Н. М. Салтыкова, В. Ю. Сахаров

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Санкт-Петербург 2006

Санкт-Петербургский государственный университет

Н. М. Салтыкова, В. Ю. Сахаров

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Издательство С.-Петербургского университета

Санкт-Петербург 2006

ББК 22.17
С16

Р е ц е н з е н т ы :
докт. физ.-мат. наук, проф. *Я. Ю. Никитин* (С.-Петерб. гос. ун-т),
канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. Ф. Вьюненко* (Петерб. гос. ун-т путей сообщ.)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного университета

Салтыкова Н. М., Сахаров В. Ю.
С16 Сборник задач по элементарной теории вероятностей: Учеб. пособие. — СПб.: 2006. — 64 с.

Предлагаются задачи по следующим разделам теории вероятностей: классический и геометрический способ вычисления вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса, последовательность независимых испытаний с двумя исходами (формулы Бернулли и Муавра—Лапласа), шарики в лунках.

Предназначен для студентов нематематических факультетов, изучающих некоторые вопросы теории вероятностей в общем курсе высшей математики.

ББК 22.17

Предисловие

Дорогой читатель, дорогие наши студенты биолого-почвенного и геологического факультетов СПбГУ, это учебное пособие предполагало быть гораздо бóльшим и иметь другое название. Однако жизнь такова, что нелепая трагедия унесла от нас Наталью Михайловну. Обычно в таких случаях останавливают часы. Я хочу поступить аналогично и издать книгу практически в том виде, в котором она была на июнь 2001 года.

Задачник предназначен для нематематических факультетов университета, где теория вероятностей составляет часть курса высшей математики и изучается в сокращенном объеме. Пособие содержит задачи по теории вероятностей, примыкающие к комбинаторике. Особенностью таких задач является то, что они требуют размышлений, и их невозможно решить, подставив вместо переменной конкретное число. Главная цель задачника — помочь преподавателям в подборке задач для проведения практических занятий и контрольных работ и дать студентам задачи для тренировки.

Пособие охватывает следующие разделы теории вероятностей: классический и геометрический способы вычисления вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса, испытания Бернулли (локальную и интегральную теоремы Муавра—Лапласа). Отдельный параграф посвящен вопросам, связанным с разбрасыванием шариков по лункам.

Задачник может быть также полезен преподавателям заочных отделений. Наличие в задачнике ответов делает его полезным и лицам самостоятельно изучающим теорию вероятностей. Примеры решений аналогичных задач можно найти в книгах, список которых находится в конце брошюры.

Автор благодарит обоих рецензентов и доцента кафедры общей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета Наталию Александровну Волкову за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных советов и замечаний.

§ 1. События, операции над событиями

Событием называется результат эксперимента (или испытания). Например, экспериментом может быть бросание игральной кости, а событием — появление на ее верхней грани числа очков, кратного трем. Событие, которое в ходе испытания может появиться, а может и не появиться, называется случайным. События обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, ... Событие, которое появляется в результате любого испытания, называется достоверным и обозначается Ω. Событие, которое не появляется ни при каком испытании, называется невозможным и обозначается $\varnothing$. В примере с однократным бросанием игральной кости, описанное выше событие будет случайным. Достоверным событием будет появление целого числа очков на верхней грани игральной кости, а невозможным — появление отрицательного числа очков.

Операции, которые осуществимы над событиями, фактически представляют из себя операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение). По этой причине в теории вероятностей используют символику теории множеств. События A и B называются несовместными, если их пересечение есть невозможное событие, т. е. $AB = \varnothing$. События A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и их объединение — достоверное событие, т. е. $A_iA_j = \varnothing$, при $i \neq j$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Дополнение к событию A обозначается $\overline{A} = \Omega \setminus A$. В упомянутом примере с однократным бросанием игральной кости в качестве событий полной группы естественно выбрать шесть событий, соответствующих шести граням, каждая из которых после подбрасывания может оказаться верхней. В то же время, в зависимости от ситуации, описываемой конкретной задачей, возможен другой способ выбора полной группы событий. Так, например, таких событий может быть всего два: число очков на появившейся верхней грани игральной кости делится на три и не делится на три. Заметим при этом, что события в полной группе не обязательно должны быть равновероятны (равновозможны).

1.1. Трамваи выходят на линию не только по одному, но и в составах по два или по три вагона. Опишите событие: "студент едет в одном вагоне с вагоновожатым".

1.2. В пригородном электропоезде 10 вагонов. Найти пересечение событий: "студент едет в первой половине железнодорожного состава" и "студент едет в вагоне с четным номером".

1.3. До главного здания университета можно доехать на автобусах, следующих по маршрутам №7, 10 и 47, или на троллейбусах №1, 7 и 10. Найти объединение событий: "студент добрался до главного здания на седьмом номере" и "студент добрался до главного здания на автобусе".

1.4. В пригородном электропоезде 10 вагонов. Опишите событие: "студент едет в вагоне, номер которого не делится ни на 2, ни на 3".

1.5. Брошено три монеты. Совместны ли события: "выпало хотя бы две цифры" и "выпало хотя бы два герба"?

1.6. Из колоды карт, содержащей 36 листов*, выбрано пять карт. Совместны ли события: "эти пять карт можно расположить подряд по номиналу без пропусков и повторений" и "эти пять карт одной масти"?

1.7. Из урны, содержащей 10 белых и пять черных шаров, выбрано два шара. Совместны ли события: "эти два шара одного цвета" и "эти два шара белые"?

1.8. Из полного набора домино, состоящего из 28 костей, выбрано семь. Совместны ли события: "среди этих семи костей есть хотя бы пять дублей" и "эти семь костей можно поставить в ряд согласно правилам игры"?

1.9. Какое событие является противоположным событию "партия в шашки закончилась ничьей"?

1.10. Брошена игральная кость. Является ли следующая группа событий полной: "выпало три очка" и "выпало не три очка"?

1.11. Гражданин узнал некоторую новость. Является ли следующая группа событий полной: "гражданин узнал новость из газеты" и "гражданин узнал новость от друзей"?

---

*Здесь и в дальнейшем считается, что колода содержит карты четырех мастей; причем если колода не полная (менее 52 листов), то из нее изъято соответствующее число карт младших номиналов.

1.12. Брошена игральная кость. Является ли следующая группа событий полной: "выпало одно очко", "выпало менее двух очков", "выпало менее трех очков", "выпало любое число очков"?

1.13. Букет состоит из двух астр и одного гладиолуса. Из этих трех цветков выбрано несколько (но не нуль). Какого события не хватает следующей группе событий до полноты: "выбран только один цветок, причем это астра", "выбрано все три цветка" и "выбрано ровно два цветка, причем гладиолус не выбран"?

1.14. В некоторой деревне крыши домов могут быть покрыты железом, шифером или рубероидом. Рассматриваются два соседних дома. Какого события не хватает следующей группе событий до полноты: "крыши этих домов покрыты одинаковым материалом" и "крыша одного дома покрыта железом, а другого — рубероидом"?

1.15. На участке есть два колодца: один мелкий, другой глубокий. В засуху мелкий колодец пересыхает раньше глубокого. С каким событием надо объединить событие "вода есть в обоих колодцах", чтобы получилось событие "вода есть в глубоком колодце"?

1.16. У огородника на участке семь теплиц. В одной из них посажены помидоры, и по крайней мере в двух других — огурцы. Остальные теплицы (если остались неиспользованные) заняты другими культурами. Какое событие получится, если пересечь события: "под огурцы занято не более четырех теплиц" и "не под огурцы занято не пять теплиц"?

1.17. Из колоды карт, содержащей 36 листов, выбрано две карты. Какое событие будет объединением событий: "обе эти карты тузы" и "эти карты одинакового номинала"?

1.18. В жаркий день семья, состоящая из мамы, папы, сына и двух дочерей, пошла купаться на речку. Какое событие будет пересечением событий: "папа с сыном находятся в воде" и "мама находится на берегу"?

1.19. Речку можно пересечь на теплоходе, на пароме, по автомобильному мосту (на любом виде колесного транспорта или пешком), по узкому пешеходному мосту или переехать в электропоезде по железнодорожному мосту. Какое событие будет объединением событий: "человек пересек реку по мосту, где разрешено движение пешеходов" и "человек пересек реку находясь в электропоезде"?

1.20. Из колоды карт, содержащей 36 листов, выбрано три карты. Какое событие будет разностью событий: "все эти три карты одной масти или одинакового номинала" и "хотя бы две карты из этих трех одинакового номинала"?

1.21. Включается ли событие "велосипедист не проколол заднее колесо" в событие "велосипедист проколол хотя бы одно колесо"?

1.22. У хозяйки есть еловые, сосновые, березовые, осиновые и рябиновые дрова. Включается ли в событие "хозяйка топила печку березовыми и осиновыми дровами" событие "хозяйка топила печку дровами лиственных пород"?

§ 2. Классический способ

Классический способ вычисления вероятностей используется в том случае, когда пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, рассматриваемое в связи с данным случайным экспериментом, — конечное множество и все элементы этого множества (элементарные события) равновозможны или равновероятны. Равновозможность (равновероятность) элементарных событий означает, что в данном случайном эксперименте они имеют одинаковый шанс осуществиться.

Пусть пространство элементарных событий — конечное множество из n элементов, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Если событию A благоприятствуют m_A элементарных событий из n, то в соответствии с классическим способом вычисления вероятности, имеем

$$P(A) = \frac{m_A}{n}\,. \qquad (1)$$

Итак, решение задач с использованием классического способа вычисления вероятности сводится к подсчету числа n — равновозможных элементарных событий в Ω, m_A — числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, и вычисления отношения (1), которое и есть вероятность события A.

Пример 1. Ученик, которому очень не хочется идти в школу, решил, что пойдет в школу, если при двукратном бросании монеты оба раза выпадет цифра. Считая все исходы равновозможными определить, какова вероятность того, что ученик пойдет в школу?

Решение. Результат одного бросания монеты будем записывать Г, если выпал герб, и Ц, если выпала цифра. Все возможные результаты двух бросаний описываются парами (ГГ), (ГЦ), (ЦГ), (ЦЦ). Чтобы было очевидно, что исходы (ГЦ) и (ЦГ) различные, достаточно представить, что монеты разного достоинства. Итак, Ω — конечное множество, $n = 4$. Событию A — оба раза выпала цифра благоприятствует одно элементарное событие (ЦЦ), т. е. $m_A = 1$ и, следовательно, $P(A) = \dfrac{1}{4}$.

При решении задач на классический способ вычисления вероятности (равенство (1)) подсчет величин n и m_A можно делать с использованием элементов комбинаторики, а именно перестановок, размещений, сочетаний.

1. Перестановки. Пусть имеются n различных элементов. Будем располагать их в один ряд в виде последовательности в любом порядке. Существует $n!$ различных способов сделать это. Все $n!$ таких последовательностей из этих n элементов носят названия перестановок из n элементов. Если число перестановок из n элементов обозначить P_n, то

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{2}$$

Пример 2. На стоянке автомобилей имеются 12 свободных мест, расположенных в один ряд. Какова вероятность того, что подъехавшие восемь автомобилей синих тонов и четыре — красных займут места так, что четыре автомобиля красных тонов будут стоять подряд?

Решение. Число способов расположить 12 автомобилей на стоянке: $P_{12} = 12!$, это число возможных исходов. Событие A — автомобили красных тонов стоят подряд. Подсчитаем m_A. Если зафиксировать места для синих автомобилей (и автоматически для красных), то имеется $8! \cdot 4!$ вариантов. Учитывая, что существует девять вариантов четырех мест подряд, получим $m_A = 9 \cdot 8! \cdot 4!$ Следовательно, $P(A) = \frac{9 \cdot 8! \cdot 4!}{12!} = \frac{1}{55}$.

2. Размещения. Пусть имеется n различных элементов. Выбираем из них m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ и образуем всевозможные перестановки из этих m элементов. Последовательности, состоящие из m элементов, различающиеся между собой по составу хотя бы одним элементом или (при совпадении составов) порядком следования элементов в этих последовательностях, назовем размещениями из n элементов по m. Обозначим A_n^m — число размещений из n элементов по m, тогда

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(m-1)\big)}_{m \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \qquad (3)$$

Замечание. Очевидно, что $A_n^n = P_n = n!$

Пример 3. На пяти карточках нанесены цифры 0, 1, 2, 5, 7. Случайно выбирают две и образуют из них двузначное число (первая выбранная карточка — число десятков, вторая — число единиц). Какова вероятность того, что получившееся двузначное число: а) делится на пять; б) делится на три?

Решение. Очевидно, что число равновозможных исходов $n = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Пусть события A и B — двузначное число делится на пять и на три соответственно. Подсчитаем m_A и m_B числа исходов, благоприятствующих осуществлению событий A и B. Число делится на пять, если число единиц в нем равно нулю или пяти. Пусть число единиц — "нуль", тогда для числа десятков получаются четыре варианта, аналогично для числа с числом единиц "пять". Следовательно, $m_A = 4 + 4 = 8$ и

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{4}{5}\,.$$

Число делится на три, если сумма его цифр делится на три. Очевидно, что из чисел, которые возможно получить, на три делятся только шесть: 12, 15, 21, 27, 51 и 72. Итого $m_B = 6$ и

$$P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{5}\,.$$

3. Сочетания. Пусть имеются n различных элементов. Выберем из них m $(1 \leqslant m \leqslant n)$, образовав некоторую последовательность. При этом, в отличие от размещений, порядок следования выбранных m элементов в последовательности не учитывается. Будем считать две последовательности по m элементов в каждой различными, если они различаются по составу хотя бы одним элементом. Такой способ выбора m элементов из n назовем сочетаниями из n элементов по m. Число различных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m. Известно, что

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,. \tag{4}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что число C_n^m и число A_n^m связаны соотношением

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}\,, \tag{5}$$

равносильным (4).

Пример 4. В книжном магазине на полке стоят 10 учебников. Из них шесть в красном переплете и четыре в синем. Покупатель просит две любые книги. Какова вероятность того, что: а) обе книги будут в синем переплете; б) книги будут в разных переплетах?

Решение первое. Условие задачи позволяет считать, что все учебники, имеющие переплет одного цвета, неразличимы. Тогда число равновозможных исходов $n = C_{10}^2$, соответственно чи́сла исходов, благоприятствующих событию A — обе книги в синим переплете и событию B — книги в разных переплетах, равны $m_A = C_4^2$, $m_B = 6 \cdot 4$, и, следовательно,

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}\,, \qquad P(B) = \frac{6 \cdot 4}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}\,.$$

Решение второе. Предположим, что учебники, имеющие переплет одного цвета — различимы. Пусть они занумерованы и пусть продавец подает книги покупателю по одной, т. е. две книги могут быть поданы в разной последовательности. Если рассматривать ситуацию так, то естественно число равновозможных исходов $n^* = A_{10}^2$, и чи́сла исходов, благоприятствующих событиям A и B соответственно равны $m_A^* = A_4^2$, $m_B^* = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4$, и, следовательно,

$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{2}{15}\,, \qquad P(B) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{A_{10}^2} = \frac{8}{15}\,.$$

Замечание. Если воспользоваться равенством (5), то получим $A_{10}^2 = C_{10}^2 \cdot 2!$, $A_4^2 = C_4^2 \cdot 2!$, т. е. $n^* = n \cdot 2!$, $m_A^* = m_A \cdot 2!$, $m_B^* = m_B \cdot 2!$ То есть, чи́сла равновозможных и благоприятствующих исходов изменились в одно и то же число раз, вследствие чего $P(A)$ и $P(B)$ не изменили свои значения.

