. Определить множество значений функции и построить ее график.

$$y = \frac{\log_{x-3,5}\sqrt{8-x}\cdot(\log_2 18 - \log_2 9)}{\log_{x-3,5} 2 \cdot \log_{(x-4)^2}(8-x)}.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций

$$y = \sin\left(\pi x + 8\operatorname{arctg}\left(\cos 2 - 2\cos^2 1\right)\right)\cos^2\frac{3\pi}{4} +$$
$$+\sqrt{3}\cos\left(\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x\right) \quad \text{и } y = \frac{1}{3}.$$

5. В ромбе ABCD диагональ AC является диаметром окружности $(x-6)^2+(y-5)^2=5$ и параллельна прямой l_1: $y = (-1/2)x+1$, а вершина B есть точка пересечения BD и прямой l_2: $y = (1/2)x+5$. Найти площадь ромба. Построить чертеж.

Вариант 10

1. *«Кабы я была царица,—*
   Говорит одна девица,—
   То на весь крещеный мир
   Приготовила б я пир...»

   А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

   Чтобы нажарить блинов на «весь крещеный мир», повариха затворила тесто в двух одинаковых квашнях. Тесто из первой квашни она пережарила на одинаковых малых сковородах, готовя блины размером со всю сковороду. Притомившись, она из оставшегося теста стала жарить блины на больших сковородах, делая их той же толщины и тоже во всю сковороду. На сколько процентов диаметр большой сковороды больше диаметра малой, если у поварихи получилось 250 маленьких и 160 больших блинов?

2. Найти область определения функции
   $$y=\left(7\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot 3^x-(243)^{-1/5}\cdot 9^{x+1}-(\sqrt[3]{3})^{12}\right)^{-1/2}.$$

3. Определить множество значений функции и построить ее график.
   $$y=\frac{\log_x(2\frac{1}{4}-x)\cdot(\log_3 24-\log_3 8)}{\log_x\frac{1}{4}\cdot\log_{(x-2)^2}(2\frac{1}{4}-x)}.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций
   $$y=\cos\left(6x\cdot\arcsin\frac{1}{2}\right)\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}+$$
   $$+\sin\left(4x\cdot\operatorname{arctg}(\cos 4+2\sin^2 2)+18\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}\quad\text{и } y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Центр окружности $(x-5)^2+(y-4)^2=10$ совпадает с центром прямоугольника ABCD сторона CD которого лежит на прямой l_1 : $y=-2x+24$, а диагональ AC параллельна прямой l_2 : $y=(4/3)x$. Найти площадь прямоугольника. Построить чертеж.

Вариант 11

1. *«Кабы я была царица,—*
Говорит ее сестрица,—
То на весь бы мир одна
Наткала я полотна...»

«... И очутятся на бреге,
В чешуе, как жар горя,
Тридцать три богатыря,
Все красавцы молодые,
Великаны удалые,
Все равны, как на подбор,
С ними дядька Черномор.»
А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Ткачиха за месяц наткала столько полотна, что его хватило точнехонько на 18 одинаковых рубах для людей обычного роста. На сколько богатырей можно пошить рубахи из этого же полотна, если богатырский рост на 50% больше обычного? Учесть, что выкройки для шитья русских рубах разного размера подобны и что все полотно идет в дело.

2. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[4]{343^{\frac{2}{3}}+(2\cdot\sqrt[3]{6})^3\cdot 7^x-7\cdot 49^{x-\frac{1}{2}}}\,.$$

3. Определить множество значений функции и построить ее график.

$$y=\frac{\log_{x-4,5}\sqrt[6]{7-x}\cdot\left(\log_3 15-\log_3\frac{5}{9}\right)}{\log_{x-4,5}2\cdot\log_{(x-5)^2}(7-x)}\,.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\sqrt{3}\cdot\sin\left(3x\cdot\arccos\frac{\cos 6+2\sin^2 3}{2}\right)\sin^2\frac{\pi}{4}-$$
$$-\cos\left(3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}+12\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos^2\frac{\pi}{4}$$

и $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

5. Центр окружности $(x-3)^2+(y-8)^2=25$ совпадает с вершиной A квадрата ABCD. Диагональ AC параллельна прямой $l_1: y=-2x+2$. Точка K(7;5) – ближайшая к вершине B точка пересечения окружности с диагональю BD. Найти площадь квадрата. Построить чертеж.

Вариант 12

1. *«...Разом пушки запалили;*
В колокольнях зазвонили;
К морю сам идет Гвидон;
Там царя встречает он...»

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Царевна-Лебедь к приезду царя Салтана решила заново вымостить дорогу от пристани до княжеского терема, заменив простые квадратные плитки золочеными, а чтобы ускорить дело велела сделать их большими, чем раньше. На сколько процентов увеличили сторону плитки, если на всю дорогу вместо 9000 пошло 6250 плиток?

2. Найти область определения функции

$$y=\left(24\cdot 5^{x+1}-5^{-3}\cdot 25^{x+\frac{3}{2}}+(\sqrt[5]{5})^{20}\right)^{-1/4}.$$

3. Определить множество значений функции и построить ее график.

$$y=\frac{\log_{x+1}\left(3\frac{1}{2}-x\right)\cdot\left(\log_{16}4+\log_{16}2\right)}{\log_{x+1}\frac{1}{8}\cdot\log_{(x-3)^4}\left(3\frac{1}{2}-x\right)}.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\sin\left(x\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 2-\cos 4\right)+3\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\times$$
$$\times\sqrt{\cos\frac{7\pi}{3}-\cos(2x\cdot\arcsin 1)}\cdot\sqrt{\sin\frac{25\pi}{6}}$$ и $y=\dfrac{2}{3}$.

5. В окружность $(x-5)^2+(y-4)^2=10$ вписан четырехугольник ABCD, диагональ AC которого является диаметром этой окружности. Точка A имеет координаты (2;3). Сторона BC перпендикулярна прямой l_1 : $y=x+2$, а сторона CD параллельна прямой l_2 : $y=2x-1$. Найти площадь четырехугольника. Построить чертеж.

Вариант 13

1. *«Белка там живет ручная,*
Да затейница такая,
Белка песенки поет
Да орешки все грызет,
А орешки не простые
Все скорлупки золотые,
Ядра – чистый изумруд...
Из скорлупки льют монету
Да пускают в ход по свету...».

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Думный дьяк, ведавший у князя Гвидона чеканкой монеты, решил, что не гоже князю Гвидону без своих червонцев княжить. Велел он отливать червонцы той же толщины, что и рублевики, но большим радиусом. На сколько процентов радиус рублевика меньше радиуса червонца, если из 100 скорлупок можно отлить либо 32 червонца, либо 50 рублевиков?

2. **Найти область определения функции** $y=\sqrt[6]{4^{x}-\frac{2^{x+\frac{3}{2}}}{(\sqrt{2})^{-1}}+(\sqrt[6]{64})^{5}}$.

