
УДК 531.3

**СКОЛЬЖЕНИЕ УЗКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ
ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С АСИММЕТРИЧНЫМ
ОРТОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ ПРИ РАВНОМЕРНОМ
РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ**

© 2020 г. Н. Н. Дмитриев^{1,*}, Х. Хан^{2,**}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Tianjin University, Tianjin, China

*e-mail: dn7@rambler.ru

**e-mail: hanxuesongphd@126.com

Поступила в редакцию 03.03.2020 г.

После доработки 15.05.2020 г.

Принята к публикации 25.09.2020 г.

Изучено влияние асимметричного ортотропного трения на твердое тело, опирающееся на узкую прямоугольную область. В качестве примера рассмотрено движение однородного стержня по плоскости с асимметричным ортотропным трением. Полученные результаты могут найти широкое практическое применение в построении алгоритмов обработки материалов, при контакте с которыми возникает анизотропная сила трения.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение, асимметричное трение

DOI: 10.31857/S0032823520060041

1. Введение. Анизотропия трения наблюдается при относительном скольжении тел с текстурированной поверхностью или фрикционном взаимодействии материалов, обладающих анизотропией упругих свойств [1, 2]. Показано [3] существенное влияние угла армирования композитного материала на параметры контактирования при анизотропном трении прямоугольной пластины по двум недеформируемым поверхностям. В монографии [4] рассмотрено движение узкой прямоугольной пластины по плоскости с изотропным трением в предположении, что давление распределено равномерно по всей площади контакта. Проведено [5] исследование скольжения стержня со смещенным центром масс по плоскости с анизотропным трением. Отмечено [6, 7], что сила трения может обладать свойствами асимметрии. Данная характеристика трения влияет на качественные и количественные параметры движения тел [8].

Экспериментальные исследования [11, 12] посвящены обработке различного вида кристаллов и керамик. Это направление заслуживает внимания, так как связано с технологиями современной оптики и электронной индустрии. Кристаллические структуры обладают механическими анизотропными свойствами, что необходимо учитывать при их обработке. Полученные ниже результаты могут помочь в построении алгоритмов обработки материалов, при контакте с которыми возникает анизотропная сила трения.

Пусть с плоскостью скольжения связана прямоугольная декартова система координат $Ox\eta z$ так, что оси Ox и Oy лежат в этой плоскости. Будем полагать, что сила трения описывается законом

$$\mathbf{T} = -NQ(\gamma)\frac{\mathbf{v}}{v}, \quad Q(\gamma) = \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = v(\cos \gamma \mathbf{i} + \sin \gamma \mathbf{j})$$

$$f_x = \begin{cases} f_{x+}, & v_x \geq 0 \\ f_{x-}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad f_y = \begin{cases} f_{y+}, & v_y \geq 0 \\ f_{y-}, & v_y < 0 \end{cases}$$
(1.1)

Здесь N – нормальная реакция в точке контакта, \mathbf{v} , v – вектор и величина скорости точки контакта тела с плоскостью, γ – угол, определяющий направление скорости точки, который отсчитывается от оси Ox , $v_x = v \cos \gamma$, $v_y = v \sin \gamma$ – проекции скорости точки на оси координат, $Q(\gamma)$ – матрица коэффициентов трения, f_x и f_y – компоненты матрицы трения, принимающие различные значения в зависимости от проекции скорости на соответствующие оси.

Цель работы – определить качественные и количественные характеристики движения тела, опирающегося узкой прямоугольной площадкой на горизонтальную плоскость при учете асимметричного трения. При этом особое внимание требуется уделить исследованию финального движения стержня (т.е. в моменты, близкие к его остановке) в условиях рассматриваемого асимметричного ортотропного трения.

2. Уравнения движения твердого тела при симметричном ортотропном трении и равномерном распределении давления. Приведем сведения о движении указанной механической системы, которые потребуются при решении поставленной задачи. Под узкой прямоугольной областью понимается прямоугольник, одна из сторон которого стремится к нулю, длина второй стороны равна ℓ . Другими словами, область контакта, с точностью до малых второго порядка, можно считать отрезком длины ℓ . Пусть вес твердого тела равен P и давление распределено равномерно. Ранее [5, 10] были определены сила трения и момент трения, действующие на такую область, в предположении, что трение является симметричным ортотропным ($f_x = \text{const}$, $f_y = \text{const}$, $f_y \geq f_x$):

$$T_x = -\frac{P}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{f_x (v \cos \vartheta - \omega \xi \sin \varphi)}{\sqrt{v^2 + \omega^2 \xi^2} + 2\omega v \xi \sin(\vartheta - \varphi)} d\xi$$

$$T_y = -\frac{P}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{f_y (v \sin \vartheta + \omega \xi \cos \varphi)}{\sqrt{v^2 + \omega^2 \xi^2} + 2\omega v \xi \sin(\vartheta - \varphi)} d\xi$$
(2.1)

$$L_{Cz} = -\frac{P}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{[f_y (v \sin \vartheta + \omega \xi \cos \varphi) \cos \varphi - f_x (v \cos \vartheta - \omega \xi \sin \varphi) \sin \varphi] \xi d\xi}{\sqrt{v^2 + \omega^2 \xi^2} + 2\omega v \xi \sin(\vartheta - \varphi)}$$