При решении задач следует иметь в виду, что возможны случаи, когда для решения задачи с равным успехом можно использовать понятие сочетаний и размещений (как в примере 4), при этом, как следует из (5), число равновозможных исходов и число благоприятствующих исходов будут изменяться в пропорциональное число раз, и, следовательно, не изменят значение вероятности.

В приведенных в этом параграфе задачах все возможные исходы равновероятны.

2.1. В коробочке лежат два зеленых карандаша, два синих и один желтый. Извлекают случайно один карандаш. Какова вероятность того, что карандаш: а) синий; б) зеленый или желтый?

2.2. Из коробочки, где лежат один зеленый и три синих карандаша, извлекают сразу два карандаша. Какова вероятность того, что карандаши: а) синие; б) разных цветов?

2.3. Игральную кость бросают один раз. Какова вероятность того, что выпадет число очков: а) четное; б) кратное трем; в) не больше четырех; г) не меньше пяти; д) не менее двух и не более пяти?

2.4. Бросают одновременно две монеты. Какова вероятность того, что выпадет: а) два герба; б) гербов не более одного; в) хотя бы один герб?

2.5. Отец дарит сыну на день рождения с равной вероятностью игрушку или книжку, мама — сладости или книжку. Какова вероятность того, что мальчик получит в подарок: а) игрушку и книжку; б) сладости; в) хотя бы одну книжку?

2.6. Отец дарит сыну на день рождения с равной вероятностью игрушку или книжку, мама — сладости или книжку, бабушка игрушку или сладости. Какова вероятность того, что: а) будет подарена хотя бы одна игрушка; б) сладости не будут подарены; в) будет подарено не более одной книжки?

2.7. Родители предлагают сыну на каникулах посетить зоопарк или цирк, а кроме того музей, или один из двух театров. Выбор в каждой из "категорий" развлечений равновероятен. Какова вероятность того, что мальчик: а) не пойдет в театр; б) посетит цирк или один из театров; в) посетит цирк и один из театров?

2.8. На шахматную доску из 64 клеток наудачу ставятся две ладьи белого и черного цветов. С какой вероятностью они не будут "бить" друг друга?

2.9. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Какова вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь: а) ровно две окрашенные стороны; б) не будет иметь окрашенных сторон?

2.10. На десяти одинаковых карточках написаны различные цифры от нуля до девяти. Какова вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18? Рассмотреть два случая: а) выборка без возвращения; б) выборка с возвращением.

2.11. Какова вероятность того, что выбранное наудачу однозначное целое неотрицательное число N при: а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень; в) умножении на также случайно выбранное целое число от нуля до девяти — дает число, оканчивающееся единицей?

2.12. На трех одинаковых карточках написаны цифры 0, 1, 2. Случайно выбирают одну из них и записывают в числитель дроби, затем выбирают еще одну и записывают в знаменатель. Какова вероятность того, что знаменатель дроби отличен от нуля?

2.13. Имеются две достаточно вместительные лунки A и B и два шарика, которые случайным образом разбрасываются по этим лункам. Какова вероятность того, что: а) оба шарика находятся в лунке A; б) шарики находятся в одной лунке?

2.14. Пять шариков случайным образом разбрасываются по двум достаточно вместительным лункам. Какова вероятность того, что в лунках будет одинаковое количество шариков?

2.15. Палка разламывается на две части, после чего полученные "обломки" соединяются в новую "палку". Какова вероятность того, что: а) обломки соединятся в первоначальном порядке; б) один из концов будет соединен со сломом?

2.16. Имеются три достаточно вместительные лунки и два шарика, которые случайным образом разбрасываются по этим лункам. Какова вероятность того, что шарики находятся: а) в разных лунках; б) в одной лунке?

2.17. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что среди них есть туз бубен?

2.18. Колоду, содержащую 36 листов, раздают по 11 карт случайным образом трем играющим. Оставшиеся три карты кладут в прикуп. Некоторому играющему сдали ровно три дамы. Какова вероятность того, что четвертой дамы нет в прикупе?

2.19. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что они одной масти?

2.20. Собрание сочинений из трех томов ставят на полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома стоят подряд слева направо или справа налево?

2.21. Собрание сочинений из шести томов ставят на полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что: а) тома с четными номерами стоят первыми и в должном порядке; б) тома с четными номерами стоят первыми, в должном порядке и между ними стоит один том с нечетным номером?

2.22. Шестеро игроков, из которых двое шулеры, случайно рассаживаются для игры в карты за круглый стол. Какова вероятность того, что шулеры сидят рядом?

2.23. Собрание сочинений из восьми томов ставят на полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что: а) все четные тома стоят первыми; б) четные тома стоят подряд; в) между двумя наиболее удаленными друг от друга четными томами стоит ровно один нечетный?

2.24. А и В и еще восемь человек стоят в очереди. Какова вероятность того, что А и В отделены друг от друга тремя лицами?

2.25. Собрание сочинений из $2n$ томов ставят на полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что все тома с четными номерами стоят на четных местах?

2.26. Шестеро игроков, из которых двое шулеры и один новичок, случайно рассаживаются для игры в карты за круглый стол. Какова вероятность того, что: а) новичок сидит между шулерами; б) новичок и шулеры сидят через одного?

2.27. Молодой человек знает, что первая цифра трехзначного номера квартиры его друга единица, а две другие — четные, разные и не нули. Какова вероятность того, что он с первого раза найдет квартиру друга, если он точно знает в котором доме живет его друг и в этом доме более 200 квартир?

2.28. Из урны, содержащей три белых и семь черных шаров, извлекают два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?

2.29. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что они обе тузы?

2.30. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают 13 карт. Какова вероятность того, что они все пиковой масти?

2.31. Полный набор домино, содержит 28 костей, из которых семь дублей. Двум играющим сдают по семь костей, остальные размещаются в резерве. Какова вероятность того, что все дубли окажутся в резерве?

2.32. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что среди них нет дам?

2.33. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум играющим в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у сдававшего игрока не будет козырей?

2.34. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум играющим в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у обоих игроков не будет козырей?

2.35. В соревнованиях участвовало 10 человек. Какова вероятность того, что два наугад выбранных участника оказались в числе призеров, если призовых мест три?

2.36. На семи карточках нанесены числа 2, 5, 9, 10, 11, 12, 73. Последовательно без возвращения извлекают две карточки и образуют из них число (первая выбранная карточка образует старшие разряды, а вторая — младшие). Какова вероятность того, что полученное число: а) четное; б) имеет не менее трех знаков; в) делится на 20; г) делится на пять?

2.37. Среди двадцати участников соревнований два брата и их друг. Какова вероятность того, что: а) только один из братьев и их друг будут в числе призеров; б) братья займут первое и второе места, а их друг не войдет в число призеров, если призовых мест четыре?

2.38. Десятитомное собрание сочинений случайно расставлено на двух полках по пять книг на каждой полке. Какова вероятность того, что все четные тома стоят на одной полке, причем второй том стоит первым, а десятый — последним?

2.39. Двенадцатитомное собрание сочинений случайно расставляют на двух достаточно вместительных полках по четыре и восемь томов на полке. Какова вероятность того, что на полке, где окажутся восемь томов на первых пяти местах стоят тома с первыми пятью номерами?

2.40. Из урны, содержащей пять красных шариков и 25 синих, случайно без возвращения извлекают шесть шариков. Какова вероятность того, что: а) все красные шарики окажутся извлеченными; б) красными будут только первые три из извлеченных шариков?

2.41. Из урны, содержащей 15 белых и пять черных шаров, извлекают два шара. Какова вероятность того, что они: а) оба белые; б) разных цветов?

2.42. Из урны, содержащей a $(a > 1)$ белых и b $(b > 1)$ черных шаров, извлекают два шара. Какова вероятность того, что эти шары одного цвета?

2.43. В лотерее 30 билетов, из которых 20 выигрышных. Участник покупает четыре билета. Какова вероятность того, что:

а) все купленные им билеты выигрышные; б) хотя бы один из купленных билетов — выигрышный?

2.44. В шкафу находится 10 пар ботинок различных размеров. Из них случайно выбирается четыре ботинка. Какова вероятность того, что: а) среди выбранных ботинок отсутствуют парные; б) все они на одну ногу?

2.45. На шести одинаковых карточках написаны числа 2, 3, 5, 7, 10, 12. Наудачу без возвращения берутся две карточки. Какова вероятность того, что образованная из этих двух чисел дробь сократима?

2.46. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что это трефовый, пиковый и бубновый валеты?

2.47. Из колоды карт, содержащей 52 листа, извлекают 32 карты. Какова вероятность того, что все извлеченные карты старше шестерки?

2.48. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают четыре карты. Какова вероятность того, что все эти четыре карты разных мастей?

2.49. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что одна из них масти бубны, а другая червы?

2.50. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что три из них дамы, а две — валеты?

2.51. Из колоды карт, содержащей 52 листа, случайно без возвращения извлекают три карты. Какова вероятность того, что эти карты (без учета порядка выбора) тройка, семерка и туз?

2.52. Из колоды карт, содержащей 52 листа, извлекают пять карт. Какова вероятность того, что все эти карты масти пики, причем среди них есть король пик?

2.53. Из колоды карт, содержащей 53 листа (джокер и 52 обычные карты), одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что выбраны джокер и четыре карты одной масти?

2.54. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что выбраны все четыре дамы?

2.55. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 10 карт. Какова вероятность того, что среди них ровно три туза?

2.56. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают шесть карт. Какова вероятность того, что среди них три карты "красных" мастей (бубны или червы) и три "черных" мастей (пики или трефы)?

2.57. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что выбраны король треф и ровно одна дама любой масти?

2.58. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум играющим в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у сдававшего игрока окажется ровно один козырь?

2.59. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что среди них есть король пик и дама треф?

2.60. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают шесть карт. Какова вероятность того, что среди них есть три шестерки и при этом нет ни одной карты бубновой масти?

2.61. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают восемь карт. Какова вероятность того, что среди них есть король червей и при этом нет туза червей?

2.62. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что среди них есть туз, король, дама и валет пик и остальные восемь карт масти червы?

2.63. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают 13 карт. Какова вероятность того, что среди них есть туз, король и дама пик и более пик нет?

2.64. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают восемь карт. Какова вероятность того, что карт каждой масти выбрано одинаковое количество (по две карты)?

2.65. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что карт каждой масти выбрано одинаковое количество (по три карты)?

2.66. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что будут выбраны карты только трех мастей, причем каждой масти одинаковое количество (по четыре карты)?

2.67. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что будет выбрано хотя бы по одной карте каждой масти?

2.68. Из колоды карт, содержащей 36 листов, случайно без возвращения извлекают три карты. Какова вероятность того, что: а) их можно расположить в ряд по номиналу без пропусков и повторений; б) помимо условия а) они одной масти; в) помимо условия а) они все разных мастей?

2.69. На автостоянке 10 свободных мест. Какова вероятность того, что шесть подъехавших автомобилей расположатся так, что четыре определенных места будут заняты?

2.70. Для участия в соревнованиях 12 спортсменок делятся на две команды по шесть человек. Какова вероятность того, что: а) четыре наиболее сильные спортсменки будут в одной команде; б) в одной команде будет одна, а в другой три из четырех наиболее сильных спортсменок; в) четыре наиболее сильные спортсменки окажутся в одинаковых количествах в разных командах?

2.71. В лотерее 50 билетов, из которых 30 выигрышных. Участник купил пять билетов. Какова вероятность того, что из них не менее двух билетов будут выигрышными?

2.72. Имеются $(n+m)$ билетов, из которых n выигрышных. Одновременно приобретаются k $(k \leqslant n+m)$ билетов. Какова вероятность того, что среди них ровно s $(s \leqslant k)$ выигрышных?

2.73. В зале, насчитывающем $(n+k)$ мест, случайным образом занимают места n человек. Какова вероятность того, что будут заняты определенные m $(m \leqslant n)$ мест?

2.74. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии для контроля выбирают r изделий. Какова вероятность того, что из них ровно s дефектных ($s \leqslant r \leqslant l \leqslant k$)?

2.75. В чулане находятся n различных пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r \leqslant n$). Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок: а) отсутствуют парные; б) имеется ровно одна комплектная пара; в) имеются ровно две комплектные пары?

2.76. Группа, состоящая из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек, делится случайным образом на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части число девочек и мальчиков одинаково?

2.77. Колоду, содержащую 36 листов по девять карт каждой из четырех мастей, раздают по 18 карт случайным образом двум играющим. Какова вероятность того, что все четыре туза окажутся у одного играющего?

2.78. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиты на две подгруппы. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе?

2.79. На девяти карточках нанесены цифры от 1 до 9. Последовательно извлекают три карточки. Какова вероятность того, что на них все три цифры нечетные и извлечены в порядке возрастания?

§ 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Для двух событий A и B справедливы теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Теорема сложения. Вероятность объединения двух событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их одновременного осуществления:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{6}$$

Если события A и B несовместны, т. е. $AB = \varnothing$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{7}$$

2. Теорема умножения. Вероятность одновременного осуществления двух событий A и B равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие осуществилось:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{8}$$

Если события A и B независимы, то условные вероятности в равенстве (8) превращаются в безусловные, т. е. вероятность одновременного осуществления двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{9}$$

Пусть имеются n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Содержание теорем сложения и умножения вероятностей для n событий выражаются равенствами (10) и (11):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} P(A_i A_j) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{j-1} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n), \tag{10}$$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_i|A_1 A_2 \ldots A_{i-1}) \times \\ \times \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{11}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, т. е. $A_i A_j = \varnothing,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j$, то из (10) следует

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{12}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, что обычно подразумевается в задачах, то из (11) следует

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{13}$$

Иногда бывает полезно при вычислении вероятности суммы независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ перейти к противоположным событиям $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ и воспользоваться следующей формулой:

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right) = \\ &= 1 - P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\ldots P\left(\overline{A_n}\right) = \\ &= 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big)\ldots\big(1 - P(A_n)\big). \end{aligned} \tag{14}$$

В приведенных ниже задачах предполагается независимость событий.

Пример 5. Из колоды карт, содержащей 36 листов по девять карт каждой из четырех мастей, наудачу извлекают две карты. Какова вероятность того, что эти обе карты масти треф или обе карты — фигуры (фигурами в картах называются валеты, дамы, короли и тузы)?