3. **Определить множество значений функции и построить ее график.**
$$y=\frac{\log_{x-1,5}(10-x)\cdot(\log_{9}54-\log_{9}2)}{\log_{x-1,5}8\cdot\log_{(x-2)^{2}}(10-x)}.$$

4. **Найти точки пересечения графиков функций**
$$y=\sqrt{3}\cos\left(4x\cdot\operatorname{arctg}(\cos 10+2\sin^{2}5)+4\arccos 0\right)\cdot\sin^{2}\frac{5\pi}{4}+$$
$$+\sin\left(x\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)\cos^{2}\frac{3\pi}{4}$$ **и**
$$y=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5. **Диагональ AC параллелограмма ABCD является диаметром окружности $(x-3)^2+(y-3)^2=10$ и перпендикулярна стороне AD, лежащей на прямой $l_1: y=(1/3)x+5^1/_3$, а сторона AB параллельна прямой $l_2: y=-x$. Найти площадь параллелограмма. Построить чертеж.**

Вариант 14

1. *«Кабы я была царица,—*
Говорит одна девица,—
То на весь крещеный мир
Приготовила б я пир...»

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Чтобы нажарить блинов на «весь крещеный мир», повариха затворила тесто в двух одинаковых квашнях. Тесто из первой квашни она пережарила на малых сковородах одинакового размера, готовя блины во всю сковороду. У нее получилось 125 блинов. Притомившись, она стала из оставшегося теста жарить блины на больших сковородах, делая их той же толщины и тоже во всю сковороду, причем диаметр большой сковороды был на 25% больше. Сколько получилось больших блинов?

2. Найти область определения функции

$$y=\left[2\cdot 3^{x+1}-\frac{9^{x-\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-1}}+\left(\sqrt[5]{243}\right)^{3}\right]^{-1/2}.$$

3. Определить множество значений функции и построить ее график.

$$y=\frac{\log_{x+5}\left(4\frac{1}{4}-x\right)\cdot\left(\log_{27}18-\log_{27}2\right)}{\log_{x+5}\frac{1}{16}\cdot\log_{(x-4)^6}\left(4\frac{1}{4}-x\right)}.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\cos\left(x\cdot\left(\arccos 0-\arcsin(\cos 6-2\cos^2 3)\right)\right)\times$$
$$\times\sqrt{\cos\frac{5\pi}{3}-\sin\left(6x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\sqrt{\sin\frac{17\pi}{6}}$$ и $$y=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5. Сторона AB прямоугольной трапеции ABCD является диаметром окружности $(x-3)^2+(y-3)^2=8$, которая касается оснований трапеции. Прямая $l_1: y=-x+2$ параллельна AB, а сторона CD лежит на прямой $l_2: y=(-1/3)x+8$. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.

Вариант 15

1. *«Кабы я была царица,—*
Говорит ее сестрица,—
То на весь бы мир одна
Наткала я полотна...»

«И очутятся на бреге,
В чешуе, как жар горя,
Тридцать три богатыря,
Все красавцы молодые,
Великаны удалые,
Все равны, как на подбор,
С ними дядька Черномор.»

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Ткачиха за месяц наткала столько полотна, что его хватило точно на 25 одинаковых рубах для людей обычного роста или для 9 богатырей. На сколько процентов рост обычного человека меньше богатырского? Учесть, что выкройки для шитья русских рубах разного размера подобны и что все полотно идет в дело.

2. **Найти область определения функции**

$$y=\sqrt[8]{49^{x+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt[4]{16}}{3^{-1}}\cdot 7^{x}-\sqrt{7}\cdot 343^{-\frac{1}{6}}}\,.$$

3. **Определить множество значений функции и построить ее график.**

$$y=\frac{\log_{x-2,5}(19-x)\cdot(\log_{16}24-\log_{16}3)}{\log_{x-2,5}8\cdot\log_{(x-3)^4}(19-x)}.$$

4. **Найти точки пересечения графиков функций**

$$y=\sin\left(3x\cdot\arccos\frac{\cos 14+2\sin^2 7}{2}+4\arcsin 1\right)\times \times\sin^2\frac{5\pi}{4}-\sqrt{3}\cos\left(6x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)\cos^2\frac{3\pi}{4}\quad \text{и } y=\frac{3}{4}.$$

5. **Меньшее основание BC равнобочной трапеции ABCD является диаметром окружности $(x-4)^2+(y-4)^2=5$, которая касается другого основания AD . Средняя линия трапеции параллельна прямой $l_1 : y = (1/2)x+1/2$, а вершина A есть точка пересечения AD с прямой $l_2 : y = -x+1$. Найти площадь трапеции. Построить чертеж.**

Вариант 16

1. *«Разом пушки запалили;*
В колокольнях зазвонили;
К морю сам идет Гвидон;
Там царя встречает он...»

А.С.Пушкин «Сказка о царе Салтане ...»

Царевна-Лебедь к приезду царя Салтана решила заново вымостить дорогу от пристани до княжеского терема, заменив простые квадратные плитки золочеными, а чтобы ускорить дело велела сделать их большими, чем раньше, причем сторона простой плитки оказалась на 30% меньше, чем у золоченой. Сколько пошло золоченых плиток, если раньше дорога была вымощена 5000 простых?

2. Найти область определения функции

$$y=\left[\frac{5^{x+1}}{32^{-2/5}}-625^{\frac{x}{2}}+\sqrt[4]{625^3}\right]^{-\frac{1}{6}}.$$

3. Определить множество значений функции и построить ее график.

$$y=\frac{\log_{x+16}\left(1\frac{1}{2}-x\right)\cdot\left(\log_9 15-\log_9 5\right)}{\log_{x+16}\frac{1}{16}\cdot\log_{(x-1)^8}\left(1\frac{1}{2}-x\right)}.$$

4. Найти точки пересечения графиков функций

$$y=\cos\left(6x\cdot\arcsin\left(\frac{\cos 16}{2}-\cos^2 8\right)\right)\cdot\sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}}+$$
$$+\sin\left(3x\cdot\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{\cos\frac{13\pi}{3}}$$ и $y=-\frac{2}{3}$.

5. В четырехугольник ABCD со взаимно перпендикулярными диагоналями вписана окружность $(x-5)^2+(y-2)^2=10$ так, что ее центр лежит на диагонали AC, которая перпендикулярна прямой $l_1 : x = 3$. Окружность касается стороны AB в точке $K(2; 3)$. Сторона BC лежит на прямой $l_2 : y = (-1/3)x+7$. Найти площадь четырехугольника. Построить чертеж.

II ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КОММЕНТАРИИ.

Краткие решения приведены только для первых двух вариантов, для остальных, содержащих однотипные по структуре задачи, приведены только ответы.

II-А. ОТВЕТЫ.