Уравнения движения твердого тела по инерции записываются в виде

$$m\ddot{x} = T_x, \quad m\ddot{y} = T_y, \quad I_C \ddot{\phi} = L_{Cz},$$
(2.2)

где m – масса твердого тела, I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости скольжения, v – величина скорости центра масс, ϑ – угол между осью Ox и вектором скорости центра масс, ω – угловая скорость твердого тела, вектор которой направлен вдоль оси Oz , φ – угол между

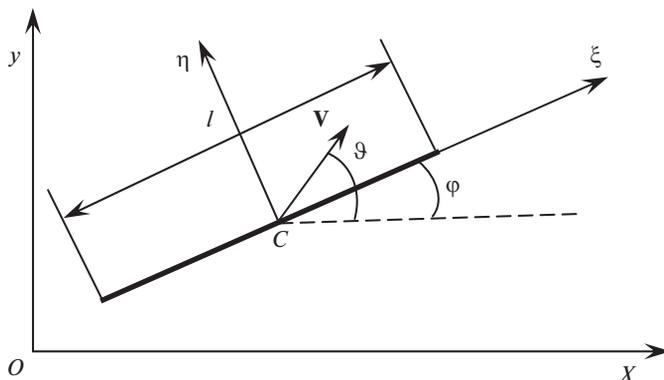


Рис. 1. Узкая прямоугольная область на плоскости Ox .

осью Ox и осью $C\xi$, отвечающий за ориентацию площадки контакта на плоскости (см. рис. 1).

Первые два уравнения системы (2.2) перепишем в проекциях на оси естественного трехгранника

$$m\dot{v} = T_x \cos \vartheta + T_y \sin \vartheta, \quad m v \dot{\vartheta} = -T_x \sin \vartheta + T_y \cos \vartheta \quad (2.3)$$

и перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\xi = \ell \xi^*, \quad v = v^* \sqrt{\ell g}, \quad \omega = \omega^* \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad t = t^* \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt^*} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$P = P^* mg, \quad I_C = I_C^* m \ell^2, \quad L_{Cz} = L_{Cz}^* mg \ell, \quad \beta = \beta^* \ell, \quad \beta^* = \frac{v^*}{\omega^*}$$

В итоге, уравнения движения тела по инерции в безразмерных переменных, в случае симметричного ортотропного трения имеют вид (звездочки ниже опущены)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\beta P (f_x + \mu \sin^2 \vartheta) I_0 - P [f_x \sin(\vartheta - \varphi) + \mu \cos \varphi \sin \vartheta] I_1 \\ v \dot{\vartheta} &= -\beta P \mu \sin \vartheta \cos \vartheta I_0 - P [f_x \cos(\vartheta - \varphi) + \mu \cos \varphi \cos \vartheta] I_1 \\ \dot{\omega} &= -\frac{P}{I_C} \{ \beta [f_x \sin(\vartheta - \varphi) + \mu \cos \varphi \sin \vartheta] I_1 - (f_x + \mu \cos^2 \varphi) I_2 \}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mu = f_y - f_x$,

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \int \frac{dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)}} = \\ &= \ln \left| 2\sqrt{z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} + 2z + 2\beta \sin(\vartheta - \varphi) \right| \\ I_0 &= I_0(z) \Big|_{z_1}^{z_2} \\ I_1 &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)}} = \left[\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)} - \beta \sin(\vartheta - \varphi) I_0(z) \right] \Big|_{z_1}^{z_2} \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)}} = \left[\left(\frac{z}{2} - \frac{3\beta \sin(\vartheta - \varphi)}{2} \right) \sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)} - \frac{3\beta \sin(\vartheta - \varphi) - 2\beta^2}{4} I_0(z) \right]_{z_1}^{z_2}$$

Отметим, что в случае симметричного ортотропного трения $z_1 = -1/2$, $z_2 = 1/2$ и f_x , f_y , μ не меняют своих значений.

3. Вывод уравнений движения при асимметричном ортотропном трении. Сила трения и момент трения в случае асимметричного трения существенно зависят от направления скоростей точек в области контакта, так как коэффициенты трения f_x и f_y , фигурирующие в выражениях (2.1), зависят от знаков проекций скоростей этих точек

$$v_x = v \cos \vartheta - \omega \xi \sin \varphi, \quad v_y = v \sin \vartheta + \omega \xi \cos \varphi \quad \text{при} \quad \xi \in (-0.5\ell, 0.5\ell)$$

в соответствии с законом трения (1.1). Чтобы реже проверять знак этих проекций в формулах (2.1), область интегрирования удобно разбить на участки, в которых коэффициенты трения остаются неизменными. Для этого в зависимости от местоположения мгновенного центра скоростей, узкая прямоугольная область может быть разбита на отрезки, скорости точек которых имеют направление только в один квадрант в данный момент времени. Отметим, что на выбор коэффициентов трения в соответствии с законом (1.1) влияет также ориентация тела на плоскости.

