САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. К. Пономаренко, В. Ю. Сахаров,
П. К. Черняев

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 517.9:(0.75.8)
ББК 22.16
П56

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю. Н. Бибиков* (С.-Петерб. гос. ун-т), д-р техн. наук, проф. *А. П. Господариков* (С.-Петерб. горный ун-т)

Пономаренко А. К., Сахаров В. Ю., Черняев П. К.

П56 Индивидуальные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / С.-Петерб. гос. ун-т. — СПб., 2016. — 48 с.

Учебное пособие представляет собой сборник задач, предназначенных для первоначального ознакомления с обыкновенными дифференциальными уравнениями и освоением техники составления и решения простейших уравнений. Все задания составлены с расчётом на групповые занятия.

Предназначено для студентов 1–2 курсов и преподавателей университета, может быть полезно преподавателям соответствующих дисциплин.

УДК 517.9:(0.75.8)
ББК 22.16

Задание №1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с отделяющимися переменными.

1.1. $y^2dx - 2xy\,dy = 4y\,dy - dx.$

1.2. $\sqrt{9-y^2}dx - 4\,dy = x^2dy.$

1.3. $y\,dy + \sqrt{y^2+4}\,dx = 2x^2y\,dy.$

1.4. $y^2dx - x\,dy = 2\,dy - 4\,dx.$

1.5. $x^2dy = 2x\sqrt{y^2+4}\,dx - dy.$

1.6. $\sqrt{9-y^2}\,dx - 2\,dy = x\,dy.$

1.7. $2xy^2dx - dy = x^2dy - 8x\,dx.$

1.8. $dy = \sqrt{y^2+4}\,dx - x\,dy.$

1.9. $2x\sqrt{4-y^2}\,dx - dy = x^2dy.$

1.10. $x^2dy = \sqrt{y^2+1}\,dx - 4\,dy.$

1.11. $y^2dx - 2y\,dy = 2xy\,dy - 4\,dx.$

1.12. $9\,dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x^2dy.$

1.13. $2x^2y\,dy = \sqrt{y^2+1}\,dx + 8y\,dy.$

1.14. $9\,dx - x\,dy = dy - y^2dx.$

1.15. $2x\sqrt{y^2+1}\,dx - x^2dy = 4\,dy.$

1.16. $dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x\,dy.$

1.17. $18x\,dx - x^2dy = 4\,dy - 2xy^2dx.$

1.18. $\sqrt{y^2+1}\,dx - 2\,dy = x\,dy.$

1.19. $4\,dy = 2x\sqrt{9-y^2}\,dx - x^2dy.$

1.20. $\sqrt{y^2+4}\,dx - 9\,dy = x^2dy.$

1.21. $dy - 2xy\,dx = 4x\,dx - x^2dy.$

1.22. $4\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y^2dx.$

1.23. $2xy^2dx = \sqrt{x^2+4}\,dy + x\,dx.$

1.24. $4\,dy - y\,dx = 2\,dx - x^2dy.$

1.25. $dx = 2y\sqrt{x^2+4}\,dy - y^2dx.$

1.26. $2\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y\,dx.$

1.27. $8y\,dy - dx = y^2dx - 2x^2y\,dy.$

1.28. $\sqrt{x^2+4}\,dy - dx = y\,dx.$

1.29. $dx = 2y\sqrt{4-x^2}\,dy - y^2dx.$

1.30. $-y^2dx + \sqrt{x^2+1}\,dy = 4\,dx.$

Задание №2

Найти общий интеграл дифференциального однородного уравнения.

2.1. $(2x - y)dy = (4x + 2y)dx.$

2.2. $\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) dx = 2x(x + y)dy.$

2.3. $\left(6y^3 + 2x^2 y\right) dx = \left(5xy^2 + x^3\right) dy.$

2.4. $2xy' = 2y + x \operatorname{tg} \dfrac{2y}{x}.$

2.5. $(x + 3y)dx = (3x - y)dy.$

2.6. $\left(4x^2 + 4xy + 3y^2\right) dx = \left(4x^2 + 2xy\right) dy.$

2.7. $\left(6y^3 + 4x^2 y\right) dx = \left(5xy^2 + 2x^3\right) dy.$

2.8. $xy' = y + (2x + y)\big(\ln(2x + y) - \ln x\big).$

2.9. $(6x - y)dy = (9x + 6y)dx.$

2.10. $\left(2x^2 + 4xy\right) dy = \left(x^2 + 2xy + 5y^2\right) dx.$

2.11. $6y\left(x^2 + y^2\right) dx = \left(5xy^2 + 3x^3\right) dy.$

2.12. $xy' = \sqrt{9x^2 - y^2} + y.$

2.13. $(5x - y)dy = (x + 5y)dx.$

2.14. $\left(4x^2 + 6xy + 3y^2\right) dx = \left(6x^2 + 2xy\right) dy.$

2.15. $2x^2 y' = y^2 + 5xy + 2x^2.$

2.16. $(4x + 4y)dx = (4x - y)dy.$

2.17. $\left(3x^2 + 2xy\right) dy = \left(x^2 + 3xy + 3y^2\right) dx.$

2.18. $x\left(3y^2 + x^2\right) dy = \left(4y^3 + 2x^2 y\right) dx.$

2.19. $3xy' = 3y + x \operatorname{tg} \dfrac{3y}{x}.$

2.20. $(6x - y)dy = (x + 6y)dx.$

2.21. $\left(4x^2 + 4xy + 5y^2\right) dx = 4x(x + y)dy.$

2.22. $x\left(3y^2 + 2x^2\right) dy = 4y\left(y^2 + x^2\right) dx.$

2.23. $xy' = y + (x + 2y)\big(\ln(x + 2y) - \ln x\big).$

2.24. $(9x + 3y)dx = (3x - y)dy.$

2.25. $\left(3x^2 + 4xy\right) dy = \left(x^2 + 3xy + 5y^2\right) dx.$

2.26. $3x\left(y^2 + x^2\right) dy = \left(4y^3 + 6x^2 y\right) dx.$

2.27. $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y.$

2.28. $(4x - y)dy = (x + 4y)dx.$

2.29. $\left(4x^2 + 6xy + 5y^2\right) dx = \left(6x^2 + 4xy\right) dy.$

2.30. $4x^2 y' = y^2 + 9xy + 6x^2.$

Задание №3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.
Указание: сделать замену неизвестной функции $y(x) = xz(x)$.

3.1. $\left(x^2+4\right)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2+x^2}dx$.
3.2. $(1+x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2+4x^2}\,dx$.
3.3. $\left(9+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)x\sqrt{4x^2-y^2}\,dx$.
3.4. $x(2x+y)dx = \sqrt{9-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.5. $x\sqrt{9x^2-y^2}\,dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.6. $x\sqrt{y^2+4x^2}\,dx = \left(x^2+9\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.7. $(1+x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{4x^2-y^2}\,dx$.
3.8. $2x^2\left(4x^2-y^2\right)dx = \left(x^2+1\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.9. $2x^2\sqrt{y^2+x^2}\,dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.10. $\left(9x^2+y^2\right)dx = (x+1)(x\,dy - y\,dx)$.
3.11. $\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{9x^2-y^2}$.
3.12. $2x\left(y^2+4x^2\right)dx = \left(x^2+1\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.13. $x^2\sqrt{y^2+4x^2}\,dx = y\left(2x^2-1\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.14. $\left(4x^2+y^2\right)dx = \sqrt{9-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.15. $x\left(y^2+4x^2\right)dx = 2y(x+1)(x\,dy - y\,dx)$.
3.16. $\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = x(2x+y)dx$.
3.17. $\left(1+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2(2x+y)dx$.
3.18. $2y\left(x^2-4\right)(x\,dy - y\,dx)x^2\sqrt{y^2+x^2}dx$.
3.19. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx)$.
3.20. $\sqrt{x^2+1}(x\,dy - y\,dx) = \left(4x^2+y^2\right)dx$.
3.21. $2x\left(x^2+y^2\right)dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.22. $\left(1+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{y^2+4x^2}\,dx$.
3.23. $x\sqrt{y^2+x^2}\,dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.24. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y\sqrt{4-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.25. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y(x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.26. $2y\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = x\left(x^2+y^2\right)dx$.
3.27. $x\sqrt{9x^2-y^2}\,dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.28. $\left(y^2+4x^2\right)dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.29. $\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx) = x(x+y)dx$.
3.30. $x\left(2y^2-x^2\right)dx = \sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx)$.

Задание №4

Для линейного дифферeренциального уравнения найти решение задачи с начальным условием.

4.1. $y' - \dfrac{1}{x}y = xe^x, \quad y(1) = e.$

4.2. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.3. $y' - \dfrac{4}{x}y = x^4 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}.$

4.4. $y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.5. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2} \arcsin \frac{x}{3}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}}, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

4.6. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2xe^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

4.7. $y' - 3 \operatorname{tg} x \cdot y = 3 \operatorname{tg}^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.8. $y' - \dfrac{3}{x}y = x^3 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$

4.9. $y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = \dfrac{2 \ln^2 x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.10. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{16 - x^2} \arcsin \frac{x}{4}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{16 - x^2}}, \quad y(2) = \frac{\pi}{3}.$

4.11. $y' - \dfrac{1}{x}y = 3xe^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.12. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 2 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.13. $y' - \dfrac{1}{x}y = x, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = \dfrac{3}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.15. $y' - \dfrac{1}{2\,(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}y = \dfrac{1}{2\,(1 + x^2)}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$

4.16. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2 e^x, \quad y(1) = e.$

4.17. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 3 \sin^3 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.18. $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

4.19. $y' - \dfrac{1}{x \ln x}y = \dfrac{4 \ln^4 x}{x}, \quad y(e) = 0.$

4.20. $y' - \dfrac{1}{(4 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}y = \dfrac{1}{4 + x^2}, \quad y(2) = \frac{\pi}{4}.$

4.21. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2x^2 e^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

4.22. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = 2\operatorname{tg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.23. $y' - \dfrac{1}{x}y = x\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$

4.24. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$

4.25. $y' - \dfrac{3}{2\,(9+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}y = \dfrac{3}{2\,(9+x^2)}\,, \quad y(3) = \frac{\pi}{4}\,.$

4.26. $y' - \dfrac{1}{x}y = 3x^2e^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.27. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 4\sin^4 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.28. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2x^2, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\,, \quad y(1) = \frac{\pi}{3}\,.$

4.30. $y' - \dfrac{2}{(16+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{4}}y = \dfrac{2}{16+x^2}\,, \quad y(4) = \frac{\pi}{4}\,.$

Задание №5

Найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли.