	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1.	молоко - 24 руб., творог - 26 руб.	$y=\log_2(x-1)$ $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq 2 \\ 1<x<5 \end{cases}$	$y\in[-1;5]$	$x=\frac{1}{4}+2k,$ $k\in Z$	S=16 кв.ед. A(1,3), B(5,7), C(9,3)
2.	ремонт дверцы – 1000 руб, покраска - 400 руб.	$y=\log_2\|x-3$ $\begin{cases} x>1 \\ x\neq 3 \\ x\neq 4 \\ x\neq 2 \end{cases}$	$y\in[-14;4]$	$x=\frac{2}{3}+2k,$ $k\in Z$	S=40 кв.ед. A(7,6), B(1,4), C(3,-2), D(9,0)
3.	картошка - 8 га., морковь - 2 га.	$y=\log_2(x+1)$ $\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 3 \\ x<4 \\ x\neq 0 \end{cases}$	$y\in[-2;34]$	$x=\frac{3}{4}+2k,$ $k\in Z$	S=12 кв.ед. A(1,6), B(5,4), C(7,0), D(3,2)
4.	на полы уходит 2,1 аршина, на рукава 0,4	$y=\log_3\|x-5\|$ $\begin{cases} x\neq 5 \\ x>3 \\ x\neq 4 \\ x\neq 6 \end{cases}$	$y\in\left[-\frac{17}{5};3\right]$	$x=-\frac{1}{3}+2k,$ $k\in Z$	S=28 кв.ед. A(3,2), B(4,6), C(10,6), D(11,2)
5.	рога – 21 руб., копыта – 19 руб.	$y=\log_{1/2}(x+2)$ $\begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \\ x<3 \\ x\neq 2 \end{cases}$	$y\in[-4;446]$	$x=-\frac{1}{4}+2k,$ $k\in Z$	S=16 кв.ед. A(2,0), B(0,2), C(4,6), D(6,4)

6.	крутых детективов – 40 тыс. экз., дамских романов – 20 тыс. экз.	$y=\log_{2/3}(x-1$ $\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases}$	$y\in[-5;1]$	$x=\frac{5}{6}+2k,$ $k\in Z$	S=20 кв.ед. A(2,6), B(0,0), C(4,2), D(6,8)
7.	забито 60 голов, пропущено – 20	$y=\log_{1/3}(x-2)$ $\begin{cases} x<6 \\ x\neq 5 \\ x\neq 3 \\ x>2 \end{cases}$	$y\in\left[-3;\frac{17}{5}\right]$	$x=\frac{3}{4}+2k,$ $k\in Z$	S=8 кв.ед. A(6,2), B(4,0), C(0,4)
8.	плащ стоил 600 руб., шляпка – 1400 руб.	$y=\log_{1/3}\lvert x-3\rvert$ $\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\neq 2 \\ x\neq 3 \\ x\neq 4 \end{cases}$	$y\in[-34;2]$	$x=-\frac{2}{3}+2k,$ $k\in Z$	S=20 кв.ед. A(2,0), B(0,4), C(2,5), D(8,3)
9.	60 пятиалтынных	$(-\infty;2]$	$(-\infty;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;\log_2 3)$ $\cup(\log_2 3;2)$	$x=-\frac{1}{\pi}\arcsin 2\sqrt{\frac{3}{13}}+k+$ $+\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{2}{3\sqrt{13}}=$ $=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+2k\pm$ $\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{3\sqrt{13}},$ $k\in Z, y=1/3$	S=20 кв.ед. A(4,6), B(8,9), C(8,4), D(4,1)
10.	на 25%	$(0;3)$	$(-1;0)\cup$ $\cup(0;2-\log_2 3)$ $\cup(2-\log_2 3;+\infty$	$x=1/4+k-$ $-\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin 1/\sqrt{3}=$ $=-\frac{1}{4}+2k\pm$ $\pm\frac{1}{\pi}\arccos 1/\sqrt{3},$ $k\in Z, y=1/\sqrt{3}$	S=40 кв.ед. A(2,0), B(0,4), C(8,8), D(10,5)

11.	8 богатырей	$(-\infty;2]$	$(-\infty;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;1)$	$x=\frac{1}{6}+k+\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}=$ $=\frac{2}{3}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$, $k\in Z, y=\frac{\sqrt{2}}{3}$	S=40 кв.ед. A(3,8), B(9,6), C(7,0), D(1,2)
12.	на 20%	$(-\infty;3)$	$(-2;-\log_2 3)$ $\cup(-\log_2 3;0)$ $\cup(0;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$	$x=\frac{1}{4}+k+\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{2}{3}=$ $=\frac{3}{4}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{3}$, $k\in Z, y=\frac{2}{3}$	S=18 кв.ед. A(2,3), B(6,7), C(8,5), D(6,1)
13.	на 20%	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;\log_2 7)$ $\cup(\log_2 7;3)$	$x=-\frac{1}{3}+k+\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}=$ $=\frac{1}{6}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $k\in Z, y=\sqrt{\frac{2}{3}}$	S=20 кв.ед. A(2,6), B(7,1), C(4,0), D(-1,5)
14.	80 блинов	$(-\infty;2)$	$(-2\log_2 3;-3)$ $\cup(-3;0)\cup$ $\cup(0;2-\log_2 3)$ $\cup(2-\log_2 3;+\infty$	$x=\frac{1}{4}+k-\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}=$ $=-\frac{1}{4}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$, $k\in Z, y=\frac{\sqrt{3}}{4}$	S=24 кв.ед. A(5,1), B(1,5), C(9,5), D(3,7)
15.	на 40%	$[-1;+\infty)$	$(-\infty;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;\log_2 15)$ $\cup(\log_2 15;4)$	$x=\frac{1}{3}+k+\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{3}{4}=$ $=\frac{5}{6}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{3}{4}$, $k\in Z, y=\frac{3}{4}$	S=15 кв.ед. A(1,0), B(2,3), C(6,5), D(9,4)
16.	2450 плиток	$(-\infty;2)$	$(-\log_2 17;-4)$ $\cup(-4;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$	$x=-\frac{1}{4}+k-\frac{(-1)^k}{\pi}\arcsin\frac{2}{3}=$ $=\frac{5}{4}+2k\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{3}$, $k\in Z, y=-\frac{2}{3}$	S=$53\frac{1}{3}$кв.ед A($1\frac{2}{3}$,2), B(3,6), C(15,2), D(3,-2)

II-В. РЕШЕНИЯ

Вариант 1

1. Пусть x руб., y руб. – прежние стоимости молока и творога соответственно. Из условий имеем: $(1{,}2x+1{,}3y)$руб. – новая стоимость покупки

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{1{,}2x+1{,}3y}=0{,}8\\ 1{,}3y-1{,}2x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1{,}2x=24\\ 1{,}3y=26\end{cases}.$$

Ответ: новая стоимость молока – 24 руб., творога – 26 руб.

