САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Р.Букаты, В.Ю.Сахаров, П.К.Черняев

Диалоги о комплексных числах

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики
в качестве учебного пособия
для студентов нематематических и естественных факультетов

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Шепелявый А.И.* (СПбГУ)
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Утина Н.В.* (СПбГАСУ)

Печатается по рекомендации к опубликованию
Учебно-методической комиссии
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Букаты В.Р., Сахаров В.Ю., Черняев П.К. Диалоги о комплексных числах. Учебное пособие. — СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2020 — 60 с.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям “Экономика”, “Экономика (с углубленным изучением экономики Китая и китайского языка)”, “Управление персоналом”, “Экономика (Экономико-математические методы)”, “Бизнес-информатика”, “Менеджмент”, “Государственное и муниципальное управление”, “Социология”, “Химия”, “Химия, физика и механика материалов”. В пособии рассматривается тема “Комплексные числа” из дисциплины “Математический анализ” или “Высшая математика”. Пособие основано исключительно на тех вопросах, которые задавались студентами экономического факультета СПбГУ на консультациях. Приведённые в пособии решения и объяснения иногда могут показаться слишком подробными, но ведь, если студентам этот материал оказался непонятен “с первого раза”, то, естественно, отвечать приходится не только повторяя фрагмент лекции или практического занятия, а и комментируя его с разных сторон. Некоторые объяснения дополнительно снабжены иллюстрациями.

Настоящее пособие может быть полезно для студентов, изучающих общий курс высшей математики самостоятельно.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Данное пособие создано на основе некоторой части годового курса “Адаптационная математика”, введённого в учебную программу экономического факультета СПбГУ по инициативе О.А.Иванова и П.К.Черняева. Изначально планировалось, что эта дисциплина призвана ликвидировать пробел в знаниях современных студентов, возникший в средней школе, а их уровень поднять до того, который имели их сверстники 30 лет назад. Но в процессе работы оказалось, что у студентов возникает большое количество вопросов и по текущему материалу тоже. Эти вопросы были собраны и отсортированы по темам. Иногда читателю будет казаться, что вопросы слишком простые и их не следовало обсуждать в книге. Если эти вопросы всё-таки были заданы, то это значит, что существуют студенты, которые либо действительно не знали, как решить такую простую задачу, либо хотели убедиться в правильности своих знаний.

Пособие написано в жанре диалога студента, пришедшего на консультацию, и дежурного преподавателя. Иногда, после ответа на вопрос, преподаватель, желая показать обучающемуся проблему с разных сторон, придумывал свой вопрос, слегка изменив задание, которое принёс студент. Некоторые задачи оказались слишком громоздкими. При изложении в учебном пособии они разделены на серии вопросов.

Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных замечаний.

1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вопрос 1.1. Что такое комплексное число?

Ответ. Множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется множество всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел (a, b), с операциями сложения

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

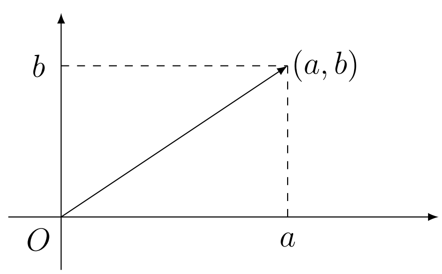
умножения

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

и отношением равенства

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}.$$

Упорядоченная пара вещественных чисел имеет геометрическую интерпретацию. Это точка на координатной плоскости, которую можно рассматривать, как конец вектора, начало которого находится в начале координат.



Учитывая аксиому сложения, ассоциция комплексного числа и вектора ещё более удачна.

Вопрос 1.2. Как определяется операция вычитания для комплексных чисел?

Ответ. По аналогии с операцией вычитания над вещественными числами разностью двух комплексных чисел называтся комплексное число, сумма которого с вычитаемым равно уменьшаемому. То есть разностью $(a, b) - (c, d)$ называется такое комплексное число (x, y), что верно равенство

$$(x, y) + (c, d) = (a, b)$$

По аксиоме сложения имеем

$$(x + c, y + d) = (a, b)$$

И согласно аксиоме равенства

$$\begin{cases} x + c = a, \\ y + d = b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - c, \\ y = b - d. \end{cases}$$

То есть

$$(x, y) = (a - c, b - d).$$

А это означает, что формула для вычитания комплексных чисел выглядит так:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Обратим внимание, что векторы вычитаются по такой же формуле.

Вопрос 1.3. Что получится в результате умножения вещественного числа на комплексное?

Ответ.

$$a \cdot (c, d) = (a, 0) \cdot (c, d) = (ac - 0 \cdot d, ad + 0 \cdot c) = (ac, ad)$$

В вопросе 1.1 было сказано, что комплексное число с точки зрения геометрии может быть трактовано, как вектор. Обратим внимание, что и правило умножения числа на вектор выглядит так же, как результат умножения вещественного числа на комплексное.

Вопрос 1.4. Какая связь комплексных чисел с хорошо изученными вещественными числами?

Ответ. По своим алгебраическим свойствам комплексные числа с нулевой второй компонентой неотличимы от вещественных чисел. Действительно, операции сложения и умножения выполняются так же, как и с вещественными числами:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (ab - 0, 0 + 0) = (ab, 0).$$

Это позволяет положить

$$(a, 0) = a.$$

Вопрос 1.5. Что такое алгебраическая форма записи комплексного числа?

Ответ. Формула для умножения, представленная выше, не очень удобна в использовании. Для упрощения правил вычислений вводят обозначение: мнимую единицу, число $i = (0, 1)$. Теперь появляется возможность записать $(a, b) = a + ib$. Действительно,

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, 0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) =$$

$$= (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b).$$

Заметим, что запись $(a + ib)$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Вопрос 1.6. Чем замечательно число i?

Ответ. Самой известной формулой в комплексных числах является

$$\boxed{i^2 = -1},$$

[5]. Докажем это.

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Вопрос 1.7. В чём заключаются преимущества алгебраической формы записи комплексного числа?

Ответ. Если помнить, что $i^2 = -1$, то можно не заучивать правила-аксиомы работы с комплексными числами. Используя обычные правила работы с многочленами, и заменяя в нужных местах i^2 на (-1), можно получить правильный результат. Проверим это:

$$(a,b) + (c,d) = (a+ib) + (c+id) = a+ib+c+id = a+c+i(b+d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b) - (c,d) = (a+ib) - (c+id) = a+ib-c-id = a-c+i(b-d) = (a-c, b-d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a+ib) \cdot (c+id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac + i(bc+ad) - bd =$$
$$= ac - bd + i(bc+ad) = (ac-bd, ad+bc),$$
$$(a,0) = a + i \cdot 0 = a + 0 = a.$$

Всё правильно.

Вопрос 1.8. Как найти квадратный корень из отрицательного числа?

Ответ. Чтобы не отвлекать читателя от сути вопроса лишними арифметическими действиями, извлечём квадратный корень из (-1). Пусть $\sqrt{-1} = a + ib$, где a и b вещественные числа. Тогда, согласно определению квадратного корня,

$$(a+ib)^2 = -1 \Leftrightarrow a^2 + 2iab - b^2 = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -1 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

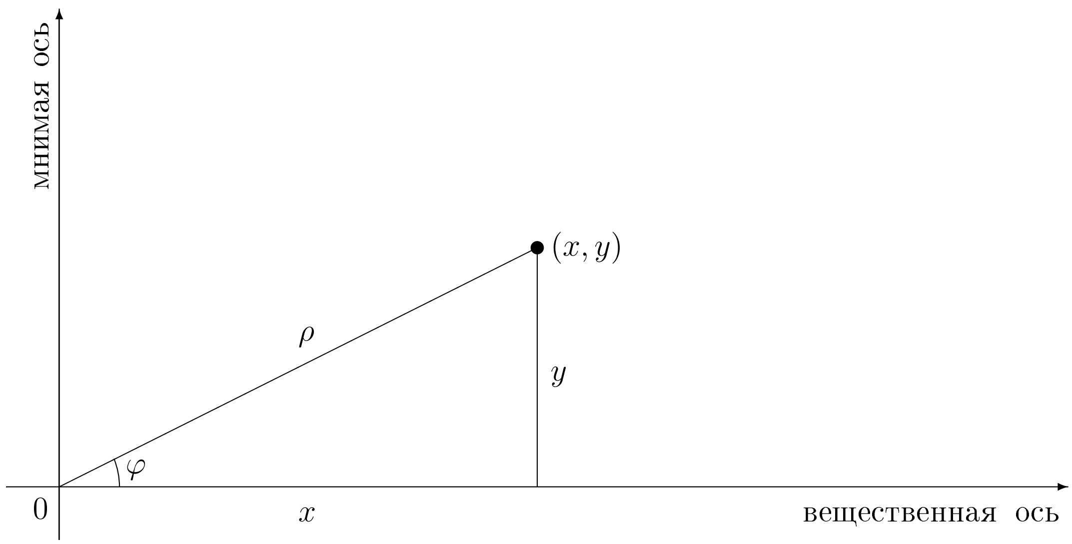
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -1 \\ a = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -1 \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -b^2 = -1 \\ a = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a^2 = -1 \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} b^2 = 1 \\ a = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a \in \varnothing \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array} \right. \\ a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} b = -1 \\ a = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Итак, квадратных корней из минус единицы два: $0 + 1 \cdot i = i$ и $0 - 1 \cdot i = -i$. То есть $\sqrt{-1} = \pm i$. Из других отрицательных чисел корни находятся аналогично. Например, $\sqrt{-36} = \pm 6i$.

Вопрос 1.9. Что такое модуль комплексного числа?

Ответ. Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до точки комплексной плоскости, соответствующей данному комплексному числу.



Вспомним, что комплексное число $(x + iy)$ это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y), которую можно изобразить на координатной плоскости точкой с этими координатами [8]. Для конкретности предположим, что эта точка находится в первой четверти. Опустим из этой точки перпендикуляр на вещественную ось и соединим эту точку с началом координат. Получим прямоугольный треугольник с катетами x и y. Длину гипотенузы этого прямоугольного треугольника обозначим ρ, она и окажется модулем комплексного числа, поскольку является расстоянием от точки (x, y) до начала координат. В частности, можно записать

$$\rho = |x + iy|.$$

Из теоремы Пифагора имеем

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Поэтому

$$\rho = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Очевидно, что $\rho = |x + iy| \geqslant 0$.

Вопрос 1.10. Что такое комплексное сопряжение?

Ответ. Комплексное сопряжение обозначается чертой сверху и определяется так

$$\overline{x + iy} = x - iy.$$

Самая известная формула, в которой участвует комплескное сопряжение, имеет вид

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}.$$

Докажем её. Пусть $z = x + iy$, тогда $\overline{z} = x - iy$. Поэтому

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 =$$

$$= x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

Вопрос 1.11. Может ли число быть комплексно сопряжено самому себе?

Ответ. Фактически нужно решить уравнение

$$z = \overline{z}.$$

Пусть комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$x + iy = \overline{x + iy},$$

$$x + iy = x - iy.$$

Для того, чтобы два комплексных числа были равны, необходимо и достаточно, чтобы их вещественные и мнимые части были соответственно равны. Поэтому

$$\begin{cases} x = x, \\ y = -y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Вывод: такое верно для всех вещественных чисел и только для них.

Вопрос 1.12. Как определятся операция деления для комплексных чисел?

Ответ. По аналогии с операцией деления над вещественными числами частным двух комплексных чисел называтся комплексное число, произведение которого с делителем равно делимому. То есть частным $\dfrac{a+ib}{c+id}$ называется такое комплексное число $(x+iy)$, что верно равенство

$$(x+iy)(c+id) = a + ib$$

В частности, по аксиоме умножения имеем

$$xc - yd + i\cdot(xd + cy) = a + ib$$

И согласно аксиоме равенства, приравняв отдельно вещественную и мнимую части имеем:

$$\begin{cases} xc - yd = a, \\ xd + cy = b. \end{cases}$$

Получилась система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Проще всего записать её решение с помощью теоремы Крамера. Если $\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}}, \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= \tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\,, \\ y &= \tfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,. \end{aligned} \right.$$

То есть

$$x + iy = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

А это означает, что формула для деления комплексных чисел выглядит так:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

Если

$$\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} c &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow c + id = 0,$$

то деление невозможно. Это полностью согласуется с тем, что над полем вещественных чисел деление на ноль тоже невозможно.