5.1. $y' - y\operatorname{tg} x = y^{-2}\operatorname{tg}^2 x.$

5.2. $xy' - y = x^3e^{2x}y^{-1}.$

5.3. $y'\operatorname{tg} x - y = y^{-1}\sin^4 x.$

5.4. $xy' - 4y = x^{-3}y\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

5.5. $y'x\ln x - y = y^{-1}\ln^4 x.$

5.6. $y' - 2y\operatorname{tg} x = 2y^{-2}\operatorname{tg}^5 x.$

5.7. $xy' - y = 2x^3e^{4x}y^{-1}.$

5.8. $y' - 3y\operatorname{tg} x = 3y^3\operatorname{ctg}^7 x.$

5.9. $xy' - 3y = x^{-2}y^2\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

5.10. $y'x\ln x - y = 2y^{-1}\ln^6 x.$

5.11. $y' - 3y\operatorname{tg} x = 3y^{-2}\operatorname{tg}^8 x.$

5.12. $xy' - y = 3x^3e^{6x}y^{-1}.$

5.13. $y'\operatorname{tg} x - y = 2y^{-1}\sin^6 x.$

5.14. $xy' - y = x^6y^{-2}.$

5.15. $y'x\ln x - y = 3y^{-1}\ln^8 x.$

5.16. $y' - 5y\operatorname{tg} x = 5y^3\operatorname{ctg}^{11} x.$

5.17. $xy' - y = x^5e^{2x}y^{-1}.$

5.18. $y'\operatorname{tg} x - y = 3y^{-1}\sin^8 x.$

5.19. $xy' - 2y = x^{-1}y^2\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

5.20. $y'x\ln x - y = 4y^{-1}\ln^{10} x.$

5.21. $y' - 4y \operatorname{tg} x = 4y^2 \operatorname{ctg}^5 x$.
5.22. $xy' - y = 2x^5 e^{4x} y^{-1}$.
5.23. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^3 \operatorname{ctg}^5 x$.
5.24. $xy' - y = y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.
5.25. $y' x \ln x - y = 5y^2 \ln^{-6} x$.
5.26. $y' - y \operatorname{tg} x = y^3 \operatorname{ctg}^3 x$.
5.27. $xy' - y = 3x^5 e^{6x} y^{-1}$.
5.28. $y' \operatorname{tg} x - y = 4y^{-1} \sin^{10} x$.
5.29. $xy' - y = 2x^9 y^{-2}$.
5.30. $y' x \ln x - y = 6y^2 \ln^{-7} x$.

Задание №6

Найти общий интеграл дифференциального уравнения полного дифференциала.

6.1. $\left(3x^2 + 2xy^6\right) dx + \left(3y^2 + 6x^2y^5\right) dy = 0$.
6.2. $\left(3x^2 + y^2 + 3x^2y^5\right) dx + \left(2xy + 5x^3y^4\right) dy = 0$.
6.3. $\left(2xy + y^2 + 4x^3y^4\right) dx + \left(x^2 + 2xy + 4x^4y^3\right) dy = 0$.
6.4. $\left(y^2 + 5x^4y^3\right) dx + \left(2xy + 3y^2 + 3x^5y^2\right) dy = 0$.
6.5. $\left(2xy + 6x^5y^2\right) dx + \left(x^2 + 3y^2 + 2x^6y\right) dy = 0$.
6.6. $\left(3x^2 + y^2 + 2xy^6\right) dx + \left(2xy + 6x^2y^5\right) dy = 0$.
6.7. $\left(3x^2 + 2xy + 3x^2y^5\right) dx + \left(x^2 + 5x^3y^4\right) dy = 0$.
6.8. $\left(2xy + 4x^3y^4\right) dx + \left(x^2 + 3y^2 + 4x^4y^3\right) dy = 0$.
6.9. $\left(3x^2 + 5x^4y^3\right) dx + \left(3y^2 + 3x^5y^2\right) dy = 0$.
6.10. $\left(y^2 + 6x^5y^2\right) dx + \left(2xy + 3y^2 + 2x^6y\right) dy = 0$.
6.11. $\left(3x^2 + 2xy + 2xy^6\right) dx + \left(x^2 + 6x^2y^5\right) dy = 0$.
6.12. $\left(2xy + y^2 + 3x^2y^5\right) dx + \left(x^2 + 2xy + 5x^3y^4\right) dy = 0$.
6.13. $\left(y^2 + 4x^3y^4\right) dx + \left(2xy + 3y^2 + 4x^4y^3\right) dy = 0$.
6.14. $\left(3x^2 + y^2 + 5x^4y^3\right) dx + \left(2xy + 3x^5y^2\right) dy = 0$.
6.15. $\left(3x^2 + 2xy + 6x^5y^2\right) dx + \left(x^2 + 2x^6y\right) dy = 0$.
6.16. $\left(2xy + y^2 + 2xy^6\right) dx + \left(x^2 + 2xy + 6x^2y^5\right) dy = 0$.
6.17. $\left(2xy + 3x^2y^5\right) dx + \left(x^2 + 3y^2 + 5x^3y^4\right) dy = 0$.
6.18. $\left(3x^2 + 4x^3y^4\right) dx + \left(3y^2 + 4x^4y^3\right) dy = 0$.
6.19. $\left(3x^2 + 2xy + 5x^4y^3\right) dx + \left(x^2 + 3x^5y^2\right) dy = 0$.
6.20. $\left(2xy + y^2 + 6x^5y^2\right) dx + \left(x^2 + 2xy + 2x^6y\right) dy = 0$.
6.21. $2\left(xy + xy^6\right) dx + \left(x^2 + 3y^2 + 6x^2y^5\right) dy = 0$.
6.22. $\left(y^2 + 3x^2y^5\right) dx + \left(2xy + 3y^2 + 5x^3y^4\right) dy = 0$.

6.23. $\left(3x^2+y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(2xy+4x^4y^3\right)dy=0.$
6.24. $\left(2xy+y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+2xy+3x^5y^2\right)dy=0.$
6.25. $\left(3x^2+6x^5y^2\right)dx+\left(3y^2+2x^6y\right)dy=0.$
6.26. $\left(y^2+2xy^6\right)dx+\left(2xy+3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$
6.27. $3x^2\left(1+y^5\right)dx+y^2\left(3+5x^3y^2\right)dy=0.$
6.28. $\left(3x^2+2xy+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+4x^4y^3\right)dy=0.$
6.29. $\left(2xy+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$
6.30. $\left(3x^2+y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(2xy+2x^6y\right)dy=0.$

Задание №7

Найти общий интеграл дифференциального уравнения полного дифференциала.

7.1. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$

7.2. $\left(\operatorname{tg} y+\cos(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.3. $\dfrac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.4. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.5. $\left(y\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\sin x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.6. $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0.$

7.7. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)}-\dfrac{2x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$

7.8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}+\dfrac{2}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}-\dfrac{2}{y}\right)dy=0.$

7.9. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.10. $\left(\ln\left(1+y^2\right)-\sin(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

7.11. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

7.12. $\left(3x^2\operatorname{tg} y+\cos(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.13. $\dfrac{(2x-3y)dx+(3x+2y)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.14. $\left(4x^3+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.15. $\left(3y\sin^2 x\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.16. $\left(3x^2\sin y+y\sin x\right)dx+\left(x^3\cos y-\cos x\right)dy=0.$

7.17. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)}-\dfrac{6x^5}{y}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)}+\dfrac{2x^6}{y^2}\right)dy=0.$

7.18. $\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^4\right)^{5/6}}+\dfrac{6}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2y^3}{\left(x^2+y^4\right)^{5/6}}-\dfrac{2}{y}\right)dy=0.$

7.19. $\left(-\dfrac{3y}{x^2}\cos\dfrac{3y}{x}+\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{3}{x}\cos\dfrac{3y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.20. $\left(\ln\left(1+y^6\right)-\sin(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{6xy^5}{1+y^6}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

7.21. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y^2}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2x}{y^3}\right)dy=0.$

7.22. $\left(\operatorname{tg} y+2\cos(2x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 y}+\cos(2x+y)\right)dy=0.$

7.23. $\dfrac{(4x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.24. $\left(2x+ye^{x/y}\right)dx+e^{x/y}(2y-x)dy=0.$

7.25. $\left(y^2\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(2y\sin x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.26. $\left(\sin y+y^2\sin x\right)dx+(x\cos y-2y\cos x)dy=0.$

7.27. $\left(\dfrac{y^2}{\cos^2\left(xy^2\right)}-\dfrac{2x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{2xy}{\cos^2\left(xy^2\right)}+\dfrac{2x^2}{y^2}\right)dy=0.$

7.28. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^6}}+\dfrac{2}{x}\right)dx+\left(\dfrac{3y^5}{\sqrt{x^2+y^6}}-\dfrac{4}{y}\right)dy=0.$

7.29. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{2}{y}\sin\dfrac{2x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{2x}{y^2}\sin\dfrac{2x}{y}\right)dy=0.$

7.30. $\left(\ln\left(1+y^2\right)-2\sin(2x+y)\right)dx+\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}-\sin(2x+y)\right)dy=0.$

Задание №8

Проинтегрировать дифференциальное уравнение Клеро.

8.1. $y = xy' - e^{y'} + y'$.
8.2. $3y = 3xy' - (y')^3 + 3y'$.
8.3. $y = xy' - \ln y' + 2y'$.
8.4. $2y = 2xy' - (y')^2 + 6y'$.
8.5. $y = xy' - e^{3y'} + 2y'$.
8.6. $y = xy' - e^{2y'} + y'$.
8.7. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'$.
8.8. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'$.
8.9. $y = xy' - (y')^2 + 3y'$.
8.10. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'$.
8.11. $y = xy' - e^{y'} + 2y'$.
8.12. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'$.
8.13. $y = xy' - \ln y' + y'$.
8.14. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'$.
8.15. $y = xy' - e^{3y'} + y'$.
8.16. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'$.
8.17. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y'$.
8.18. $y = xy' - 2\ln y' + y'$.
8.19. $y = xy' - (y')^2 + 2y'$.
8.20. $y = xy' - e^{4y'} + y'$.
8.21. $y = xy' - e^{y'} + 3y'$.
8.22. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'$.
8.23. $y = xy' - \ln y' + 3y'$.
8.24. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'$.
8.25. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'$.
8.26. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'$.
8.27. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'$.
8.28. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'$.
8.29. $y = xy' - (y')^2 + y'$.
8.30. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'$.

Задание №9

Проинтегрировать дифференциальное уравнение Лагранжа.

9.1. $y = x(y')^2 + (y')^3 + 3(y')^2$.
9.2. $y = 2xy' + (y')^4$.

9.3. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{3}{y'}\,.$

9.4. $y = 3xy' + (y')^5.$

9.5. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 2\,(y')^3 + 3\,(y')^2.$

9.6. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2}.$

9.7. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 2\,(y')^{3/2}.$

9.8. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{5/2}.$

9.9. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{4}{y'}\,.$

9.10. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{3/2}.$

9.11. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{2}{y'}\,.$

9.12. $y = 3xy' + (y')^4 + (y')^2.$

9.13. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 4\,(y')^3 + 6\,(y')^2.$

9.14. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2} + (y')^{3/2}.$

9.15. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y')^{3/2}.$

9.16. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{3/2}.$

9.17. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{5}{y'}\,.$

9.18. $y = \dfrac{4x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 4}.$

9.19. $y = x\,(y')^2 + (y')^3 + 2\,(y')^2.$

9.20. $y = 2xy' + (y')^5 + (y')^3.$

9.21. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 6\,(y')^3 + 9\,(y')^2.$

9.22. $2y = xy' + 4\,(y')^{5/2} + 2\,(y')^{3/2}.$

9.23. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y' - 1)^{3/2}.$

9.24. $y = \dfrac{x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 1}.$

9.25. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{6}{y'}\,.$

9.26. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{5/2}.$

9.27. $y = x\,(y')^2 + 2\,(y')^3 + (y')^2.$

9.28. $y = 2xy' + 2\,(y')^4 + 3\,(y')^2$.