Координаты мгновенного центра скоростей определяются по формулам:

$$x_G = -\beta \sin \vartheta, \quad y_G = \beta \cos \vartheta \tag{3.1}$$

Дифференциальные уравнения (2.4) для случая асимметричного ортотропного трения переписываются в виде:

$$\dot{v} = -\sum_{i,j} A_{ij}, \quad v\dot{\vartheta} = -\sum_{i,j} B_{ij}, \quad \dot{\omega} = -\frac{P}{I_c} \sum_{i,j} C_{ij}, \tag{3.2}$$

где

$$A_{ij} = \beta P \left(f_x^{ij} + \mu^{ij} \sin^2 \vartheta \right) I_0(z) \Big|_{z_i}^{z_j} + P \left[f_x^{ij} \sin(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij} \cos \varphi \sin \vartheta \right] I_1(z) \Big|_{z_i}^{z_j}$$

$$B_{ij} = \beta P \mu^{ij} \sin \vartheta \cos \vartheta I_0(z) \Big|_{z_i}^{z_j} + P \left[f_x^{ij} \cos(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij} \cos \varphi \cos \vartheta \right] I_1(z) \Big|_{z_i}^{z_j}$$

$$C_{ij} = \beta \left[f_x^{ij} \sin(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij} \sin \vartheta \cos \varphi \right] I_1(z) \Big|_{z_i}^{z_j} + \left[f_x^{ij} + \mu^{ij} \cos^2 \varphi \right] I_2(z) \Big|_{z_i}^{z_j}$$

f_x^{ij} , f_y^{ij} , $\mu^{ij} = f_y^{ij} - f_x^{ij}$ выбираются в соответствии с индексацией областей по местоположению мгновенного центра скоростей и ориентации области контакта (см. рис. 2). В правых частях уравнений (3.2) стоит суммирование по областям, точки в которых имеют скорости, направленные в разные квадранты. Если мгновенный центр скоростей находится в областях $v - 1$, $v = \overline{1,4}$, то скорости всех точек направлены в один квадрант, $v - 2$, $v = \overline{1,4}$ – в два квадранта, $v - 3 - k$, $v = \overline{1,4}$ – в три различных квадранта. Функции $I_0(z)$, $I_1(z)$, $I_2(z)$ определены формулами (2.5), значения z_i , z_j соответствуют границам отрезков, на которые разбивается область контакта в зависимости от направления скоростей точек этих отрезков (см. таблицу 1).

Замечание 1. Если шириной прямоугольной области контакта нельзя пренебрегать, то в зависимости от положения точки G распределение скоростей точек области контакта твердого тела с плоскостью может происходить в один, два, три или четыре квадранта одновременно. Ранее [9] этот случай рассмотрен для эллиптической области.

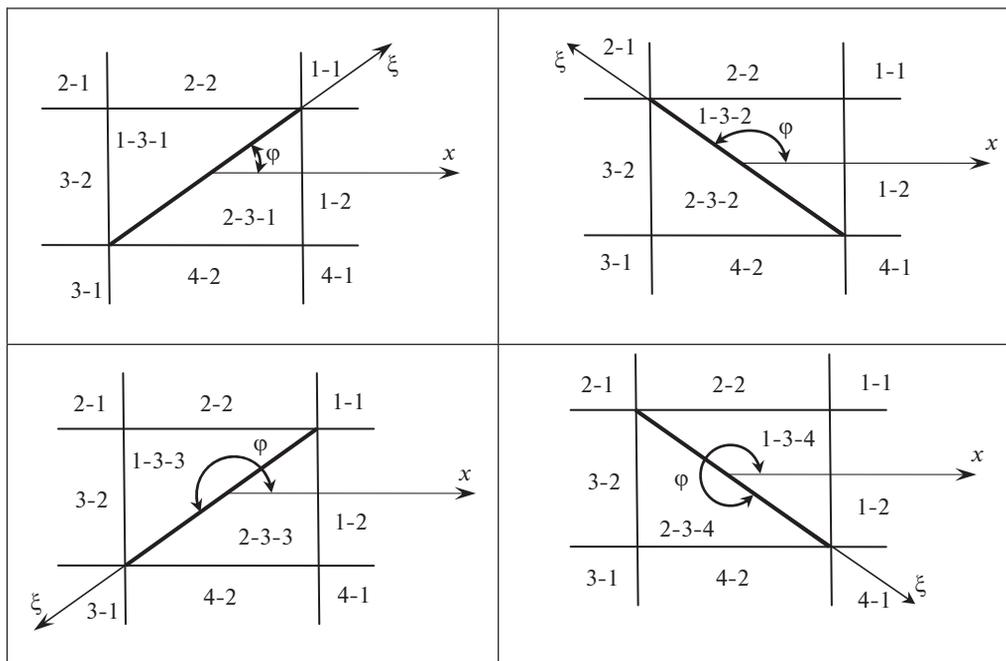


Рис. 2. Индексация областей по местоположению мгновенного центра скоростей и ориентации поверхности контакта.