Вопрос 1.13. Как на практике делить комплексные числа друг на друга?

Ответ. Самый простой способ — это домножить делимое и делитель на число комплексно сопряжённое делителю.

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \Rrightarrow$$

Замечание. В случае прерываний математических вычислений на комментарии, здесь и далее, вместо обычного знака равенства будем использовать значок $\Rrightarrow$. Это своего рода “гиперссылка”.

Как следует из предыдущего вопроса, в знаменателе образовалось вещественное (ради этого и было совершено домножение) число, равное квадрату модуля делителя. В числителе совершим умножение, помня, что $i^2 = -1$.

$$\Rrightarrow \frac{ac + ibc - iad - i^2bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Почленное деление совершено для того, чтобы выделить вещественную и мнимую части.

Вопрос 1.14. Вычислить $\dfrac{(-4+i)^4}{1-2i}+6-i$. Задача взята из учебного пособия [1].

Ответ.

$$\frac{(-4+i)^4}{1-2i}+6-i=\frac{\left((-4+i)^2\right)^2}{1-2i}+6-i=\frac{\left(16-8i+i^2\right)^2}{1-2i}+6-i=$$

$$=\frac{\left(16-8i-1\right)^2}{1-2i}+6-i=\frac{(15-8i)^2}{1-2i}+6-i=\frac{225-240i+64i^2}{1-2i}+6-i=$$

$$=\frac{225-240i-64}{1-2i}+6-i=\frac{161-240i}{1-2i}+6-i=\frac{(161-240i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}+6-i=$$

$$=\frac{161-240i+322i-480i^2}{1+2^2}+6-i=\frac{161+82i+480}{1+4}+6-i=\frac{641+82i}{5}+6-i=$$

$$=\frac{641+82i+30-5i}{5}=\frac{671+77i}{5}=\frac{671}{5}+i\cdot\frac{77}{5}$$

Вопрос 1.15. Почему комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами “ходят парами”, то есть, если комплексное число z является корнем, то комплексно сопряжённое ему число $\overline{z}$ тоже является корнем?

Ответ. Рассмотрим многочлен степени n с вещественными коэффициентами $P(z)=a_0\cdot z^n+a_1\cdot z^{n-1}+a_2\cdot z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot z+a_n$. Подставим в него комплексное число $z=x+iy$.

$$P(x+iy)=a_0\cdot(x+iy)^n+a_1\cdot(x+iy)^{n-1}+a_2\cdot(x+iy)^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot(x+iy)+a_n.$$

Выполняя все арифметические операции с учётом того, что $i^2=-1$ и выделив вещественную и мнимую части, получим некоторое комплексное число:

$$P(x+iy)=A+i\cdot B.$$

Пусть комплексное число $z=x+iy$ является корнем этого многочлена. Тогда $A+i\cdot B=0$, то есть $\begin{cases}A=0,\\B=0.\end{cases}$ Теперь подставим в этот же многочлен комплексно сопряжённое число $\overline{z}=x-iy$. Получим

$$P(x-iy)=a_0\cdot(x-iy)^n+a_1\cdot(x-iy)^{n-1}+a_2\cdot(x-iy)^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot(x-iy)+a_n.$$

Это арифметическое выражение формально отличается от предыдущего только тем, что в нём число i заменено на противоположное ему число $(-i)$. Поэтому после выполнения всех арифметических операций с учётом того, что $i^2=-1$ и выделения вещественной и мнимой частей, получим тот же самый результат, но только с заменой числа i на $(-i)$:

$$P(x-iy)=A-i\cdot B.$$

Поскольку $\begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \end{cases}$ то

$$P(x - iy) = 0 - i \cdot 0 = 0,$$

то есть комплексно сопряжённое число $\overline{z} = x - iy$ также является корнем этого многочлена.

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вопрос 2.16. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?

Ответ. Обозначим φ угол, образованный положительным направлением вещественной оси и гипотенузой треугольника с вершиной в начале координат (см. чертёж на странице 8). Из тригонометрических соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что

$$x = \rho \cdot \cos\varphi,$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi.$$

Теперь комплексное число можно представить так

$$z = x + iy = \rho \cdot \cos\varphi + i \cdot \rho \cdot \sin\varphi = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Последнее выражение называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.* Угол φ называется *аргументом комплексного числа.* Он не обязательно должен находиться в первой четверти, как на упомянутом чертеже, то есть $\varphi \in \mathbb{R}$.

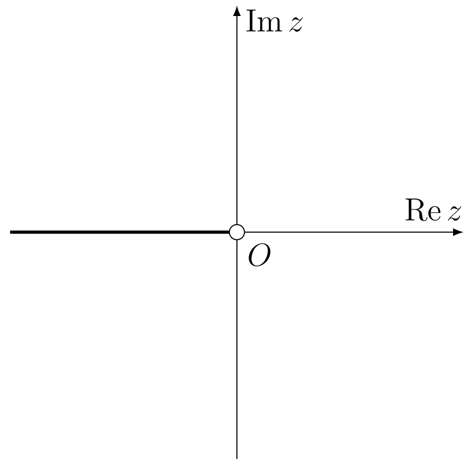
Вопрос 2.17. Что такое $\arg$?

Ответ. Это обозначение аргумента комплексного числа. То есть в терминах предыдущего вопроса $\arg z = \varphi$.

Вопрос 2.18. Найти геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих соотношению

$$\arg z = (1 + 2n)\pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. Из условия следует, что $\arg z = \pi + 2\pi n$. Поскольку аргумент комплексного числа определён с точностью до слагаемого $2\pi n$, то на комплексной плоскости надо изобразить те точки, для которых $\arg z = \pi$. Это точки на отрицательной половине вещественной оси.



Обратите внимание, что начало координат, точка $z = 0$, выделена светлым кружочком, обозначающим, что она не входит в изображаемое множество. Дело в том, что аргумент комплексного числа в начале координат неопределён. А неопределённость не может быть признана равной конкретному числу, в частности π.

Вопрос 2.19. Найти геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\pi}{4}(8n-1) \leqslant \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}(4n+1), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

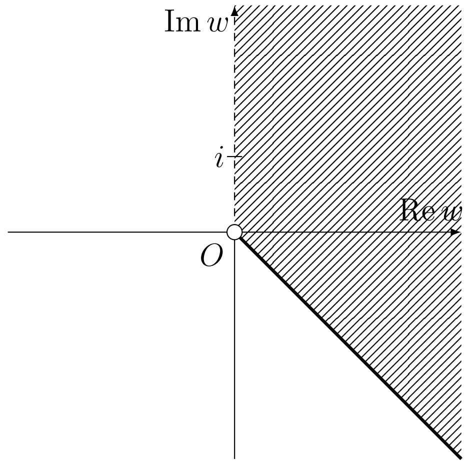
Ответ. Из условия следует, что

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant \arg(z+i) < \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

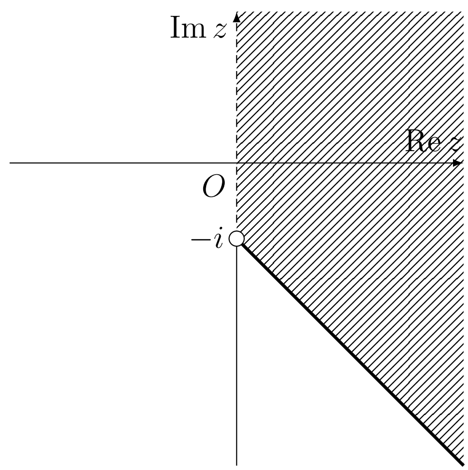
Чтобы разобраться в том, как построить геометрическое место точек, соответствующих этому неравенству, сделаем замену переменной $w = z + i$. Получим

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant \arg w < \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Поскольку аргумент комплексного числа определён с точностью до слагаемого $2\pi n$, то на комплексной плоскости надо изобразить те точки, для которых $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg w < \frac{\pi}{2}$. Это угол в $135°$. Один из ограничивающих угол лучей входит в изображённое множество, а другой луч не входит.



Теперь вернёмся к старой переменной $z = w - i$. При этом заштрихованная часть переместится параллельным переносом. Начало координат окажется в той точке, где $w = i$. То есть рисунок окажется на единицу ниже (на практике проще поднять вещественную ось на единицу).



Вопрос 2.20. Есть ли геометрический смысл в умножении комплексных чисел?

Ответ. Да, есть. Чтобы его найти, нужно предварительно выразить комплексные числа в тригонометрической форме. Предположим, что даны два комплексных числа, уже представленные в тригонометрической форме записи: $z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ и $w = r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$. Тогда их произведение

$$zw = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \cdot r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi) =$$

$$= \rho r \cdot \big(\cos\varphi\cos\psi + i \cdot \sin\varphi\cos\psi + i \cdot \cos\varphi\sin\psi + i^2 \cdot \sin\varphi\sin\psi\big) =$$

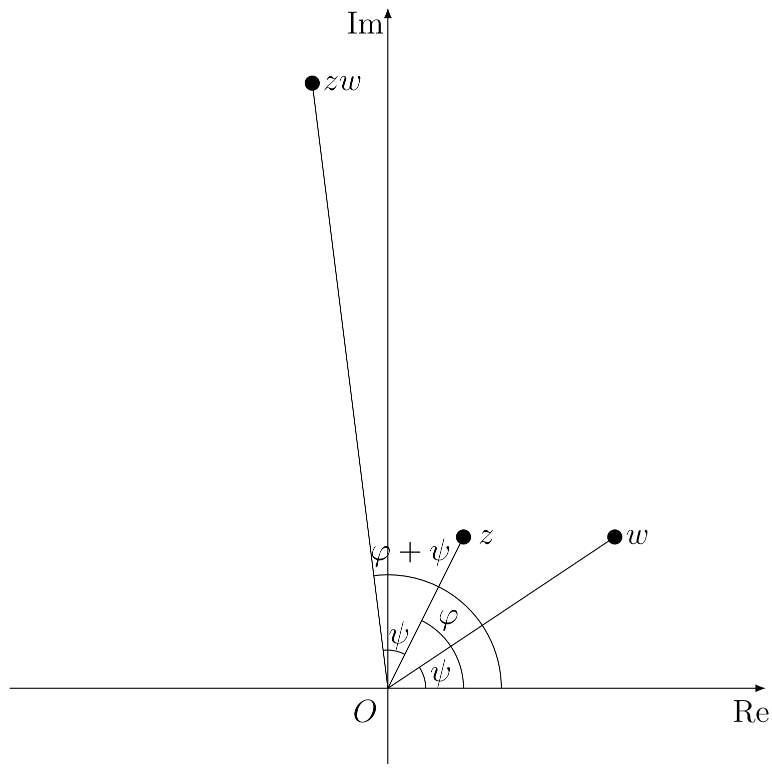
$$= \rho r \cdot (\cos\varphi\cos\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) - \sin\varphi\sin\psi) =$$

$$= \rho r \cdot ((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)) \Rightarrow$$

В скобках образовались известные формулы косинуса и синуса суммы двух углов.

$$\Rightarrow \rho r \cdot ((\cos(\varphi + \psi) + i(\sin(\varphi + \psi)) \,.$$

В результате имеем тригонометрическую форму записи комплексного числа, аргумент которого равен сумме аргументов сомножителей.



Вопрос 2.21. Что получится, если комплексное число умножить на комплексное число, модуль которого равен единице?