9.29. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{1}{y'}$.

9.30. $y = 3xy' + 5\,(y')^3 + 2\,(y')^2$.

Задание №10

Найти общее решение дифференциального уравнения, не содержащего y и y', используя замену $y'' = z(x)$.

10.1. $xy''' = y'' + 2$.
10.2. $x^3y''' + 3x^2y'' = 2\cos\ln x$.
10.3. $\left(x^2 - x\right)y''' = (2-x)y''$.
10.4. $xy''' - 2y'' = 4$.
10.5. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y''$.
10.6. $\operatorname{tg} x \cdot y''' + 2y'' = 0$.
10.7. $y''' = \dfrac{3}{x}\cdot y'' + 12x$.
10.8. $y''' + 3\,(y'')^2\sqrt{1-2x} = 0$.
10.9. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 6y''$.
10.10. $x^3y''' + 3x^2y'' = 8\sin\ln x$.
10.11. $xy''' - y'' = 12x^2$.
10.12. $y''' = 6\,(y'')^2\sqrt{x+1}$.
10.13. $\left(2x^2 - x\right)y''' = 2(1-x)y''$.
10.14. $y''' - \dfrac{2}{x}y'' = 6$.
10.15. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = y''$.
10.16. $y''' = (y'')^2\sqrt{6x+5}$.
10.17. $xy''' - 3y'' = 12x$.
10.18. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 3y''$.
10.19. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$.
10.20. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$.
10.21. $y''' = \dfrac{y''}{x} + 40x^2$.
10.22. $y''' = 3\,(y'')^2\sqrt{2x+7}$.
10.23. $\left(x^2 - 2x\right)y''' = (4-x)y''$.
10.24. $xy''' = 2y'' + 20x^3$.
10.25. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$.
10.26. $y''' = 2\,(y'')^2\sqrt{3x+4}$.
10.27. $xy''' - 6 = 3y''$.
10.28. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6\sin\ln x$.

10.29. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$.
10.30. $y''' + (y'')^2 \sqrt{1-x} = 0$.

Задание №11

Для диффереренциального уравнения, не содержащего независимой переменной, используя замену $y' = z(x)$, найти решение задачи с начальными условиями.

11.1. $y'' = 8(1+3y)(1+y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$
11.2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
11.3. $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
11.4. $2yy'' \ln y = y'^2(1 + 2\ln y), \quad y(0) = e, \quad y'(0) = e.$
11.5. $y'' = 16y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1.$
11.6. $y^2 y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
11.7. $4y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$
11.8. $y^6 y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{32}.$
11.9. $y'' = 2\left(1 + 4y + 3y^2\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
11.10. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 2.$
11.11. $y'' = \dfrac{4\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$
11.12. $3yy'' \ln y = y'^2(2 + 3\ln y), \quad y(0) = e, \quad y'(0) = e.$
11.13. $y'' = 81y(2y-1)(4y-1), \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 1.$
11.14. $y^3 y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
11.15. $y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = 1.$
11.16. $y^8 y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{128}.$
11.17. $y'' = 8\left(1 + 4y + 3y^2\right), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 16\sqrt{3}.$
11.18. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$
11.19. $y'' = \dfrac{9\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$
11.20. $2yy'' \ln y = y'^2(1 + 2\ln y), \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e.$
11.21. $y'' = 256y(3y-1)(6y-1), \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = 1.$
11.22. $y^4 y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
11.23. $y'' = 4\sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = 2.$
11.24. $y^7 y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{64}.$
11.25. $y'' = 2(1+y)(1+3y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$
11.26. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 1.$

11.27. $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}\,, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{6}\,, \quad y'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,.$
11.28. $3yy'' \ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e.$
11.29. $y'' = 64y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2}\,, \quad y'(0) = 2.$
11.30. $y^5 y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Задание №12

Найти общее решение дифференциального уравнения однородного относительно неизвестной функции и ее производных, используя замену $\frac{y'}{y} = z(x)$.

12.1. $xyy'' - 2x{y'}^2 = 3yy'.$
12.2. $x^2{y'}^2 + y^2 = x^2yy'' + 2xyy'.$
12.3. $e^{2x}\,(2yy' + yy'') = 8\sin 2x \cdot y^2 + e^{2x}{y'}^2.$
12.4. $xyy'' + 3x{y'}^2 = 4yy'.$
12.5. $3xyy' + x^2yy'' = 2y^2 + x^2{y'}^2.$
12.6. $5x{y'}^2 = 7yy' - xyy''.$
12.7. $x^2{y'}^2 = x^2yy'' - xyy' + 2y^2.$
12.8. $e^x yy'' - 30\cos 3x \cdot y^2 = e^x({y'}^2 - yy').$
12.9. $2yy' + xyy'' = 4x{y'}^2.$
12.10. $x^2yy'' + 3y^2 = x^2{y'}^2 + 2xyy'.$
12.11. $xyy'' = 2x{y'}^2 + 2yy'.$
12.12. $x^2{y'}^2 - 2xyy' = x^2yy'' - 3y^2.$
12.13. $e^{2x}(2yy' - {y'}^2) = 145\sin 5x \cdot y^2 - e^{2x}yy''.$
12.14. $3x{y'}^2 = 5yy' - xyy''.$
12.15. $x^2yy'' = x^2{y'}^2 - 3xyy' + 4y^2.$
12.16. $xyy'' + 5x{y'}^2 = 8yy'.$
12.17. $x^2yy'' + 4y^2 = xyy' + x^2{y'}^2.$
12.18. $e^x yy' - 10\cos 2x \cdot y^2 = e^x({y'}^2 - yy'').$
12.19. $xyy'' - 4x{y'}^2 = -3yy'.$
12.20. $x^2{y'}^2 - 6y^2 = x^2yy'' - 2xyy'.$
12.21. $2x{y'}^2 = yy' + xyy''.$
12.22. $2xyy' + x^2yy'' = 5y^2 + x^2{y'}^2.$
12.23. $e^{2x}(yy'' - {y'}^2) = 39\sin 3x \cdot y^2 - 2e^{2x}yy'.$
12.24. $xyy'' = 6yy' - 3x{y'}^2.$
12.25. $x^2{y'}^2 + 6y^2 = 3xyy' + x^2yy''.$
12.26. $9yy' = 5x{y'}^2 + xyy''.$

12.27. $x^2yy'' - xyy' = x^2{y'}^2 - 8y^2$.
12.28. $130\cos 5x \cdot y^2 + e^x{y'}^2 = e^x\left(yy'' + yy'\right)$.
12.29. $4x{y'}^2 = 4yy' + xyy''$.
12.30. $2xyy' + x^2{y'}^2 = 9y^2 + x^2yy''$.

Задание №13

Найти общее решение линейного однородного диффререренциального уравнения с постоянными коэффициентами.

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
13.3. $y'' + 4y = 0$.
13.4. $y'' - y' - 2y = 0$.
13.5. $y'' - 2y' = 0$.
13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0$.
13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
13.9. $y'' + 25y = 0$.
13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
13.11. $y'' + 3y' = 0$.
13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0$.
13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0$.
13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0$.
13.15. $y'' + 16y = 0$.
13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
13.17. $y'' - 3y' = 0$.
13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
13.21. $y'' + 9y = 0$.
13.22. $y'' + y' - 2y = 0$.
13.23. $y'' + 2y' = 0$.
13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
13.26. $y'' - 4y = 0$.
13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0$.
13.28. $y'' + 2y' + y = 0$.
13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0$.
13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0$.

Задание №14

Написать вид частного решения с неопределенными коэффициентами (не находя их числовых значений) для линейного неоднородного диффререренциального уравнения с постоянными коэффициентами.

14.1. $y'' - 5y' + 4y = xe^{4x} + \sin 4x + \cos x.$
14.2. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \sin x + e^{3x} + \cos x.$
14.3. $y'' + 25y = x^5 e^{5x} + \sin 5x + \cos 25x.$
14.4. $y'' + 3y' = x^3 e^{-3x} + x^3 + \sin 3x.$
14.5. $y'' - y' - 2y = x^2 e^{2x} + \sin x + \cos 2x.$
14.6. $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin 2x + \cos x.$
14.7. $y'' - 4y' = x^4 e^{4x} + x^4 + \sin 4x.$
14.8. $y'' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin 4x + \cos 16x.$
14.9. $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x} + \sin 4x + \cos x.$
14.10. $y'' + 9y = x^3 e^{3x} + \sin 9x + \cos 3x.$
14.11. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + e^x + \cos x.$
14.12. $y'' - 4y' + 3y = x^3 e^x + \sin x + \cos 3x.$
14.13. $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-3x} + \sin 3x + e^{3x}.$
14.14. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x + e^{-x} + \cos x.$
14.15. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} + \sin x + e^x.$
14.16. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x + e^x + \sin 2x.$
14.17. $y'' - 2y' - 3y = x^3 e^{3x} + \sin 3x + \cos x.$
14.18. $y'' - 5y' + 6y = x^3 e^{2x} + \sin 2x + \cos 3x.$
14.19. $y'' + 2y' = x^2 e^{-2x} + x^2 + \sin 2x.$
14.20. $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x} \cos x + e^{-3x} + \sin x.$
14.21. $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^{-x} + \sin x + \cos 3x.$
14.22. $y'' + 2y' - 3y = xe^x + \sin 3x + \cos x.$
14.23. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 2x + \cos x.$
14.24. $y'' - 2y' = x^2 e^{2x} + x^2 + \sin 2x.$
14.25. $y'' + 3y' - 4y = xe^x + \sin x + \cos 4x.$
14.26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x + e^{2x} + \sin x.$
14.27. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + \cos 2x + e^{2x}.$
14.28. $y'' - 3y' = x^3 e^{3x} + x^3 + \sin 3x.$
14.29. $y'' - 8y' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin x + \cos 4x.$
14.30. $y'' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 4x + \cos 2x.$

Задание №15

Найти общее решение линейного неоднородного диффереренциального уравнения с постоянными коэффициентами, используя метод неопределенных коэффициентов.