Решение. Пусть A — интересующее нас событие: обе карты масти треф или обе фигуры. Введем два события: B — обе карты масти треф, C — обе карты — фигуры. Событие BC — обе карты фигуры масти треф. Тогда $A = B \cup C$ и на основании теоремы сложения вероятностей $P(A) = P(B) + P(C) - P(BC)$. Используем классический способ вычисления вероятностей, тогда $n = C_{36}^2 = 630$, $m_B = C_9^2 = 36$, $m_C = C_{16}^2 = 120$, $m_{BC} = C_4^2 = 6$, $P(B) = \dfrac{2}{35}$, $P(C) = \dfrac{4}{21}$, $P(BC) = \dfrac{1}{105}$, $P(A) = \dfrac{2}{35} + \dfrac{4}{21} - \dfrac{1}{105} = \dfrac{5}{21}$.

Пример 6. Из колоды карт, содержащей 36 листов по девять карт каждой из четырех мастей, последовательно извлекают две карты. Какова вероятность того, что первая извлеченная карта масти треф, а вторая — фигура не масти треф (фигурами в картах называются валеты, дамы, короли и тузы)? Рассмотреть два случая: а) первая карта не возвращается в колоду (выборка без возвращения); б) первая карта возвращается в колоду (выборка с возвращением).

Решение.

а) Выборка без возвращения. Событие A — первая карта масти треф, событие B — вторая карта фигура не масти треф, тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$. В соответствии с классическим способом вычисления вероятностей и понятием условной вероятности, получим $P(A) = \dfrac{9}{36}$, $P(B|A) = \dfrac{12}{35}$,

$$P(AB) = \frac{9}{36} \cdot \frac{12}{35} = \frac{3}{35}\,. \tag{15}$$

б) Выборка с возвращением. Событие A — первая карта масти треф и событие B — вторая карта фигура не масти треф — независимы, следовательно, $P(AB) = P(A)P(B)$. Так как $P(A) = \dfrac{9}{36}$, $P(B|A) = \dfrac{12}{36}$, то

$$P(AB) = \frac{9}{36} \cdot \frac{12}{36} = \frac{1}{12}\,. \tag{16}$$

Замечание. Эти две задачи а) и б) можно решить используя один только классический способ вычисления вероятностей. Нетрудно видеть, что при решении их с помощью теоремы умножения вероятностей подсчет числа равновозможных и благоприятствующих исходов все равно происходит, но другим, возможно более простым, путем. Действительно, для а) $n = 36 \cdot 35$, $m_{AB} = 9 \cdot 12$ и $P(AB) = \dfrac{9 \cdot 12}{36 \cdot 35}$, для б) $n = 36 \cdot 36$, $m_{AB} = 9 \cdot 12$ и $P(AB) = \dfrac{9 \cdot 12}{36 \cdot 36}$. Сравните эти результаты с (15) и (16).

Пример 7. На уроке физкультуры n студентов брали на прокат n пар лыж. Какова вероятность того, что на следующем уроке каждый из этих n студентов возьмет те же лыжи, если считать, что всего на базе n пар лыж, все они стандартные и отличить возможно только левые лыжи от правых?

Решение. Положим события A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — i-й студент получил те же лыжи, B — все студенты получили те же лыжи, тогда $B = A_1 A_2 \dots A_n$, и на основании (13) имеем

$$P(B) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdots \frac{1}{1^2} = \frac{1}{(n!)^2}\,.$$

3.1. Из колоды карт, содержащей 36 листов, наудачу извлекают одну карту, а) извлеченная карта масти пики, какова вероятность того, что это туз; б) извлеченная карта — фигура (фигурами в картах называются валеты, дамы, короли и тузы), какова вероятность того, что это дама; в) извлеченная карта "красной" масти (бубна или черва), какова вероятность того, что это шестерка?

3.2. Из колоды карт, содержащей 36 листов, наудачу извлекают сразу две карты, а) обе извлеченные карты масти треф, какова вероятность того, что одна из них туз, а другая десятка; б) обе извлеченные карты фигуры (фигурами в картах называются валеты, дамы, короли и тузы), какова вероятность того, что они обе дамы; в) обе извлеченные карты "красной" масти (бубны или червы), какова вероятность того, что они обе шестерки?

3.3. В урне находятся a белых и b черных шаров. Последовательно извлекают два шара. Какова вероятность того, что они: а) оба белые; б) одного цвета; в) разных цветов?

3.4. В урне находятся a белых и b черных шаров. Из урны извлекают один шар, отмечают его цвет, возвращают в урну. Затем извлекают еще один шар. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые; б) шары одного цвета; в) шары разных цветов?

3.5. Два раза бросают монету. Какова вероятность того, что результаты обоих бросаний одинаковые?

3.6. Монету бросают до первого выпадания герба, но не более шести раз. Какова вероятность того, что монету будут бросать шесть раз?

3.7. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что они и разных мастей, и разные по номиналу?

3.8. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что одна из этих карт пика, а другая — бубна?

3.9. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают 7 карт. Какова вероятность того, что среди них есть четыре карты одного номинала?

3.10. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что среди них есть восемь карт одной масти?

3.11. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы одна карта пиковой масти?

3.12. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один валет?

3.13. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы два туза?

3.14. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что они обе не старше восьмерки или это семерка и девятка одной масти?

3.15. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один туз или это — король и дама одной масти?

3.16. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают три карты. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы два туза или король и дама одной масти?

3.17. Колоду, содержащую 36 листов, раздают по 12 карт случайным образом трем играющим. Какова вероятность того, что шестерка и дама треф окажутся у разных играющих?

3.18. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 10 карт. Какова вероятность того, что среди них есть семерка пик и хотя бы один туз?

3.19. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что среди них есть четыре туза и хотя бы одна десятка?

3.20. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают две карты. Какова вероятность того, что они либо обе шестерки, либо обе тузы, либо обе карты "красных" мастей (бубны или червы)?

3.21. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум игрокам в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) хотя бы у одного играющего не будет козырей?

3.22. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что выбрана хотя бы одна пара одноцветных валетов?

3.23. Из колоды карт, содержащей 52 листа, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что выбрана хотя бы одна пара одноцветных валетов или все выбранные пять карт одной масти?

3.24. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают пять карт. Какова вероятность того, что из выбранных карт хотя бы три одной масти?

3.25. Колоду, содержащую 32 листа, случайным образом раздают по восемь карт четырем играющим. Какова вероятность того, что у каждого игрока будет равное число карт (по две) каждой масти?

3.26. Колоду, содержащую 36 листов, случайным образом раздают по 12 карт трем играющим. Какова вероятность того, что у каждого игрока будет равное число карт (по три) каждой масти?

3.27. Колоду, содержащую 52 листа, случайным образом раздают по 13 карт четырем играющим. Какова вероятность того, что у каждого игрока все карты будут одной масти?

3.28. Колоду, содержащую 52 листа, случайным образом раздают по 13 карт четырем играющим. Какова вероятность того, что у каждого игрока будет по тузу?

3.29. Колоду, содержащую 52 листа, случайным образом раздают по 13 карт четырем играющим. Какова вероятность того, что у каждого игрока будет хотя бы по три карты каждой масти?

3.30. Два раза бросают монету и один раз игральную кость. Какова вероятность того, что герб выпадет хотя бы один раз, а на игральной кости будет число очков кратное трем?

3.31. Имеются две коробочки одинакового внешнего вида. В одной из них лежат два синих карандаша, один красный и один желтый, в другой — один синий, один зеленый и один красный. Из каждой коробочки случайно берут по одному карандашу. Какова вероятность того, что: а) из выбранных карандашей ровно один синий; б) выбранные карандаши одного цвета?

3.32. В урне находятся a белых и b черных шаров. Из урны извлекают один шар, отмечают его цвет, возвращают в урну. Затем из урны извлекают сразу два шара. Какова вероятность того, что: а) все три шара белые; б) из трех извлеченных шаров ровно один белый; в) из трех извлеченных шаров хотя бы один черный; г) из трех извлеченных шаров ровно два черные?

3.33. В лотерее 20 билетов, из которых восемь выигрышных. а) Если участник лотереи покупает билеты по одному и сразу их проверяет, то он должен покупать билеты до первого выигрышного. Какова вероятность того, что будет куплено ровно три билета? б) Участник может купить сразу три билета и затем их проверить. Какова вероятность того, что хотя бы один билет будет выигрышным?

3.34. В офисе на столе для клиентов находятся три авторучки с синей пастой, две с черной и одна с фиолетовой. По правилам сначала приглашают одного клиента, после его ухода — двоих, после их ухода — троих. Предполагая, что все клиенты выбирают для подписи авторучку случайно, найти вероятность того, что все шестеро будут пользоваться авторучками с синей пастой.

3.35. Из урны, содержащей два белых шара и три черных, случайно извлекают один шар. Вместо него в урну кладут черный шар. Потом обе указанные операции повторяют. Какова вероятность того, что после этого: а) все шары в урне будут черными; б) в урне останется ровно один белый шар?

3.36. Из урны, содержащей шесть белых шаров и четыре черных, извлекают два шара. Вместо них в урну кладут два белых шара. Затем извлекают четыре шара, и вместо них в урну кладут четыре белых шара. Какова вероятность того, что после этого все шары в урне будут белыми?

3.37. Из урны, содержащей шесть белых шаров и четыре черных, последовательно без возвращения извлекают три шара. Какова вероятность того, что будут выбраны шары обоих цветов?

3.38. Студент должен сдать зачеты по двум темам. В первой теме 20 вопросов, из которых он знает восемь, во второй 30 вопросов, из которых он знает 24. По каждой теме предлагают два вопроса и для получения зачета достаточно ответить на любой из них. Какова вероятность того, что: а) обе темы будут зачтены; б) будет зачтена ровно одна тема?

3.39. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 10 карт. Какова вероятность того, что среди них не более одного туза?

3.40. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 10 карт. Какова вероятность того, что среди них хотя бы три туза?

3.41. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают семь карт. Какова вероятность того, что среди них нет ни одного туза и ни одной пары дама–король одной масти?

3.42. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают 12 карт. Какова вероятность того, что выбрана хотя бы одна пара дама–король одной масти?

3.43. Из колоды карт, содержащей 32 листа, одновременно извлекают 10 карт. Какова вероятность того, что будет выбрано ровно по четыре карты мастей трефы и пики?

3.44. Из колоды карт, содержащей 36 листов, одновременно извлекают шесть карт. Какова вероятность того, что будет выбрано хотя бы по одной карте каждой масти?

Существуют задачи, в которых безусловные и условные вероятности событий уже заданы, и нужно только правильно воспользоваться теоремами сложения и умножения вероятностей.

Пример 8. Ученики A, B и C могут решить некоторую задачу с вероятностями α, β и γ соответственно. Какова вероятность того, что: а) только ученик А решит задачу; б) хотя бы один ученик решит задачу?

Решение. Вероятности того, что ученики А, В и С не решат задачу, соответственно равны $(1-\alpha)$, $(1-\beta)$ и $(1-\gamma)$. Пусть A^+ — событие, состоящее в том, что ученик А решит задачу, а A^- — ученик А не решит задачу. Аналогично введем B^+, B^-, C^+ и C^-. Тогда событие $A^+B^-C^-$ — только ученик А решит задачу, и

$$P(A^+B^-C^-) = P(A^+)P(B^-)P(C^-) = \alpha(1-\beta)(1-\gamma).$$

Событие $A^+ \cup B^+ \cup C^+$ — хотя бы один ученик решит задачу. Используя равенство (14), получим

$$P(A^+ \cup B^+ \cup C^+) = 1 - P(A^-)P(B^-)P(C^-) = 1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

Пример 9. Для изготовления изделия необходимо выполнить две операции. При выполнении первой операции брак делается с вероятностью α. При выполнении второй операции — с вероятностью β_1, если допущен дефект на первой операции, и с вероятностью β_2, если первая операция выполнена хорошо. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие будет дефектным?

Решение. Пусть события D_i $(i = 1, 2)$ дефект возник на i-й операции, тогда по условию задачи $P(D_1) = \alpha$, $P\left(\overline{D_1}\right) = 1-\alpha$, $P(D_2|D_1) = \beta_1$, $P\left(D_2|\,\overline{D_1}\,\right) = \beta_2$. Событие D — изделие дефектно, тогда

$$D = D_1D_2 \cup D_1\overline{D_2} \cup \overline{D_1}D_2 = D_1\left(D_2 \cup \overline{D_2}\,\right) \cup \overline{D_1}D_2 = \\ = D_1\Omega \cup \overline{D_1}D_2 = D_1 \cup \overline{D_1}D_2,$$

где Ω — достоверное событие. Так как объединяемые события несовместны, то

$$P(D) = P(D_1) + P\left(\overline{D_1}D_2\right),$$

и в силу независимости D_1 и $\overline{D_2}$ (что следует из независимости D_1 и D_2)

$$P(D) = P(D_1) + P\left(\,\overline{D_1}\,\right)P(D_2) = \alpha + (1-\alpha)\beta_2.$$

3.45. Два стрелка А и В делают по два выстрела, каждый по своей мишени. Стрелок А попадает в мишень с вероятностью α, стрелок В — с вероятностью β. Какова вероятность того, что: а) общее число попаданий у двух стрелков будет три; б) будет хотя бы одно попадание?

3.46. Несимметричная монета подброшена семь раз. Вероятность того, что в каждом из бросаний выпадет герб равна α. Определить вероятность того, что а) не выпадет ни одного герба; б) выпадет ровно один герб; в) выпадет хотя бы одна цифра.

3.47. Девочке нужно вымыть одну чашку и одну тарелку. С вероятностью 0.2 она может уронить чашку и с вероятностью 0.4 тарелку. Если чашка падает, то она бьется с вероятностью 0.3, тарелка — с вероятностью 0.5. Какова вероятность того, что: а) упадет хотя бы один предмет; б) оба предмета упадут, но ни один не разобьется; в) ровно один предмет будет разбит?

3.48. Ученику токаря для сдачи экзамена выдают три заготовки. Из каждой он может изготовить кондиционную деталь с вероятностью 0.7. Экзамен считается сданным и прекращается, если будет изготовлена хотя бы одна кондиционная деталь. Какова вероятность того, что все три заготовки будут использованы?

3.49. Боезапаса самолета хватает на 10 пулеметных очередей. Стрельба прекращается при попадании в цель. Вероятность хотя бы одного попадания для каждой очереди равна 0.1. Стрельба ведется до первого попадания. Какова вероятность того, что самолет израсходует весь свой боезапас?

3.50. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Какова вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен?

3.51. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Какова вероятность того, что за время T: а) объект обнаружен хотя бы одной станцией; б) объект обнаружен каждой станцией?