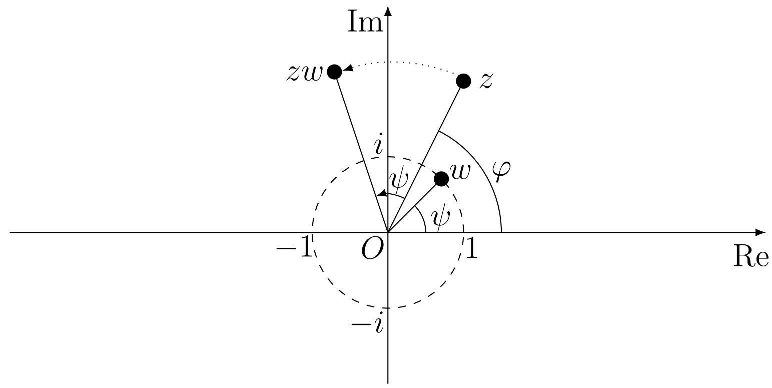
Ответ. В обозначениях предыдущего вопроса будем иметь (при $r = 1$):

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

$$w = \cos\psi + i \cdot \sin\psi,$$

$$zw = \rho \cdot ((\cos(\varphi + \psi) + i(\sin(\varphi + \psi)) \,.$$

Модуль числа не изменился, а аргумент получил "прибавку"(кавычки связаны с тем, что нельзя утверждать, что $\psi > 0$). С геометрической точки зрения это означает поворот против часовой стрелки на угол ψ вокруг начала координат.



Вопрос 2.22. Есть ли геометрический смысл в делении комплексных чисел?

Ответ. Да, тоже есть. Чтобы его найти нужно выразить комплексные числа в тригонометрической форме. Предположим, что даны два комплексных числа, уже представленные в тригонометрической форме записи: $z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ и $w = r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$. Тогда их отношение

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}{r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)} \Rightarrow$$

Напомним, что деление комплексных чисел проще всего осуществить домножив числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряжённое знаменателю (см. вопрос 1.13).

$$\Rightarrow \frac{\rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)(\cos\psi - i \cdot \sin\psi)}{r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)(\cos\psi - i \cdot \sin\psi)} =$$

$$= \frac{\rho \cdot (\cos\varphi\cos\psi + i \cdot \sin\varphi\cos\psi - i \cdot \cos\psi\sin\psi - i^2 \cdot \sin\varphi\sin\psi)}{r \cdot (\cos^2\psi + \sin^2\psi)} =$$

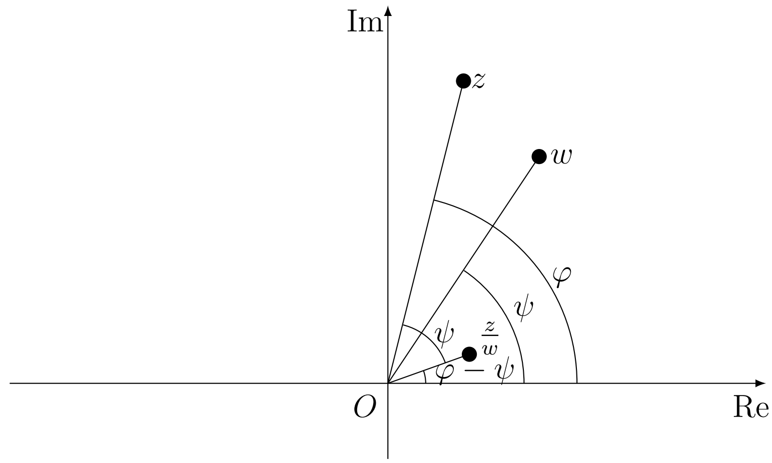
$$= \frac{\rho \cdot (\cos\varphi\cos\psi + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\psi\sin\psi) + \sin\varphi\sin\psi)}{r \cdot 1} =$$

$$= \frac{\rho}{r} \cdot ((\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi - \cos\psi\sin\psi)) \Rightarrow$$

В скобках образовались известные формулы косинуса и синуса разности двух углов

$$\Rightarrow \frac{\rho}{r} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i(\sin(\varphi - \psi))$$

В результате имеем тригонометрическую форму записи комплексного числа, аргумент которого равен разности аргументов делителя и делимого.



Вопрос 2.23. Что получится, если комплексное число разделить на комплексное число, модуль которого равен единице?

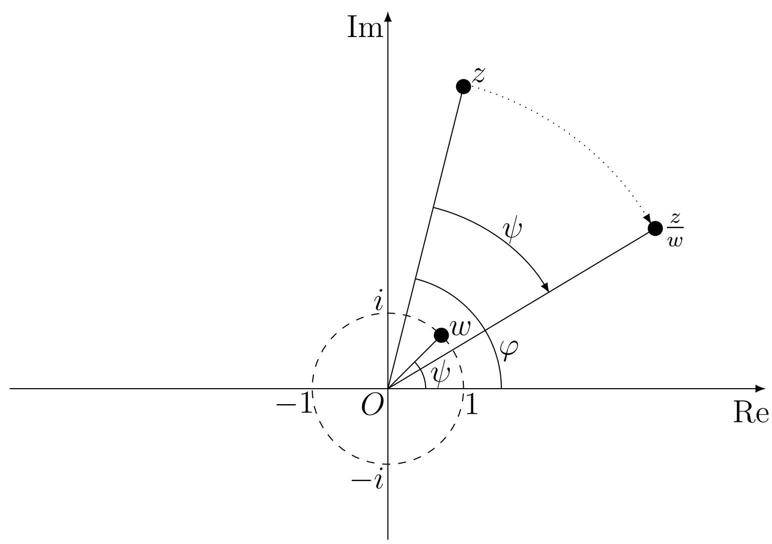
Ответ. В обозначениях предыдущего вопроса будем иметь (при $r = 1$):

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

$$w = \cos\psi + i \cdot \sin\psi,$$

$$\frac{z}{w} = \rho \cdot ((\cos(\varphi - \psi) + i(\sin(\varphi - \psi))\,.$$

Модуль числа не изменился, а аргумент "уменьшился"(кавычки связаны с тем, что нельзя утверждать, что $\psi > 0$). С геометрической точки зрения это означает поворот по часовой стрелке на угол ψ вокруг начала координат.



3. ФОРМУЛА МУАВРА

Вопрос 3.24. Докажите формулу Муавра.

Ответ. Формула Муавра служит для возведения в степень комплексных чисел [6] и имеет вид

$$(\rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi))^n = \rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)\right).$$

Разумеется, степень произведения равна произведению степеней и поэтому содержательной частью формулы Муавра (которую и будем доказывать) является

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi).$$

Формула Муавра доказывается методом математической индукции.

1) Индукционная база. Докажем формулу для $n = 1$.

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^1 = \cos(1\cdot\varphi) + i\cdot\sin(1\cdot\varphi)$$

$$\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi).$$

Это утверждение верное.

2) Индукционный переход. Предположим, что равенство

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)$$

верное. И докажем справедливость этой же формулы, если в неё вместо n подставить $(n+1)$.

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^{n+1} = \cos\left((n+1)\varphi\right) + i\cdot\sin\left((n+1)\varphi\right).$$

Сложение показателей степеней означает произведение

$$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^{n+1} = (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \Rightarrow$$

Теперь согласно индукционному предположению

$$\Rightarrow (\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi))\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \Rightarrow$$

Раскроем скобки

$$\Rightarrow \cos(n\varphi)\cdot\cos\varphi + i\cdot\sin(n\varphi)\cdot\cos\varphi + i\cdot\cos(n\varphi)\cdot\sin\varphi + i^2\cdot\sin(n\varphi)\cdot\sin\varphi \Rightarrow$$

Вспомним, что $\boxed{i^2 = -1}$.

$$\Rightarrow \cos(n\varphi)\cdot\cos\varphi + i\cdot\sin(n\varphi)\cdot\cos\varphi + i\cdot\cos(n\varphi)\cdot\sin\varphi - \sin(n\varphi)\cdot\sin\varphi \Rightarrow$$

Сгруппируем слагаемые по принципу отсутствия или нахождения в них числа i

$$\Rightarrow \cos(n\varphi)\cdot\cos\varphi - \sin(n\varphi)\cdot\sin\varphi + i\left(\sin(n\varphi)\cdot\cos\varphi + \cos(n\varphi)\cdot\sin\varphi\right) \Rightarrow$$

Обратим внимание, что фрагменты полученного выражения напоминают правые части известных тригонометрических формул для косинуса и синуса суммы

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\end{array}}.$$

Поэтому

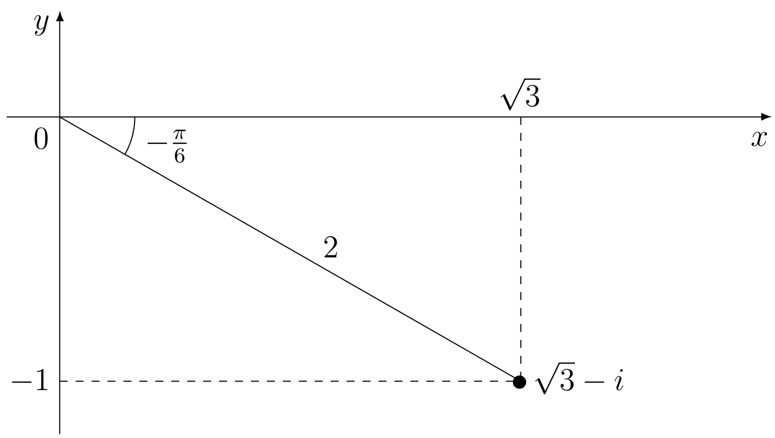
$$\Rightarrow \cos(n\varphi+\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi+\varphi)=\cos\left((n+1)\varphi\right)+i\cdot\sin\left((n+1)\varphi\right).$$

Вопрос 3.25. Приведите пример использования формулы Муавра.

Ответ. В качестве примера найдём $(\sqrt{3}-i)^{10}$. Рассмотрим основание степени, комплексное число $(\sqrt{3}-i)$. Его модуль равен

$$|\sqrt{3}-i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2.$$

Для нахождения аргумента изобразим число $(\sqrt{3}-i)$ на комплексной плоскости.



Получился прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{3}$ и 1. Его острый угол при вершине в начале координат имеет тангенс равный $\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$. В свою очередь это означает, что сам угол равен 30° или $\frac{\pi}{6}$. Учитывая, что точка $(\sqrt{3},-1)$ лежит в четвёртой четверти, аргумент комплексного числа отрицательный и равен $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Теперь можно применить формулу Муавра.

$$(\sqrt{3}-i)^{10}=\left(2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{10}=$$

$$=2^{10}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{10}\Rightarrow$$

Сейчас было бы ошибкой упростить выражение с помощью свойств чётности/нечётности косинуса и синуса $\boxed{\begin{array}{l}\cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\end{array}}$, поскольку для использования формулы Муавра в середине возводимой в степень скобки должен стоять плюс, а не минус.

$$\Rightarrow 1024\cdot\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{10\pi}{6}\right)\right)=$$

$$= 1024 \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$$

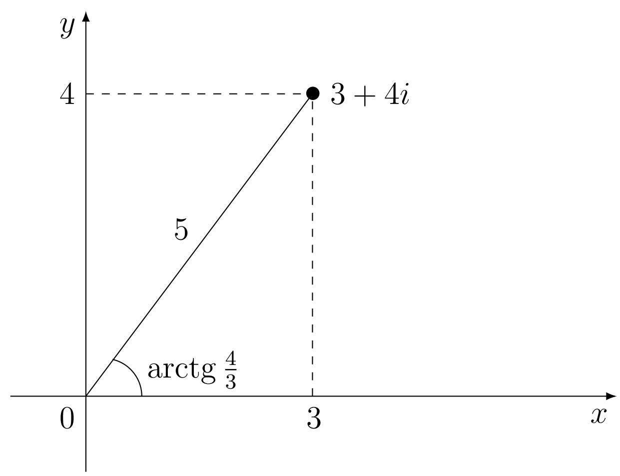
$$= 1024 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{3}\right) = 512 + 512 \cdot \sqrt{3} \cdot i.$$

Вопрос 3.26. Всегда ли при возведении комплексного числа в степень нужно пользоваться формулой Муавра?