15.1. $y'' - 10y' + 26y = e^x(8\cos x + 24\sin x)$.
15.2. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60\cos x + 5\sin x)$.
15.3. $y'' - 8y' + 25y = e^x(45\cos x + 35\sin x)$.
15.4. $y'' + 6y' + 10y = e^x(72\cos x - 16\sin x)$.
15.5. $y'' - 6y' + 18y = e^x(56\cos x + 32\sin x)$.
15.6. $y'' + 4y' + 5y = e^x(60\cos x - 27\sin x)$.
15.7. $y'' - 4y' + 20y = e^x(110\cos x + 30\sin x)$.
15.8. $y'' + 2y' + 2y = e^x(36\cos x - 28\sin x)$.
15.9. $y'' + 10y' + 29y = e^x(363\cos x - 69\sin x)$.
15.10. $y'' - 10y' + 34y = e^x(232\cos x + 104\sin x)$.
15.11. $y'' + 8y' + 20y = e^x(318\cos x - 82\sin x)$.
15.12. $y'' - 8y' + 17y = e^x(102\cos x + 81\sin x)$.
15.13. $y'' + 6y' + 13y = e^x(255\cos x - 85\sin x)$.
15.14. $y'' - 6y' + 10y = e^x(52\cos x + 60\sin x)$.
15.15. $y'' + 4y' + 8y = e^x(186\cos x - 78\sin x)$.
15.16. $y'' - 4y' + 13y = e^x(142\cos x + 41\sin x)$.
15.17. $y'' + 2y' + 5y = e^x(123\cos x - 61\sin x)$.
15.18. $y'' + 10y' + 34y = e^x(804\cos x - 172\sin x)$.
15.19. $y'' - 10y' + 29y = e^x(353\cos x + 171\sin x)$.
15.20. $y'' + 8y' + 25y = e^x(670\cos x - 167\sin x)$.
15.21. $y'' - 8y' + 20y = e^x(246\cos x + 138\sin x)$.
15.22. $y'' + 6y' + 18y = e^x(536\cos x - 152\sin x)$.
15.23. $y'' - 6y' + 13y = e^x(157\cos x + 99\sin x)$.
15.24. $y'' + 4y' + 13y = e^x(414\cos x - 127\sin x)$.
15.25. $y'' - 4y' + 8y = e^x(98\cos x + 54\sin x)$.
15.26. $y'' + 2y' + 10y = e^x(316\cos x - 92\sin x)$.
15.27. $y'' + 10y' + 26y = e^x(984\cos x - 288\sin x)$.
15.28. $y'' - 4y' + 5y = e^x(26\cos x + 57\sin x)$.
15.29. $y'' + 4y' + 20y = e^x(702\cos x - 150\sin x)$.
15.30. $y'' - 6y' + 25y = e^x(566\cos x + 139\sin x)$.

Задание №16

Найти общее решение линейного неоднородного диффереренциального уравнения с постоянными коэффициентами, используя метод неопределенных коэффициентов.

16.1. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 16\sin 2x.$
16.2. $y'' + 9y = 12\cos 3x - 24\sin 3x.$
16.3. $y'' + 16y = 24\cos 4x - 32\sin 4x.$
16.4. $y'' + 25y = 40\cos 5x - 40\sin 5x.$
16.5. $y'' + 36y = 60\cos 6x - 48\sin 6x.$
16.6. $y'' + 49y = 84\cos 7x - 56\sin 7x.$
16.7. $y'' + 64y = 112\cos 8x - 64\sin 8x.$
16.8. $y'' + 81y = 144\cos 9x - 72\sin 9x.$
16.9. $y'' + 4y = 36\cos 2x - 16\sin 2x.$
16.10. $y'' + 9y = 60\cos 3x - 6\sin 3x.$
16.11. $y'' + 16y = 8\cos 4x - 8\sin 4x.$
16.12. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x.$
16.13. $y'' + 36y = 36\cos 6x - 12\sin 6x.$
16.14. $y'' + 49y = 56\cos 7x - 14\sin 7x.$
16.15. $y'' + 64y = 80\cos 8x - 16\sin 8x.$
16.16. $y'' + 81y = 108\cos 9x - 18\sin 9x.$
16.17. $y'' + 4y = 28\cos 2x - 4\sin 2x.$
16.18. $y'' + 9y = 48\cos 3x - 6\sin 3x.$
16.19. $y'' + 16y = 72\cos 4x - 8\sin 4x.$
16.20. $y'' + 25y = 100\cos 5x - 20\sin 5x.$
16.21. $y'' + 36y = 12\cos 6x - 24\sin 6x.$
16.22. $y'' + 49y = 28\cos 7x - 28\sin 7x.$
16.23. $y'' + 64y = 48\cos 8x - 32\sin 8x.$
16.24. $y'' + 81y = 72\cos 9x - 36\sin 9x.$
16.25. $y'' + 4y = 20\cos 2x - 8\sin 2x.$
16.26. $y'' + 9y = 36\cos 3x - 12\sin 3x.$
16.27. $y'' + 16y = 56\cos 4x - 16\sin 4x.$
16.28. $y'' + 25y = 80\cos 5x - 20\sin 5x.$
16.29. $y'' + 36y = 108\cos 6x - 24\sin 6x.$
16.30. $y'' + 49y = 140\cos 7x - 42\sin 7x.$

Задание №17

Найти общее решение линейного неоднородного диффререренциального уравнения с постоянными коэффициентами, используя метод изменения произвольных постоянных Лагранжа.

17.1. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\operatorname{cosec} x.$
17.2. $y'' + 100y = 10\operatorname{tg} 5x.$
17.3. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}.$
17.4. $y'' + 9y = 6\operatorname{tg} 3x.$

17.5. $y'' + 2y' + 10y = \dfrac{\sec 3x}{e^x}$.

17.6. $y'' + 36y = 36 \sec 6x$.

17.7. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{1 + e^{3x}}$.

17.8. $y'' - y' - 6y = \dfrac{1 + 2x + 24x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.9. $y'' + 64y = 8 \operatorname{tg} 4x$.

17.10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

17.11. $y'' + 4y' = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.12. $y'' + 4y' + 8y = \dfrac{\sec 2x}{e^{2x}}$.

17.13. $y'' + 16y = 32 \operatorname{ctg} 4x$.

17.14. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16e^{8x}}{1 + e^{4x}}$.

17.15. $y'' + 4y = \dfrac{4x^2 + 12}{x^5}$.

17.16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$.

17.17. $y'' + 36y = 6 \operatorname{tg} 3x$.

17.18. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.

17.19. $y'' + 4y = 6 \operatorname{tg} 2x$.

17.20. $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{\sec x}{e^{2x}}$.

17.21. $y'' + 64y = 64 \sec 8x$.

17.22. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{e^{3x}\left(1 + e^{3x}\right)}$.

17.23. $y'' + y' - 2y = \dfrac{1 - 2x + 8x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.24. $y'' + 16y = 4 \operatorname{tg} 2x$.

17.25. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^3}$.

17.26. $y'' - 5y' = \dfrac{25}{1 + e^{5x}}$.

17.27. $y'' + 2y' + 17y = \dfrac{\sec 4x}{e^x}$.

17.28. $y'' + 9y = 18 \operatorname{ctg} 3x$.

17.29. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.30. $y'' + y = \dfrac{x^2 + 6}{x^4}$.

Задание №18

Найти общее решение линейного неоднородного диффереренциального уравнения с постоянными коэффициентами, используя метод неопределенных коэффициентов.

18.1. $y''' - 4y'' - 5y' = -15x^2 - 44x - 15.$
18.2. $y''' - 9y'' + 20y' = 60x^2 + 26x + 10.$
18.3. $y''' - 7y'' + 12y' = 36x^2 - 66x + 56.$
18.4. $y''' - 5y'' + 6y' = 18x^2 - 42x + 40.$
18.5. $y''' - 3y'' + 2y' = -6x^2 + 26x - 8.$
18.6. $y''' - 3y'' - 10y' = 30x^2 - 22x - 78.$
18.7. $y''' - 2y'' - 8y' = 24x^2 + 28x - 58.$
18.8. $y''' - y'' - 6y' = 18x^2 + 18x - 52.$
18.9. $y''' + y'' - 2y' = -6x^2 - 2x + 8.$
18.10. $y''' - 3y'' - 4y' = -12x^2 - 34x - 14.$
18.11. $y''' - 2y'' - 3y' = -9x^2 - 6x + 1.$
18.12. $y''' - y'' - 2y' = -6x^2 - 2x.$
18.13. $y''' - 8y'' + 15y' = -45x^2 + 108x + 37.$
18.14. $y''' - 7y'' + 10y' = -30x^2 + 82x + 26.$
18.15. $y''' - 6y'' + 5y' = -15x^2 + 26x + 41.$
18.16. $y''' - 5y'' + 4y' = -12x^2 + 22x + 36.$
18.17. $y''' - 6y'' + 8y' = 24x^2 - 4x - 10.$
18.18. $y''' - 4y'' + 3y' = 9x^2 - 12x - 4.$
18.19. $y''' - 2y'' - 15y' = -45x^2 + 18x - 35.$
18.20. $y''' - y'' - 12y' = -36x^2 + 18x - 40.$
18.21. $y''' + y'' - 6y' = 18x^2 - 30x - 32.$
18.22. $y''' + 2y'' - 3y' = 9x^2 - 24x - 16.$
18.23. $y''' + 3y'' - 4y' = 12x^2 - 10x - 40.$
18.24. $y''' + 2y'' - 8y' = 24x^2 + 4x - 74.$
18.25. $y''' + y'' - 12y' = -36x^2 - 42x - 2.$
18.26. $y''' - y'' - 20y' = -60x^2 - 86x - 38.$
18.27. $y''' + 4y'' - 5y' = -15x^2 + 34x - 17.$
18.28. $y''' + 3y'' - 10y' = -30x^2 + 38x - 40.$
18.29. $y''' + 2y'' - 15y' = 45x^2 - 72x - 73.$
18.30. $y''' + y'' - 20y' = 60x^2 - 86x - 122.$

Задание №19

Найти общее решение линейного неоднородного диффереренциального уравнения с постоянными коэффициентами, используя метод неопределенных коэффициентов.

19.1. $y''' + 5y'' - y' - 5y = e^{2x}(21x + 52)$.
19.2. $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = e^{x}(-12x - 20)$.
19.3. $y''' + 3y'' - 13y' - 15y = e^{x}(-24x - 76)$.
19.4. $y''' + 2y'' - 18y' - 20y = e^{x}(-35x - 151)$.
19.5. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = e^{x}(-16x - 92)$.
19.6. $y''' - 8y'' + 11y' + 20y = e^{x}(24x + 142)$.
19.7. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = e^{x}(12x + 80)$.
19.8. $y''' - 4y'' + y' + 6y = e^{x}(4x + 28)$.
19.9. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 4)$.
19.10. $y''' - 2y'' - 13y' - 10y = e^{x}(-24x - 62)$.
19.11. $y''' - y'' - 10y' - 8y = e^{x}(-18x - 63)$.
19.12. $y''' - 7y' - 6y = e^{x}(-12x - 52)$.
19.13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}(12x + 79)$.
19.14. $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = e^{x}(-12x - 80)$.
19.15. $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{x}(-8x - 60)$.
19.16. $y''' - 3y' - 2y = e^{x}(-4x - 32)$.
19.17. $y''' - 7y'' + 7y' + 15y = e^{x}(16x + 12)$.
19.18. $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = e^{x}(8x + 10)$.
19.19. $y''' - 5y'' - y' + 5y = e^{2x}(-9x - 36)$.
19.20. $y''' - 4y'' - y' + 4y = e^{2x}(-6x - 29)$.
19.21. $y''' - 5y'' + 2y' + 8y = e^{x}(6x + 25)$.
19.22. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 19)$.
19.23. $y''' - y'' - 17y' - 15y = e^{x}(-32x - 240)$.
19.24. $y''' - 13y' - 12y = e^{x}(-24x - 202)$.
19.25. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = e^{x}(-8x - 6)$.
19.26. $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}(15x + 53)$.
19.27. $y''' + 4y'' - y' - 4y = e^{2x}(18x + 81)$.
19.28. $y''' + 3y'' - 6y' - 8y = e^{x}(-10x - 37)$.
19.29. $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = e^{x}(-20x - 104)$.
19.30. $y''' - 21y' - 20y = e^{x}(-40x - 258)$.