3.52. Каждое изделие завода может иметь дефект с вероятностью p. Изделие проверяется одним контролером, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью α. Если дефект не обнаружен, изделие идет в готовую продукцию. По ошибке контролер может забраковать изделие не имеющее дефекта, вероятность этого равна β. Каковы вероятности событий: а) изделие будет забраковано; б) изделие пропущено в готовую продукцию с дефектом?

3.53. Отец, желая ободрить сына, делающего успехи в шахматах, обещает ему приз, если сын выиграет у него две партии подряд из трех (после каждой партии соперники меняются фигурами). Какими фигурами следует сыну играть первую партию, если вероятность победить белыми больше, чем черными?

§ 4. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Пусть пространство элементарных событий Ω представлено в виде объединения

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n, \tag{17}$$

где $H_i H_j = \varnothing$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, $i \neq j$, т. е. события H_i в (17) попарно несовместные. Тогда вероятность любого события A может быть найдена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i). \tag{18}$$

Равенство (18) носит название формулы полной вероятности, события H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ часто называют гипотезами.

Предположим известно, что событие A осуществилось. Тогда вероятность гипотезы H_j будет равна

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j) P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Равенства (19) — формулы Байеса, или формулы апостериорной вероятности $\big($априорными вероятностями будут $P(H_j)\big)$.

Пример 10. Три машины производят болты, причем первая машина производит 20% всей продукции, вторая машина 30% и третья машина 50%. Доля брака в продукции первой машины 5%. в продукции второй машины 2% и в продукции третьей 1%. Какова вероятность того, что наудачу взятый болт окажется дефектным?

Решение. Эксперимент состоит в том, что проверяется наудачу взятый болт. Элементарных исходов два: D — болт дефектный, $\overline{D}$ — болт кондиционный. Обозначим H_i $(i = 1, 2, 3)$ события, состоящие в том, что болт сделан i-й машиной. По условию задачи $P(H_1) = 0.2$, $P(H_2) = 0.3$, $P(H_3) = 0.5$, $P(D|H_1) = 0.05$, $P(D|H_2) = 0.02$, $P(D|H_3) = 0.01$. Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(D|H_i) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.01 =$$
$$= 0.01 + 0.006 + 0.005 = 0.021\,.$$

Покажем другое решение.

Рассмотрим в качестве Ω совокупность всех изготовленных тремя машинами болтов. По условию задачи $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Обозначим через D множество дефектных болтов. Слова "наудачу взятый болт" будем понимать в смысле равновероятности выбора элементов из Ω. Тогда $P(D) = \frac{m_D}{n}$, где n — число элементов в Ω, m_D — количество дефектных болтов. По условию задачи $m_{H_1} = 0.2n$, $m_{H_2} = 0.3n$, $m_{H_3} = 0.5n$. Для удобства введем обозначение m_{H_iD} — количество дефектных болтов, изготовленных i-й машиной $(i = 1, 2, 3)$, тогда $m_{H_1D} = 0.05m_{H_1}$, $m_{H_2D} = 0.02m_{H_2}$, $m_{H_3D} = 0.01m_{H_3}$. Следовательно,

$$m_D = m_{H_1D} + m_{H_2D} + m_{H_3D} = 0.05m_{H_1} + 0.02m_{H_2} + 0.01m_{H_3} =$$
$$= 0.05 \cdot 0.2n + 0.02 \cdot 0.3n + 0.01 \cdot 0.5n = 0.021n. \quad (20)$$

Далее, согласно классическому способу вычисления вероятности, получаем

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{0.021n}{n} = 0.021\,. \quad (21)$$

Принимая во внимание, что $\frac{m_{H_i}}{n} = P(H_i)$ $(i = 1,2,3)$ и $0.05 = P(D|H_1)$, $0.02 = P(D|H_2)$, $0.01 = P(D|H_3)$, возможно перефразировать (20) и (21) в виде

$$P(D) = \frac{m_{H_1 D}}{n} \cdot 0.05 + \frac{m_{H_2 D}}{n} \cdot 0.02 + \frac{m_{H_3 D}}{n} \cdot 0.01\,.$$

Таким образом, в некоторых случаях формула полной вероятности позволяет получить ответ, минуя построение пространства элементарных событий.

Пример 11. Из урны, содержащей 15 белых и пять черных шаров, случайно извлекают один шар. После этого в урну кладут белый шар. Затем из урны извлекают еще один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение. Введем события H_1 — первым извлечен белый шар, H_2 — первым извлечен черный шар, A — вторым извлечен белый шар. Тогда, если Ω — пространство элементарных событий, то $\Omega = H_1 \cup H_2$, $H_1 H_2 = \varnothing$, и, следовательно,

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Используя классический способ вычисления вероятностей, получим: $P(H_1) = \frac{15}{20}$, $P(H_2) = \frac{5}{20}$, $P(A|H_1) = \frac{15}{20}$, $P(A|H_2) = \frac{16}{20}$, и, следовательно,

$$P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} + \frac{5}{20} \cdot \frac{16}{20} = \frac{61}{80}\,.$$

Приведем другое решение этой задачи. Для удобства будем полагать, что все белые шары различимы, тоже и для черных шаров. Например, можно предположить, что все они занумерованы. Тогда число различных пар $n = 20 \cdot 20$ — число равновозможных исходов в Ω. Подсчитаем m_A — число исходов, благоприятствующих осуществлению события A. Будем извлечение белого шара обозначать буквой Б, а черного — Ч. Тогда событию А благоприятствуют исходы, которые могут быть записаны, как (ББ) или (ЧБ). Вариантов (ББ) будет $m_{\text{ББ}} = 15 \cdot 15$, вариантов (ЧБ) $m_{\text{ЧБ}} = 5 \cdot 16$ и $m_A = m_{\text{ББ}} + m_{\text{ЧБ}} = 15 \cdot 15 + 5 \cdot 16$, а тогда

$$P(A) = \frac{15 \cdot 15 + 5 \cdot 16}{20 \cdot 20} = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} + \frac{5}{20} \cdot \frac{16}{20} = \frac{61}{80}\,.$$

Сравнивая эти два решения, как и в предыдущем примере, видим, что использование формулы полной вероятности позволяет решить задачу не занимаясь построением пространства элементарных событий.

Пример 12. Некоторое изделие может быть изготовлено по одной из двух технологий. При использовании первой технологии вероятность брака α_1, при использовании второй α_2. Какова вероятность получить бракованное изделие, если эти технологии применяются с вероятностями p_1 и p_2? Известно, что изделие имеет дефект. Какова вероятность того, что была использована вторая технология?

Решение. введем события D — изделие бракованное, H_i $(i = 1, 2)$ — использована i-я технология. Тогда, согласно (18),

$$P(D) = P(H_1)P(D|H_1) + P(H_2)P(D|H_2).$$

По условию задачи $P(H_1) = p_1$, $P(H_2) = p_2$, $P(D|H_1) = \alpha_1$, $P(D|H_2) = \alpha_2$, и, следовательно, $P(D) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$.

Если изделие дефектно, то вероятность того, что оно было изготовлено по первой технологии, есть условная вероятность $P(H_1|D)$. Согласно формулам Байеса (19), имеем

$$P(H_1|D) = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}\,.$$

4.1. Имеются две урны одинакового внешнего вида. В одной из них пять белых шаров и пять черных, в другой 15 белых и пять черных. Наугад выбирают одну урну и извлекают из нее шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.2. Из урны, содержащей шесть белых шаров и четыре черных, случайно извлекают один шар. После этого в урну кладут белый шар. Затем из урны извлекают еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.3. Из урны, содержащей шесть белых шаров и четыре черных, случайно извлекают два шара. Белые шары возвращают в урну, черные — нет. Затем из урны извлекают еще два шара. Какова вероятность того, что эти шары будут оба белыми?

4.4. В некоторой местности 20% женщин и 50% мужчин любят посещать спортивные мероприятия. Какова вероятность того, что случайно выбранное лицо любит посещать спортивные мероприятия, если мужчин и женщин одинаковое число?

4.5. Сборка прибора может происходить при нормальном освещении и при ухудшенном. При нормальном освещении вероятность качественной сборки 0.9, при ухудшенном 0.5. Какова вероятность качественной сборки прибора, если нормальное освещение бывает в 90% случаях работы?

4.6. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0.1, в ненормальном 0.7. Какова вероятность выхода прибора из строя за время t?

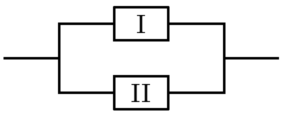
4.7. Имеются две урны, в первой пять белых шаров и пять черных, во второй — четыре белых и шесть черных. Из второй урны в первую переложили не глядя один шар. После чего из первой урны достали один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.8. В урне пять белых шаров и пять черных. Из нее достали два шара. Какова вероятность того, что они разных цветов?

4.9. Имеются две урны, в первой a белых шаров и b черных, во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя два шара. После чего из второй урны достали один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.10. Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равными вероятностями хорошие и отличные оценки. Слабо занимающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывают одного студента. Какова вероятность того, что полученная им оценка будет: а) отличной; б) хорошей или отличной; в) хотя бы удовлетворительной?

4.11. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов I и II (см. рисунок) и может случайным образом работать в одном из



двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме надежность каждого из узлов равна p_1, в неблагоприятном p_2. Вероятность работы в благоприятном режиме равна α. Какова полная надежность прибора?

4.12. Производится два выстрела по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле p. При одном попадании цель бывает поражена с вероятностью α, при двух с полной достоверностью. а) Найти вероятность поражения цели; б) если цель поражена, то какова вероятность того, что было только одно попадание?

4.13. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй — с вероятностью p_2. Кроме того, с вероятностями α_1 и α_2, соответственно, контролеры могут забраковать кондиционное изделие. Какова вероятность того, что: а) изделие забраковано; б) изделие имеет дефект, но не забраковано; в) имеет дефект, если известно, что оно забраковано?

4.14. Для изготовления некоторого препарата может быть использовано два вида сырья A и B, которые поступают на склад с вероятностями 0.3 и 0.7 соответственно. Если использовано сырье A, то при отклонениях от технологии препарат становится токсичным с вероятностью 0.2. При использовании сырья B, эта вероятность равна 0.1. Какова вероятность получения нетоксичного препарата, если отклонения от технологии возникают с вероятностью 0.15?

4.15. Отец и сын часто играют в шахматы, определяя с помощью жребия, кто какими фигурами играет. Если мальчик играет белыми, то выигрывает с вероятностью α, а если черными, то с вероятностью β. Какова вероятность того, что отец проиграет партию?

4.16. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны?

4.17. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых девять новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берут три мяча. Какова вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые?

4.18. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

4.19. Из двух близнецов первый — мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны α и β, а для разнополых близнецов вероятности родиться первым для обоих полов одинаковые?

4.20. Урна содержит один шар, про который известно, что он черный или белый с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белый?

4.21. После раздачи карт двум игрокам в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у одного из игроков оказался туз червей. Какова вероятность того, что у него козырной туз?

4.22. Колоду, содержащую 32 листа по восемь карт каждой из четырех мастей, раздают по семь карт случайным образом четырем играющим. Оставшиеся четыре карты кладут в прикуп. Какова вероятность того, что хотя бы у одного играющего окажутся по крайней мере три семерки?

4.23. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум игрокам в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у сдававшего игрока окажутся хотя бы два из трех старших козырей?

4.24. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум игрокам в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у сдававшего игрока окажутся козырные король и дама и не будет козырного туза?

4.25. Какова вероятность того, что после раздачи карт двум игрокам в "подкидного дурака" (играют колодой, содержащей 36 листов, раздают по шесть карт, козырную масть определяют по следующей после раздачи карте) у сдававшего игрока окажется козырной туз и не будет хотя бы одной карты из трех: козырных короля, дамы или валета?

§ 5. Геометрическая вероятность

В приведенных ниже задачах вероятность может быть вычислена как отношение меры* того множества, попадание точки в которое благоприятствует наступлению события, к мере того множества, куда точка при случайном бросании может попасть.

Пример 13. В круг вписан правильный шестиугольник. Случайно выбирается точка из круга. Какова вероятность того, что эта точка будет находиться в шестиугольнике?

Решение. Пусть рассматривается круг радиуса r. Тогда его площадь равна $S_{\text{кр}} = \pi r^2$. Площадь вписанного шестиугольника удобно вычислить как сумму площадей шести одинаковых правильных треугольников из которых он состоит. Длина стороны каждого из таких треугольников равна r, а площадь, по известной формуле, есть $S_{\text{тр}} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$. В итоге, площадь шестиугольника $S_{\text{ш}} = 6S_{\text{тр}} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$, а искомая вероятность равна $p = \frac{S_{\text{ш}}}{S_{\text{кр}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

5.1. В квадрат вписан круг. Случайно выбирается точка из квадрата. Какова вероятность того, что эта точка будет находиться в круге?

5.2. В круг вписан квадрат. Случайно выбирается точка из круга. Какова вероятность того, что эта точка будет находиться в квадрате?

*Мера — обобщение терминов "длина", "площадь", "объем".

5.3. В квадрат вписан круг, в который в свою очередь вписан квадрат. Случайно выбирается точка из описанного квадрата. Какова вероятность того, что эта точка будет находиться во вписанном квадрате?

5.4. В круг вписан квадрат, в который в свою очередь вписан круг. Случайно выбирается точка из описанного круга. Какова вероятность того, что эта точка будет находиться во вписанном круге?

5.5. На сегменте $[0;3]$ случайно и независимо выбирают числа a и b. Какова вероятность того, что x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = a, \\ 3x - 2y = b \end{cases}$, удовлетворяют условиям: а) $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$?

5.6. Какова вероятность того, что x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = b \end{cases}$, удовлетворяют условиям $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$, если a и b выбирают случайно и независимо и $a \in [0;4]$, $b \in [-2;0]$?

5.7. Какова вероятность того, что x и y, являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} \alpha x - \beta y = 2, \\ \alpha x + \beta y = 2 \end{cases}$, удовлетворяют условиям $\begin{cases} x > 0, \\ y > -1 \end{cases}$, если α и β выбирают случайно и независимо и $\alpha \in [-5;2]$, $\beta \in (0;1]$?

5.8. Какова вероятность того, что решения уравнений $x^2 - px + q = 0$, $y^2 + y + p = 0$, будут вещественными и для них будет справедливо неравенство $(x_1 + x_2)y_1 y_2 > (y_1 + y_2)x_1 x_2$, если p и q выбирают случайно и независимо и $p \in [0;3]$, $q \in [1;4]$?

5.9. В равностороннем треугольнике ABC случайно выбирают точку M и соединяют ее с вершинами B и C. Какова вероятность того, что площадь четырехугольника ABMC составит не более $\frac{1}{5}$ от площади треугольника ABC?

5.10. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ наудачу брошена точка М. Пусть ξ и η ее координаты. Какова вероятность того, что корни уравнения $x^2 + \xi x + \eta = 0$ действительные?

5.11. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка упадет между двумя первыми?