Ответ. Справедливости ради, отметим, что предыдущий пример был специально подобран так, чтобы аргумент возводимого в степень комплексного числа был равен произведению некоторого рационального числа на π. Если бы это было не так, то вряд ли следовало рекомендовать совершать возведение в степень с помощью формулы Муавра. Разберём ещё один пример $(3+4i)^8$. Рассмотрим основание степени, комплексное число $(3+4i)$. Его модуль равен

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Для нахождения аргумента изобразим число $(3+4i)$ на комплексной плоскости.



Получился прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Его острый угол при вершине в начале координат имеет тангенс равный $\frac{4}{3}$. В свою очередь, это означает, что сам угол равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Теперь попытаемся применить формулу Муавра.

$$(3+4i)^8 = \left(5 \cdot \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)\right)^8 =$$

$$= 5^8 \cdot \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)^8 =$$

$$= 5^8 \cdot \left(\cos\left(8 \cdot \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \cdot \sin\left(8 \cdot \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

Единственное, что можно делать дальше, это приближённо вычислять значения $\cos\left(8 \cdot \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$ и $\sin\left(8 \cdot \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$.

Заметим, что последовательное возведение три раза в квадрат комплексного числа давало точный ответ, хотя, при последнем возведении, числа становятся достаточно большими.

$$(3+4i)^8 = \left(\left((3+4i)^2\right)^2\right)^2 = \left((9+24i-16)^2\right)^2 = \left((24i-7)^2\right)^2 =$$

$$= (-576 - 336i + 49)^2 = (-527 - 336i)^2 = (527 + 336i)^2 =$$

$$= 277729 + 354144i - 112896 = 164833 + 354144i.$$

Вопрос 3.27. Найти значение выражения $\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Ответ. Покажем альтернативный путь решения. Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, нет необходимости рисовать картинку. Можно вынести за скобку модуль этого комплексного числа (который находится без картинки с помощью теоремы Пифагора), и тогда оставшиеся в скобке числа можно будет трактовать, как косинус и синус некоторого угла.

Преобразуем выражения в скобках для приведения их к тригонометрической форме записи комплексного числа.

$$\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}} = \frac{\left(-2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{15}}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{20}} = \frac{(-2)^{15}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{15}}{\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}} =$$

$$= \frac{-2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{15}}{2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{20}} = \frac{-2^{5}\left(\cos\frac{15\pi}{3}+i\sin\frac{15\pi}{3}\right)}{\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}} =$$

$$= \frac{-32\left(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)\right)}{\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)} = -32.$$

4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вопрос 4.28. Как извлекать корни высших степеней из комплексных чисел?

Ответ. Согласно определению, корнем n-й степени из числа z называется такое число w, что $w^n = z$. Пусть комплексное число, из которого нужно извлечь корень, задано в тригонометрической форме записи: $z = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$. Результат извлечения корня тоже будем искать в тригонометрической форме записи: $w = r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)$. Согласно определению корня n-й степени, справедливо равенство

$$\left(r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)\right)^n = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi).$$

По формуле Муавра имеем:

$$r^n(\cos(n\psi) + i\cdot\sin(n\psi)) = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi).$$

Это равенство возможно только при

$$\begin{cases} r^n = \rho, \\ n\psi = \varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \psi = \frac{\varphi}{n}. \end{cases}$$

Однако, в этой записи важно учитывать, что угол φ многозначный. Об этом подробнее в следующем вопросе.

Фактически доказано, что корень n-й степени может быть записан в виде возведения в степень $\frac{1}{n}$, то есть $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$. Если возвести последнее равенство в натуральную степень, то получится формула для возведения комплексного числа в дробную степень

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m \left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\cdot\sin\frac{m\varphi}{n}\right).$$

Вопрос 4.29. В каком случае при использовании формулы Муавра получается несколько ответов?

Ответ. Сразу скажем, что решение задач из вопросов 3.25 и 3.27 содержало деталь, которая не повлияла на ответ и которую вряд ли кто заметил. Дело в том, что аргумент комплексного числа (а это угол в тригонометрии) определён с точностью до целого числа оборотов, то есть слагаемого $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. То есть аргумент на самом деле равен не только φ, а ещё и $(\varphi + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$. При возведении комплексного числа в натуральную степень это не имело значения. Действительно, если в формуле Муавра вместо φ написать $(\varphi + 2\pi k)$, то фактически ничего не изменится

$$(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\cdot\sin(\varphi + 2\pi k))^n = \cos\left(n\cdot(\varphi + 2\pi k)\right) + i\cdot\sin\left(n\cdot(\varphi + 2\pi k)\right) =$$

$$= \cos(n\varphi + 2\pi nk) + i\cdot\sin(n\varphi + 2\pi nk) = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi),$$

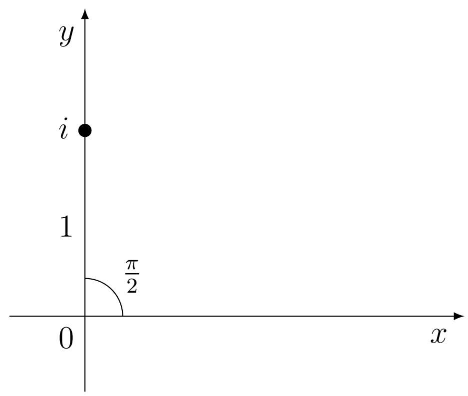
поскольку косинус и синус являются 2π-периодическими функциями, а nk целое число.

Но если комплексное число возводить в дробную степень (в предыдущем вопросе было доказано, что формула Муавра будет справедлива и в этом случае), то ответов получится несколько. В качестве примера найдём $\sqrt[3]{i}$. Кубический корень это и есть не целая степень $\sqrt[3]{i} = i^{\frac{1}{3}}$.

Рассмотрим основание степени, комплексное число i. Его модуль равен

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1.$$

Для нахождения аргумента изобразим число i на комплексной плоскости.



Очевидно $\varphi = \frac{\pi}{2}$. А это означает, что на самом деле $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, , где $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\sqrt[3]{i} = i^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right).$$

Теперь при разных k будут получаться разные ответы. Таких разных ответов будет три (их обычно находят при $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ и обозначают z_0, z_1 и z_2, соответственно), поскольку дальнейшее увеличение k из-за 2π-периодичности косинуса и синуса не будет приводить к появлению новых результатов.

$$z_0 = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2},$$
$$z_1 = \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2},$$
$$z_2 = \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i.$$

Вопрос 4.30. Найти геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих соотношению
$$z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0.$$

Ответ. Решим это уравнение:

$$z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^5 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^5 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z^5 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right) \Leftrightarrow$$

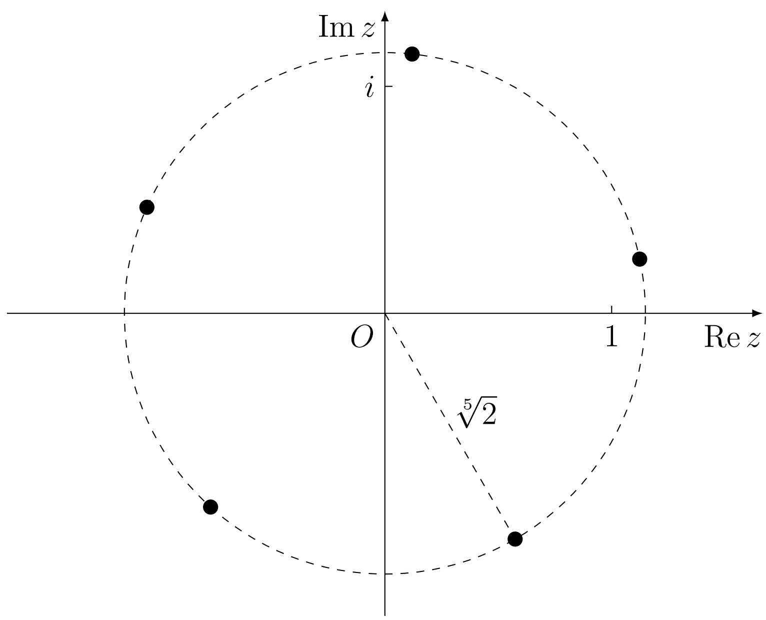
$$\Leftrightarrow z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right)^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}\right)\right).$$

При разных k будут получаться разные ответы. Таких разных ответов будет пять (по степени корня). По аналогии с вопросом 4.30 их можно получить подставляя $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$ и $k=4$.

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{15}\right)\right)\,,\\
z_1 &= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{2\pi}{5}\right)\right)=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{15}+i\sin\tfrac{7\pi}{15}\right)\,,\\
z_2 &= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{4\pi}{5}\right)\right)=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{13\pi}{15}+i\sin\tfrac{13\pi}{15}\right)\,,\\
z_3 &= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{6\pi}{5}\right)\right)=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{19\pi}{15}+i\sin\tfrac{19\pi}{15}\right)\,,\\
z_4 &= \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{15}+\tfrac{8\pi}{5}\right)\right)=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{25\pi}{15}+i\sin\tfrac{25\pi}{15}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{3}+i\sin\tfrac{5\pi}{3}\right)=\sqrt[5]{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Для того чтобы построить на комплексной плоскости это множество из пяти точек, нужно знать, что геометрически корни n-ой степени расположены в вершинах правильного n-угольника, центром которого является начало координат. Естественно, эти вершины расположены на окружности с центром в точке $z=0$. К сожалению, все углы, кроме последнего, (и радиус окружности) имеют величины не являющиеся удобными для построения. Строить придётся приближённо, возможно, использовав компьютер.



5. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вопрос 5.31. Решить уравнение

$$z^2+4z+13=0.$$

Ответ. Это уравнение является квадратным. Найдём его корни с помощью дискриминанта

$$D=4^2-4\cdot1\cdot13=16-52=-36.$$

Корень из отрицательного дискриминанта извлекается достаточно просто (см. вопрос 1.8) и согласно формуле для корней квадратного уравнения

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Проверка. По теореме Виета произведение корней должно быть равно свободному члену приведённого квадратного уравнения, а их сумма равна коэффициенту при первой степени, взятому с противоположным знаком.

$$(-2+3i)(-2-3i) = (-2)^2 - (3i)^2 = 4 + 9 = 13,$$

$$(-2+3i) + (-2-3i) = -4.$$

Всё правильно.

Вопрос 5.32. Решить уравнение

$$z^2 + (8i-2)z - 15 = 0.$$

Задача взята из учебного пособия [1].

Ответ. Это уравнение является квадратным. Найдём его корни с помощью дискриминанта

$$D = (8i-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64i^2 - 32i + 4 + 60 = -64 - 32i + 64 = -32i.$$

Теперь нужно извлечь квадратный корень из этого комплексного числа. Сделаем это по формуле Муавра.

$$\sqrt{D} = \sqrt{-32i} = \sqrt{32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} =$$
$$= \sqrt{32}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right)\right) = \pm 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 4(1-i).$$

Ответы получим по формуле для корней квадратного уравнения

$$\left[\begin{array}{l} z = \frac{-(8i-2)+4(1-i)}{2} = -(4i-1) + 2(1-i) = -4i + 1 + 2 - 2i = 3 - 6i, \\ z = \frac{-(8i-2)-4(1-i)}{2} = -(4i-1) - 2(1-i) = -4i + 1 - 2 + 2i = -1 - 2i. \end{array}\right.$$

Проверка. Непосредственно подставим полученные ответы в исходное уравнение

$$(3-6i)^2 + (8i-2)(3-6i) - 15 = 9 - 36i + 36i^2 + 24i - 6 - 48i^2 + 12i - 15 =$$

$$= -12 - 36 + 48 = 0,$$

$$(-1-2i)^2 + (8i-2)(-1-2i) - 15 = 1 + 4i + 4i^2 - 8i + 2 - 16i^2 + 4i - 15 =$$

$$= -12 - 4 + 16 = 0.$$

Всё верно.