Задание №20

Найти общее решение дифференциального уравнения Эйлера.

20.1. $x^3y''' - x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2(-6\ln x - 29)$.
20.2. $x^3y''' + 2x^2y'' - 5xy' - 3y = x(-8\ln x - 60)$.
20.3. $x^3y''' + x^2y'' - 14xy' - 10y = x(-24\ln x - 62)$.
20.4. $x^3y''' - 11xy' - 5y = x(-16\ln x - 92)$.
20.5. $x^3y''' + 3x^2y'' - 12xy' - 12y = x(-24\ln x - 202)$.

20.6. $x^3y''' - 2x^2y'' - 5xy' + 5y = x^2(-9\ln x - 36)$.
20.7. $x^3y''' + x^2y'' - 8xy' - 4y = x(-12\ln x - 80)$.
20.8. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 4)$.
20.9. $x^3y''' + 5x^2y'' - 15xy' - 20y = x(-35\ln x - 151)$.
20.10. $x^3y''' + 7x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2(18\ln x + 81)$.
20.11. $x^3y''' + 2x^2y'' - 17xy' - 15y = x(-32\ln x - 240)$.
20.12. $x^3y''' - 3x^2y'' - 2xy' + 10y = x(8\ln x + 10)$.
20.13. $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2(12\ln x + 79)$.
20.14. $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x(4\ln x + 28)$.
20.15. $x^3y''' + 6x^2y'' - 9xy' - 15y = x(-24\ln x - 76)$.
20.16. $x^3y''' + 5x^2y'' - 8xy' - 12y = x(-20\ln x - 104)$.
20.17. $x^3y''' + 6x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2(15\ln x + 53)$.
20.18. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 19)$.
20.19. $x^3y''' - 4x^2y'' + xy' + 15y = x(16\ln x + 12)$.
20.20. $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = x(-12\ln x - 52)$.
20.21. $x^3y''' - 3x^2y'' + 12y = x(12\ln x + 80)$.
20.22. $x^3y''' + 7x^2y'' - 2xy' - 10y = x(-12\ln x - 20)$.
20.23. $x^3y''' + 3x^2y'' - 20xy' + 20y = x(-40\ln x - 158)$.
20.24. $x^3y''' + 6x^2y'' - 2xy' - 8y = x(-10\ln x - 37)$.
20.25. $x^3y''' + 5x^2y'' - 2xy' - 6y = x(-8\ln x - 6)$.
20.26. $x^3y''' - 2x^2y'' - 2xy' + 8y = x(6\ln x + 25)$.
20.27. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = x(-4\ln x - 32)$.
20.28. $x^3y''' + 2x^2y'' - 10xy' - 8y = x(-18\ln x - 63)$.
20.29. $x^3y''' - 5x^2y'' + 4xy' + 20y = x(24\ln x + 142)$.
20.30. $x^3y''' + 8x^2y'' + 5xy' - 5y = x^2(21\ln x + 52)$.

Задание №21

Решить систему дифференциальных уравнений методом исключения.

21.1. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ 21.2. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$ 21.3. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 7y - 8z. \end{cases}$ 21.5. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$ 21.6. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} y' = 5y + 3z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 21.8. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$ 21.9. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 13y - 3z. \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 7y - 9z. \end{cases}$ 21.11. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$ 21.12. $\begin{cases} y' = y - 9z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 2y + 5z. \end{cases}$ 21.14. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.15. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 13y - z. \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} y' = -5y + z, \\ z' = 2y - 4z. \end{cases}$ 21.17. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$ 21.18. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 5y + 9z. \end{cases}$ 21.20. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.21. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$

21.22. $\begin{cases} y' = -7y + 3z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ 21.23. $\begin{cases} y' = 9y - 5z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$ 21.24. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

21.25. $\begin{cases} y' = 8y - 3z, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$ 21.26. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.27. $\begin{cases} y' = 2y - 5z, \\ z' = 4y - 2z. \end{cases}$

21.28. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 4y - 9z. \end{cases}$ 21.29. $\begin{cases} y' = 7y - 4z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.30. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

Задание №22

Построить фазовые траектории для дифференциального уравнения этого же варианта из задания №13.

Задание №23

Исследовать положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений и изобразить ее фазовые траектории на плоскости Oyz.

23.1. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 13y - 3z. \end{cases}$ 23.2. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 7y - 9z. \end{cases}$ 23.3. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$

23.4. $\begin{cases} y' = y - 9z, \\ z' = y + z. \end{cases}$ 23.5. $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 2y + 5z. \end{cases}$ 23.6. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$

23.7. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 13y - z. \end{cases}$ 23.8. $\begin{cases} y' = -5y + z, \\ z' = 2y - 4z. \end{cases}$ 23.9. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$

23.10. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 23.11. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 5y + 9z. \end{cases}$ 23.12. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$

23.13. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$ 23.14. $\begin{cases} y' = -7y + 3z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ 23.15. $\begin{cases} y' = 9y - 5z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$

23.16. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$ 23.17. $\begin{cases} y' = 8y - 3z, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$ 23.18. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$

23.19. $\begin{cases} y' = 2y - 5z, \\ z' = 4y - 2z. \end{cases}$ 23.20. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 4y - 9z. \end{cases}$ 23.21. $\begin{cases} y' = 7y - 4z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$

23.22. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$ 23.23. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ 23.24. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$

23.25. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$ 23.26. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 7y - 8z. \end{cases}$ 23.27. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$

23.28. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$ 23.29. $\begin{cases} y' = 5y + 3z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 23.30. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$

Задание №24

Найти все положения равновесия данной системы дифференциальных уравнений и каждое из них исследовать на устойчивость.

24.1. $\begin{cases} y' = 6y + y^2 - z, \\ z' = y + y^2 + 4z. \end{cases}$ 24.2. $\begin{cases} y' = y + y^2 - 2z, \\ z' = y - y^2 + 3z. \end{cases}$

24.3. $\begin{cases} y' = y - 3z + z^2, \\ z' = 5y + 9z + z^2. \end{cases}$ 24.4. $\begin{cases} y' = 2y - y^2 - z, \\ z' = 4y - y^2 - 3z. \end{cases}$

24.5. $\begin{cases} y' = 4y - 5z + yz, \\ z' = 5y - 4z + yz. \end{cases}$ 24.6. $\begin{cases} y' = -7y + 3z - z^2, \\ z' = -y - 3z - z^2. \end{cases}$

24.7. $\begin{cases} y' = 2y - 5z - yz, \\ z' = 5y - z - yz. \end{cases}$ 24.8. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z, \\ z' = 2y + y^2 + z. \end{cases}$

24.9. $\begin{cases} y' = 8y - 3z - 7yz, \\ z' = 2y + 3z + 2yz. \end{cases}$ 24.10. $\begin{cases} y' = 2y + z - z^2, \\ z' = 4y - z + z^2. \end{cases}$

24.11. $\begin{cases} y' = 2y - 5z + 3yz, \\ z' = 4y - 2z - 2yz. \end{cases}$ 24.12. $\begin{cases} y' = -2y - 3z + z^2, \\ z' = 4y - 9z - z^2. \end{cases}$

24.13. $\begin{cases} y' = 7y + y^2 - 4z, \\ z' = 4y + y^2 - z. \end{cases}$ 24.14. $\begin{cases} y' = y - z + 2yz, \\ z' = y + z. \end{cases}$

24.15. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 + 2z, \\ z' = 3y + y^2 + 4z. \end{cases}$ 24.16. $\begin{cases} y' = 3y - 4z + z^2, \\ z' = y - 2z + z^2. \end{cases}$

24.17. $\begin{cases} y' = 2y - z + yz, \\ z' = 5y - 2z + 3yz. \end{cases}$ 24.18. $\begin{cases} y' = y - 2z - z^2, \\ z' = 7y - 8z + z^2. \end{cases}$

24.19. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 - 2z, \\ z' = 2y - y^2 - z. \end{cases}$ 24.20. $\begin{cases} y' = 4y - 2z + z^2, \\ z' = y + 2z - z^2. \end{cases}$

24.21. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 + 3z, \\ z' = y - y^2 + 3z. \end{cases}$ 24.22. $\begin{cases} y' = 2y - z - yz, \\ z' = 5y - 4z - yz. \end{cases}$

24.23. $\begin{cases} y' = 3y - z + yz, \\ z' = 13y - 3z + 5yz. \end{cases}$ 24.24. $\begin{cases} y' = y - 3z - z^2, \\ z' = 7y - 9z - z^2. \end{cases}$

24.25. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 - 3z, \\ z' = 3y + y^2 - z. \end{cases}$ 24.26. $\begin{cases} y' = y - 9z + z^2, \\ z' = y + z - z^2. \end{cases}$

24.27. $\begin{cases} y' = 4y - y^2 + z, \\ z' = 2y + y^2 + 5z. \end{cases}$ 24.28. $\begin{cases} y' = 5y - 3z + z^2, \\ z' = 4y - 3z + z^2. \end{cases}$

24.29. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z, \\ z' = 13y - y^2 - z. \end{cases}$ 24.30. $\begin{cases} y' = -5y + z - yz, \\ z' = 2y - 4z + yz. \end{cases}$

Задание №25

Решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1–5

Скорость изменения концентрации $c(t)$ некоторого вещества в момент t равна 2^{-t}, где t — время в часах. Найти концентрацию вещества в момент $t = t_1$, если начальная концентрация c_0 равна 1 г/л.

№ варианта	t_1, ч
1	3
2	2
3	1
4	4
5	5

Варианты №6–9

В сосуд, содержащий 10 л воды, со скоростью 2 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0.3 кг соли. Этот раствор перемешивается с водой, и новый раствор вытекает из сосуда с той же скоростью. Найти, сколько соли будет в сосуде по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, мин
6	10
7	20
8	30
9	40

Варианты №10–13

В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 5 л/мин непрерывно поступает вода, перемешивающаяся с раствором. Полученный новый раствор вытекает из бака с той же скоростью. Найти, сколько соли останется в баке по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, ч
10	1
11	2
12	3
13	4

Варианты №14–16

В резервуаре находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В резервуар вливается вода со скоростью 3 л/мин, и в результате тщательного перемешивания получается новый раствор, который вытекает из резервуара со скоростью 2 л/мин. Найти, сколько соли останется в резервуаре по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, ч
14	1
15	2
16	3

Варианты №17, 18

В резервуаре вместимостью 100 л находится раствор, содержащий 10 кг соли. В резервуар вливается вода со скоростью 3 л/мин, и в результате тщательного перемешивания получается новый раствор, который вытекает из резервуара с такой же скоростью. Найти, сколько соли останется в резервуаре по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, ч
17	5
18	6

Вариант №19

Некоторое вещество, начальная концентрация которого равна c_0, вступает в химическую реакцию. Со временем концентрация этого вещества убывает; обозначим через $c(t)$ его концентрацию в момент t, отсчитываемый от начала реакции. Скорость изменения концентрации пропорциональна $c(t)$. Найти зависимость концентрации $c(t)$ вещества от времени.