5.12. На окружности радиусом r наудачу независимо выбираются две точки и соединяются хордой. Какова вероятность того, что длина хорды превысит $\sqrt{3} \cdot r$?

5.13. На окружности радиусом r наудачу выбирается точка и через нее проводится диаметр. На диаметре наудачу выбирается точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Какова вероятность того, что длина полученной хорды превзойдет $\sqrt{3} \cdot r$?

5.14. Внутри круга, радиуса r наудачу выбирается точка. Через эту точку проводится диаметр и перпендикулярная ему хорда. Какова вероятность того, что полученная хорда превзойдет по величине $\sqrt{3} \cdot r$?

5.15. Два лица условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым "наудачу" в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

5.16. Стержень сломали в двух случайно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех получившихся частей можно составить треугольник?

5.17. Кусок проволоки длиною 20 см был согнут в наудачу выбранной точке. После этого, перегнув проволоку еще в двух местах (не ломая ее), сделали прямоугольную рамку. Какова вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит 21 см^2?

5.18. Точки $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ — вершины квадрата. Точка $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ соединена с вершинами квадрата. Какова вероятность того, что две точки, случайно брошенные в квадрат $ABCD$, попадут по одной в два любых треугольника, имеющие общую сторону?

§ 6. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли

1. Нахождение вероятностей событий. Пусть n раз повторяется некоторый эксперимент. Если результаты всех n экспериментов — события независимые в совокупности, то говорят, что имеется последовательность независимых испытаний. В частности, если n раз повторяется эксперимент с пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega, \overline{\omega}\}$, и при этом вероятности $P(\omega) = p$ и $P(\overline{\omega}) = 1 - p = q$ (т. е. $p + q = 1$) не зависят от номера эксперимента, то такую последовательность независимых испытаний называют схемой Бернулли. Общепринято обозначение $P_n(m)$ — вероятность того, что в схеме Бернулли, состоящей из n независимых экспериментов, событие ω осуществляется ровно m раз. Известна формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{22}$$

Наивероятнейшим числом осуществлений события ω называется число m_0, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение. Если $(np - q)$ — число не целое, то $m_0 = [np - q] + 1$* и единственно. Если $(np - q)$ — число целое, то задача об отыскании числа m_0 имеет два решения. Обозначим их $m_{01} = np - q$, $m_{02} = np - q + 1$, при этом будет иметь место равенство $P_n(m_{01}) = P_n(m_{02})$.

Вычисление вероятности $P_n(m)$ с использованием равенства (22) при бóльших n бывает затруднительно. Приближенно вероятность $P_n(m)$ и сумма этих вероятностей могут быть найдены с помощью локальной и интегральной теорем Муавра—Лапласа, из которых следуют приближенные формулы

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{где} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \tag{23}$$

*$[x]$ — функция "антье от x" — наибольшее целое число, не превосходящее x; например $[2.5] = 2$, $[-3] = 3$, $[-7.1] = -8$.

$$\sum_{m=k_1}^{k_2-1} P_n(m) = P_n(k_1 \leqslant m < k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (24)$$

где $a = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$. При использовании приближенных равенств (23) и (24) удобно пользоваться функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и первообразной от этой функции $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$. Тогда $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$, $P_n(k_1 \leqslant m < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$.

Замечание. Значение функции $\varphi(x)$ можно вычислить на инженерном калькуляторе. Кроме этого, обе названные функции легко получить по таблицам или с помощью компьютера. Так, например, в популярной программе Microsoft Excel существует функция НОРМРАСП (пункт меню **Вставка** $\to$ **Функции** $\to$ **Статистические**). Эта функция имеет четыре аргумента: первый из них — это аргумент x, второй следует сделать равным 0, третий 1, а в качестве четвертого аргумента нужно набрать слово ЛОЖЬ для вычислений значений функции $\varphi(x)$ или слово ИСТИНА для функции $\Phi(x)$.

Естественным обобщением схемы Бернулли является повторение n раз эксперимента с пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Тогда $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ — вероятность того, что в этой последовательности из n независимых испытаний каждое из событий ω_i осуществится ровно m_i раз, $i = 1, 2, \dots, k$. Известно, что

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \cdot p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}, \qquad (25)$$

где $p_i = P(\omega_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ в каждом из n экспериментов и $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Вероятности $P_n(m)$ и $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ часто называют биномиальной и полиномиальной соответственно. Для полиномиальной вероятности также имеют место аналоги локальной и интегральной теорем Муавра—Лапласа [3].

Использование приближенного равенства (23) нежелательно, если число испытаний n велико, а вероятность p мала (обычно

$p < 0.1$, $npq \leqslant 8$), в этом случае целесообразно использовать приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{где} \quad \lambda = np. \tag{26}$$

Значения выражения в правой части равенства (26) следует брать из таблиц или вычислять на калькуляторе.

Пример 14. Монету бросают 10 раз. Какова вероятность того, что число выпадений герба будет равно трем?

Решение. Десять раз повторяют случайный эксперимент с пространством элементарных событий $\Omega = \{\Gamma, \overline{\Gamma}\}$, Γ — выпал герб, $\overline{\Gamma}$ — выпал не герб. Итак, имеем схему Бернулли, где $n = 10$, $m = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{128} \approx 0.117\,.$$

Пример 15. Какова вероятность того, что при n бросаниях игральной кости, m — число выпадений числа очков кратного трем совпадет со своим наивероятнейшим значением, если а) $n = 19$; б) $n = 20$?

Решение. В схеме Бернулли $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

а) Для $n = 19$ имеем $[np - q] = \left[19 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right] = \left[5\frac{2}{3}\right] = 5$, $m_0 = 6$. Наивероятнейшее значение единственно и $P_{19}(6) = C_{19}^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13}$. Вычислим вероятность $P_{19}(6)$ приближенно, используя равенство (23). Тогда $x = \frac{6 - \frac{1}{3} \cdot 19}{\sqrt{19 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{38}} \approx -0.162$. С помощью таблиц или вычислительной техники находим $\varphi(-0.162) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-0.162)^2}{2}} \approx 0.394$ и окончательно получаем $P_{19}(6) \approx \frac{1}{\sqrt{19 \cdot 1/3 \cdot 2/3}} \cdot 0.394 \approx 0.192$.

б) Для $n = 20$ имеем $[np - q] = \left[20 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right] = [6] = 6$, и, следовательно, $m_0 \in \{6; 7\}$. Покажем, что $P_{20}(6) = P_{20}(7)$. Действительно,

$$P_{20}(6) = \frac{20!}{6! \cdot 14!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{14} = \frac{20!}{6! \cdot 13! \cdot 7 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13} =$$
$$= \frac{20!}{7! \cdot 13!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13} = P_{20}(7).$$

Приближенное значение вероятности $P_{20}(6)$ найдем с использованием формулы (23): $\sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2.108$, $x = \frac{6-20\cdot 1/3}{2.108} \approx -0.316$, $P_{20}(6) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{2.108 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-0.316)^2}{2}} \approx 0.180$. Обратим внимание на то, что при приближенных вычислениях вероятность $P_n(m_{01})$ может не совпадать с $P_n(m_{02})$. В частности, в данном примере $P_{20}(7) \approx \frac{1}{\sqrt{20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \cdot \varphi\left(\frac{7 - 20 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) \approx 0.187$.

Пример 16. Полагая вероятность p для случайно выбранного лица быть голубоглазым равной 0.36, найти вероятность того, что среди тысячи случайно выбранных лиц число голубоглазых m удовлетворяет неравенству $330 \leqslant m < 390$.

Решение. При подсчете интересующей вероятности следует воспользоваться схемой Бернулли, где $n = 1000$, $p = 0.36$, $q = 1 - p = 1 - 0.36 = 0.64$. Тогда, на основании равенства (24),

$$P_{1000}(330 \leqslant m < 390) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad \text{где}$$

$$a = \frac{330 - 0.36 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0.36 \cdot 0.64}} \approx -1.98\,, \quad b = \frac{390 - 0.36 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0.36 \cdot 0.64}} \approx 1.98\,.$$

И, следовательно,

$$P_{1000}(330 \leqslant m < 390) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1.98}^{1.98} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(1.98) - \Phi(-1.98) \approx$$
$$\approx 0.976 - 0.024 = 0.952.$$

Пример 17. Среди семян ржи сорта А примесь семян другого сорта составляет 0.1%. Какова вероятность того, что среди 1000 семян, отобранных для посевов, семян других сортов будет не менее четырех?

Решение. Воспользуемся приближенной формулой Пуассона, равенством (26). В нашей задаче $p = 0.001$, $np = 1000 \cdot 0.001 = 1 = \lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{1000}(0) &= \tfrac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = e^{-1}, \\ P_{1000}(1) &= \tfrac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = e^{-1}, \\ P_{1000}(2) &= \tfrac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = 0.25e^{-1}, \\ P_{1000}(3) &= \tfrac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} \approx 0.167e^{-1} \end{aligned}$$

и

$$P_{1000}(m \geqslant 4) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{1000}(m) \approx 1 - 2.417e^{-1} \approx$$
$$\approx 1 - 0.981 = 0.019.$$

2. Нахождение числа испытаний. Пусть m — число осуществлений события ω в схеме Бернулли, $\frac{m}{n}$ — частота появлений ω в этой последовательности из n испытаний. Тогда $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ — расхождение между частотой и вероятностью. Если $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha$, то, перейдя к двойному неравенству, получим $-\alpha n + np \leqslant m \leqslant \alpha n + np$, откуда следует, что $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} = P\left\{-\alpha n + np \leqslant m \leqslant \alpha n + np\right\}$, и после применения интегральной теоремы Муавра—Лапласа, с учетом свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, получим

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \alpha\right\} \approx \Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = \beta. \quad (27)$$

В формуле (27) вероятности p и q — постоянные величины, значение m — результат случая, остаются три переменные n, α и β и при известных двух можно найти третью [3].

Пример 18. Сколько необходимо произвести испытаний, чтобы вероятность отклонения частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности $p = \frac{3}{8}$ в ту или другую сторону более, чем на $\alpha = 0.01$ была не менее 0.995?

Решение. Воспользуемся равенством (27). По условию $\alpha = 0.01$, $p = \frac{3}{8}$, $q = \frac{5}{8}$, $\beta \geqslant 0.995$. Таким образом, нужно решить неравенство

$$2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \geqslant 0.995 \Leftrightarrow \Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geqslant 0.9975. \qquad (28)$$

По таблицам или на компьютере приближенно найдем γ, так чтобы выполнялось равенство $\Phi(\gamma) = 0.9975$. Очень удобно выполнить эту процедуру с помощью программы Microsoft Excel в которой существует функция НОРМОБР, обратная к функции $\Phi(\gamma)$. Она имеет три аргумента: первый из них — это аргумент обратной функции (в данном примере он равен 0.9975), второй следует сделать равным 0, а третий 1. Следует иметь в виду, что $\Phi(\gamma)$ — возрастающая функция, и поэтому при решении неравенства (28) знак неравенства не изменяется. Отметим также, что поскольку ищется нижняя граница значений числа испытаний n, то округление величины γ в меньшую сторону недопустимо. Найденное значение $\gamma \approx 2.81$. Теперь $\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}} \geqslant \gamma \Leftrightarrow n \geqslant \frac{pq\gamma^2}{\alpha^2}$, далее подставим числовые значения: $n \geqslant \frac{3/8 \cdot 5/8 \cdot 2.81^2}{0.01^2}$, и, округлив правую часть в большую сторону, получим ответ $n \geqslant 18507$.

Пример 19. Всхожесть семян некоторого вида растений $p = 0.6$. Какое их число n нужно посеять, чтобы с вероятностью, превосходящей $\alpha = 0.99$, число всходов m было не менее: а) $k = 10$; б) $k = 100$; в) $k = 1000$; г) $k = 10000$?

Решение. Традиционно обозначим $q = 1 - p$. По интегральной теореме Муавра—Лапласа $P\{m \geqslant k\} = P\{k \leqslant m < +\infty\} \approx \approx \lim\limits_{l\to+\infty} \Phi\left(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$. По условию эта величина больше α, следовательно, $1 - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) > \alpha \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) < 1 - \alpha$. С помощью программы Microsoft Excel приближенно найдем β (это число будет отрицательным, поскольку $1 - \alpha < 0.5$), для которого $\Phi(\beta) = 1 - \alpha$. Тогда $\frac{k-np}{\sqrt{npq}} < \beta \Leftrightarrow k - np < \beta\sqrt{npq} \Leftrightarrow np + \beta\sqrt{npq} - k > 0$. Решив это квадратное неравенство относительно величины $y = \sqrt{np}$, получим $\left[\begin{array}{l} y < \dfrac{-\sqrt{\beta^2 q + 4k} - \beta\sqrt{q}}{2}, \\ y > \dfrac{\sqrt{\beta^2 q + 4k} - \beta\sqrt{q}}{2}. \end{array}\right.$ Поскольку $y \geqslant 0$, как квадратный корень, а меньший из корней соответствующего квадратного уравнения всегда отрицательный, то обязательно должно быть выполнено неравенство $\sqrt{np} > \dfrac{\sqrt{\beta^2 q + 4k} - \beta\sqrt{q}}{2} \Leftrightarrow n > \dfrac{\left(\sqrt{\beta^2 q + 4k} - \beta\sqrt{q}\right)^2}{4p}$. Подставив конкретные числовые значения и округлив результаты в большую сторону, получим: а) $n \geqslant 27$; б) $n \geqslant 194$; в) $n \geqslant 1747$; г) $n \geqslant 16914$.

6.1. Монету бросают 20 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно: а) три раза; б) семь раз; в) десять раз; г) пятнадцать раз?

6.2. Из колоды, содержащей 36 листов по девять карт каждой из четырех мастей, 80 раз случайно с возвращением извлекают карту. Какова вероятность того, что при этом карта масти червы появится: а) 25 раз; б) не менее 15 раз и не более 25 раз?

6.3. В некоторой группе населения человек с вероятностью 0.6 оказывается брюнетом. Какова вероятность того, что среди 600 человек брюнетов будет: а) ровно 200; б) ровно 360; в) не менее 250 и не более 400?

6.4. Найти m_0 — наивероятнейшее число осуществлений события ω в схеме Бернулли, если: а) $n = 30$, $p = \frac{1}{5}$; б) $n = 30$, $p = \frac{1}{6}$; в) $n = 35$, $p = \frac{1}{6}$. Подсчитать вероятность $P_n(m_0)$.

6.5. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 75%. Сколько семян нужно посадить, чтобы с вероятностью 99% взошло не менее 100 ростков.

6.6. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 50%. Посажено 100 семян. Какова вероятность того, что взойдет ровно 50 ростков?

6.7. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 25%.

Посажено 1000 семян. Какова вероятность того, что число всходов будет не менее 260?

6.8. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 30%. Посажено 500 семян. Какова вероятность того, что число всходов будет менее 130?