Вопрос 5.33. Решить уравнение

$$z^2 - (4+i)z + 15 + 29i = 0.$$

Задача взята из учебного пособия [1].

Ответ. Это уравнение является квадратным. Найдём его корни с помощью дискриминанта

$$D = (-(4+i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (15+29i) = (4+i)^2 - 4 \cdot (15+29i) = 16 + 8i + i^2 - 60 - 116i =$$
$$= 16 - 1 - 60 - 108i = -45 - 108i.$$

Теперь нужно извлечь квадратный корень из этого комплексного числа. Пусть этим корнем является $(a+ib)$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно определению квадратного корня,

$$(a+ib)^2 = -45 - 108i$$

$$a^2 + 2iab + i^2b^2 = -45 - 108i$$

$$a^2 + 2iab - b^2 = -45 - 108i.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части получим систему

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -45, \\ 2ab = -108. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 45 = 0, \\ ab = -54. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения одну переменную через другую, чтобы подставить в первое уравнение и получить уравнение уже относительно одной переменной. Но сначала докажем, что $a \neq 0$. Действительно, если $a = 0$, то из второго уравнения следует $0 \cdot b = -54 \Leftrightarrow 0 = -54$, что невозможно.

$$\begin{cases} a^2 - \left(\frac{-54}{a}\right)^2 + 45 = 0, \\ b = \frac{-54}{a}. \end{cases}$$

Теперь решим первое уравнение.

$$a^2 - \frac{54^2}{a^2} + 45 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = a^2$. На всякий случай обратим внимание, что $t > 0$

$$t - \frac{54^2}{t} + 45 = 0.$$

Умножим уравнение на t

$$t^2 + 45t - 54^2 = 0.$$

Найдём дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = 45^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-54^2\right) = (9 \cdot 5)^2 + 4 \cdot (9 \cdot 6)^2 = 9^2 \cdot \left(5^2 + 4 \cdot 6^2\right) = 9^2 \cdot (25 + 4 \cdot 36) = \\ = 9^2 \cdot (25 + 144) = 9^2 \cdot 169 = 9^2 \cdot 13^2 = (9 \cdot 13)^2.$$

Теперь

$$t_{1,2} = \frac{-45 \pm 9 \cdot 13}{2} = \frac{-45 \pm 117}{2}.$$

Так как $t > 0$, то подходит только один корень

$$t = \frac{-45 + 117}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

Вспомним, что $t = a^2$. Тогда

$$a^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6, \\ a = -6. \end{array}\right.$$

Каждому из значений a найдём соответствующее значение $b = -\frac{54}{a}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 6, \\ b = -9, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -6, \\ b = 9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Найдены два значения квадратного корня из дискриминанта $\sqrt{D} = a + ib$ основного уравнения.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{D} = 6 - 9i, \\ \sqrt{D} = -6 + 9i. \end{array}\right.$$

То, что корней получилось более одного, это для комплексных чисел совершенно нормально (см. вопросы 3.29, 6.34, 6.35, 7.50). В формуле для корней квадратного уравнения перед корнем из дискриминанта стоит плюс-минус. Это полностью соответствует тому, что полученные два корня из дискриминанта равны друг другу по модулю и противоположны по знаку. Итак, окончательный ответ

$$\left[\begin{array}{l} z = \frac{4+i+6-9i}{2} = \frac{10-8i}{2} = 5-4i, \\ z = \frac{4+i-6+9i}{2} = \frac{-2+10i}{2} = -1+5i. \end{array}\right.$$

Проверка. Чтобы проверить ответы квадратных уравнений, не обязательно непосредственно подставлять их в исходное уравнение, как это было сделано в вопросе 5.32. Можно воспользоваться теоремой Виета. Произведение корней должно быть равно свободному члену приведённого квадратного уравнения, а их сумма равна коэффициенту при первой степени, взятому с противоположным знаком.

$$(5-4i)(-1+5i) = -5+4i+25i-20i^2 = -5+29i+20 = 15+29i,$$

$$(5-4i)+(-1+5i) = 4+i.$$

Всё правильно.

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Вопрос 6.34. Решить уравнение

$$z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0.$$

Изобразить множество его решений на комплексной плоскости.

Ответ. Решим уравнение. Отгадаем корень $z = 1$. Разделим многочлен в левой части на двучлен уголком.

$$\begin{array}{r|l} -\;z^4-4z^3+7z^2-16z+12 & z-1 \\ \underline{z^4-z^3\qquad\qquad\qquad\quad} & z^3-3z^2+4z-12 \\ -\;-3z^3+7z^2-16z+12 & \\ \underline{-3z^3+3z^2\qquad\qquad} & \\ -\;4z^2-16z+12 & \\ \underline{4z^2-4z\qquad} & \\ -\;-12z+12 & \\ \underline{-12z+12} & \\ 0 & \end{array}$$

Это означает, что левая часть уравнения разложена на множители

$$(z-1)\left(z^3-3z^2+4z-12\right) = 0.$$

Отгадаем корень второго множителя $z = 3$. Второй раз произведём деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} -\;z^3-3z^2+4z-12 & z-3 \\ \underline{z^3-3z^2\qquad\qquad} & z^2+4 \\ -\;4z-12 & \\ \underline{4z-12} & \\ 0 & \end{array}$$

Продолжим разложение на множители левой части уравнения

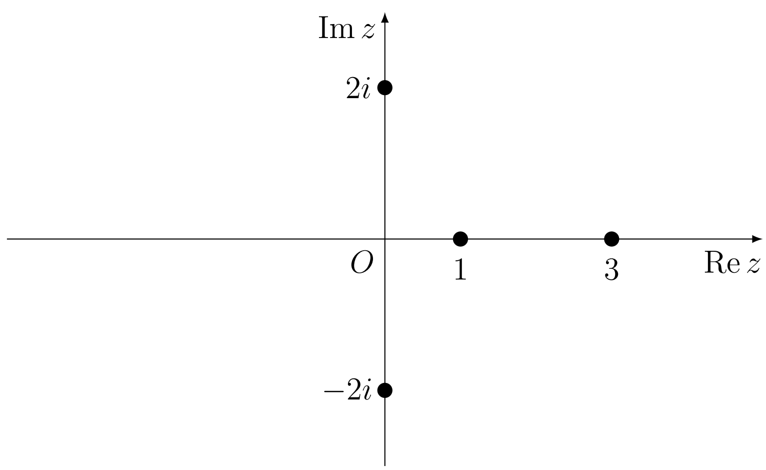
$$(z-1)(z-3)\left(z^2+4\right)=0$$

$$(z-1)(z-3)\left(z^2-(2i)^2\right)=0$$

$$(z-1)(z-3)(z-2i)(z+2i)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} z=1, \\ z=3, \\ z=2i, \\ z=-2i. \end{array}\right.$$

Отметим эти точки на комплексной плоскости.



Вопрос 6.35. Решить уравнение

$$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0.$$

Изобразить множество его решений на комплексной плоскости.

Ответ. Левая часть уравнения раскладывается на множители.

$$z^3\left(z^2+2z+4\right)+8\left(z^2+2z+4\right)=0$$

$$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^3+8\right)=0$$

$$\left(z^2+2z+1+3\right)\left(z^3+2^3\right)=0$$

$$\left((z+1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)(z+2)\left(z^2-2z+4\right)=0$$

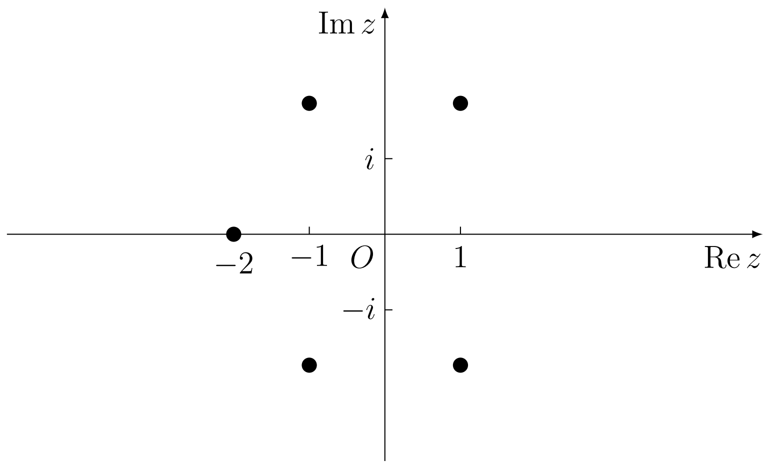
$$\left(z+1-i\sqrt{3}\right)\left(z+1+i\sqrt{3}\right)(z+2)\left(z^2-2z+1+3\right)=0$$

$$\left(z+1-i\sqrt{3}\right)\left(z+1+i\sqrt{3}\right)(z+2)\left((z-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)\right)=0$$

$$\left(z+1-i\sqrt{3}\right)\left(z+1+i\sqrt{3}\right)(z+2)\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z-1+i\sqrt{3}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} z=-1+i\sqrt{3}, \\ z=-1-i\sqrt{3}, \\ z=-2, \\ z=1+i\sqrt{3}, \\ z=1-i\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Отметим эти точки на комплексной плоскости.



Вопрос 6.36. Решить уравнение

$$|z|^2+3z+3=0.$$

Изобразить множество его решений на комплексной плоскости.

Ответ. Сначала решим уравнение. Пусть комплексное число $z=x+iy$, где $x,y\in\mathbb{R}$. Тогда

$$|x+iy|^2+3(x+iy)+3=0.$$

Знаем, что модуль комплексного числа равен квадратному корню из суммы квадратов вещественной и мнимой частей

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+3x+3iy+3=0,$$

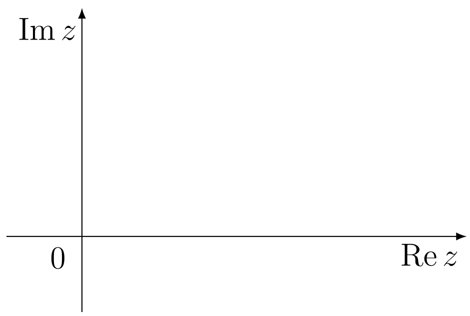
$$x^2+y^2+3x+3iy+3=0.$$

Для того чтобы комплексное число было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы его вещественная и мнимая части обе были равны нулю.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+3x+3=0, \\ 3y=0, \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x^2+3x+3=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Решим получившееся квадратное уравнение с помощью дискриминанта $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 < 0$. Дискриминант оказался отрицательным и это означает, что данное квадратное уравнение не имеет **вещественных** корней. А так как $x \in \mathbb{R}$, то решений вообще нет. Следовательно, не имеет решений система уравнений, а также исходное уравнение. Точнее говоря, решением исходного уравнения является пустое множество. Чтобы изобразить его на комплексной плоскости, достаточно изобразить пустую комплексную плоскость.



Вопрос 6.37. Решить уравнение

$$z^2 + z \cdot |z| + \left|z^2\right| = 0.$$

Изобразить множество его решений на комплексной плоскости.