При движении по инерции величина угла φ , который отвечает за ориентацию площадки на плоскости, зависит от начальных условий. Пусть в момент остановки он принимает значение φ_* . Тогда по аналогии с рассуждениями [5, 9] получаем систему уравнений для определения предельных значений β_* и ϑ_* , соответствующих положению φ_* :

$$\begin{aligned} T_n(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*) &= 0 \\ \beta_* - \Phi(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Phi(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*)$ – функция, получающаяся делением правых частей первого и третьего уравнений системы (3.2).

Определение β_* , ϑ_* при фиксированном φ_* позволяет оценить предельное местоположение мгновенного центра скоростей при заданной ориентации твердого тела на плоскости. Система (3.3) решается численно.

В качестве примера было рассмотрено движение однородного стержня по плоскости с асимметричным ортотропным трением: $I_C = \frac{1}{12}$, $z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\mu_+ = f_{y+} - f_{x+}$, $f_{x-} = v_x f_{x+}$, $f_{y-} = v_y f_{y+}$. Некоторые результаты для симметричного ортотропного ($v = 1$) и асимметричного ортотропного ($v = v_x = v_y = 0.5$) трения представлены в таблице 2.

Замечание 2. Решение системы (3.3) для однородного стержня в случае симметричного ортотропного трения может быть сведено к численному решению одного уравне-

Таблица 1

Область	Характерные параметры
1-1	$x_G > \frac{1}{2} \cos \varphi , y_G > \frac{1}{2} \sin \varphi , z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y-}$
2-1	$x_G < -\frac{1}{2} \cos \varphi , y_G > \frac{1}{2} \sin \varphi , z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y+}$
3-1	$x_G < -\frac{1}{2} \cos \varphi , y_G < -\frac{1}{2} \sin \varphi , z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y+}$
4-1	$x_G > \frac{1}{2} \cos \varphi , y_G < -\frac{1}{2} \sin \varphi , z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y-}$
1-2	$x_G > \frac{1}{2} \cos \varphi , y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right],$ $\varphi \in [0, \pi), z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin \varphi}\right): f_{x+}, f_{y-}; z \in \left[\frac{y_G}{\sin \varphi}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y-}$ $\varphi \in [\pi, 2\pi], z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin \varphi}\right): f_{x-}, f_{y-}; z \in \left[\frac{y_G}{\sin \varphi}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y-}$
2-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G > \frac{1}{2} \sin \varphi , \xi_G = \frac{x_G}{\cos \varphi}$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right): f_{x+}, f_{y-}; z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y+}$ $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right): f_{x+}, f_{y+}; z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y-}$
3-2	$x_G < -\frac{1}{2} \cos \varphi , y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right]$ $\varphi \in [0, \pi), z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin \varphi}\right): f_{x+}, f_{y+}; z \in \left[\frac{y_G}{\sin \varphi}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y+}$ $\varphi \in [\pi, 2\pi], z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin \varphi}\right): f_{x-}, f_{y+}; z \in \left[\frac{y_G}{\sin \varphi}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y+}$
4-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G < -\frac{1}{2} \sin \varphi , \xi_G = \frac{x_G}{\cos \varphi}$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right): f_{x-}, f_{y-}; z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y+}$ $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right): f_{x-}, f_{y+}; z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y-}$
1-3-1	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G \geq x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x+}, f_{y-}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x+}, f_{y+}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y+}$

Таблица 1. Окончание

Область	Характерные параметры
2-3-1	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G < x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x+}, f_{y-}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x-}, f_{y-}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y+}$
1-3-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G \geq x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x+}, f_{y+}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x+}, f_{y-}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y-}$
2-3-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G < x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x+}, f_{y+}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x-}, f_{y+}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x-}, f_{y-}$
1-3-3	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G > x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x-}, f_{y+}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x+}, f_{y+}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y-}$
2-3-3	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G < x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x-}, f_{y+}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x-}, f_{y-}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y-}$
1-3-4	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G > x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x-}, f_{y-}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x+}, f_{y-}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y+}$
2-3-4	$x_G \in \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi , \frac{1}{2} \cos \varphi \right], y_G \in \left[-\frac{1}{2} \sin \varphi , \frac{1}{2} \sin \varphi \right], y_G < x_G \operatorname{tg} \varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos \varphi}, \xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin \varphi}, \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right): f_{x-}, f_{y-}; z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2}): f_{x-}, f_{y+}; z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]: f_{x+}, f_{y+}$