Варианты №20, 21

Задача о распаде радия. Скорость распада радия пропорциональна его массе. Найти закон распада радия, если известна его первоначальная масса m_0 и период полураспада T, т. е. время, в течение которого распадается половина первоначальной массы радия. Найти, какой процент первоначальной массы радия распадется по истечении времени $t = t_1$, если $T = 1590$ лет.

№ варианта	t_1, лет
20	100
21	200

Вариант №22

Скорость распада некоторого радиоактивного вещества пропорциональна его массе. За 30 дней распалось 25% первоначальной массы m_0 этого вещества. Найти: 1) закон распада вещества; 2) время T, в течение которого первоначальная масса вещества уменьшится вдвое; 3) через сколько времени останется 1% первоначальной массы вещества.

Вариант №23

Некоторое радиоактивное вещество с известной первоначальной массой m_0 имеет период полураспада 100 дней (период полураспада — время, в течение которого распадется половина первоначальной массы). Скорость распада этого вещества в каждый момент t пропорциональна его массе в этот момент (коэффициент пропорциональности k называется константой скорости распада). Найти закон распада вещества и значение константы скорости распада.

Вариант №24

Активность некоторого радиоактивного отложения пропорциональна скорости своего уменьшения. Найти зависимость этой активности от времени, если известно, что в течение четырех дней она уменьшилась вдвое.

Указание. Обозначим через $I(t)$ активность радиоактивного отложения в момент t, отсчитываемый от начала процесса. В начальный момент $t = 0$ пусть $I(0) = I_0$. Скорость уменьшения этой активности $\frac{dI}{dt}$ пропорциональна $I(t)$:

$$\frac{dI}{dt} = kI$$

где $k < 0$ — коэффициент пропорциональности. Это уравнение есть дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения со временем активности радиоактивного отложения.

Вариант №25

Период полураспада радия 1590 лет (период полураспада — время, в течение которого распадется половина первоначальной массы). В настоящее время имеется $m_0 = 500$ мг радия. Скорость его распада пропорциональна его массе. Найти, какое количество радия останется через 250 лет.

Вариант №26

Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44.8 г вещества A, а после 3 ч — 11.2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется $\frac{1}{64}$ часть этого вещества.

Указание. Обозначим x массу вещества A, вступившего в реакцию к моменту t, отсчитываемому от начала реакции. Скорость изменения $x(t)$ со временем t, т. е. $\frac{dx}{dt}$, пропорциональна оставшейся массе вещества A к этому моменту, а именно,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

где k — коэффициент пропорциональности (константа скорости реакции). Это уравнение есть дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения массы вещества A, вступившего в реакцию.

Вариант №27, 28

Вещество Y образуется в результате химической реакции между веществами A и B. В этой реакции один грамм вещества Y возникает при соединении p граммов вещества A и $q = 1 - p$ граммов вещества B. Скорость образования Y в любой момент t равна произведению масс A и B, не вступивших еще к этому моменту в реакцию. Показать, что если в момент $t = 0$ соединить a граммов A и b граммов B, то масса $x(t)$ вещества Y при $t > 0$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dx}{dt} = (a - px)(b - qx).$$

Вариант №27: Найти закон изменения массы $x(t)$ вещества Y в зависимости от времени t, если к началу реакции (т. е. в момент $t = 0$) $\quad x = 0$.

Вариант №28: Какова наибольшая масса вещества Y, возникающая в результате этого эксперимента, при условии, что $\frac{a}{p} > \frac{b}{q}$.

Вариант №29

Нерастворимое вещество содержит в своих порах 20 кг растворимой соли. Подвергнув его действию 80 л воды, установили, что через 1 ч растворилась половина содержавшейся в нем соли. Считая концентрацию насыщенного раствора соли равной 0.3 кг/л, найти, сколько соли растворится в течении того же времени, если объем воды удвоить.

Указание. Использовать химический закон растворения твердого вещества в жидкости: скорость растворения при постоянной температуре пропорциональна массе нерастворенного вещества и разности между концентрацией c насыщенного раствора и концентрацией раствора в данный момент, т. е.

$$\frac{dm}{dt} = -km\left(c - \frac{m_0 - m}{V}\right),$$

где $m = m(t)$ — масса нерастворенного вещества в момент t, m_0 — первоначальная масса вещества, V — объем растворителя, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Знак минус взят потому, что масса нерастворенного вещества убывает с течением времени, а следовательно, $\frac{dm}{dt} < 0$.

Вариант №30

Нерастворимое вещество, содержащее в своих порах 2 кг растворимой соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Найти, через сколько времени растворится 99% первоначальной массы соли, если концентрация насыщенного раствора соли равна 0.3 кг/л.

Указание. См. указание к варианту №29.

Задание №26

В каждом варианте решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1–5

Скорость размножения бактерий в питательной среде пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось n_0 бактерий, а в течение времени $t = t_1$ их количество $n(t)$ увеличилось в m раз. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение времени $t = t_2$?

№ варианта	n_0, ч	t_1	m	t_2, ч
1	100	3	2	9
2	200	5	3	10
3	300	6	4	8
4	400	7	2.5	12
5	500	2	1.5	4

Варианты №6–8

Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается со скоростью $1.03^t \ln 1.03$, где t — время в часах. Пусть начальная масса дрожжей равна 1 г. Составить математическую модель процесса и найти массу дрожжей по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, ч
6	0.1
7	0.2
8	0.3

Варианты №9–11

Скорость роста популяции насекомых в момент времени t (время выражено в днях) задается величиной $\frac{9000}{(1+t)^2}$. Составить математическую модель процесса. Найти численность популяции насекомых в момент $t = t_1$, если начальная популяция состояла из 1000 насекомых.

№ варианта	t_1, день
9	1
10	2
11	3

Варианты №12–14

Скорость роста популяции бактерий в момент времени t равна $(10000 - 2000t)$, где t — время в часах. В начальный момент численность популяции равна 10^6. Найти численность популяции по истечении времени $t = t_1$.

№ варианта	t_1, ч
12	1
13	5
14	10

Варианты №15, 16

В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает со скоростью

$$1000\frac{100 + 3t^2}{\left(100 + t^2\right)^2},$$

где t — время в часах. Найти размер этой популяции

а) в момент $t = t_1$;
б) максимальный.

№ варианта	t_1, ч
15	1
16	2

Варианты №17–19

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его массе. Найти, во сколько раз увеличится эта масса в течение времени $t = t_1$, если она удваивается в течение одного часа.

№ варианта	t_1, ч
17	2
18	$2\frac{1}{2}$
19	3

Указание. Примем за аргумент время t, а за искомую функцию $N(t)$ — массу действующего фермента в момент времени t. Пусть $N(0) = N_0$. Быстрота прироста действующего фермента представляет собой скорость изменения функции $N = N(t)$ со временем t. С другой стороны, по условию задачи скорость изменения $N(t)$, т. е. $\frac{dN}{dt}$, пропорциональна массе действующего фермента, а именно,

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Таким способом получается дифференциальное уравнение, описывающее процесс.

Вариант №20

Популяция животных обитает в благоприятных условиях (достаточные ресурсы питания, неограниченная территория поселения, отсутствие подавления другими видами и человеком). Будем считать, что при этих условиях численность животных непрерывно увеличивается со скоростью, пропорциональной числу особей (коэффициент пропорциональности $k > 0$ называется коэффициентом естественного прироста численности животных). Пусть $x(t)$ — численность животных в момент t, $x(0) = x_0$, где $t = 0$ — время начала наблюдения за популяцией, $x(0)$ — число животных в популяции в начальный момент $t = 0$. Численность этой популяции $x(t)$ удваивается в течение 50 дней. Найти закон изменения численности популяции. Через сколько дней ее численность утроится?

Вариант №21

Определить равновесный размер популяции, если на 1000 особей в единицу времени 100 особей рождается, а гибнет одна. Предполагается при этом, что начальная численность популяции равна 10 особям. Построить график логистической кривой.

Вариант №22

Для популяции $x(t)$, изменяющейся согласно уравнению логистического роста, доказать, что скорость роста максимальна тогда, когда популяция достигает численности, равной половине равновесного значения.

Вариант №23

Популяция бактерий возрастает от начального размера в 100 единиц до равновесного размера в 100 000 единиц. Предполагается, что в течение первого часа она увеличилась до 120 единиц. Считая, что рост популяции подчиняется логистическому уравнению, определить ее размер в момент t.

Вариант №24

Рост, выживание и деление клеток определяются потоком питательных веществ через оболочку клетки. Это означает, что на ранних стадиях клеточного роста увеличение массы клетки в момент времени t пропорционально квадрату радиуса клетки, а масса клетки пропорциональна его кубу. Вывести дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы клетки в зависимости от времени t, если начальная масса клетки равна a.

Варианты №25–30

Проинтегрировать модифицированное логистическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x)\left(1 - \frac{m}{x}\right).$$

Построить графики $x(t)$ для $t > 0$ при $x(0) = 20$ и $x(0) = 5$.

№ варианта	β	δ	m
25	100	1	10
26	50	2	10
27	100	2	10
28	50	1	10
29	200	4	10
30	200	2	10

Задание №27

Решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1–4

Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением a. Найти закон ее движения, если ее начальная скорость равна v_0, а путь, пройденный к начальному моменту $t = 0$, равен s_0.

№ варианта	a, м/с^2	v_0, м/с	s_0, м
1	2	6	10
2	4	7	20
3	3	10	30
4	6	48	91

Варианты №5–8

Найти закон движения материальной точки при свободном падении с заданной высоты h_0 с начальной скоростью v_0. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

№ варианта	h_0, м	v_0, м/с
5	2	3
6	10	0
7	20	2
8	15	9

Варианты №9–12

Материальная точка свободно падает с заданной высоты h_0 с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найти промежуток времени T, по истечении которого точка упадет на землю. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

№ варианта	h_0, м
9	1
10	2
11	3
12	7

Варианты №13–16

Материальная точка свободно падает с заданной высоты h_0 с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найти промежуток времени T, по истечении которого точка упадет на параллельную Земле поверхность, находящуюся на высоте $h_1 \quad (h_1 < h_0)$. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

№ варианта	h_0, м	h_1, м
13	3	2
14	2	1
15	4	3
16	8	6

Варианты №17–20

Найти закон движения материальной точки, подброшенной с высоты h_0 вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

№ варианта	h_0, м	v_0, м/с
17	0	2
18	1	3
19	2	6
20	3	5

Вариант №21

Материальная точка начинает двигаться по прямой с ускорением, равным $\frac{a_0}{(\tau+t)^2}$ $(a_0 = 5$ м, $\quad \tau = 1$ с$)$, из состояния покоя при $t = 0$. Найти закон ее движения.

Вариант №22

Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = bt + c$, где $b = 6$ м/с^3, $\quad c = -12$ м/с^2. В момент $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 9$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0 = 10$ м. Найти: 1) законы изменения скорости и пути от времени; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент $t_1 = 2$ с; 3) момент времени, когда скорость будет наименьшей.

Вариант №23

Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = bt + c$, где $b = -6$ м/с^3, $\quad c = 18$ м/с^2. В момент $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 24$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0 = 15$ м. Найти: 1) законы изменения скорости и пути от времени; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент времени $t_1 = 2$ с; 3) момент времени, когда скорость будет наибольшей.