2. Для построения графика функции вначале необходимо определить ее область определения (область допустимых значений – О.Д.З.) – множество значений x, для которых определены все функции вида $y=\log_{g(x)}f(x)$, входящие в выражение для заданной функции:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ g(x)\neq 1\end{cases}\text{, т.е. }\begin{cases}5-x>0,\\ 5-x\neq 1\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<5,\\ x\neq 2,\\ x\neq 4.\end{cases}$$

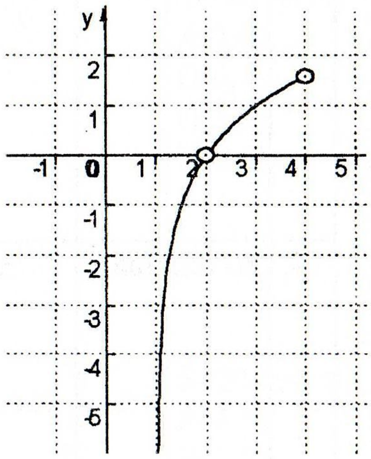

Рис. 1.

После преобразований, эквивалентных в О.Д.З., получим:

$$y=\frac{\log_6 27+\log_6 8}{\log_{\sqrt[3]{5-x}} 2\cdot\log_{(x-1)^3}(5-x)}=$$

$$=\frac{3(\log_6 3+\log_6 2)}{9\cdot\log_{5-x}2\cdot\frac{1}{3}\cdot\log_{x-1}(5-x)}=\frac{\log_{5-x}(x-1)}{\log_{5-x}2}=\log_2(x-1)$$. График на рис. 1.

3. $y=\sqrt{8}/3\cdot 4^{x-\frac{5}{4}}-3^{-1}\cdot 2^{x+1}-2\cdot 6^{-1}$. После преобразований получим:

$y=1/6(4^x-4\cdot 2^x-2)$. Пусть $2^x=t$. Получим:

$y=1/6\cdot t^2-2/3\cdot t-1/3=1/6(t-2)^2-1\Rightarrow$. Функция имеет минимум при $t_0=2$, равный $y_{\min}=-1$.Так как $t=2^x$ непрерывная и монотонная функция, то $x\in[0;3]\Rightarrow t\in[1;8]$. Кроме того $y|_{t=1}=-5/6$ и $y|_{t=8}=5$. Поскольку $t_0\in[1;8]$, то $y\in[-1;5]$.

4. После преобразований получим функцию вида:

$$y=\sin\left(\pi x+8\operatorname{arctg}\left(\cos 2-2\cos^2 1\right)\right)\sqrt{\sin{\pi}/{6}}+\cos\left(\left(\arcsin{\sqrt{3}}/{2}+\arccos\left(-{1}/{2}\right)\right)x\right)\times$$

$$\times\sqrt{\cos{\pi}/{3}}=\sin(\pi x-2\pi)\,{1}/{\sqrt{2}}+\cos\pi x\cdot{1}/{\sqrt{2}}=\cos\left(\pi x-{\pi}/{4}\right).$$ Так как:

$$y_{\max}=1\Leftrightarrow\cos\left(\pi x-{\pi}/{4}\right)=1\Leftrightarrow x={1}/{4}+2k,k\in Z.$$

5. Так как B – центр окружности $(x-5)^2+(y-7)^2=16$, то его координаты (5;7). Поскольку основание AC – горизонтально, то высота BD – вертикальна, следовательно горизонтальная координата точки D такая же как точки B, т.е. равна 5. Вертикальная координата точки D есть 3, так как основание лежит на прямой y=3. Длина высоты, являющейся вертикальной линией, вычисляется как разность вертикальных координат точек B и D и равна 4. Угловой коэффициент прямой $y=x$ равен 1. Это означает, что тангенс угла наклона к горизонтальной оси равен 1, а сам этот угол 45°. Так как сторона AB параллельна этой прямой, а AC – горизонтальна, то $\angle$BAC тоже имеет величину 45°, Так как ΔABD прямоугольный с прямым углом $\angle$ADB, то $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}\cdot\operatorname{ctg}\widehat{\mathrm{BAD}}=4\cdot1=4$. В силу симметрии равнобедренного треугольника ABC относительно BD расстояние AC=2·AD=8. Площадь ΔABC равна S=1/2·AC·BD=16 кв.ед. Поскольку у равнобедренного треугольника высота является медианой, то AD=DC=4. Так как AC – горизонтальна и координаты D есть (5,3), то точки A и C имеют координаты (1,3) и (9,3) соответственно. Чертеж приведен на рис. 2.

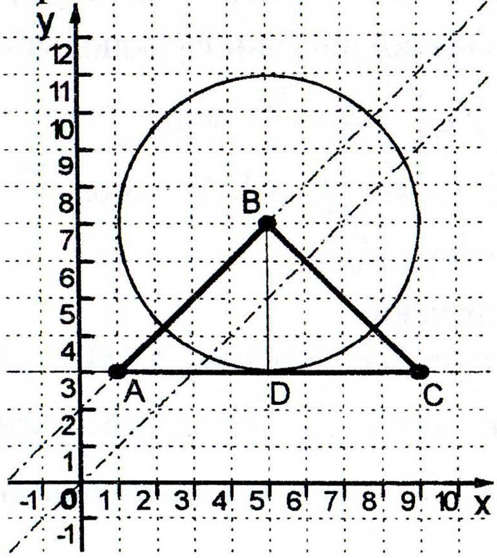

Рис. 2.

Вариант 2

1. Пусть x, y руб. – стоимости ремонта и покраски в настоящее время. Из условий имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{0{,}7x+0{,}75y}=1{,}4 \\ 0{,}7x-0{,}75y=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2{,}5y \\ 1{,}75y-0{,}75y=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1000 \\ y=400 \end{cases}$$

Ответ: стоимость ремонта – 1000 руб., стоимость покраски – 400 руб.

2. О.Д.З. $\begin{cases} x-1>0, \\ x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ x-1\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x\neq 3, \\ x\neq 4, \\ x\neq 2. \end{cases}$

$$y=\frac{\log_6(32\cdot 243)}{\dfrac{\log_2(x-1)}{2\log_2|x-3|}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{10}\log_2(x-1)}}=$$

$=\log_2|x-3|$. График показан на рис. 3.

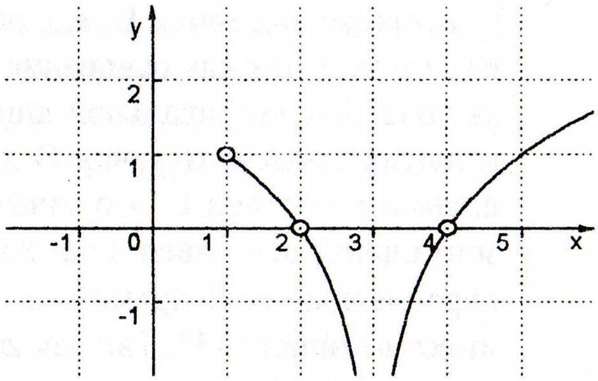

Рис. 3.