Таблица 2. Финальные параметры движения однородного стержня по инерции

	v = 1			v = v _x = v _y = 0.5		
μ_+	0.09	0.18	0.27	0.09	0.18	0.27
Φ_*						
0	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.3015$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.1644$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.1039$	$\vartheta = 3.6946$ $\beta = 0.6782$	$\vartheta = 3.9451$ $\beta = 0.4832$	$\vartheta = 4.1303$ $\beta = 0.4181$
$\pi/6$	$\vartheta = 2.1185$ $\beta = 0.2932$ $\vartheta = 5.2601$ $\beta = 0.2932$	$\vartheta = 2.1607$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 5.3024$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 3.0329$ $\beta = 1.1030$ $\vartheta = 6.1808$ $\beta = 1.1030$	$\vartheta = 2.2404$ $\beta = 0.3262$ $\vartheta = 5.3819$ $\beta = 0.3262$	$\vartheta = 3.9145$ $\beta = 0.3815$ $\vartheta = 5.0215$ $\beta = 0.3246$	$\vartheta = 4.1043$ $\beta = 0.3082$ $\vartheta = 5.0728$ $\beta = 0.3245$	$\vartheta = 4.2570$ $\beta = 0.2769$ $\vartheta = 5.1195$ $\beta = 0.3297$
$\pi/4$	$\vartheta = 2.3826$ $\beta = 0.2946$ $\vartheta = 5.5243$ $\beta = 0.2946$	$\vartheta = 2.4210$ $\beta = 0.3095$ $\vartheta = 5.5626$ $\beta = 0.3095$	$\vartheta = 2.4722$ $\beta = 0.3307$ $\vartheta = 5.6138$ $\beta = 0.3307$	$\vartheta = 3.1628$ $\beta = 0.6147$ $\vartheta = 4.4997$ $\beta = 0.2069$ $\vartheta = 5.0184$ $\beta = 0.2517$	$\vartheta = 5.1609$ $\beta = 0.2446$ $\vartheta = 3.1860$ $\beta = 1.7723$	$\vartheta = 4.7919$ $\beta = 0.1706$ $\vartheta = 5.2785$ $\beta = 0.2555$
$\pi/3$	$\vartheta = 2.6378$ $\beta = 2.9303$ $\vartheta = 5.7794$ $\beta = 2.9303$	$\vartheta = 2.6603$ $\beta = 0.3034$ $\vartheta = 5.8019$ $\beta = 0.3034$	$\vartheta = 2.6826$ $\beta = 0.3171$ $\vartheta = 5.8242$ $\beta = 0.3171$	$\vartheta = 2.9302$ $\beta = 0.3507$	$\vartheta = 2.9653$ $\beta = 0.3741$	$\vartheta = 2.9979$ $\beta = 0.4050$
$\pi/2$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$
$2\pi/3$	$\vartheta = 0.5038$ $\beta = 0.2931$ $\vartheta = 3.6454$ $\beta = 0.2931$	$\vartheta = 0.4812$ $\beta = 0.3034$ $\vartheta = 3.6229$ $\beta = 0.3034$	$\vartheta = 0.4589$ $\beta = 0.3171$ $\vartheta = 3.601$ $\beta = 0.3171$	$\vartheta = 3.6543$ $\beta = 0.3936$	$\vartheta = 3.6418$ $\beta = 0.3975$	$\vartheta = 3.6288$ $\beta = 0.4033$
$3\pi/4$	$\vartheta = 0.7589$ $\beta = 0.2946$ $\vartheta = 3.9005$ $\beta = 0.2946$	$\vartheta = 0.7205$ $\beta = 0.3095$ $\vartheta = 3.8621$ $\beta = 0.3095$	$\vartheta = 0.6693$ $\beta = 0.3307$ $\vartheta = 3.8109$ $\beta = 0.3307$	$\vartheta = 3.9119$ $\beta = 0.3941$	$\vartheta = 3.8896$ $\beta = 0.3995$	$\vartheta = 3.8586$ $\beta = 0.4081$
$5\pi/6$	$\vartheta = 1.0231$ $\beta = 0.2932$ $\vartheta = 4.1647$ $\beta = 0.2932$	$\vartheta = 0.9808$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 4.1224$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 1.0241$ $\beta = 1.1030$ $\vartheta = 3.2440$ $\beta = 1.1030$	$\vartheta = 0.9012$ $\beta = 0.3262$ $\vartheta = 4.0428$ $\beta = 0.3262$	$\vartheta = 4.1744$ $\beta = 0.3934$ $\vartheta = 3.2041$ $\beta = 3.5223$	$\vartheta = 3.4212$ $\beta = 0.8939$ $\vartheta = 4.1487$ $\beta = 0.3971$	$\vartheta = 3.6867$ $\beta = 0.5368$ $\vartheta = 4.0985$ $\beta = 0.4045$

ния. В этом случае система уравнений (3.3) получается из уравнений (2.4). При этом пределы интегрирования в функциях $I_s(z)$, $s = 0, 2$, $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2}$ (см. формулы (2.5)). Тогда

$$I_0 = \ln u, \quad u = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \beta \sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} + \frac{1}{2} + \beta \sin(\vartheta - \varphi)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \beta \sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} - \frac{1}{2} + \beta \sin(\vartheta - \varphi)} > 1 \quad (3.4)$$