Вариант №24

Вычислить путь, пройденный поездом, и время его движения до полной остановки, если замедляющая сила есть линейная функция скорости, т. е. $F = kv + b$, где k и b — постоянные величины. Поезд считается материальной точкой с массой m.

Вариант №25

Материальная точка с массой m падает в среде (g — ускорение свободного падения), сопротивление которой пропорционально первой степени скорости (k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$). Найти законы изменения скорости и пути от времени, а также предельную скорость падения.

Вариант №26

Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли равен R), сообщена начальная вертикальная скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$, где g — ускорение свободного падения. Определить закон ее движения (силой сопротивления воздуха пренебречь).

Указание. Сила земного притяжения, действующая на материальную точку с массой m равна $-\frac{mgR^2}{x^2}$, где x — расстояние от центра Земли, а g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. При интегрировании уравнения следует воспользоваться тем, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds}\,.$$

Вариант №27

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру O, от которого она отталкивается с силой, обратно пропорциональной третьей степени расстояния до центра O, т. е. $F = \frac{k}{x^3}$ (k — постоянный коэффициент, $k > 0$). В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находится от центра O на расстоянии b и имеет скорость v_0, направленную к центру O. Найти закон ее движения.

Вариант №28

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее с силой $F = \frac{mk}{r^3}$, где r — расстояние от центра до материальной точки, k — постоянный положительный коэффициент. В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находилась в состоянии покоя на расстоянии b от центра. Найти время достижения ею центра.

Вариант №29

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру O, от которого она отталкивается с силой, пропорциональной расстоянию до центра O, т. е. $F = kx$ (k — постоянный коэффициент, $k > 0$). В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находится на расстоянии c от центра O и имеет скорость v_0, направленную к центру O. Найти закон ее движения. При каком условии на параметры m, k, c и v_0 материальная точка не попадет в центр O?

Вариант №30

Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 0.2$ м и вылетает из нее со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене. Пулю считать материальной точкой.

Задание №28

На указанном отрезке приближенно решить задачу Коши с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную). Шаг h взять ± 0.01. Построить график зависимости $y(x)$.

28.1. $y' = \sin\cos y^2\,; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-8, 8].$

28.2. $y' = \dfrac{2x-1}{y+1} + \dfrac{1}{y^2+1}\;; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-4, 5].$

28.3. $y' = \dfrac{5x}{1+y^2} + \ln\left(1+x^2\right)\;; \quad y(2) = 2, \quad x \in [-3, 3].$

28.4. $y' = x + y\ln\left(x^2+y^2\right)\;; \quad y(1) = 3, \quad x \in [-8, 1].$

28.5. $y' = 1 + y^2 + \cos y + \sin x\,; \quad y(0) = -1, \quad x \in [0, 1].$

28.6. $y' = \operatorname{arctg} x - \dfrac{y^2}{x^2+1}\;; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-3, 7].$

28.7. $y' = e^{\cos y} - x^2\,; \quad y(1) = 0, \quad x \in [-2, 2].$

28.8. $y' = \operatorname{arctg} x^2\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-5, 4].$

28.9. $y' = \dfrac{\sin y \cdot \sin y^2}{y}\;; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-8, 8].$

28.10. $y' = \ln y\,; \quad y(0) = 2, \quad x \in [-8, 3].$

28.11. $y' = e^{x^2}\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-1, 1].$

28.12. $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{4+y^2} - y\,; \quad y(-2) = -1, \quad x \in [-3, 8].$

28.13. $y' = \dfrac{\sin\sin x}{y}\;; \quad y(2) = 3, \quad x \in [-8, 8].$

28.14. $y' = x\cos y^2\,; \quad y(1) = 1, \quad x \in [-8, 8].$

28.15. $y' = \dfrac{\sin\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\;; \quad y(0) = 2, \quad x \in [-8, 8].$

28.16. $y' = (x+y)(2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)\,; \quad y(1) = -1, \quad x \in [0, 1].$

28.17. $y' = \left(x+y^2\right)\sin x \cdot \operatorname{arctg} x\,; \quad y(-1) = 1, \quad x \in [-3, 0].$

28.18. $y' = \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}\;; \quad y(1) = 0, \quad x \in [-8, 8].$

28.19. $y' = \dfrac{1+x}{1+y^2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\;; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-8, 6].$

28.20. $y' = \dfrac{\cos(x+y)}{1+y^4} + x\,; \quad y(0) = -1, \quad x \in [-2, 2].$

28.21. $y' = (x+y)\cos y\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-8, 8].$

28.22. $y' = \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + x - 1\,; \quad y(0) = -2, \quad x \in [-1, 2].$

28.23. $y' = \dfrac{x+3}{y}\cos(y+2x)\,; \quad y(2) = 2, \quad x \in [-8, 3].$

28.24. $y' = xe^x \ln y\,; \quad y(0) = 2, \quad x \in [-8, 1].$

28.25. $y' = \dfrac{1+y^2}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}\ ; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-8, 0].$

28.26. $y' = xy\sin x + \cos y\,; \quad y(0) = -1, \quad x \in [-3, 2].$

28.27. $y' = \cos y^2\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-8, 8].$

28.28. $y' = \left(1 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arctg}(x+y)\,; \quad y(0) = -1, \quad x \in [-7, 3].$

28.29. $y' = \operatorname{arctg}(xy) + x + y - 5\,; \quad y(2) = 2, \quad x \in [0, 2].$

28.30. $y' = e^{\operatorname{arctg} x} - \cos y\,; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-8, 1].$

Задание №29

Представить дифференциальное уравнение в виде системы в нормальной форме, и на указанном отрезке приближенно решить задачу Коши с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную). Шаг h взять ± 0.01. Построить график зависимости $y(x)$.

29.1. $y'' = \dfrac{ye^x}{1+2e^{y'}}\ ; \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [-8, 2].$

29.2. $y'' = \dfrac{x+y+{y'}^2}{x^2+y^3+{y'}^4}\ ; \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [-8, 3].$

29.3. $y'' = x\sin y \cdot \operatorname{arctg} y'\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1, \quad x \in [-8, 1].$

29.4. $y'' = {y'}^2\cos x\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1, \quad x \in [-3, 0].$

29.5. $y'' = \dfrac{1}{x^2+y^2+{y'}^3}\ ; \quad y(1) = -2\,, \quad y'(1) = 0, \quad x \in [-2, 7].$

29.6. $y'' = x\operatorname{tg} y + y'\,; \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1, \quad x \in [-5, 0].$

29.7. $y'' = e^{\sin x}\,; \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [-2, 0].$

29.8. $y'' = 1 + \cos(xyy')\ ; \quad y(-1) = 0\,, \quad y'(-1) = 2; \quad x \in [-3, -1].$

29.9. $y'' = y'(x+y) + ye^x\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y'(1) = 1, \quad x \in [-4, 1].$

29.10. $y'' = (2x+1)(3x+2) + yy'\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0;$
$x \in [-1, 0].$

29.11. $y'' = \cos^2 y - \sin\left(x^2\right)\ ; \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0,\ x \in [-3, 3].$

29.12. $y'' = \dfrac{y}{x^2+3} + \sin y\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y'(-1) = -1;$
$x \in [-2, 0].$

29.13. $y'' = 2 - \operatorname{tg} y + \cos\left(x{y'}^2\right)\ ; \quad y(-2) = 0\,, \quad y'(-2) = 1;$
$x \in [-3, -1].$

29.14. $y'' = \dfrac{5xy}{x^2+1} + y'\,;\quad y(0) = 2\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-8, 0].$

29.15. $y'' = \cos 3x + \sin 3y - \operatorname{arctg} y'\,;\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 0;$ $x \in [-2, 8].$

29.16. $y'' = x \cos y \cdot \sin \cos y'\,;\quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1,\ x \in [-8, 8].$

29.17. $y'' = (y-1)(y-2) + xy'\,;\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 0;$ $x \in [-1, 1].$

29.18. $y'' = \dfrac{\cos x + \operatorname{arctg} x - 1}{\sin y}\,;\ y(0) = -1\,,\ y'(0) = 1;\ x \in [0, 2].$

29.19. $y'' = \sqrt{x^2 + y^2 + {y'}^2}\,;\quad y(-1) = -2\,,\quad y'(-1) = 0;$ $x \in [-2, 0].$

29.20. $y'' = \dfrac{e^x + \cos y}{y}\,;\quad y(-2) = 1\,,\quad y'(-2) = -1,\quad x \in [-8, 0].$

29.21. $y'' = y^2 y' + \cos \sin x\,;\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-8, 0].$

29.22. $y'' = x^2 \sin (x + y')\,;\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-1, 4].$

29.23. $y'' = \operatorname{arctg} \left(x^2 + 2\right)\,;\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-2, 0].$

29.24. $y'' = \dfrac{\sin x}{\operatorname{arctg} y} + y\,;\quad y(-1) = -1\,,\ y'(-1) = 0,\ x \in [-4, 0].$

29.25. $y'' = x \operatorname{tg} x + y' \cos y\,;\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-1, 0].$

29.26. $y'' = \dfrac{y}{x^2 + {y'}^2}\,;\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-5, 0].$

29.27. $y'' = \dfrac{x}{y^2 + {y'}^2}\,;\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = -1,\quad x \in [-6, 6].$

29.28. $y'' = \dfrac{x}{x^4 + y^4} + y\,;\quad y(-3) = -1\,,\quad y'(-3) = -1;$ $x \in [-7, -3].$

29.29. $y'' = \dfrac{{y'}^2}{y - x} + y'\,;\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = 1,\quad x \in [-3, 0].$

29.30. $y'' = \dfrac{\cos x}{y(1+y)}\,;\quad y(1) = 1\,,\quad y'(1) = 1,\quad x \in [-1, 1].$

Задание №30

На указанном отрезке приближенно решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную), и построить соответствующую часть фазовой траектории. Шаг h взять ± 0.01.