6.9. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 60%. Посажено 600 семян. Какова вероятность того, что число всходов будет не менее 350, но меньше 370?

6.10. Симметричная монета подброшена n раз. Какова вероятность того, что число выпавших гербов отклонится от $\frac{n}{2}$ не более, чем на k? Решить задачу: а) в общем случае; при б) $n = 10000$, $k = 100$; в) $n = 1000$, $k = 10$; г) $n = 100$, $k = 1$.

6.11. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 50%. Посажено 500 семян. Найти такое положительное число ε, что с вероятностью 0.95 абсолютная величина отклонения числа всходов от 250 не превысит ε.

6.12. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 70%. Посажено 900 семян. Найти такое число ε, что с вероятностью 0.01 число взошедших семян превысит ε.

6.13. Всхожесть некоторого сорта семян оценивается как 60%. Посажено 700 семян. Найти такое число ε, что с вероятностью 0.02 число невзошедших семян не превысит ε.

6.14. Вероятность успеха в одном испытании равна $\frac{1}{n}$. Произведена серия из n независимых испытаний. Какова вероятность того, что будет ровно один успех?

6.15. Игральная кость брошена десять раз. Какова вероятность того, что ни одного раза не выпадет три очка?

6.16. Симметричная монета брошена восемь раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно три раза?

6.17. Произведено девять выстрелов по мишени с вероятностью попадания в каждом из них равной $\frac{1}{3}$. Считая результаты выстрелов независимыми, определить вероятность того, что будет хотя бы три попадания.

6.18. Произведено пять штрафных бросков мяча в баскетбольную корзину. Считая вероятность попадания равной $\frac{2}{3}$, а результаты бросков независимыми, определить вероятность того, что будет хотя бы три промаха.

6.19. Вероятность выиграть в лотерее равна $\frac{1}{10}$. Гражданин участвует в шести розыгрышах. Какова вероятность того, что число выигрышей будет более трех, но менее шести?

6.20. В некотором городе зарегистрировано 100000 автомобилей, владельцы которых для обязательного страхования могут воспользоваться одной из трех компаний. Если считать выбор водителей случайным, то в каких пределах должно лежать количество обращений в каждую из страховых компаний, чтобы вероятность этого была равна 99%?

§ 7. Шарики в лунках

1. Различимые упорядоченные шарики. Пусть имеется r шариков и n лунок, вмещающих неограниченное число шариков. Предположим, что все шарики различимы, например, занумерованы. Эти r шариков произвольно разбрасываются по n лункам. Обозначим r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — число шариков в лунке с номером i. Очевидно, что $0 \leqslant r_i \leqslant r$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$.

Результат разбрасывания r шариков по n лункам назовем заполнением лунок. Рассмотрим два заполнения, которым соответствуют числа шариков в лунках $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(r'_1, r'_2, \ldots, r'_n)$.

Необходимо условиться, какие заполнения лунок шариками считаются различными. Так как все шарики различимы, то для i-й лунки $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно фиксировать: 1) r_i — число шариков в лунке; 2) состав шариков (какие именно шарики попали в i-ю лунки); 3) последовательность поступления шариков в лунку. Два заполнения будем называть одинаковыми, если они совпадают по всем трем пунктам, и различными, если не совпадают по хотя бы одному из них. Это — заполнения различимыми шариками с упорядочиванием. Итак, два заполнения с различимыми (упорядоченными) шариками одинаковые, если: 1) $r_i = r'_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) состав шариков во всех лунках совпадает; 3) при выполнении пунктов 1) и 2) во все лунки шарики поступили в одной и той же последовательности.

Очевидно, что нарушение пункта 1) имеет естественным следствием невыполнение пунктов 2) и 3). Если пункт 1) выполнен, то нарушение пункта 2) означает разный состав, при численном равенстве, что ведет к невыполнению пункта 3). При выполнении пунктов 1) и 2) два заполнения будут различными, если нарушен пункт 3), т. е. если хотя бы в одну лунку одни и те же шарики поступили в разной последовательности.

Теорема 1. Существует A^r_{n+r-1} различных заполнений n лунок r различимыми шариками.

Доказательство. Для обозначения $(n-1)$ разграничений между лунками будем использовать карточки с черточками, а для обозначения r шариков карточки с числами от 1 до r. Расположив эти $(n-1+r)$ карточек в некоторой последовательности, получим конкретное заполнение лунок шариками (числа между двух черточек — это шарики, поступившие в соответствующую лунку в определенной последовательности). Подсчитаем число различных заполнений. Занумеруем $(n-1+r)$ мест, в которых расположим r обозначающих шарики карточек. Поскольку эти r карточек различимы, это можно сделать A^r_{n+r-1} способами. Оставшиеся $(n-1)$ мест единственным образом заполним неразличимыми карточками с черточками, обозначающими границы между лунками. Таким образом, R — число различных заполнений различимыми шариками с упорядочиванием будет равно $R = A^r_{n+r-1} \cdot 1 = A^r_{n+r-1}$. Теорема доказана.

2. Неразличимые шарики. Пусть имеется r неразличимых шариков, которые разбрасываются по n лункам. Как и в предыдущем случае, обозначим r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — число шариков в i-й лунке. Очевидно, что последовательность из n чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ содержит в себе всю информацию о заполнении лунок неразличимыми шариками. Два заполнения $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(r'_1, r'_2, \ldots, r'_n)$ n лунок r неразличимыми шариками будем считать различными, если хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n$ $r_i \neq r'_i$ и одинаковыми, если для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ $r_i = r'_i$.

Теорема 2. Существует C^r_{n+r-1} различных заполнений n лунок r неразличимыми шариками.

Доказательство. Найденное в предыдущей теореме R — число различных заполнений лунок различимыми шариками может быть представлено в виде произведения N — числа различных заполнений неразличимыми шариками и числа перестановок r шариков, которое равно $r!$ То есть

$$R = N \cdot r! \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{R}{r!} = \frac{A^r_{n+r-1}}{r!} = C^r_{n+r-1}. \qquad (29)$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $r_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то число различных целочисленных решений уравнения

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$$

равно C^r_{n+r-1}.

3. Различимые неупорядоченные шарики. Пусть имеется r неразличимых шариков, которые разбрасываются по n лункам. Как и в предыдущих двух случаях, обозначим r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — число шариков в i-й лунке, а последовательность из n чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ будет соответствовать результату разбрасывания шариков, т. е. заполнению лунок. Два заполнения $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(r'_1, r'_2, \ldots, r'_n)$ n лунок r различимыми шариками будем считать одинаковыми, если: 1) $r_i = r'_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) состав шариков во всех лунках совпадает, и различными, если нарушен хотя бы один из этих двух пунктов. Это — заполнения различимыми шариками без упорядочивания. Очевидно, что в сравнении с первым случаем, отброшено требование, учитывающее порядок поступления шариков в лунку. Важен лишь состав шариков в лунках.

Теорема 3. Существует n^r различных заполнений n лунок r различимыми шариками без учета порядка заполнения.

Доказательство. Поскольку порядок заполнения лунок не учитывается, то перед разбрасыванием шариков их можно расположить в любом порядке, и это никак не отразится на величинах, характеризующих комбинации. Итак, расположим шарики в некотором порядке, например, по номерам, и будем заполнять лунки. Первый из r шариков можно поместить в любую из n лунок. Второй — тоже в любую из n лунок, причем независимо от того, в какую лунку был помещен первый шарик. Число способов сделать это равно $n \cdot n = n^2$. Аналогичные рассуждения можно провести для третьего шарика и т. д. Окончательно число различных заполнений будет равно $S = \underbrace{n \cdot n \cdot n \ldots n \cdot n}_{r \text{ сомножителей}} = n^r$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачи о пароле, которые могут быть решены с использованием полученных результатов о шариках и лунках.

Пример 20. Секция пароля состоит из двух ячеек, в каждую из которых вводится не более двух одинаковых символов. Какова вероятность сразу угадать пароль, если общее число символов в двух ячейках (т. е. в секции) обязательно два?

Решение. Эта задача может быть решена с использованием результатов о разбрасывании неразличимых шариков по лункам. Символы — шарики: $r = 2$, ячейки — лунки: $n = 2$. Тогда N — число вариантов пароля $N = C^2_{2+2-1} = 3$, полагая все варианты равновозможными, получим $p = \frac{1}{3}$.

Пример 21. Секция пароля состоит из n ячеек. В i-ю $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ячейку вводится r_i различных символов, при этом $0 \leqslant r_i \leqslant r$, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$. Какова вероятность сразу угадать пароль, если все варианты ввода пароля равновозможны? В каком случае более вероятно сразу угадать пароль, если: а) $n_1 = 2$, $r_1 = 3$; б) $n_2 = 3$, $r_2 = 2$?

Решение. В соответствии с общим результатом имеем $N = C^r_{n+r-1}$ и $p = \frac{1}{C^r_{n+r-1}}$. Тогда $N_a = C^3_{2+3-1} = 4$, $p_a = \frac{1}{4}$ и $N_b = C^2_{3+2-1} = 6$, $p_a = \frac{1}{6}$. Более вероятно угадать пароль с первого раза, если число ячеек 2, а символов 3.

Пример 22. Секция пароля состоит из двух ячеек. Для образования пароля используют два символа A и B, которые могут быть введены в любую ячейку секции. Общее число символов в секции два, в каждой ячейке не более двух. Пароль известен, если известно, какие символы и в какой последовательности введены в ячейки секции. Какова вероятность сразу угадать пароль, если все варианты ввода пароля равновозможны?

Решение. Число вариантов пароля совпадает с числом различных заполнений двумя различимыми шариками двух лунок. Итак, $n = 2$, $r = 2$, $N = A^2_{2+2-1} = 6$. Следовательно, $p = \frac{1}{6}$.

Пример 23. Секция пароля состоит из n ячеек. Пароль — введение r различных символов в секцию, при этом в i-й секции находится r_i $\left(0 \leqslant r_i \leqslant r, \sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r\right)$ символов. Пароль известен, если известно, какие символы и в какой последовательности введены в каждую ячейку секции. Какова вероятность угадать пароль сразу, если все случаи равновозможные? В каком случае более вероятно сразу угадать пароль, если: а) $n_1 = 2$, $r_1 = 3$; б) $n_2 = 3$, $r_2 = 2$?

Решение. Для общего случая имеем $N = A^r_{n+r-1} = 6$ и $p = \frac{1}{A^r_{n+r-1}}$. Следовательно, $p_a = \frac{1}{A^3_{2+3-1}} = \frac{1}{24}$, $p_b = \frac{1}{A^2_{3+2-1}} = \frac{1}{12}$. В случае б) угадать пароль сразу более вероятно.

В теории вероятностей задачи часто соответствуют разбрасыванию различных шариков без упорядочивания. Рассмотрим такие задачи.

Пример 24. Два шарика случайно разбрасывают по трем лункам. Попадание любого шарика в любую лунку равновозможно. Какова вероятность того, что оба шарика будут в одной лунке?

Решение. Пусть шарики различные, порядок не учитывается, тогда $N = 3^2 = 9$ — число равновозможных исходов, число благоприятствующих $m = 3$, и $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Пример 25. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Каковы вероятности событий: A — все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B — все пассажиры выйдут на одном этаже; C — все пассажиры выйдут на разных этажах; D — два пассажира выйдут на одном этаже, а третий на другом?

Решение. Проведем аналогию этажи — лунки (их шесть), пассажиры — шарики (их три). По условию задачи порядок не учитывается, тогда $N = 6^3 = 216$. Найдем числа исходов, благоприятствующие событиям A, B, C и D. Очевидно, что $m_A = 1$, $m_B = 6$ и $P(A) = \frac{1}{216}$, $P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию C. Можно C_6^3 способами выбрать этажи, на которых по одному выйдут пассажиры. В соответствии с организацией пространства элементарных событий следует учесть всевозможные перестановки трех пассажиров по трем этажам, их 3! Таким образом, $m_C = C_6^3 \cdot 3! = 120$, $P(C) = \frac{5}{9}$. Аналогично, $m_D = C_3^2 \cdot 6 \cdot 5 = 90$. Здесь C_3^2 — число способов выбрать двух пассажиров из трех, 6 — число этажей, на которых они могут выйти из лифта, а 5 — число оставшихся этажей для третьего пассажира. Итак, $P(D) = \frac{5}{12}$.

Замечание. Так как $A \cup B \cup C \cup D = \Omega$, и события A, B, C и D попарно несовместны, то можно было воспользоваться равенством $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$, из которого следует, что $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C)$.

Пример 26. Три шарика случайно и независимо разбрасывают по десяти лункам. Каковы вероятности событий: A — все шарики в одной лунке, B — все шарики в разных лунках, C — два шарика в одной лунке и один в другой?

Решение. Пусть шарики различные, тогда равновероятностных исходов $N = 10^3$. Найдем числа исходов, благоприятствующих осуществлению событий A, B и C. Очевидно, что $m_A = 10$, $m_B = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, $m_C = C_3^2 \cdot A_{10}^2 = 3 \cdot 10 \cdot 9 = 270$ (существует C_3^2 способов выбрать два шарика из трех и A_{10}^2 вариантов выбора лунок для двух шариков). Соответственно: $P(A) = \frac{1}{100}$, $P(B) = \frac{18}{25}$, $P(\text{C}) = \frac{27}{100}$.

Замечание. Очевидно, что $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Пример 27. По n лункам случайно и независимо разбрасывают r шариков. Какова вероятность того, что: а) в первой лунке будет ровно r_1 шаров, во второй — ровно r_2 шаров, и т. д. в последней n-й лунке будет ровно r_n шаров; б) в некоторой лунке будет ровно $k_1 > 0$ шаров, в другой — ровно $k_2 > 0$ шаров, причем $k_1 \neq k_2$, и т. д. в m-й лунке $(m \leqslant n)$ будет ровно $k_m > 0$ шаров, причем все k_j (где $j = 1, 2, \ldots, m$) отличаются друг от друга, а в остальных $(n - m)$ лунках шаров нет, т. е. $k_j = 0$ при $j = m + 1, m + 2, \ldots, n$.

Решение. Число равновозможных исходов равно n^r. В пункте а) фиксировано число шаров в каждой лунке, следовательно, заполнения могут различаться только составом шаров. Число благоприятствующих вариантов (с учетом того, что $r - r_1 - r_2 - \ldots - r_{n-1} = r_n$)

$$m_A = C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_2} C_{r-r_1-r_2}^{r_3} \ldots C_{r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}}^{r_n} = \\ = \frac{r!}{r_1!(r-r_1)!} \frac{(r-r_1)!}{r_2!(r-r_1-r_2)!} \frac{(r-r_1-r_2)!}{r_3!(r-r_1-r_2-r_3)!} \ldots = \\ = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}.$$

И, следовательно, $P(A) = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \frac{1}{n^r}$.