и второе уравнение системы (2.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} v\dot{\vartheta} &= -\beta P\mu \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \ln u - \\ &- \beta P \sin(\vartheta - \varphi) \cdot [f_x \cos(\vartheta - \varphi) + \mu \cos \varphi \cos \vartheta] \left[\frac{2(u-1)}{u+1} - \ln u \right] = \\ &= -\beta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \left\{ \operatorname{tg} \vartheta \left[(f_y \operatorname{tg}^2 \varphi - f_x) \ln u + \right. \right. \\ &\left. \left. + (f_y - f_x \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{2(u-1)}{u+1} \right] - \operatorname{tg} \varphi (f_x \operatorname{tg}^2 \vartheta - f_y) \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следует отметить, что правая часть выражения (3.5) обращается в ноль при значении $\beta = 0$. При этом же значении величины β второе уравнение системы (3.3) будет выполнено при любых значениях ϑ_* и φ_* . Этот случай соответствует чистому вращению стержня. При этом будут выполнены соотношения $T_x = T_y = 0$, $L_{Cz} < 0$.

При $\mu = 0$ (изотропное трение) имеем

$$v\dot{\vartheta} = -\beta P f_x \cos(\varphi - \vartheta) \sin(\varphi - \vartheta) \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) было получено ранее [4], где было подчеркнуто, что при изотропном трении при скольжении по инерции узкой прямоугольной пластины разность $\vartheta - \varphi$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, и вектор скорости поворачивается в сторону противоположную повороту пластины, если в начальный момент разность $\vartheta - \varphi = 0$, скорость центра масс направлена вдоль пластины и поворот осуществляется влево, если смотреть по ходу движения.

При стремлении скорости v к нулю правая часть уравнения (3.5) также стремится к нулю, следовательно, в момент остановки должно быть выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\left[(f_y \operatorname{tg}^2 \varphi - f_x) \ln u + (f_y - f_x \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \operatorname{tg} \vartheta - \\ &- f_x \operatorname{tg} \varphi \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \operatorname{tg}^2 \vartheta + f_y \operatorname{tg} \varphi \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

из которого находится зависимость угла ϑ как функции от переменной u :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arctg \frac{\left[(f_y \operatorname{tg}^2 \varphi - f_x) \ln u + (f_y - f_x \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \mp \sqrt{D}}{2f_x \operatorname{tg} \varphi \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right]} + \pi k, \quad k \in Z_0 \\ D &= \left[(f_y \operatorname{tg}^2 \varphi - f_x) \ln u + (f_y - f_x \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{2(u-1)}{u+1} \right]^2 + \\ &+ 4f_x f_y \operatorname{tg}^2 \varphi \left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

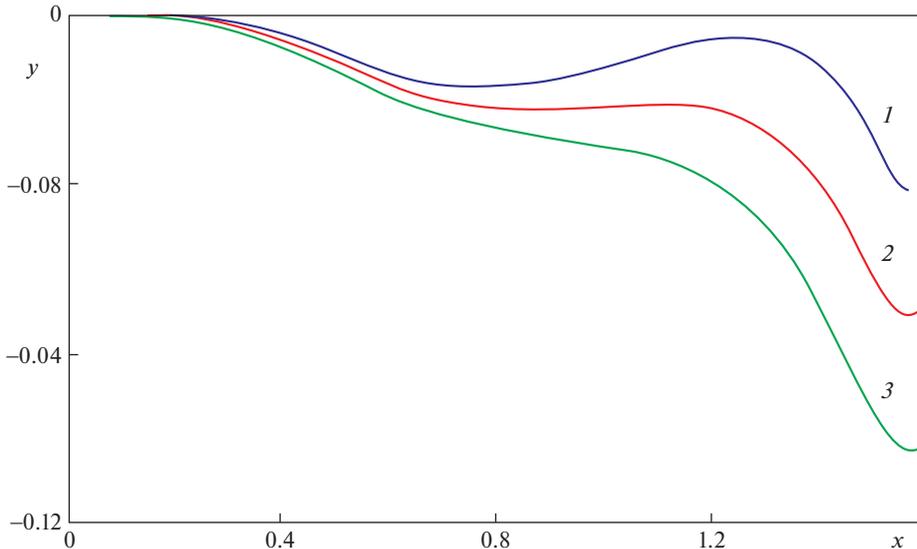


Рис. 3. Траектории центра масс однородного стержня при различных значениях параметра $\nu = \nu_x = \nu_y$. Линия 1 соответствует $\nu = 1$, 2 – $\nu = \frac{7}{8}$, 3 – $\nu = \frac{3}{4}$. Начальные условия $v_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\omega_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$.

Кроме того, величина β определяется из соотношения

$$\beta = \sqrt{\frac{u}{(u-1)^2 \left(1 - \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^2 \sin^2(\vartheta - \varphi) \right)}}, \tag{3.9}$$

в котором подкоренное выражение строго положительное при $u > 1$.