Ответ. Сначала решим уравнение. Пусть комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x+iy)^2 + (x+iy) \cdot |x+iy| + \left|(x+iy)^2\right| = 0.$$

Знаем, что модуль комплексного числа равен квадратному корню из суммы квадратов вещественной и мнимой частей

$$x^2 + 2ixy + i^2 \cdot y^2 + (x+iy) \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \left|x^2 + 2ixy + i^2 \cdot y^2\right| = 0$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 + (x+iy) \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \left|x^2 + 2ixy - y^2\right| = 0$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 + (x+iy) \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{\left(x^2-y^2\right)^2 + (2xy)^2} = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + iy \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = 0$$

$$x^2 - y^2 + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + 2ixy + iy \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = 0$$

$$x^2 - y^2 + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + i \cdot \left(2xy + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) + \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0.$$

На всякий случай, не забываем, что квадратный корень из квадрата это модуль

$$x^2 - y^2 + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + \left|x^2+y^2\right| + i \cdot \left(2xy + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$x^2 - y^2 + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2 + i \cdot \left(2xy + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$2x^2 + x \cdot \sqrt{x^2+y^2} + i \cdot \left(2xy + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$x\left(2x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + i \cdot y\left(2x + \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$(x+iy) \cdot \left(2x + \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Для того чтобы произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из множителей был равен нулю

$$\left[\begin{array}{l} x + iy = 0, \\ 2x + \sqrt{x^2+y^2} = 0. \end{array}\right.$$

Первая возможность означает, что точка $z = x + iy = 0$ является одним из решений. Рассмотрим вторую возможность

$$2x + \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = -2x.$$

Напомним, что здесь все числа вещественные, и поэтому для соблюдения равенства обязательно выполнение условия $-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. Поскольку при выполнении этого условия обе части уравнения неотрицательные, то можно возвести в квадрат

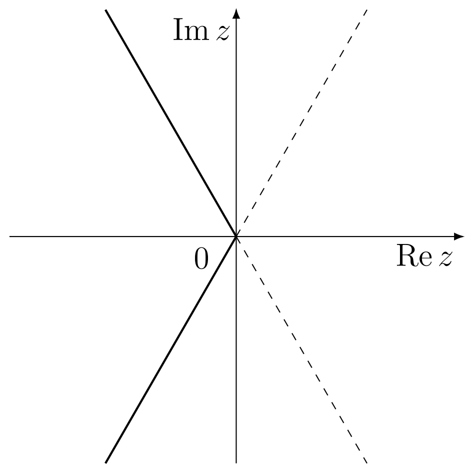
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (-2x)^2$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2$$

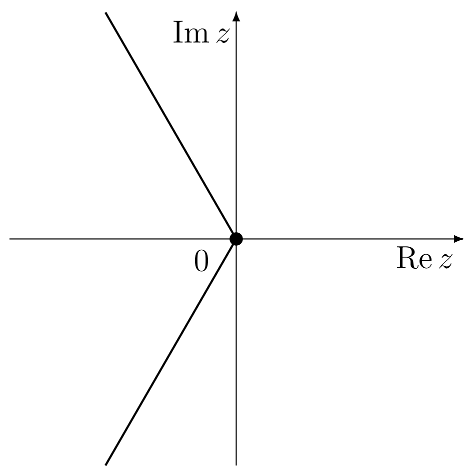
$$y^2 = 3x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3}\,x, \\ y = -\sqrt{3}\,x. \end{array}\right.$$

Оба эти уравнения задают на комплексной плоскости прямые. Правда, в ответ входят эти прямые не целиком, а только те их части, которые удовлетворяют дополнительному условию $x \leqslant 0$.



Точка $z = 0$ принадлежит полученному множеству (углу величиной $120°$). Окончательный рисунок имеет вид



Вопрос 6.38. Найдите все комплексные числа, квадраты которых комплексно сопряжены этим числам. Это задача взята из сборника [9] .

Ответ. Фактически нужно решить уравнение

$$z^2 = \overline{z}.$$

Пусть комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x + iy)^2 = \overline{x + iy},$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 = x - iy.$$

Для того, чтобы два комплексных числа были равны, необходимо и достаточно, чтобы их вещественные и мнимые части были соответственно равны. Поэтому

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2xy = -y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x = y^2, \\ 2xy + y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) = y^2, \\ y(2x+1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) = y^2, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x = -\frac{1}{2}\,, \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x(x-1) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,, \\ y^2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right), \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 1 = 0, \end{array} \right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,, \\ y^2 = \frac{3}{4}\,, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \end{array} \right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,, \\ \left[\begin{array}{l} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \end{array} \right. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\,, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} z = 0, \\ z = 1, \\ z = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{array} \right.$$

Найдено четыре таких числа.

Вопрос 6.39. Найдите все комплексные числа, кубы которых комплексно сопряжены этим числам. Это задача взята из сборника [9] .

Ответ. Фактически нужно решить уравнение

$$z^3 = \overline{z}.$$

Пусть комплексное число $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(x+iy)^3 = \overline{x+iy},$$

$$x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x - iy.$$

Для того, чтобы два комплексных числа были равны, необходимо и достаточно, чтобы их вещественные и мнимые части были соответственно равны. Поэтому

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x, \\ 3x^2y - y^3 = -y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x = 0, \\ 3x^2y - y^3 + y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(x^2 - 3y^2 - 1\right) = 0, \\ y\left(3x^2 - y^2 + 1\right) = 0, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 3y^2 - 1 = 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 1 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 3x^2 - y^2 + 1 = 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=0,\\y^2=1,\end{cases}\\\begin{cases}x^2=1,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x^2-3y^2-1=0,\\8y^2+4=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=0,\\y=\pm1,\end{cases}\\\begin{cases}x=\pm1,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x^2-3y^2-1=0,\\y\in\varnothing,\end{cases}\end{array}\right.$$

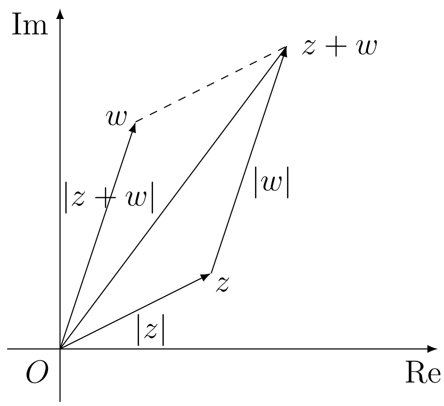
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}\\\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}z=0,\\z=-1,\\z=1,\\z=-i,\\z=i.\end{array}\right.$$

Найдено пять таких чисел.

Вопрос 6.40. Какой геометрический смысл того, что модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме модулей этих комплексных чисел? Это задача взята из сборника [9] .

Ответ. С геометрической точки зрения очевидно, что речь идёт о том случае, когда неравенство треугольника (сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны) превращается в равенство. Комплексные числа соответствуют векторам, которые могут быть сложены по правилу треугольника. Длины двух сторон этого треугольника это модули исходных комплексных чисел (на рисунке названных z и w), а длина третьей стороны это модуль их суммы. Равенство возможно только с том случае, когда треугольник вырождается в линию, то есть векторы сонаправлены. Можно сказать и так: эти комплексные числа находятся на одном луче, выходящим из начала координат.



Вопрос 6.41. Возможно ли решить предыдущую задачу чисто алгебраически?

Ответ. Пусть даны два комплексных числа $z = x + iy$ и $w = a + ib$. Фактически имеем уравнение

$$|z+w| = |z| + |w|$$

$$|x+iy+a+ib| = |x+iy| + |a+ib|$$

$$\big|x+a+i(y+b)\big| = |x+iy| + |a+ib|$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$(x+a)^2+(y+b)^2 = x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2$$

$$x^2+2xa+a^2+y^2+2yb+b^2 = x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2$$

$$2xa+2yb = 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$xa+yb = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Так как левая часть уравнения равна квадратному корню, который неотрицательный, то она тоже должна быть неотрицательной: $xa + yb \geqslant 0$. Поскольку обе части уравнения неотрицательные, то возможно возвести в квадрат.

$$(xa+yb)^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

$$x^2a^2+2xayb+y^2b^2 = \left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)$$

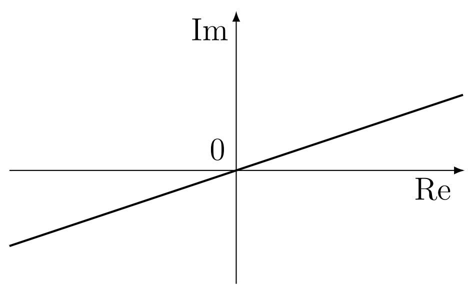
$$x^2a^2 + 2xayb + y^2b^2 = x^2a^2 + y^2a^2 + x^2b^2 + y^2b^2$$
$$2xayb = y^2a^2 + x^2b^2$$
$$y^2a^2 - 2xayb + x^2b^2 = 0$$
$$(ya - xb)^2 = 0$$
$$ya - xb = 0$$
$$ya = xb.$$

Переберём все логически возможные варианты.

1) Пусть $x \neq 0 \ \& \ a \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

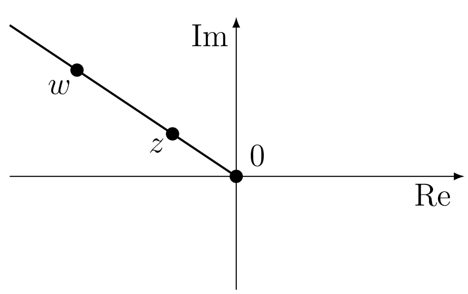
То есть z и w это такие два комплексных числа, у которых одинаковым является отношение мнимой части к вещественной. Геометрически это означает, что комплексные числа z и w находятся на одной прямой, проходящей через начало координат.



Пусть это отношение равно числу $k = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Тогда $y = kx$ и $b = ka$. Проверим выполнение условия

$$xa + yb \geqslant 0$$
$$xa + k^2xa \geqslant 0$$
$$xa\left(1 + k^2\right) \geqslant 0$$
$$xa \geqslant 0$$

То есть вещественные части комплексных чисел чисел z и w одного знака. Геометрически это означает, что комплексные числа z и w находятся на одном луче, выходящим из начала координат.



2) Пусть $x = 0 \ \& \ a \neq 0$. Тогда из равенства $ya = xb \Leftrightarrow ya = 0$ следует, что $y = 0$. То есть $z = 0 + i \cdot 0 = 0$ совпадает с началом координат. В этом случае неравенство $xa + yb \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0$ оказывается выполненным. Нахождение точки z в начале координат никак не противоречит выводу, сделанному в первом пункте: "комплексные числа z и w находятся на одном луче, выходящим из начала координат".

3) Пусть $x = 0 \ \& \ a = 0$. Тогда равенство $ya = xb$ выполнено, а оба комплексных числа z и w являются чисто мнимыми. То есть находятся на вертикальной оси. Из условия $xa + yb \geqslant 0 \Leftrightarrow yb \geqslant 0$ следует, что их мнимые части одного знака. Опять оказывается верным утверждение, что эти комплексные числа находятся на одном луче, выходящим из начала координат.

Вопрос 6.42. Ответ предыдущей задачи может быть сформулирован на уровне тригонометрической формы записи комплексного числа: аргументы комплексных чисел z и w неразличимы. Может быть, проще эту задачу сразу решать, используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел?

Ответ. Пусть даны два комплексных числа $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ и $w = r(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$. Подставим их в уравнение,

$$|z + w| = |z| + |w|,$$

учитывая, что $|z| = \rho$, а $|w| = r$.

$$\big|\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) + r(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)\big| = \rho + r$$

$$\big|\rho\cos\varphi + r\cos\psi + i \cdot (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)\big| = \rho + r$$

$$\sqrt{(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)^2} = \rho + r.$$

Обе части равенства неотрицательные, поэтому можно возвести в квадрат

$$(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)^2 = (\rho + r)^2$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho r\cos\varphi\cos\psi + r^2\cos^2\psi + \rho^2\sin^2\varphi + 2\rho r\sin\varphi\sin\psi + r^2\sin^2\psi = \rho^2 + 2\rho r + r^2$$

$$\rho^2 + 2\rho r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + r^2 = \rho^2 + 2\rho r + r^2$$

$$2\rho r\cos(\varphi - \psi) = 2\rho r.$$

Если какое то из двух рассматриваемых комплексных чисел z или w равно нулю, то равенство удовлетворяется. В противном случае, его можно сократить

$$\cos(\varphi - \psi) = 1$$

$$\varphi - \psi = 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Полученное как раз и означает неразличимость аргументов комплексных чисел z и w.

Вопрос 6.43. Какой геометрический смысл того, что модуль суммы двух комплексных чисел равен модулю разности модулей этих комплексных чисел?