3. После преобразований получим: $y=2+4\cdot 4^x-2\cdot 16^x$. Пусть $4^x=t$. Так как $x\in[-1;1]$, то $t\in[0{,}25;4]$. Получим:

$y=2+4t-2t^2=4-2(t-1)^2 \Rightarrow y_{\max}=4$ при $t=t_0=1$. Кроме того $y|_{t=0{,}25}=2{,}875$ и $y|_{t=4}=-14$. Так как функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ непрерывные и $t_0\in[0{,}25;\ 4]$, то $y\in[-14;\ 4]$..

4. После преобразований получим функцию вида:

$$y=\cos\left(6x\cdot\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{3}\sin\left(4x\cdot\operatorname{arctg}\left(1-2\sin^2 2+2\sin^2 2\right)\right)+18\cdot\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\cos\pi x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(4x\cdot\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos\pi x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\pi x=$$

$$=-\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Минимальное значение

$-\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow \pi x-\pi/6=\pi/2+2\pi k \Leftrightarrow x=2/3+2k.$

5. Точку B можно найти как точку пересечения прямых AB и BC: $\begin{cases} y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3} \\ y=-3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$. Так как центр вписанной окружности E(5,2)

является точкой пересечения диагоналей квадрата, которые делятся этой точкой пополам, то координаты точки E являются средними арифметическими соответствующих координат точек B и D. Если обозначить (x_D, y_D) координаты точки D, то

$\begin{cases} 5 = \dfrac{1+x_D}{2} \\ 2 = \dfrac{4+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 0 \end{cases}$. Прямая AD параллельна прямой BC и, следовательно, имеет одинаковый с ней угловой коэффициент, т.е. имеет уравнение $y = -3x+b$. Параметр b находится из условия прохождения прямой CD через точку D: $0 = -3\cdot 9 + b \Leftrightarrow b = 27$. Итак уравнение прямой AD есть $y = -3x + 27$. Точку A можно найти как точку пересечения прямых AB и AD:

$\begin{cases} y = x/3 + 11/3 \\ y = -3x + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$. Координаты точки C можно найти исходя из того, что точка E середина диагонали AC, т.е., если обозначить (x_C, y_C) координаты точки C, то

$\begin{cases} 5 = \dfrac{7+x_C}{2} \\ 2 = \dfrac{6+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = -2 \end{cases}$. Длина стороны квадрата, например AB, может быть найдена как $AB = \sqrt{(7-1)^2 + (6-4)^2} = 2\sqrt{10}$. Площадь квадрата $S = (2\sqrt{10})^2 = 40$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 4.

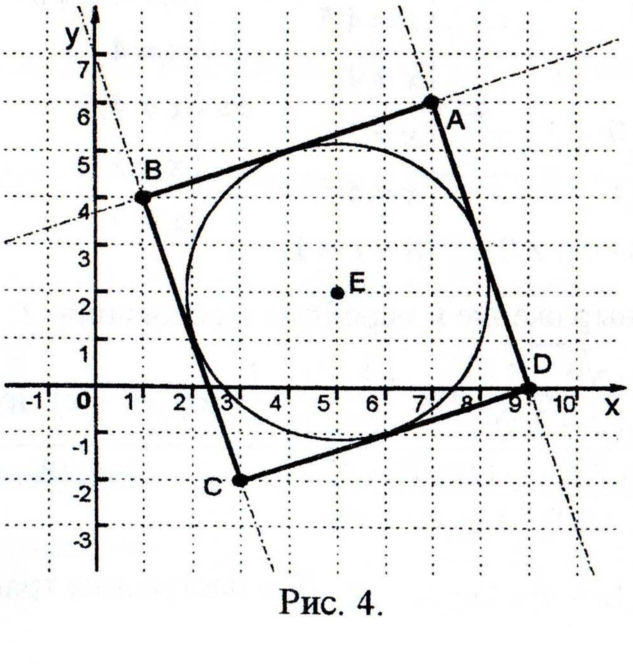

Рис. 4.

Вариант 9

1. Обозначим h – толщину монет, R, r – радиусы рублевика и пятиалтынной монеты соответственно. По условию $r = R/2$. Тогда объемы рублевика $V_1 = \pi R^2 h$ и пятиалтынной монеты $V_2 = \pi r^2 h$ относятся как $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2}{r^2} = 4 \Leftrightarrow V_1 = 4V_2$. Объем 10 скорлупок по условию совпадает с объемом 15 рублевиков и равен $15V_1 = 15 \cdot 4V_2 = 60V_2$.
   Поэтому из 10 скорлупок получается 60 пятиалтынных монет.
2. Область определения функции есть решение неравенства:
   $2^4 - \frac{4^{x+1}}{32^{1/5}} + \sqrt[3]{64} \cdot 2^x \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 2 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x \geq 0$. Вводя обозначение $t = 2^x > 0$ и сокращая на (-2), получим $t^2 - 2t - 8 \leq 0$. Дискриминант этого квадратного трехчлена $D = 4 + 4 \cdot 8 = 36 > 0$, а его корни $t_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2} = -2$, $t_2 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2} = 4$. Так как коэффициент при старшей степени t положительный, то $t \in [-2;4]$. Осуществляя обратную замену получим $-2 \leq 2^x \leq 4$. Так как $-2<0$ и $2^x>0$, то левая половина этого двойного неравенства выполняется всегда. Решая $2^x \leq 4$, получаем $x \leq \log_2 4 \Leftrightarrow x \leq 2$. Поэтому область определения — промежуток $(-\infty; 2]$.
3. Найдем область определения функции:

$$\begin{cases} 8 - x > 0 \\ x - 3{,}5 > 0 \\ x - 3{,}5 \neq 1 \\ (x-4)^2 > 0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ \log_{(x-4)^2}(8-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3{,}5 < x < 8 \\ x \neq 4{,}5 \\ x \neq 4 \\ x \neq 3 \\ x \neq 5 \\ 8 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3{,}5 < x < 8 \\ x \neq 4 \\ x \neq 4{,}5 \\ x \neq 5 \\ x \neq 7 \end{cases}$$

Упростим выражение и перейдем к основанию 2:

$$y = \frac{\dfrac{\log_2 \sqrt{8-x}}{\log_2 (x-3{,}5)} \cdot \log_2 \dfrac{18}{9}}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 (x-3{,}5)} \cdot \dfrac{\log_2 (8-x)}{\log_2 (x-4)^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_2 (8-x) \cdot \log_2 (x-4)^2}{\log_2 (8-x)} =$$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 |x-4| = \log_2 |x-4|$. Для построения графика этой функции сначала построим график $y = \log_2|x|$, который получается из графика $y = \log_2 x$ добавлением ветви в левой полуплоскости симметрично относительно вертикальной оси. График $y = \log_2|x-4|$ получается из графика функции $y = \log_2|x|$ сдвигом на 4 единицы вправо. С учетом области определения график показан на рис. 5. Для нахождения множества значений функции рассмотрим участки ее монотонности (3,5;4), (4;4,5), (4,5;5), (5;7), (7;8) и найдем множество ее значений на каждом из них. Будем иметь интервалы (-∞; -1), (-∞; -1), (-1; 0), (0; $\log_2 3$), и ($\log_2 3$; 2). Объединяя их, получим ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;\log_2 3)\cup(\log_2 3;2)$.