Таким образом, в случае симметричного ортотропного трения система уравнений (3.3) сводится к решению второго уравнения этой системы, в котором осуществляется переход к переменной u по формулам (3.8) и (3.9).

На рис. 3 изображены траектории центра масс однородного стержня, которые получены из численного решения системы уравнений (2.2). Начальные условия были выбраны следующие: $v_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\omega_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, т.е. стержень в начальный момент расположен вдоль оси Ox , а начальная скорость направлена вдоль стержня, начальное вращение направлено против часовой стрелки, $f_{x+} = 0.42$, $f_{y+} = 0.6$, $\nu = \nu_x = \nu_y$.

4. Начальное движение тела при некоторых начальных условиях. Особый интерес представляет изучение начального движения при начальных условиях: $\mathbf{v}_C = 0$, $\omega_z > 0$ и $\mathbf{v}_C \neq 0$, $\omega_z = 0$. В первом случае из соотношений (2.1) при асимметричном ортотропном трении следует

$$\begin{aligned} T_x &= -\frac{P}{2} \left(f_x \left(\varphi + \frac{3\pi}{2} \right) - f_x \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \varphi, \\ T_y &= -\frac{P}{2} \left(f_y \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) - f_y \left(\varphi + \frac{3\pi}{2} \right) \right) \cos \varphi \end{aligned}$$

Откуда при условии, что начальное ускорение задается формулой $\mathbf{w}_0 = w_0 (\cos \vartheta_0 \mathbf{i} + \sin \vartheta_0 \mathbf{j})$, получаем

$$\begin{aligned}
 mw_0 \cos \vartheta_0 &= -\frac{P}{2} \Delta f_x \sin \varphi_0, & mw_0 \sin \vartheta_0 &= -\frac{P}{2} \Delta f_y \cos \varphi_0, & \text{при } \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\
 mw_0 \cos \vartheta_0 &= -\frac{P}{2} \Delta f_x \sin \varphi_0, & mw_0 \sin \vartheta_0 &= -\frac{P}{2} \Delta f_y \cos \varphi_0, & \text{при } \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \begin{cases} \frac{\Delta f_y}{\Delta f_x} \operatorname{ctg} \varphi_0, & \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{\Delta f_y}{\Delta f_x} \operatorname{ctg} \varphi_0, & \varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Подчеркнем, что правые части уравнений (4.1) принимают отрицательные значения, и поэтому, начальное ускорение центра масс направлено в третий квадрант. Случаи, когда угол $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ сводятся к соотношениям (4.1). Отметим, что при неравномерном распределении давления следует учитывать ориентацию тела на плоскости в соответствии с рис. 2 и данными из таблицы 1.

При симметричном ортотропном трении $T_x = T_y = 0$, что означает отсутствие начального ускорения центра масс при рассматриваемых начальных условиях.

При начальных условиях $v_C \neq 0$, $\omega_z = 0$, соответствующих начальному поступательному движению, из выражений (2.1)–(2.3) получаем

$$\dot{v} = -g(f_x + \mu \sin^2 \vartheta), \quad v \dot{\vartheta} = -g\mu \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \dot{\omega} = 0,$$

где $f_x, f_y, \mu = f_y - f_x$ соответствуют квадранту, в который направлена начальная скорость центра масс. Таким образом, при выбранных начальных условиях узкая прямоугольная пластина до остановки движется поступательно, и угол ϑ стремится к одному из значений $\frac{\pi k}{2}$, $k = \overline{0, 3}$ в зависимости от знака величины μ .

Заключение. Отметим некоторые закономерности движения твердого тела, опирающегося узкой прямоугольной площадкой на горизонтальную плоскость:

1. В начале напомним, что финальное движение двухмассовой системы (скамы Жуковского) характеризуется первоначальной остановкой одной из точек опоры, после чего происходит вращение вокруг нее. Другими словами, непосредственно перед остановкой скорость центра масс двухмассовой системы перпендикулярна отрезку, соединяющему массы [8].

2. При изотропном трении [4] предельное движение стержня характеризуется перпендикулярностью вектора v_* к стержню, что означает принадлежность предельного положения мгновенного центра скоростей отрезку контакта тела с плоскостью.

3. При симметричном ортотропном трении ($f_y > f_x$) непосредственно перед остановкой параметры β_* и ϑ_* определяются по формулам (3.8) и (3.9) при условии выполнения второго равенства системы (3.3).

4. При асимметричном ортотропном трении, в общем случае, предельный вектор v_* не перпендикулярен стержню и может быть направлен в конце движения в любой квадрант в зависимости от начальных условий и параметров v_x и v_y .

Если $f_{y-} = v_y f_{y+}$, $f_{x-} = v_x f_{x+}$, $v_x \ll 1$, $v_y \ll 1$, то скорость v_* направлена в третий квадрант.