Ответ. Учитывая опыт предыдущей задачи, используем тригонометрическую форму записи комплексных чисел. Пусть даны два комплескных числа $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ и $w = r(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$. Подставим их в уравнение,

$$|z + w| = \big||z| - |w|\big|,$$

учитывая, что $|z| = \rho$, а $|w| = r$.

$$\big|\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) + r(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)\big| = |\rho - r|.$$

Практически все арифметические операции аналогичны предыдущей задаче. Кратко приведём их

$$\sqrt{(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)^2} = |\rho - r|.$$

Обе части равенства неотрицательные, поэтому можно возвести в квадрат

$$(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)^2 = (\rho - r)^2$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho r\cos\varphi\cos\psi + r^2\cos^2\psi + \rho^2\sin^2\varphi + 2\rho r\sin\varphi\sin\psi + r^2\sin^2\psi = \rho^2 - 2\rho r + r^2$$

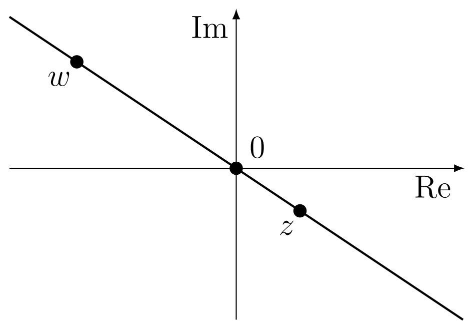
$$2\rho r\cos(\varphi - \psi) = -2\rho r.$$

Если какое-то из двух рассматриваемых комплексных чисел z или w равно нулю, то равенство удовлетворяется. В противном случае, его можно сократить

$$\cos(\varphi - \psi) = -1$$

$$\varphi - \psi = \pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Полученное означает, что аргументы комплексных чисел z и w “диаметрально противоположны”. То есть эти комплексные числа находятся на противонаправленных лучах, выходящих из начала координат.



Вопрос 6.44. Какой геометрический смысл того, что модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей этих комплексных чисел? Это задача взята из сборника [9] .

Ответ. Отличие этой задачи от предыдущей в том, что в правой части равенства отсутствует модуль. Пусть даны два комплексных числа $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ и $w = r(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$. Подставим их в уравнение,

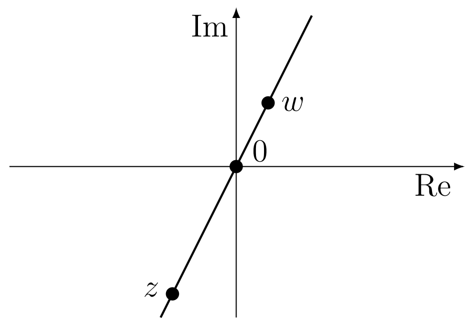
$$|z + w| = |z| - |w|$$

$$\bigl|\rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) + r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)\bigr| = \rho - r$$
$$\sqrt{(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\varphi + r\sin\psi)^2} = \rho - r.$$

Единственным отличием этой задачи от предыдущей в том, что выражение в правой части обязано быть неотрицательным, то есть должно выполняться неравенство $\rho - r \geqslant 0 \Leftrightarrow \rho \geqslant r$. После возведения в квадрат и преобразований получим

$$\varphi - \psi = \pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Комплексные числа аналогично должны находится на противонаправленных лучах, выходящих из начала координат, но число z должно находится от начала координат дальше, чем число w.



Вопрос 6.45. Решите уравнение $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\bigl(|z|^2 + |w|^2\bigr)$. Эту задачу можно найти как в сборнике [9] так и в учебном пособии [2].

Ответ. Представим неизвестные комплексные числа в тригонометрической форме записи $z = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, $w = r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)$. Подставляя их в исходное уравнение, и учитывая, что $|z| = \rho$, а $|w| = r$, получим

$$\bigl|\rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) + r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)\bigr|^2 + \\ + \bigl|\rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) - r(\cos\psi + i\cdot\sin\psi)\bigr|^2 = 2\bigl(\rho^2 + r^2\bigr)$$

$$\bigl|\rho\cos\varphi + r\cos\psi + i\cdot(\rho\sin\psi + r\sin\varphi)\bigr|^2 + \\ + \bigl|\rho\cos\varphi - r\cos\psi + i\cdot(\rho\sin\psi - r\sin\varphi)\bigr|^2 = 2\bigl(\rho^2 + r^2\bigr)$$

$$(\rho\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\psi + r\sin\varphi)^2 + \\ + (\rho\cos\varphi - r\cos\psi)^2 + (\rho\sin\psi - r\sin\varphi)^2 = 2\bigl(\rho^2 + r^2\bigr)$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho r\cos\varphi\cos\psi + r^2\cos^2\psi + \rho^2\sin^2\psi + 2\rho r\sin\psi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + \\ + \rho^2\cos^2\varphi - 2\rho r\cos\varphi\cos\psi + r^2\cos^2\psi + \rho^2\sin^2\psi - 2\rho r\sin\psi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi = \\ = 2\bigl(\rho^2 + r^2\bigr)$$

$$\rho^2 + r^2 + \rho^2 + r^2 = 2\rho^2 + 2r^2$$

$$0 = 0.$$

Получилось, что ответами являются любые комплексные числа.

Естественно, что тот же результат получится при использовании алгебраической форма записи комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = a + ib$:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$$

$$|x + iy + a + ib|^2 + |x + iy - (a + ib)|^2 = 2\big(|x + iy|^2 + |a + ib|^2\big)$$

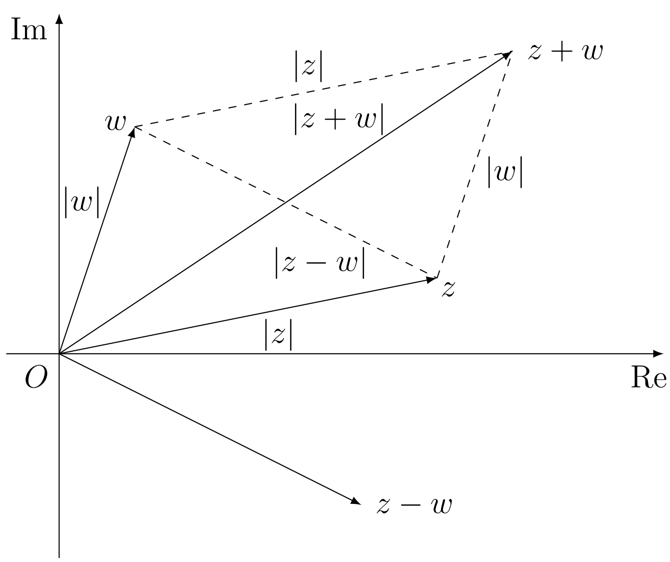
$$|x + a + i(y + b)|^2 + |x - a + i(y - b)|^2 = 2\big(x^2 + y^2 + a^2 + b^2\big)$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 2\big(x^2 + y^2 + a^2 + b^2\big)$$

$$x^2 + 2xa + a^2 + y^2 + 2yb + b^2 + x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2a^2 + 2b^2$$

$$0 = 0.$$

Фактически сейчас была доказана теорема: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Вопрос 7.46. Что такое показательная форма записи комплексного числа?

Ответ. Без доказательства примем формулу Эйлера [8]

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}\,.$$

Тогда

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Произведение $\rho e^{i\varphi}$ называется *показательной формой записи комплексного числа.*

Вопрос 7.47. В какой математической формуле одновременно присутствуют четыре константы: e, π, i и 1?

Ответ. Такая формула действительно существует. Вычислим

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1.$$

Поэтому формула выглядит так:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}\,.$$

Вопрос 7.48. Записать комплексное число $z = \dfrac{\left(i-\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Ответ. Проще всего начать с тригонометрической формы записи

$$z = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{10\pi - \pi + 3\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{10\pi - \pi + 3\pi}{12}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{12\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{12\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\pi + i\cdot\sin\pi\right).$$

Теперь по формуле Эйлера получается показательная форма записи

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Алгебраическая форма окажется самой простой

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\pi + i\cdot\sin\pi\right) = \sqrt{2}(-1 + i\cdot 0) = -\sqrt{2}.$$

Вопрос 7.49. Решить уравнение из вопроса 6.37 с помощью показательной формы записи.

Ответ. Подставим $z = \rho e^{i\varphi}$ в данное уравнение

$$z^2 + z\cdot|z| + \left|z^2\right| = 0.$$

Учитывая, что $|z| = \rho$, получим

$$\left(\rho e^{i\varphi}\right)^2 + \rho e^{i\varphi}\cdot\rho + \left|\left(\rho e^{i\varphi}\right)^2\right| = 0$$

$$\rho^2 e^{2i\varphi} + \rho^2 e^{i\varphi} + \left|\rho^2 e^{2i\varphi}\right| = 0$$
$$\rho^2 e^{2i\varphi} + \rho^2 e^{i\varphi} + \rho^2 = 0$$
$$\rho^2 \left(e^{2i\varphi} + e^{i\varphi} + 1\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \rho^2 = 0, \\ e^{2i\varphi} + e^{i\varphi} + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Во втором уравнении совокупности сделаем замену $t = e^{i\varphi}$. Сейчас было бы ошибкой указать, что t положительно. Дело в том, что t это комплексное число, а для комплексных чисел не введены отношения порядка “больше” и “меньше”, из которых можно было бы вывести понятия “положительное комплексное число” и “отрицательное комплексное число”.

$$\left[\begin{array}{l} \rho = 0, \\ t^2 + t + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Первая возможность приводит к ответу $z = 0$, а второе уравнение решим с помощью дискриминанта

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

То что, дискриминант оказался отрицательным, сейчас не приводит к отсутствию решений (напомним, что t не вещественное число, а комплексное). Как извлекать квадратный корень из отрицательного числа, показано в вопросе 1.8 на странице 7.

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Теперь вспомним, что обозначали за $t = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. Для того, чтобы два комплексных числа были равны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы были соответственно равны их вещественные и мнимые части. Приравнивая вещественные и мнимые части получим систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{2}\,, \\ \sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{cases}$$

Из таблички, содержащей точные значения тригонометрических функций, можно получить, что $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$. При этом ρ любое неотрицательное число. На комплексной плоскости это два луча (которые содержат уже найденную точку $z = 0$), нарисованные в ответе на вопрос 6.37.

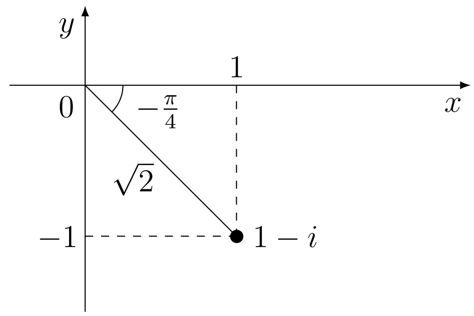
Вопрос 7.50. Вычислить $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Ответ. Отдельно найдём модуль и аргумент для числителя и знаменателя подкоренного выражения.

1) Рассмотрим комплексное число $(1-i)$. Его модуль равен

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Для нахождения аргумента изобразим число $(1-i)$ на комплексной плоскости.

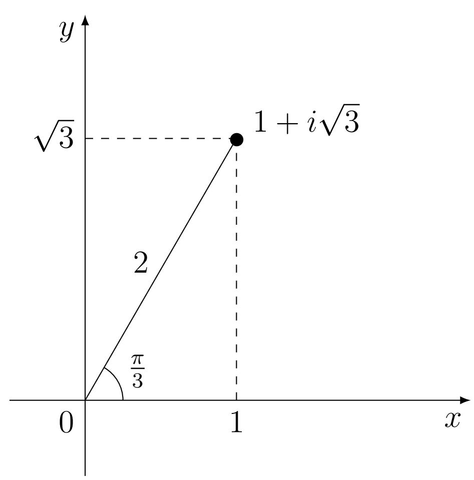


Получился прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1. Этот прямоугольный треугольник равнобедренный. Его острый угол при вершине в начале координат равен $\frac{\pi}{4}$. Учитывая, что точка $(1,-1)$ лежит в четвёртой четверти, в качестве аргумента комплексного числа можно взять отрицательное число $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. После прибавления целого числа оборотов получим $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) Рассмотрим теперь комплексное число $(1+i\sqrt{3})$. Его модуль равен

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Для нахождения аргумента изобразим число $(1+i\sqrt{3})$ на комплексной плоскости.