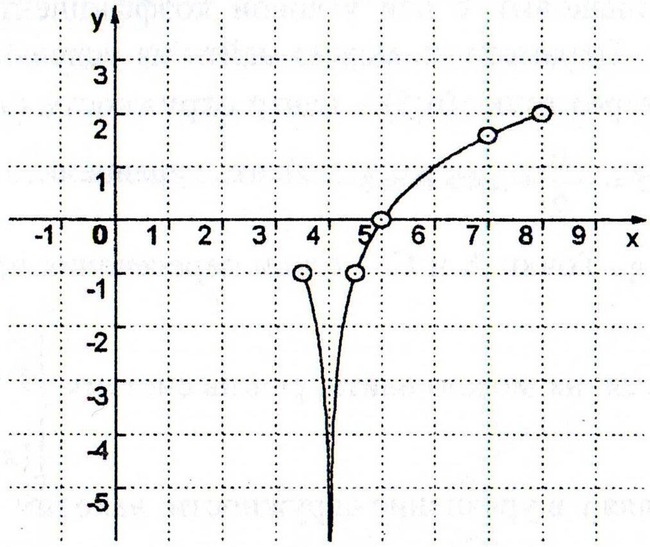

Рис. 5.

4. Упростим первую функцию:

$$y = \sin\left(\pi x + 8\operatorname{arctg}\left(2\cos^2 1 - 1 - 2\cos^2 1\right)\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{3}\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)x\right) =$$

$$= \sin\left(\pi x + 8\operatorname{arctg}(-1)\right)\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cos\pi x = \frac{1}{2}\sin\left(\pi x + 8\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sqrt{3}\cos\pi x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\pi x - 2\pi) + \sqrt{3}\cos\pi x = \frac{1}{2}\sin\pi x + \sqrt{3}\cos\pi x =$$

$$= \sqrt{(1/2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sin\left(\pi x + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13/4}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sin\left(\pi x + \arcsin 2\sqrt{\frac{3}{13}}\right).$$

Для нахождения горизонтальных координат точек пересечения графиков решим уравнение $\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sin\left(\pi x + \arcsin\ 2\sqrt{\frac{3}{13}}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi x + \arcsin 2\sqrt{\frac{3}{13}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{13}} \Leftrightarrow$$

$$\pi x + \arcsin\, 2\sqrt{3/13} = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3\sqrt{13}} + \pi n\,, \quad \text{где} \quad n \in Z\,.$$

Итак $x = -\dfrac{1}{\pi}\arcsin 2\sqrt{\dfrac{3}{13}} + \dfrac{(-1)^n}{\pi}\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{13}} + n\,.$

Горизонтальная координата точек пересечения очевидно равна 1/3 .

5. Диагональ АС параллельна прямой $y = -x/2+1$ и, следовательно, имеет одинаковый с ней угловой коэффициент, т.е. ее уравнение $y = -x/2+a$. Параметр a можно найти из условия прохождения прямой АС через точку (6;5) – центр окружности $(x-6)^2+(y-5)^2=5$. Имеем $5 = -\dfrac{6}{2}+a \Leftrightarrow a = 8$. Итак, уравнение прямой АС есть $y = -\dfrac{x}{2}+8$. Точки А и С – точки пересечения прямой АС и данной окружности, их можно найти, решив систему $\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2}+8 \\ (x-6)^2+(y-5)^2 = 5 \end{cases}$.

Подставляя y в уравнение окружности, находим

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{x}{2}+3\right)^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + \frac{x^2}{4} - 3x + 9 = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - 15x + 40 = 0\,.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $x_1=4$, $x_2=8$. Подставляя найденные горизонтальные координаты в уравнение прямой АС, получим их вертикальные координаты: $y_1 = -\dfrac{4}{2}+8 = 6$, $y_2 = -\dfrac{8}{2}+8 = 4$. Итак, имеем точки А(4,6) и С(8,4). Прямая BD перпендикулярна АС. Поскольку произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (–1), то угловой коэффициент прямой BD есть 2, и ее уравнение: $y = 2x + b$. Параметр b ищется из условия прохождения прямой BD через точку Е(6,5) – середину диагонали АС, являющейся центром окружности. Итак,

$5 = 2\cdot 6 + b \Leftrightarrow b = -7$, и уравнение прямой BD есть $y = 2x - 7$. Точка B есть точка пересечения прямых AB и BD, и ее координаты находятся из решения системы: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$. Решая ее, получим $\dfrac{x}{2} + 5 = 2x - 7 \Leftrightarrow x = 8$. Вертикальная координата точки B есть $y = 2\cdot 8 - 7 = 9$. Длина диагонали AC равна диаметру окружности, т.е. вдвое больше радиуса: $AC = 2\sqrt{5}$. Длину BE (половину диагонали BD) можно найти зная координаты точек B и E: $BE = \sqrt{(8-6)^2 + (9-5)^2}$. Площадь ромба вычисляется как половина произведения длин его диагоналей: S=1/2·AC·BD= =AC·BE= $\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 10$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 6.

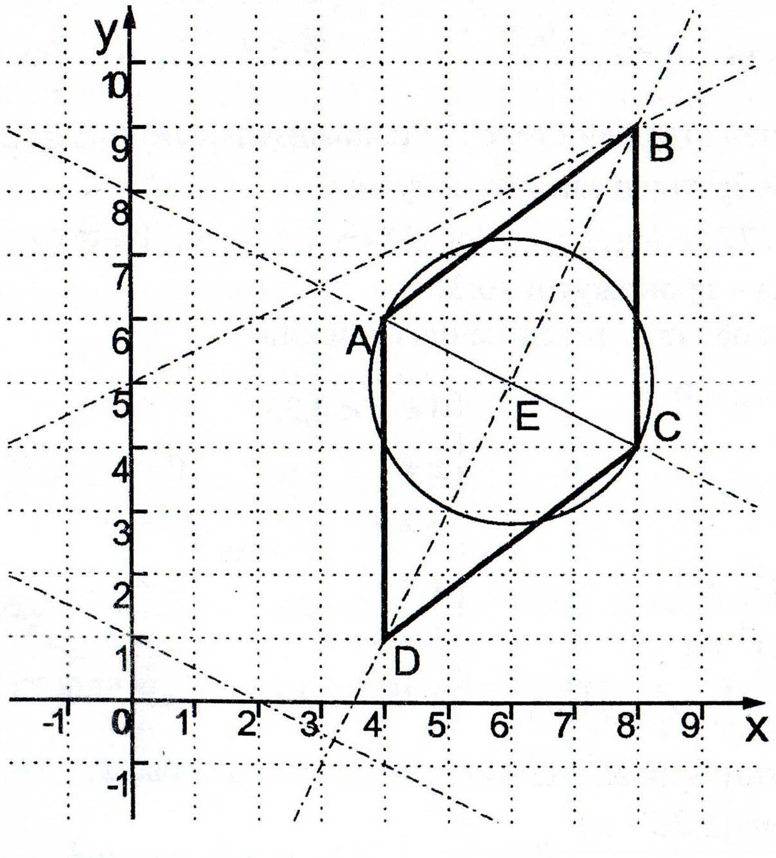

Рис. 6.