30.1. $\begin{cases} x' = \sin t + \cos x, \\ y' = x^2 + y \cos t; \end{cases}\quad x(0) = -1\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-1, 4].$

30.2. $\begin{cases} x' = xt^2 + \operatorname{arctg} y, \\ y' = t - y - x^2; \end{cases}$ $x(0) = -1\,, \quad y(0) = -1; \quad t \in [-2, 0]$

30.3. $\begin{cases} x' = t + 2x + e^{1/x^2}, \\ y' = x + y - t; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\ y(0) = 1,\ t \in [-7, 0].$

30.4. $\begin{cases} x' = 7 + y - 5x^2, \\ y' = 2t + x + y; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\ y(0) = -1,\ t \in [-2, 0].$

30.5. $\begin{cases} x' = t + 2x + y + x^2, \\ y' = \operatorname{arctg}(t + x + y); \end{cases}$ $x(0) = -1\,, \quad y(0) = -1; \quad t \in [-8, 3]$

30.6. $\begin{cases} x' = tyx^2 + \dfrac{1}{y}\,, \\ y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} x; \end{cases}$ $x(1) = 0\,, \quad y(1) = -1; \quad t \in [-8, 1]$

30.7. $\begin{cases} x' = x + y + 2x^2, \\ y' = t + \sin(x \cos y); \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad t \in [-2, 1].$

30.8. $\begin{cases} x' = \sin(5 - xy + t)\,, \\ y' = x - 2y; \end{cases}$ $x(1) = 0\,,\ y(1) = -1,\ t \in [1, 7].$

30.9. $\begin{cases} x' = 2t + \operatorname{arctg} x, \\ y' = y \cos x + \sin x; \end{cases}$ $x(0) = 1\,, \quad y(0) = 1, \quad t \in [-1, 0].$

30.10. $\begin{cases} x' = te^y, \\ y' = t^2 + yx^2; \end{cases}$ $x(1) = 1\,, \quad y(1) = 0, \quad t \in [-4, 1].$

30.11. $\begin{cases} x' = t^2 - x - y, \\ y' = t - x - y - y^2; \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad t \in [-1, 1].$

30.12. $\begin{cases} x' = yx^2 + t \operatorname{arctg} t, \\ y' = t + x + y \cos x; \end{cases}$ $x(0) = 1\,, \quad y(0) = 0, \quad t \in [-1, 0].$

30.13. $\begin{cases} x' = t + \sin x + \cos y, \\ y' = 3t + x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = 1\,, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1].$

30.14. $\begin{cases} x' = t + \sin(x - y), \\ y' = t + 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 1\,, \quad y(0) = -1; \quad t \in [-2, 0]$

30.15. $\begin{cases} x' = y + \sin x, \\ y' = x + y + t^2; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\quad y(0) = -1,\quad t \in [-1, 0].$

30.16. $\begin{cases} x' = t + x + y^2, \\ y' = x + t^2 + y^3; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [-1, 0].$

30.17. $\begin{cases} x' = x^2 - t^3, \\ y' = y - 5t + x^2; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\quad y(0) = 2,\quad t \in [0, 1].$

30.18. $\begin{cases} x' = x + t^2 + \dfrac{1}{y}\,, \\ y' = x + y + t^2; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = -1,\quad t \in [-1, 1].$

30.19. $\begin{cases} x' = x + \operatorname{arctg} y, \\ y' = t + e^{-x}; \end{cases}$ $x(0) = 2\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-2, 0].$

30.20. $\begin{cases} x' = x + y + \cos t, \\ y' = x^2 + y^2 + \sin t; \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-4, 0].$

30.21. $\begin{cases} x' = \ln(x + y) - t, \\ y' = \dfrac{t}{x + y}\,; \end{cases}$ $x(0) = 3\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [0, 3].$

30.22. $\begin{cases} x' = x^2, \\ y' = t + x + y + x^3; \end{cases}$ $x(1) = 1\,,\quad y(1) = 0,\quad t \in [-6, 1].$

30.23. $\begin{cases} x' = y + x\cos t, \\ y' = 2 + \operatorname{arctg} x; \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [-1, 0].$

30.24. $\begin{cases} x' = \sin(xy) - 1, \\ y' = t + x + y^2; \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = -1,\quad t \in [0, 2].$

30.25. $\begin{cases} x' = \operatorname{arctg}\left(y^2\right), \\ y' = t + x; \end{cases}$ $x(1) = 0\,,\quad y(1) = 0,\quad t \in [-1, 1].$

30.26. $\begin{cases} x' = y + \cos\sin x, \\ y' = t + x + y; \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [-1, 0].$

30.27. $\begin{cases} x' = 5t + y - x^2 - t^3, \\ y' = \sin\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\,; \end{cases}$ $x(0) = 2\,,\quad y(0) = 2,\quad t \in [0, 2].$

30.28. $\begin{cases} x' = 1 + y + x^2, \\ y' = 2t - x + y^2; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1\,, \quad y(0) = -1, \quad t \in [-1, 0].$

30.29. $\begin{cases} x' = y + 2, \\ y' = t + x\cos y; \end{cases}$ $\quad x(0) = -3\,, \quad y(0) = -3, \quad t \in [-3, 2].$

30.30. $\begin{cases} x' = y + t^2, \\ y' = 2t + \cos x; \end{cases}$ $\quad x(0) = -2\,, \quad y(0) = -2, \quad t \in [-1, 1].$

Задание №31

С помощью метода Адамса четвертого порядка приближенно решить задачу соответствующего варианта задания №28.

Задание №32

На отрезке, определяемом граничными условиями, с помощью метода прогонки, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную), найти приближенное решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка и построить его график (взять n таким, чтобы шаг h получился 0.01).

32.1. $y'' - \ln(x+1)y' + \cos x \cdot y = 2\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(3) = 0.$

32.2. $y'' + \dfrac{x}{x^3+2}y' + y = 5x + 2\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 2.$

32.3. $y'' + e^x y' - (\cos x + \sin x)y = 5\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 0.$

32.4. $y'' - \dfrac{1}{\ln x}y' - \dfrac{\cos x}{e^x}y = \operatorname{arctg} x\,; \quad y(2) = 1\,, \quad y(3) = 1.$

32.5. $y'' - (5x+3)y' - 8\sin\cos x \cdot y = 4\,; \quad y(-2) = 0\,, \ y(1) = 1.$

32.6. $y'' - xy' + 5x^3 y = \operatorname{arctg} x\,; \quad y(-1) = 1\,, \quad y(1) = -1.$

32.7. $y'' - \cos 3x \cdot y' + e^{x^2} y = 2\cos x\,; \quad y(-1) = -1\,, \quad y(1) = 1.$

32.8. $y'' + \dfrac{17x}{1+x^2}y' + \ln(1-x)y = 6x\,; \ y(-3) = 1\,, \ y(-1) = -1.$

32.9. $y'' + \dfrac{15x}{e^{2x}}y' = x^3\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(0) = 2.$

32.10. $y'' - x\cos x \cdot y' + \dfrac{x}{\ln x}y = x\,; \quad y(2) = 0\,, \quad y(3) = 1.$

32.11. $y'' - \dfrac{1}{x^2}y' + x\sin x \cdot y = 1\,; \quad y(1) = 3\,, \quad y(3) = -1.$

32.12. $y'' + xe^x y' + y = \ln x\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(2) = 0.$

32.13. $y'' - \sin\sqrt{x} \cdot y' + e^x y = \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(3) = 1.$

32.14. $y'' - \dfrac{x}{e^x}y' - \dfrac{x}{e^{2x}}y = x^2\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 1.$

32.15. $y'' + x^2 y' - \dfrac{\sin x}{x}y = x^3\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 1.$

32.16. $y'' + 2xy' - \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}y = e^x\,; \quad y(1) = 2\,, \quad y(3) = -2.$

32.17. $y'' - 2y' + x\sin x \cdot \cos\sin x \cdot y = \ln(1 + e^x)\,; \quad y(-3) = 0\,,$ $y(1) = 1.$

32.18. $y'' + x\cos x \cdot y' - xy = 0\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y(2) = 1.$

32.19. $y'' - xy' + \dfrac{x^2}{1+x^2}y = x\ln x\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(3) = 2.$

32.20. $y'' + \dfrac{\sin x}{x}y' + \dfrac{\cos x}{x}y = \dfrac{e^x}{x}\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 1.$

32.21. $y'' - \cos e^x \cdot y' + \sin x \cdot y = 1 - x\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 0.$

32.22. $y'' + 2y' + \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}y = 5x\sin x\,; \quad y(-2) = 0\,, \quad y(-1) = 3.$

32.23. $y'' - x^2\sin^6 x \cdot y' + y = 8x + 5\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = -1.$

32.24. $y'' + \sin^2 x \cdot y = \operatorname{arctg} 2x\,; \quad y(0) = 2\,, \quad y(3) = 0.$

32.25. $y'' + y' + \dfrac{x^2\ln x}{e^x}y = \dfrac{1}{x}\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(5) = 2.$

32.26. $y'' + x\sin x \cdot y' + \left(1 + \cos^2 x\right)y = 1\,; \ y(-1) = -1\,, \ y(1) = 1.$

32.27. $y'' + \dfrac{1}{x}y' + x^7 y = 18\sin e^x\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 0.$

32.28. $y'' - \operatorname{ctg}\dfrac{1}{x} \cdot y' + y = \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(5) = 1.$

32.29. $y'' - \operatorname{arctg} x \cdot y' + \sin x \cdot y = 0\,; \quad y(-1) = -1\,, \quad y(1) = 1.$

32.30. $y'' - x\cos x \cdot y' + e^x y = \cos x \cdot \sin x\,; \ y(-2) = 0\,, \ y(2) = 0.$

Задание №33

Используя какой-либо пакет программ (например, Maple, Matlab, Matcad, Mathematica), найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{d^3y(x)}{dx^3} + 2x\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 15\cos(5x)\frac{dy(x)}{dx} - \sqrt{x}y(x) = \alpha x e^{-\beta x}\sin\gamma x$$

на промежутке $[0; 8.1]$ при заданных ниже начальных значениях $y(0)$, $\dfrac{dy(0)}{dx}$, $\dfrac{d^2y(0)}{dx^2}$; вывести на экран графики и таблицы значений функции — решения $y(x)$ и ее производных $\dfrac{dy(x)}{dx}$, $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$. Шаг изменения аргумента x в таблицах равен 0.1. Использовать метод Рунге—Кутты. Для контроля точности решения провести вычисления и с половинным шагом.

№ варианта	α	β	γ	$y(0)$	$\frac{dy(0)}{dx}$	$\frac{d^2y(0)}{dx^2}$
1	4.1	2.3	12.6	1.23	8.5	-5.7
2	»	»	»	»	-8.21	»
3	»	»	»	-9.3	»	»
4	»	»	»	»	»	6.81
5	»	»	»	4.72	»	»
6	»	2.3	12.6	1.23	8.5	-4.72
7	»	»	8.32	»	»	»
8	»	»	»	»	»	-8.41
9	»	»	»	-6.48	»	»
10	»	»	»	»	7.32	»
11	»	»	»	»	-3.58	»
12	»	»	»	5.41	»	»
13	»	-0.21	»	»	»	»
14	-18.2	»	»	»	»	»
15	»	-0.47	»	»	»	»
16	»	0.53	»	»	»	»
17	»	»	-9.74	»	»	»
18	»	»	»	9.63	»	»
19	»	»	»	»	8.76	»
20	»	»	»	»	»	-20.4
21	16.4	»	»	»	»	»
22	»	0.15	»	»	»	»
23	»	0.65	»	»	»	»
24	»	»	9.21	»	»	»
25	»	»	18.3	»	»	»
26	3.71	0.65	»	»	»	»
27	»	»	»	»	-4.76	»
28	»	»	»	13.2	»	»
29	»	»	»	»	-10.31	-12.7
30	»	»	»	»	»	-20.82

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 276 с.

2. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 470 с.

3. *Пономаренко А.К., Сахаров В.Ю., Степанова Т.В., Черняев П.К.* Учебные и контрольные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 227 с.

Учебное издание

ПОНОМАРЕНКО Аркадий Кузъмич
САХАРОВ Вадим Юрьевич
ЧЕРНЯЕВ Петр Константинович

ИДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Подписано в печать 19.12.2016. Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,79. Тираж 500 экз. (1-й завод — 100 экз.). Заказ № 329

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.

Тел./факс +7(812) 328-44-22

publishing@spbu.ru   publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5