5. Подчеркнем еще раз, что для рассматриваемого тела финальные параметры φ_* , β_* и ϑ_* зависят от начальных условий ($v_0, \vartheta_0, \varphi_0, \omega_0$). Кроме того, величина β_* зависит

от соотношения между моментом инерции тела, коэффициентами f_x , f_y и углом φ_* [10]. Следует обратить внимание (см. таблицу 2) на многовариантность финальных параметров движения, реализация которых зависит от начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
2. Miki M., Morotsu Y. The peculiar behavior of the Poisson's ratio of laminated fibrous composites // JSME Int. J. 1989. V. 32. P. 67–72.
3. Шилько С.В., Петроковец Е.М., Плескачевский Ю.М. Анализ контактного деформирования ауксетичных композитных материалов // Механика композ. матер. 2006. Т. 42. № 5. С. 681–692.
4. Розенблат Г.М. Динамические системы с трением. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 204 с.
5. Дмитриев Н.Н. Движение стержня со смещенным центром масс по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 4. С. 368–374.
6. Antoni N., Ligier J.-L., Saffre P., Pastor J. Asymmetric friction: Modelling and experiments // Int. J. Engng. Sci. 2007. № 45. P. 587–600.
7. Zmitrowicz A. A constitutive modelling of centrosymmetric and non-centrosymmetric anisotropic friction // Int. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 23. P. 3025–3043.
8. Дмитриев Н.Н. Движение материальной точки и равновесие двухмассовой системы в условиях асимметричного ортотропного трения // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 6. С. 565–574.
9. Дмитриев Н.Н., Силантьева О.А. Финальное движение тонкой эллиптической пластины по горизонтальной плоскости с ортотропным трением // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3. № 61. Вып. 1. С. 164–172.
10. Дмитриев Н.Н. Движение твердого тела, опирающегося на узкую прямоугольную область, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть I. Движение по инерции // Трение и износ. 2011. Т. 32. № 4. С. 362–374.
11. Han X., Wu T. Analysis of acoustic emission in precision and high-efficiency grinding technology // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2013. V. 67. P. 1997–2006.
12. Han X. Investigation on the complex interaction between particle and substrate in mechanical polishing of silica glass // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2016. V. 85. P. 2567–2575.

Sliding of a Narrow Rectangular Plate along a Horizontal Plane with Asymmetric Orthotropic Friction with Uniform Pressure Distribution

N. N. Dmitriev^{a,#} and Xuesong Han^{b,##}

^a Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation

^b Tianjin University, Tianjin, China

[#] e-mail: dn7@rambler.ru

^{##} e-mail: hanxuesongphd@126.com

The effect of asymmetric orthotropic friction on a solid body resting on a narrow rectangular region and sliding along a plane is studied. As an example, the motion of a uniform rod along a plane with asymmetric orthotropic friction is considered. The results obtained can find wide practical applications in the construction of materials processing algorithms under contact with anisotropic friction.

Keywords: anisotropic friction, orthotropic friction, asymmetric friction

REFERENCES

1. *Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Strength of Composites and Polymers. Riga: Zinatne, 1980. 572 p. (in Russian)
2. *Miki M., Morotsu Y.* The peculiar behavior of the Poisson's ratio of laminated fibrous composites // JSME Int. J., 1989, vol. 32, pp. 67–72.
3. *Shil'ko S.V., Petrokovets E.M., Pleskachevskii Yu.M.* An analysis of contact deformation of auxetic composites // Mech. Compos. Mater., 2006, vol. 42, iss. 5, pp. 477–484.
4. *Rozenblat G.M.* Dynamical Systems with Dry Friction. Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics, 2006. 204 p. (in Russian)
5. *Dmitriev N.N.* Motion of rod with displaced center of mass on a plane with anisotropic friction // J. Friction Wear, 2007, vol. 28, no. 4, pp. 354–358.
6. *Antoni N., Ligier J.-L., Saffre P., Pastor J.* Asymmetric friction: Modelling and experiments // Int. J. Engng. Sci., 2007, no. 45, pp. 587–600.
7. *Zmitrowicz A.* A constitutive modelling of centrosymmetric and non-centrosymmetric anisotropic friction // Int. J. Solids Struct., 1992, vol. 29, no. 23, pp. 3025–3043.
8. *Dmitriev N.N.* Motion of material point and equilibrium of two-mass system under asymmetric orthotropic friction // J. Friction&Wear, 2013, vol. 34, iss. 6, pp. 429–437.
9. *Dmitriev N.N., Silantyeva O.A.* Terminal motion of a thin elliptical plate over a horizontal plane with orthotropic friction // Vestnik St. Petersburg Univ. Mathematics, 2016, vol. 49, iss. 1, pp. 92–98.
10. *Dmitriev N.N.* Motion of a solid body supported on a narrow rectangular area on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Inertia motion // J. Friction&Wear, 2011, vol. 32, iss. 4, pp. 276–285.
11. *Han X., Wu T.* Analysis of acoustic emission in precision and high-efficiency grinding technology // Int. J. Adv. Manuf. Techn., 2013, vol. 67, pp. 1997–2006.
12. *Han X.* Investigation on the complex interaction between particle and substrate in mechanical polishing of silica glass // Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2016, vol. 85, pp. 2567–2575.