Вариант 10

1. Обозначим V – объемы каждой из квашней, h – толщину блинов, d, D – диаметры малой и большой сковород соответственно. Тогда объемы блинов, получающихся на малой и большой сковородах соответственно равны: $V_1 = \frac{\pi d^2}{4}h$, $V_2 = \frac{\pi D^2}{4}h$. По условию $250V_1=V=160V_2$, вследствие чего имеем: $250\frac{\pi d^2}{4}h = 160\frac{\pi D^2}{4}h \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 25d^2 = 16D^2 \Leftrightarrow 5d = 4D \Leftrightarrow D = 1{,}25d$. Из последнего равенства можно сделать вывод, что диаметр большой сковороды на 25% больше диаметра малой.
2. Степень (-1/2) означает квадратный корень в знаменателе, поэтому область определения функции есть решение неравенства:
$7\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot 3^x-(243)^{-1/5}\cdot 9^{x+1}-\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12}>0 \Leftrightarrow 7\cdot 4\cdot 3\cdot 3^x-\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot 3^2-3^4>0.$
Вводя обозначение $t=3^x>0$ и сокращая на (-3), получим t^2-$28t+27<0$. Дискриминант этого квадратного трехчлена D=784–4· 27=676>0, а его корни $t_1=\frac{28-\sqrt{676}}{2}=1$, $t_2=\frac{28+\sqrt{676}}{2}=27$. Так как коэффициент при старшей степени t положительный, то $t\in(1;27)$. Осуществляя обратную замену, получим
$1<3^x<27 \Leftrightarrow \log_3 1<x<\log_3 27 \Leftrightarrow 0<x<3$. Поэтому область определения – промежуток (0;3).
3. Найдем область определения функции

$$\begin{cases} 2\frac{1}{4}-x>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ (x-2)^2>0 \\ (x-2)^2\neq 1 \\ \log_{(x-2)^2}\left(2\frac{1}{4}-x\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2{,}25 \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ x\neq 3 \\ 2{,}25-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2{,}25 \\ x\neq 1 \\ x\neq 1{,}25 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Упростим выражение и перейдем к основанию 2:

$$y=\frac{\frac{\log_2(2{,}25-x)}{\log_2 x}\cdot\log_3\frac{24}{8}}{\frac{\log_2 1/4}{\log_2 x}\cdot\frac{\log_2(2{,}25-x)}{\log_2(x-2)^2}}=\frac{\log_3 3\cdot\log_2(x-2)^2}{-2}=$$

$$=\frac{2\log_2|x-2|}{-2}=-\log_2|x-2|.$$

Для построения графика этой функции сначала построим график $y=\log_2|x|$, который получается из графика $y=\log_2 x$ добавлением ветви в левой полуплоскости симметрично относительно вертикальной оси. График $y=\log_2|x\text{-}2|$ получается из графика функции $y=\log_2|x|$ сдвигом на 2 единицы вправо, и наконец, график функции $y=-\log_2|x\text{-}2|$ получается из графика $y=\log_2|x\text{-}2|$ симметричным отображением относительно горизонтальной оси координат.

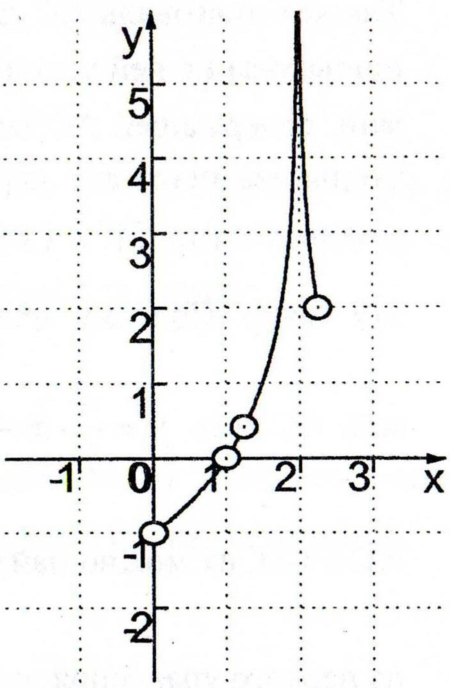

Рис. 7.

С учетом области определения график показан на рис. 7. Для нахождения множества значений функции рассмотрим участки ее монотонности (-1;0), (1;1,25), (1,25;2), (2;2,25) и найдем множество ее значений на каждом из них. Будем иметь интервалы (-1; 0), (0; 2-$\log_2 3$), $(2-\log_2 3;+\infty)$ и $(2;+\infty)$. Объединяя их получим ответ: $(-1;0)\cup(0;2-\log_2 3)\cup(2-\log_2 3;+\infty)$.

4. Упростим первую функцию:

$$y=\cos\left(6x\cdot\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}+\sin\left(4x\cdot\operatorname{arctg}\left(1-2\sin^2 2+2\sin^2 2\right)+18\cdot\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\pi x+\sin\left(4x\cdot\frac{\pi}{4}+3\pi\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\pi x+\sin(\pi x+3\pi))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\pi x-\sin\pi x)=-\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right).$$ Для нахождения горизонтальных координат точек пересечения графиков решим уравнение

$$-\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \pi x-\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,$$ где

$n\in Z$. Итак, $x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}+n$. Горизонтальная координата точек пересечения очевидно равна $1/\sqrt{3}$.

5. Так как диагональ AC параллельна прямой $y=4x/3$, то она имеет одинаковый с ней угловой коэффициент $4/3$, т.е. ее уравнение прямой, содержащей AC есть $y=4x/3+a$. Так как диагональ прямоугольника проходит через его центр, совпадающий с центром окружности $(x-5)^2+(y-4)^2=10$ точкой E(5,4), то AC содержит эту точку. Поэтому $4=\frac{4}{3}\cdot 5+a \Leftrightarrow a=-\frac{8}{3}$. Итак, уравнение прямой AC есть $y=\frac{4}{2}\cdot x-\frac{8}{3}$. Точка C — точка пересечения прямых AC и CD, их можно найти, решив систему $\begin{cases} y=\frac{4}{3}\cdot x-\frac{8}{3} \\ y=-2x+24 \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, находим :

$0=\frac{4}{3}\cdot x-\frac{8}{3}+2x-24 \Leftrightarrow x=8$. Подставляя найденную горизонтальную координату в уравнение прямой CD, получим вертикальную координату точки C:y=– 2·8+24=8. Итак, точка C имеет координаты (8,8). Если считать, что точка A имеет координаты (x_A, y_A), то поскольку точка E – середина отрезка AC, то координаты точки E – это средние арифметические координат точек A и C, т.е.: $5=\frac{x_A+8}{2} \Leftrightarrow x_A=2$ и $4=\frac{y_A+8}{2} \Leftrightarrow y_A=0$. Поскольку в прямоугольнике смежные стороны перпендикулярны, то прямая AD перпендикулярна CD. Произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно (–1), и так как угловой коэффициент прямой CD есть (–2), то угловой коэффициент прямой AD равен $\frac{1}{2}$, а ее уравнение имеет вид $y=x/2+b$. Параметр b ищется из условия прохождения прямой AD через точку A(2,0): $0=\frac{2}{2}+b \Leftrightarrow b=-1$. Итак, уравнение прямой AD есть $y=x/2-1$. Точка D ищется как точка пересечения прямых AD и CD и ее координаты ищутся из системы: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - 1 \\ y = -2x + 24 \end{cases}$.