Перейдем к пункту б). Пусть k_1 шаров именно в первой лунке, k_2 шаров именно во второй лунке и т. д. Число таких заполнений (с учетом того, что при $j > m$ все $k_j = 0$, и, следовательно, $k_j! = 1$) согласно пункту а) равно $\frac{r!}{k_1! k_2! \ldots k_m! \ldots k_n!} = \frac{r!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$. Теперь учтем, что k_1 шаров может быть в любой из n лунок, k_2 шаров — в любой из $(n-1)$ оставшихся лунок и т. д. Очевидно, что таких способов A_n^m, и, следовательно, $m_B = \frac{r!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} A_n^m$, и $P(B) = \frac{r! A_n^m}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \frac{1}{n^r}$.

Пример 28. По пяти лункам случайно и независимо разбрасывают четыре шарика. Какова вероятность того, что: а) в некоторой лунке будет ровно три шарика, а в некоторой другой ровно один; б) в некоторых двух лунках будет ровно по два шарика?

Решение. а) Согласно выводам пункта б) примера 27 имеем $n = 5$, $r = 4$, $m = \frac{4!}{3! \cdot 1!} A_5^2 = 80$ и, следовательно, $p = \frac{80}{5^4} = \frac{16}{125}$.

б) В отличие от рассуждений пункта а) число способов, которыми можно выбрать пару лунок из пяти, будет равно C_5^2, а не A_5^2, поскольку число шаров в этих лунках одинаковое и по условию задачи такие лунки неразличимы. Итак, $m = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \mathrm{C}_5^2 = 60$ и, следовательно, $p = \frac{60}{5^4} = \frac{12}{125}$.

7.1. Четыре шарика случайно разбрасывают по двум лункам. Какова вероятность того, что в каждой лунке будет находиться по два шарика?

7.2. Пять шариков случайно разбрасывают по пяти лункам. Какова вероятность того, что в каждой лунке будет находиться по одному шарику?

7.3. Пять шариков случайно разбрасывают по двум неразличимым лункам. Какова вероятность того, что все шарики будут в одной лунке?

7.4. Четыре шарика случайно разбрасывают по трем лункам, расположенным в ряд. Какова вероятность того, что шарики будут находиться в двух соседних лунках, причем по два в каждой?

7.5. Два красных шарика и один зеленый случайно разбрасывают по двум лункам. Какова вероятность того, что красные шарики будут: а) в одной лунке; б) в разных лунках?

7.6. Шесть стрелков случайно и независимо выбирают себе любую из шести целей. Какова вероятность того, что: а) все цели будут обстреляны; б) будет обстреляно ровно пять целей?

7.7. Шесть шариков (два красных, два синих и два зеленых) случайно разбрасывают по трем неразличимым лункам. Какова вероятность того, что в каждой лунке будет находиться по два одноцветных шарика?

7.8. Пять одинаковых шариков случайно разбрасывают по трем неразличимым лункам. Какова вероятность того, что в двух лунках будет по два шарика, а в третьей — один?

7.9. Пять одинаковых шариков случайно разбрасывают по четырем неразличимым лункам. Какова вероятность того, что в двух лунках будет по два шарика, в третьей — один, а в четвертой ни одного?

7.10. Трое друзей сравнивают дни недели, в которые они родились. Какова вероятность того, что ровно двое из них родились в один день недели?

7.11. Четверо друзей сравнивают дни недели, в которые они родились. Какова вероятность того, что: а) все четверо родились в разные дни недели; б) дни их рождений пришлись на понедельник, вторник, среду и четверг; в) двое из них родились в среду, а двое в четверг?

Ответы

1.1. Студент едет либо в трамвае, состоящем из одного вагона, либо в первом вагоне двух- или трехвагонного состава. **1.2.** Студент едет во втором или в четвертом вагоне. **1.3.** Студент добрался на автобусах №7, 10, 47 или на троллейбусе №7. **1.4.** Студент едет в первом, в пятом или в седьмом вагоне. **1.5.** Нет. **1.6.** Да. **1.7.** Да. **1.8.** Нет. **1.9.** Партия в шашки закончилась результативно. **1.10.** Да. **1.11.** Нет. **1.12.** Нет. **1.13.** Выбран гладиолус и не более одной астры. **1.14.** Крыша только одного дома покрыта шифером. **1.15.** Вода есть только в глубоком колодце. **1.16.** Под огурцы занято три или четыре теплицы. **1.17.** Обе эти карты одинакового номинала. **1.18.** В воде находятся папа, сын и возможно одна или обе дочери. **1.19.** Человек пересек реку не водным транспортом. **1.20.** Все эти три карты одной масти. **1.21.** Нет. **1.22.** Нет.

2.1. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{5}$. **2.2.** а, б) $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. **2.3.** а) $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; б, г) $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; в, д) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. **2.4.** а) $\frac{1}{4}$; б, в) $\frac{3}{4}$. **2.5.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$. **2.6.** а, в) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. **2.7.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$. **2.8.** $\frac{7\cdot 7}{8\cdot 8-1}=\frac{7}{9}$. **2.9.** а) $\frac{12\cdot 8}{1000}=\frac{12}{125}$; б) $\frac{8^3}{1000}=\frac{64}{125}$. **2.10.** а) $\frac{5}{10\cdot 9}=\frac{1}{18}$; б) $\frac{6}{10^2}=\frac{3}{50}$. **2.11.** а) $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$; б) $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$; в) $\frac{4}{10^2}=\frac{1}{25}$. **2.12.** $\frac{2}{3}$. **2.13.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. **2.14.** 0. **2.15.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. **2.16.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **2.17.** а) $\frac{7}{32}$. **2.18.** а) $\frac{22}{25}$. **2.19.** а) $\frac{8}{35}$. **2.20.** $\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$. **2.21.** а) $\frac{3!}{6!}=\frac{1}{120}$; б) $\frac{2\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{60}$. **2.22.** $\frac{6\cdot 2!\cdot 4!}{6!}=\frac{2}{5}$. **2.23.** а) $\frac{4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1}{70}$; б) $\frac{5\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1}{14}$; в) $\frac{4\cdot 3\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{6}{35}$. **2.24.** $\frac{6\cdot 2!\cdot 8!}{10!}=\frac{2}{15}$. **2.25.** $\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}$. **2.26.** а, б) $\frac{6\cdot 2!\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{10}$. **2.27.** $\frac{1}{A_4^2}=\frac{1}{12}$. **2.28.** $\frac{A_3^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{15}$. **2.29.** $\frac{A_4^2}{A_{32}^2}=\frac{3}{248}$. **2.30.** $\frac{A_{13}^{13}}{A_{52}^{13}}$. **2.31.** $\frac{A_{21}^{14}}{A_{28}^{14}}=\frac{1}{345}$. **2.32.** $\frac{A_{28}^7}{A_{32}^7}=\frac{253}{620}$. **2.33.** $\frac{A_{27}^6}{A_{35}^6}$. **2.34.** $\frac{A_{27}^{12}}{A_{35}^{12}}$. **2.35.** $\frac{A_3^2\cdot A_8^8}{A_{10}^{10}}=\frac{A_8^7}{A_{10}^7}=\frac{1}{15}$. **2.36.** а) $\frac{3\cdot 6}{A_7^2}=\frac{3}{7}$; б) $\frac{A_7^2-A_3^2}{A_7^2}=\frac{6}{7}$; в) $\frac{0}{A_7^2}=0$; г) $\frac{2\cdot 6}{A_7^2}=\frac{2}{7}$. **2.37.** а) $\frac{A_2^2\cdot A_4^2\cdot 16\cdot A_{17}^{17}}{A_{20}^{20}}=\frac{16}{285}$;

б) $\frac{A_2^2\cdot 16\cdot A_{17}^{17}}{A_{20}^{20}}=\frac{4}{855}$. **2.38.** $\frac{2\cdot A_3^3\cdot A_5^5}{A_{10}^{10}}=\frac{1}{2520}$. **2.39.** $\frac{2\cdot A_5^5\cdot A_7^7}{2\cdot A_{12}^{12}}=\frac{1}{792}$.
2.40. а) $\frac{A_6^5\cdot A_{25}^{25}}{A_{30}^{30}}=\frac{1}{23751}$; б) $\frac{A_5^3\cdot A_{25}^3\cdot A_{24}^{24}}{A_{30}^{30}}=\frac{46}{23751}$.
2.41. а) $\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{A_{15}^2}{A_{20}^2}=\frac{21}{38}$; б) $\frac{C_{15}^1\cdot C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{15}{38}$. **2.42.** $\frac{C_a^2+C_b^2}{C_{a+b}^2}=\frac{A_a^2+A_b^2}{A_{a+b}^2}$.
2.43. а) $\frac{C_{20}^4}{C_{30}^4}=\frac{A_{20}^4}{A_{30}^4}=\frac{323}{1827}$; б) $\frac{C_{30}^4-C_{10}^4}{C_{30}^4}=\frac{A_{30}^4-A_{10}^4}{A_{30}^4}=\frac{259}{261}$.
2.44. а) $\frac{C_{10}^4\cdot 2^4}{C_{20}^4}=\frac{A_{10}^4\cdot 2^4}{A_{20}^4}=\frac{224}{323}$; б) $\frac{2\cdot C_{10}^4}{C_{20}^4}=\frac{28}{323}$. **2.45.** $\frac{5}{C_6^2}=\frac{1}{3}$.
2.46. $\frac{1}{C_{32}^3}=\frac{A_3^3}{A_{32}^3}=\frac{1}{4960}$. **2.47.** $\frac{1}{C_{52}^{32}}=\frac{A_{32}^{32}}{A_{52}^{32}}$. **2.48.** $\frac{9^4}{C_{36}^4}=\frac{729}{6545}$.
2.49. $\frac{9^2}{C_{36}^2}=\frac{9}{70}$. **2.50.** $\frac{C_4^3\cdot C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{1}{108290}$. **2.51.** $\frac{4^3}{C_{52}^3}=\frac{16}{5525}$.
2.52. $\frac{C_{12}^4}{C_{52}^5}$. **2.53.** $\frac{4C_{13}^4}{C_{53}^5}$. **2.54.** $\frac{C_{28}^3}{C_{32}^7}=\frac{7}{7192}$. **2.55.** $\frac{C_4^3C_{28}^7}{C_{32}^{10}}=\frac{66}{899}$.
2.56. $\frac{C_{18}^3C_{18}^3}{C_{36}^6}=\frac{816}{2387}$. **2.57.** $\frac{C_1^1C_4^1C_{27}^3}{C_{32}^5}=\frac{2925}{50344}$. **2.58.** $\frac{C_8^1\cdot C_{27}^5}{C_{35}^6}$.
2.59. $\frac{C_{30}^{10}}{C_{32}^{12}}=\frac{33}{248}$. **2.60.** $\frac{C_{24}^3}{C_{36}^6}=\frac{23}{22134}$. **2.61.** $\frac{C_{30}^7}{C_{32}^8}=\frac{6}{31}$. **2.62.** $\frac{C_9^8}{C_{36}^{12}}$.
2.63. $\frac{C_{39}^{10}}{C_{52}^{13}}$. **2.64.** $\frac{\left(C_8^2\right)^4}{C_{32}^8}$. **2.65.** $\frac{\left(C_9^3\right)^4}{C_{36}^{12}}$. **2.66.** $\frac{C_4^3\cdot\left(C_8^4\right)^3}{C_{32}^{12}}$.
2.67. $\frac{4C_9^2 9^3}{C_{36}^5}=\frac{729}{2618}$. **2.68.** а) $\frac{7\cdot 4^3}{C_{36}^3}=\frac{16}{255}$; б) $\frac{7\cdot 4}{C_{36}^3}=\frac{1}{255}$;
в) $\frac{7\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{C_{36}^3}=\frac{2}{85}$. **2.69.** $\frac{C_6^2}{C_{10}^6}=\frac{1}{14}$. **2.70.** а) $\frac{C_8^2+C_8^6}{C_{12}^6}=\frac{2}{33}$;
б) $\frac{C_4^1\cdot C_8^5+C_4^3\cdot C_8^3}{C_{12}^6}=\frac{16}{33}$; в) $\frac{C_4^2\cdot C_8^4}{C_{12}^6}=\frac{5}{11}$. **2.71.** $\frac{C_{50}^5-C_{20}^5-C_{30}^1\cdot C_{20}^4}{C_{50}^5}$.
2.72. $\frac{C_n^s\cdot C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$. **2.73.** $\frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$. **2.74.** $\frac{C_l^s\cdot C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}$. **2.75.** а) $\frac{C_n^{2r}\cdot 2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$;
б) $\frac{C_n^1\cdot C_{n-1}^{2r-2}\cdot 2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$; в) $\frac{C_n^2\cdot C_{n-2}^{2r-4}\cdot 2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$. **2.76.** $\frac{C_{2N}^N\cdot C_{2N}^N}{C_{4N}^{2N}}$.
2.77. $\frac{2\cdot C_{32}^{14}}{C_{36}^{18}}=\frac{8}{77}$. **2.78.** а) $\frac{C_2^1\cdot C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n}=\frac{n}{2n-1}$;
б) $\frac{C_2^2\cdot C_{2n-2}^{n-2}+C_2^0\cdot C_{2n-2}^n}{C_{2n}^n}=\frac{n-1}{2n-1}$. **2.79.** $\frac{C_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{252}$.

3.1. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$; в) $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$. **3.2.** а) $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{36}$; б) $\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{20}$;
в) $\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17}=\frac{1}{153}$. **3.3.** а) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}$; б) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}$;
в) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}$. **3.4.** а) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}$;
б) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}$; в) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}$. **3.5.** $1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
3.6. $\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 1=\frac{1}{32}$. **3.7.** $1\cdot\frac{8\cdot 3}{35}\cdot\frac{7\cdot 2}{34}=\frac{24}{85}$. **3.8.** $\frac{16}{32}\cdot\frac{8}{31}=\frac{4}{31}$.
3.9. $\frac{13\cdot C_{48}^3}{C_{52}^7}=\frac{1}{595}$. **3.10.** $\frac{4\cdot C_{24}^4}{C_{32}^{12}}$. **3.11.** $1-\frac{A_{27}^2}{A_{36}^2}=1-\frac{C_{27}^2}{C_{36}^2}=\frac{31}{70}$.