Решая ее, получим: $x/2 - 1 = -2x + 24 \Leftrightarrow x = 10$. Вертикальная координата точки D есть $y = -2 \cdot 10 + 24 = 4$. Итак, координаты точки D есть (10, 4). Вычислим размеры прямоугольника:

длина $\mathrm{CD} = \sqrt{(10-8)^2 + (4-8)^2} = 2\sqrt{5}$,

а длина $\mathrm{AD} = \sqrt{(10-2)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{5}$.

Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон: $S = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{CD} = 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 40$ кв.ед. Чертеж приведен на рис. 8.

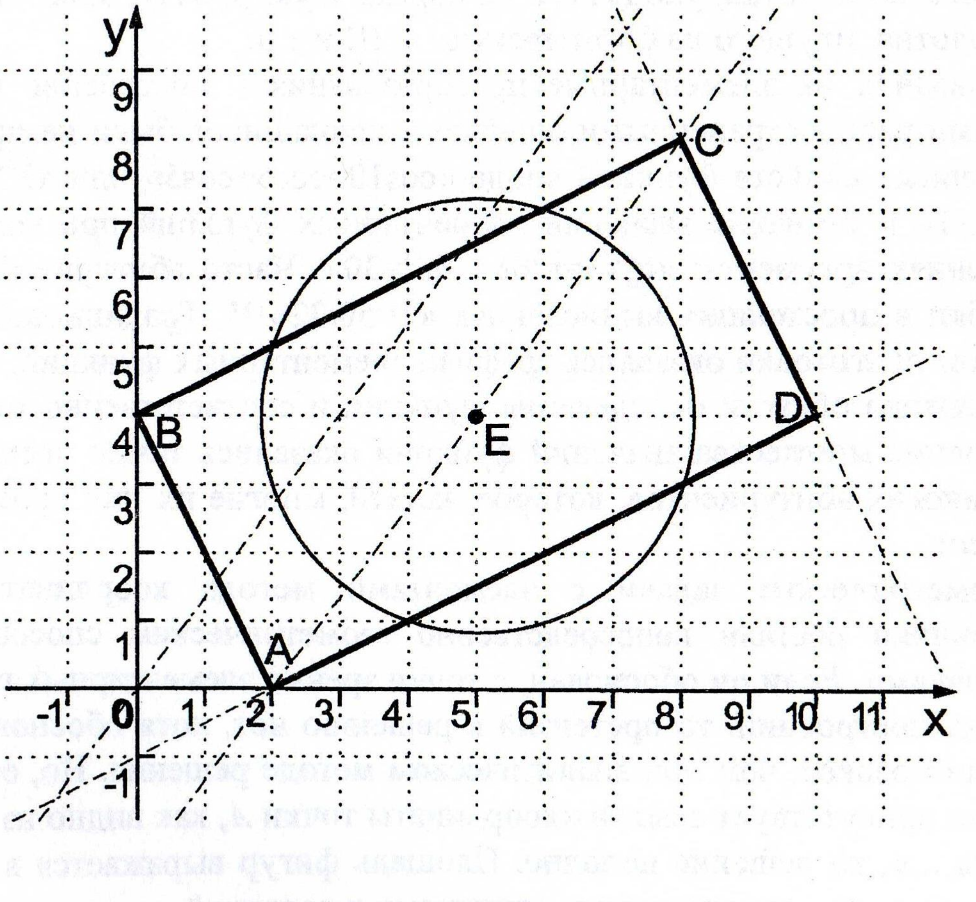

Рис. 8.

II-С. КРАТКИЕ КОММЕНТАРИИ

В качестве общих замечаний к работам школьников приведем следующие:

В текстовых задачах неприятности абитуриентов начинаются с определения искомых переменных. Начиная с туманного представления того, что надо искать, например: «x – золотая плитка, y – расстояние дороги...», «x – большая сковорода, y – малая сковорода...», «x – первая квашня, y – вторая квашня...», и кончая бездумным выписыванием ответа, вроде: «93,75 блина». Источником самой распространенной логической ошибки в текстовых задачах было незнание понятия подобия и отношения площадей подобных фигур. Второй распространенной ошибкой было неправильное понимание процентных соотношений: «x+40%», «x – количество полотна, уходящего на нормальную рубаху, 0,5x – количество полотна, идущего на богатырскую » !!! и т.п.

В задачах на элементарные преобразования и построение графиков самыми распространенными ошибками школьников были незнание элементарных свойств функций вроде «cos10=cos5+cos5» или «$3^{4x}+3^{x}=3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x+x=1$» и незнание значений элементарных функций при конкретных значениях аргумента: «$\mathrm{tg}\sqrt{3}=\pi/6$» , «$3^3=30$». Часто абитуриенты делали ошибки в простейших вычислениях «1=50/32»!!! Традиционно слабым местом подготовки оказались графики элементарных функций. Аккуратный анализ области определения функций и соответственно точное определение множества значений функции оказались также препятствием для многих абитуриентов, которое, кстати, многие их них просто не заметили.

Геометрические задачи с элементами метода координат многие школьники решили непосредственно геометрическим способом, «по клеточкам». Если он обоснован, с точки зрения элементарных геометрических построений, то претензий к решению нет, хотя обоснование более громоздкое, чем при аналитическом методе решения. Но, если в решении присутствует ссылка «координаты точки *A*, как видно из рисунка, равны ...», то решение неполно. Площадь фигур выражается в квадратных единицах, определяемых единицами в заданной системе координат, хотя в одной из работ встретилась и более современная единица измерения: «S_{ABCD}=37,5 у.е.». Представленные в этом сборнике решения геометрических задач носят традиционный планиметрический характер, в них максимально используются особенности данных задачи и свойства прямоугольной системы координат.

Ответственный за выпуск Т. Ф. Сатикова
Редактор Н. А. Карамзина
Верстка Е. И. Тюленева

09.06.1999. Заказ 251. Тираж 200 экз. 2 усл. печ. л.
ГМА им. адм. С. О. Макарова
199106 Санкт-Петербург, Косая линия, 15-а