3.12. $1-\frac{A_{28}^{7}}{A_{32}^{7}}=1-\frac{C_{28}^{7}}{C_{32}^{7}}=\frac{1265}{2231}$. **3.13.** $\frac{C_4^2\cdot C_{32}^1+C_4^3}{C_{36}^3}=\frac{7}{255}$.
3.14. $\frac{C_8^2+4}{C_{32}^2}=\frac{A_8^2}{A_{32}^2}+\frac{4}{C_{32}^2}=\frac{2}{31}$.
3.15. $\frac{C_4^2+C_4^1C_{28}^1+4}{C_{32}^2}=1-\frac{A_{28}^2}{A_{32}^2}+\frac{4}{C_{32}^2}=\frac{61}{248}$.
3.16. $\frac{C_4^2\cdot C_{32}^1+C_4^3+4\cdot 34}{C_{36}^3}=\frac{83}{1785}$. **3.17.** $\frac{C_{34}^{11}}{C_{35}^{11}}=1-3\cdot\frac{C_{34}^{10}}{C_{36}^{12}}=\frac{24}{35}$.
3.18. $\frac{C_{31}^9-C_{27}^9}{C_{32}^{10}}$. **3.19.** $\frac{C_{28}^3-C_{24}^3}{C_{32}^7}$. **3.20.** $\frac{C_{18}^2+2\left(C_4^2-C_2^2\right)}{C_{36}^2}=\frac{163}{630}$.
3.21. $\frac{C_{27}^6C_{21}^6+2C_{27}^6\left(C_{29}^6-C_{21}^6\right)}{C_{35}^6C_{29}^6}$. **3.22.** $\frac{2\left(C_{48}^3+C_2^1C_{48}^2\right)+C_{48}^1}{C_{52}^5}$.
3.23. $\frac{2\left(C_{48}^3+C_2^1C_{48}^2\right)+C_{48}^1+4C_{13}^5}{C_{52}^5}$. **3.24.** $\frac{4\left(C_8^5+C_8^4C_{24}^1+C_8^3C_{24}^2\right)}{C_{32}^5}$.
3.25. $\frac{\left(C_8^4\right)^4}{C_{32}^8}\cdot\frac{\left(C_6^2\right)^4}{C_{24}^8}\cdot\frac{\left(C_4^2\right)^4}{C_{16}^8}$. **3.26.** $\frac{\left(C_9^3\right)^3}{C_{36}^{12}}\cdot\frac{\left(C_6^3\right)^3}{C_{24}^{12}}$.
3.27. $\frac{4}{C_{52}^{13}}\cdot\frac{3}{C_{39}^{13}}\cdot\frac{2}{C_{26}^{13}}$. **3.28.** $\frac{4!C_{48}^{12}C_{36}^{12}C_{24}^{12}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}}=\frac{2197}{20825}$.
3.29. $\frac{4C_{13}^4\left(C_{13}^3\right)^3}{C_{52}^{13}}\cdot\frac{3C_{10}^4C_9^3\left(C_{10}^3\right)^2}{C_{39}^{13}}\cdot\frac{2C_7^4\left(C_6^3\right)^2C_7^3}{C_{26}^{13}}$.
3.30. $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$. **3.31.** а) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1+1}{3}+\frac{1+1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$;
б) $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$. **3.32.** а) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$;
б) $\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}\right)+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{ab}{C_{a+b}^2}$; в) $1-\frac{a}{a+b}\cdot\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$;
г) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{ab}{C_{a+b}^2}$. **3.33.** а) $\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{8}{18}=\frac{44}{285}$;
б) $1-\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{46}{57}$. **3.34.** $\frac{3}{6}\cdot\frac{C_3^2}{C_6^2}\cdot\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{200}$. **3.35.** а) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$;
б) $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{14}{25}$. **3.36.** $\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{1}{C_{10}^4}+\frac{6\cdot 4}{C_{10}^2}\cdot\frac{7}{C_{10}^4}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_8^2}{C_{10}^4}$.
3.37. $\frac{4\cdot C_6^2}{C_{10}^3}+\frac{6\cdot C_4^2}{C_{10}^3}$. **3.38.** а) $\left(1-\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\right)\left(1-\frac{C_6^2}{C_{30}^2}\right)$;
б) $\left(1-\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\right)\frac{C_6^2}{C_{30}^2}+\left(1-\frac{C_6^2}{C_{30}^2}\right)\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}$. **3.39.** $\frac{C_{28}^{10}+C_4^1C_{28}^9}{C_{32}^{10}}=\frac{4543}{7192}$.
3.40. $\frac{C_{28}^6+C_4^3C_{28}^7}{C_{32}^{10}}=\frac{285}{3596}$. **3.41.** $\frac{C_{24}^7+C_4^1C_{23}^6+C_4^2C_{22}^5+C_4^3C_{21}^4+C_{20}^3}{C_{32}^7}$.
3.42. $1-\frac{C_{32}^{12}+C_4^1C_{31}^{11}+C_4^2C_{30}^{10}+C_4^3C_{29}^9+C_{28}^8}{C_{36}^{12}}$.
3.43. $\frac{\left(C_8^2\right)^2\left(2C_8^2+8^2\right)}{C_{32}^{10}}=\frac{2450}{268801}$. **3.44.** $\frac{C_4^1C_9^3 9^3+C_4^2\left(C_9^2\right)^2 9^2}{C_{36}^6}=\frac{18225}{40579}$.
3.45. а) $\alpha^2\cdot 2\beta(1-\beta)+2\alpha(1-\alpha)\beta^2$; б) $1-(1-\alpha)^2(1-\beta)^2$.
3.46. а) $(1-\alpha)^7$; б) $7\alpha(1-\alpha)^6$; в) $1-\alpha^7$.
3.47. а) $1-0.8\cdot 0.6=0.52$; б) $0.2\cdot 0.7\cdot 0.4\cdot 0.5=0.028$;

в) $0.2 \cdot 0.3(1 - 0.4 \cdot 0.5) + 0.4 \cdot 0.5(1 - 0.2 \cdot 0.3) = 0.236$.

3.48. $0.3^2 = 0.09$. **3.49.** 0.9^9. **3.50.** $1 - (1-p)^n$.

3.51. а) $1 - (1-p)^{mn}$; б) $\left(1 - (1-p)^n\right)^m$. **3.52.** а) $p\alpha + (1-p)\beta$; б) $p(1-\alpha)$. **3.53.** Черными.

4.1. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{20} = \frac{5}{8}$. **4.2.** $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{16}{25}$.

4.3. $\frac{C_6^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{6 \cdot 4}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_9^2} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{17}{42}$.

4.4. $\frac{1}{2} \cdot 0.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 = 0.35$. **4.5.** $0.9 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.86$.

4.6. $0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.22$. **4.7.** $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{11} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{27}{55}$.

4.8. $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$. **4.9.** $\frac{c+d}{c+d+2} \cdot \frac{c}{c+d} + \frac{2}{c+d+2} \cdot \frac{a}{a+b}$.

4.10. а) $\frac{a}{a+b+c} \cdot 1 + \frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b+c} \cdot 0$; б) $\frac{a+b}{a+b+c} \cdot 1 + \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{1}{3}$; в) $\frac{a+b}{a+b+c} \cdot 1 + \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{2}{3}$.

4.11. $\alpha\bigl(1 - (1-p_1)^2\bigr) + (1-\alpha)\bigl(1 - (1-p_2)^2\bigr)$.

4.12. а) $2p(1-p)\alpha + p^2$; б) $\frac{2p(1-p)\alpha}{2p(1-p)\alpha + p^2}$.

4.13. а) $p\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2\right) + (1-p)\left(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right)$;

б) $p\left(\frac{1}{2}(1-p_1) + \frac{1}{2}(1-p_2)\right)$; в) $\frac{p\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2\right)}{p\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2\right) + (1-p)\left(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right)}$.

4.14. $0.85 \cdot 1 + 0.15(0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.9) = 0.9805$.

4.15. $\frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta$. **4.16.** $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \cdot 1$.

4.17. $\frac{C_9^3}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_6^3}{C_{15}^3} + \frac{C_9^2 \cdot 6}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_7^3}{C_{15}^3} + \frac{9 \cdot C_6^2}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_8^3}{C_{15}^3} + \frac{C_6^3}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_9^3}{C_{15}^3}$.

4.18. $P(k$ бракованных $|$ взято бракованное$) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{k}{5}}{\sum\limits_{i=0}^{5} \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{5}} = \frac{k}{15}$.

Так как $0 \leqslant k \leqslant 5$, то эта вероятность наибольшая при $k = 5$.

4.19. $\frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)}$. **4.20.** $\frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{2}{3}$.

4.21. $\frac{8}{35} \cdot 1 + \frac{24}{35} \cdot \frac{1 \cdot C_{33}^4}{C_{34}^5} + \frac{3}{35} \cdot 0 = \frac{196}{595}$. **4.22.** $4 \cdot \frac{C_4^3 \cdot C_{28}^4 + C_{28}^3}{C_{32}^7} = \frac{91}{899}$.

4.23. $\frac{3}{9} \cdot \frac{C_{33}^4}{C_{35}^6} + \frac{6}{9} \cdot \frac{C_{32}^3 + C_3^2 C_{32}^4}{C_{35}^6} = \frac{215}{3927}$.

4.24. $\frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{1}{9} \cdot \frac{C_{33}^4}{C_6^{35}} + \frac{6}{9} \cdot \frac{C_{32}^4}{C_{35}^6} = \frac{23}{1309}$.

4.25. $\frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{3}{9} \cdot \frac{C_{34}^5}{C_{35}^6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{C_{34}^5 - C_{31}^2}{C_{35}^6}$.

5.1. $\frac{\pi}{4}$. **5.2.** $\frac{2}{\pi}$. **5.3.** $\frac{1}{2}$. **5.5.** а, б) $\frac{1}{3}$. **5.6.** $\frac{3}{4}$. **5.7.** $\frac{2}{7}$. **5.8.** 0.

5.9. $\frac{1}{25}$. **5.10.** $\frac{1}{12}$. **5.11.** $\frac{1}{3}$. **5.12.** $\frac{1}{3}$. **5.13.** $\frac{1}{2}$. **5.14.** $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

5.15. $\frac{11}{36}$. **5.16.** $\frac{1}{4}$. **5.17.** $\frac{3}{5}$.
5.18. $\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

6.1.

	m	По формуле Бернулли	По теореме Муавра—Лапласа
а)	3	$C_{20}^{3}/2^{20}\approx 0.00109$	$\approx\varphi(7/\sqrt{5})/\sqrt{5}\approx 0.00133$
б)	7	$C_{20}^{3}/2^{20}\approx 0.0739$	$\approx\varphi(3/\sqrt{5})/\sqrt{5}\approx 0.0725$
в)	10	$C_{20}^{10}/2^{20}\approx 0.176$	$\approx 1/\sqrt{10\pi}\approx 0.178$
г)	15	$C_{20}^{15}/2^{20}\approx 0.0148$	$\approx\varphi(\sqrt{5})/\sqrt{5}\approx 0.0146$

6.2. а) по формуле Бернулли $C_{80}^{25}\cdot 3^{55}/4^{80}\approx 0.0434$; по теореме Муавра—Лапласа $\approx\varphi(\sqrt{5/3})/\sqrt{15}\approx 0.0448$;
б) $\approx\Phi(6/\sqrt{15})-\Phi(-5/\sqrt{15})\approx 0.841$.
6.3. а) $\approx\varphi(40/3)/12\approx 10^{-40}$; б) $\approx 1/(12\sqrt{2\pi})\approx 0.0332$;
в) $\approx\Phi(41/12)-\Phi(-55/6)\approx 0.9997$.

6.4.

	m_0	$P_n(m_0)$ по формуле Бернулли	$P_n(m_0)$ по теореме Муавра—Лапласа
а)	6	$C_{30}^{6}\cdot 4^{24}/5^{30}\approx 0.179$	$\approx\sqrt{5/(3\pi)}/4\approx 0.182$
б)	5	$C_{30}^{5}\cdot 5^{25}/6^{30}\approx 0.192$	$\approx\sqrt{3/\pi}/5\approx 0.195$
в)	5	$C_{35}^{5}\cdot 5^{30}/6^{35}\approx 0.176$	$\approx 6\varphi(1/\sqrt{7})/(5\sqrt{7})\approx 0.168$
	6	$C_{35}^{6}\cdot 5^{29}/6^{35}\approx 0.176$	$\approx 6\varphi(1/(5\sqrt{7}))/(5\sqrt{7})\approx$ ≈ 0.180

6.5. $\geqslant 150$. **6.6.** ≈ 0.0798. **6.7.** ≈ 0.2326. **6.8.** ≈ 0.0255.
6.9. ≈ 0.5953. **6.10.** а) $2\Phi\left(\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)-1$; б) ≈ 0.9772; в) ≈ 0.7365;
г) ≈ 0.5793. **6.11.** $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{5\sqrt{5}}\right)=0.975\Leftrightarrow\varepsilon\approx 22$.
6.12. $\Phi\left(\frac{\varepsilon-630}{3\sqrt{211}}\right)=0.99\Leftrightarrow\varepsilon\approx 662$.
6.13. $\Phi\left(\frac{\varepsilon-280}{2\sqrt{42}}\right)=0.02\Leftrightarrow\varepsilon\approx 253$.
6.14. $C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$. **6.15.** $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. **6.16.** $\frac{7}{32}$.
6.17. ≈ 0.6228. **6.18.** $\frac{64}{81}$. **6.19.** $\frac{1269}{1000000}$. **6.20.** от 32949 до 33718.

7.1. $\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot C_2^2\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{3}{8}$. **7.2.** $\frac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot C_5^5\cdot\frac{1}{5^5}=\frac{24}{625}$.
7.3. $\frac{5!}{5!}A_2^1\frac{1}{2^5}=\frac{1}{16}$. **7.4.** $\frac{2\cdot C_4^2}{3^4}=\frac{4}{27}$. **7.5.** а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. **7.6.** а) $\frac{A_6^6}{6^6} = \frac{5}{648}$; б) $\frac{6 \cdot 5 \cdot A_6^4}{6^6} = \frac{25}{108}$.
7.7. $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{243}$. **7.8.** $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot 3C_2^2 \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{10}{27}$.
7.9. $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot 4C_3^2 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{45}{128}$. **7.10.** $\frac{4! \cdot A_7^4}{2! \cdot 1! \cdot 7^3} = \frac{18}{49}$.
7.11. а) $\frac{4! \cdot C_7^4}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 7^4} = \frac{120}{343}$; б) $\frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 7^4} = \frac{24}{2401}$;
в) $\frac{4!}{2! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 7^4} = \frac{6}{2401}$.

Литература

1. *Агапов Г. И.* Задачник по теории вероятностей. — М.: Высшая школа, 1994.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
4. *Емельянов Г. В., Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967.
5. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
6. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.
7. *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1985.
8. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функции/ Под ред. А. А. Свешникова — М.: Наука, 1970.
9. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984.

Содержание

Учебное издание

$\boxed{\text{Салтыкова Наталья Михайловна}}$
Сахаров Вадим Юрьевич

Сборник задач по элементарной теории вероятностей

Учебное пособие

Зав. редакцией *Г. И. Чередниченко*
Редактор *Ф. С. Бастиан*
Технический редактор *Л. И. Иванова*
Обложка *А. В. Калининой*
Компьютерная верстка *В. Ю. Сахарова*

Подписано в печать с оригинала-макета 10.02.2006.
Ф-т 60×84/16. Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,42. Тираж 410 экз.
Заказ №229.

РОПИ С.-Петербургского государственного университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

Предназначено для учебного процесса. Не подлежит продаже.