Получился прямоугольный треугольник с катетами 1 и $\sqrt{3}$. Его острый угол при вершине в начале координат равен $\frac{\pi}{3}$. Поэтому $\varphi = \frac{\pi}{3}$. А точнее $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. На всякий случай, обратим внимание, что из-за независимости друг от друга циклических прибавок, нельзя использовать одинаковые буквы в слагаемых $2\pi k$ и $2\pi n$.

3) Имеем

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\right)}}\Rightarrow$$

Перейдём к показательной форме записи комплексных чисел

$$\Rightarrow\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}}{2e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)}}}\Rightarrow$$

Учтём, что при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются.

$$\Rightarrow\sqrt[6]{\frac{e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi k-2\pi n\right)}}{\sqrt{2}}}=\sqrt[6]{\frac{e^{i\cdot\left(-\frac{7\pi}{12}+2\pi(k-n)\right)}}{\sqrt{2}}}=\frac{\left(e^{i\cdot\left(-\frac{7\pi}{12}+2\pi(k-n)\right)}\right)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{2}}\Rightarrow$$

При возведении степени в степень показатели перемножаются

$$\Rightarrow\frac{e^{i\cdot\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi(k-n)}{3}\right)}}{\sqrt[12]{2}}\Rightarrow$$

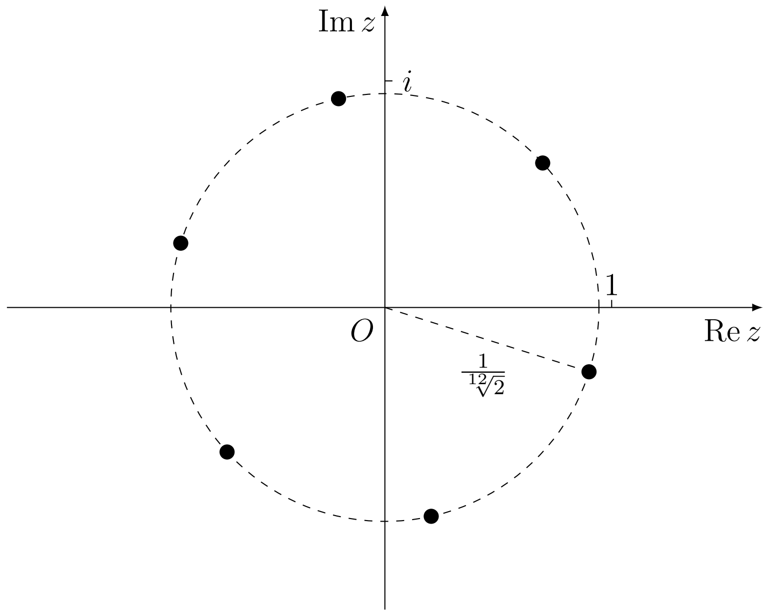
Чтобы получить возможность хоть как-то вычислять ответы, нужно перейти обратно в тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$\Rightarrow\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi(k-n)}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi(k-n)}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}.$$

Поскольку разность целых чисел k и n тоже целая, то придавая ей значения шести последовательных целых чисел (обычно начинают с нуля), можно получить шесть ответов

$$\begin{aligned}
z_0&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{72}\right)-i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}},\\
z_1&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{17\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{17\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}},\\
z_2&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{41\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{41\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}},\\
z_3&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{3\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{3\pi}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{65\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{65\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}},\\
z_4&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{89\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{89\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}},\\
z_5&=\frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{7\pi}{72}+\frac{5\pi}{3}\right)}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\cos\left(\frac{113\pi}{72}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{113\pi}{72}\right)}{\sqrt[12]{2}}.
\end{aligned}$$

Еще раз подчеркнём, что корней n-й степени из комплексного числа существует ровно n. Все они лежат на окружности с центром в начале координат с радиусом $r=|z_i|$ и являются вершинами правильного n-угольника.



Вопрос 7.51. Найдите суммы синусов $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + ... + \sin(nx)$ и косинусов $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + ... + \cos(nx)$.

Ответ. Составим арифметическое выражение

$$\cos x + \cos(2x) + ... + \cos(nx) + i \cdot \big(\sin x + \sin(2x) + ... + \sin(nx)\big) \Rightarrow$$

Запомним, что сумма косинусов является вещественной частью этого выражения, а сумма синусов мнимой. Раскроем скобки.

$$\Rightarrow \cos x + \cos(2x) + ... + \cos(nx) + i \cdot \sin x + i \cdot \sin(2x) + ... + i \cdot \sin(nx) \Rightarrow$$

Перегруппируем слагаемые, собрав вместе пары функций с одинаковыми аргументами.

$$\Rightarrow \big(\cos x + i \cdot \sin x\big) + \big(\cos(2x) + i \cdot \sin(2x)\big) + ... + \big(\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)\big) \Rightarrow$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\boxed{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}}\,.$$

$$\Rightarrow e^{ix} + e^{i2x} + ... + e^{inx} \Rightarrow$$

Обратим внимание, что получилась сумма членов геометрической прогрессии. Первый член прогрессии $b_1 = e^{ix}$, знаменатель прогрессии $q = e^{ix}$. Вспомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$\boxed{S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ix}\left(e^{inx}-1\right)}{e^{ix}-1} \Rightarrow$$

Раскроем скобки

$$\Rightarrow \frac{e^{inx+ix}-e^{ix}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{ix(n+1)}-e^{ix}}{e^{ix}-1} \Rightarrow$$

Воспользуемся ещё раз формулой Эйлера, но на этот раз в обратную сторону

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\big((n+1)x\big) + i\cdot\sin\big((n+1)x\big) - (\cos x + i\cdot\sin x)}{\cos x + i\cdot\sin x - 1} \Rightarrow$$

Соберём в числителе и в знаменателе отдельно вещественные и мнимые части

$$\Rightarrow \frac{\cos\big((n+1)x\big) - \cos x + i\cdot\big(\sin\big((n+1)x\big) - \sin x\big)}{\cos x - 1 + i\cdot\sin x} \Rightarrow$$

Чтобы привести дробь к арифметической форме записи комплексного числа умножим числитель и знаменатель дроби на выражение комплексно-сопряжённое знаменателю. При этом в знаменателе образуется произведение суммы на разность, что равно разности квадратов.

$$\Rightarrow \frac{\Big(\cos\big((n+1)x\big) - \cos x + i\cdot\big(\sin\big((n+1)x\big) - \sin x\big)\Big)\big(\cos x - 1 - i\cdot\sin x\big)}{\big(\cos x - 1 + i\cdot\sin x\big)\big(\cos x - 1 - i\cdot\sin x\big)} \Rightarrow$$

Раскроем скобки в числителе и в знаменателе. Выражение окажется слишком длинным, и чтобы иметь возможность его записать, представим дробь в виде произведения.

$$\Rightarrow \frac{1}{(\cos x-1)^2-(i\cdot\sin x)^2}\cdot\Bigg(\cos\big((n+1)x\big)\cdot\cos x - \cos\big((n+1)x\big) -$$
$$- i\cdot\cos\big((n+1)x\big)\cdot\sin x - \cos^2 x + \cos x + i\cdot\sin x\cdot\cos x + i\cdot\sin\big((n+1)x\big)\cdot\cos x -$$
$$- i\cdot\sin\big((n+1)x\big) - i^2\cdot\sin\big((n+1)x\big)\cdot\sin x - i\cdot\sin x\cdot\cos x + i\cdot\sin x + i^2\cdot\sin^2 x\Bigg) \Rightarrow$$

Приведём подобные слагаемые вспомнив, что

$$\boxed{i^2 = -1}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x - 2\cos x + 1 + \sin^2 x}\cdot\Bigg(\cos\big((n+1)x\big)\cdot\cos x - \cos\big((n+1)x\big) -$$
$$- i\cdot\cos\big((n+1)x\big)\cdot\sin x - \cos^2 x + \cos x + i\cdot\sin\big((n+1)x\big)\cdot\cos x -$$
$$- i\cdot\sin\big((n+1)x\big) + \sin\big((n+1)x\big)\cdot\sin x + i\cdot\sin x - \sin^2 x\Bigg) \Rightarrow$$

Сумма квадратов косинуса и синуса одного и того же угла равна единице.

$$\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-2\cos x+1}\cdot\Big(\cos\big((n+1)x\big)\cdot\cos x+\sin\big((n+1)x\big)\cdot\sin x+\cos x-\cos\big((n+1)x\big)+$$

$$+i\cdot\left(\sin\big((n+1)x\big)\cdot\cos x-\cos\big((n+1)x\big)\cdot\sin x\right)+i\cdot\left(\sin x-\sin\big((n+1)x\big)\right)-1\Big)\Rightarrow$$

Воспользуемся формулами тригонометрии

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)\\ \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\end{array}}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-2\cos x}\cdot\left(\cos\big((n+1)x-x\big)-2\cdot\sin\frac{x-(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x+(n+1)x}{2}+\right.$$

$$\left.+\,i\cdot\sin\big((n+1)x-x\big)+i\cdot\left(2\cdot\sin\frac{x-(n+1)x}{2}\cdot\cos\frac{x+(n+1)x}{2}\right)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2-2\cos x}\cdot\left(\cos(nx)-2\cdot\sin\frac{-nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+2)x}{2}+i\cdot\sin(nx)+\right.$$

$$\left.+\,2i\cdot\sin\frac{-nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+2)x}{2}-1\right)\Rightarrow$$

Вынесем минус из под знака синуса в силу его нечётности. Используем формулы косинуса и синуса двойных углов. Причём для косинуса двойного угла выберем формулу, приводящую к синусу.

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2\alpha)=1-2\cdot\sin^2\alpha\\ \sin(2\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\end{array}}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-2\left(1-2\cdot\sin^2\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(1-2\cdot\sin^2\frac{nx}{2}+2\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+2)x}{2}+\right.$$

$$\left.+\,i\cdot 2\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}-2i\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+2)x}{2}-1\right)=$$

$$= \frac{1}{2-2+4\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\left(-2\cdot\sin^2\frac{nx}{2}+2\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+2)x}{2}+\right.$$

$$\left.+2i\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}-2i\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+2)x}{2}\right)\Rightarrow$$

Вынесем за скобку общий множитель из числителя.

$$\Rightarrow\frac{2\cdot\sin\frac{nx}{2}\left(-\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{(n+2)x}{2}+i\cdot\cos\frac{nx}{2}-i\cdot\cos\frac{(n+2)x}{2}\right)}{4\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

Сократим дробь.

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{(n+2)x}{2}-\sin\frac{nx}{2}+i\cdot\left(\cos\frac{nx}{2}-\cos\frac{(n+2)x}{2}\right)\right)}{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

Ещё раз используем формулы разности синусов и разности косинусов.

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\end{array}}\,.$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(2\cdot\sin\frac{(n+2)x-nx}{4}\cdot\cos\frac{(n+2)x+nx}{4}-i\cdot2\cdot\sin\frac{nx-(n+2)x}{4}\cdot\sin\frac{nx+(n+2)x}{4}\right)}{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

Сократим дробь ещё на двойку и приведём подобные слагаемые под знаками тригонометрических функций.

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{2x}{4}\cdot\cos\frac{(2n+2)x}{4}-i\cdot\sin\frac{-2x}{4}\cdot\sin\frac{(2n+2)x}{4}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

Сократим дробь на синус половинного угла.

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

Почленно поделим числитель на знаменатель, чтобы представить полученное комплексное выражение в алгебраической форме записи.

$$\Rightarrow\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+i\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Вспомним, что были нужны вещественная и мнимая части, которые равны суммам косинусов и синусов, соответственно.

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + ... + \cos(nx) &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\ \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + ... + \sin(nx) &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}}.$$

Вопрос 7.52. Уже много раз упоминалось, что корни из комплексноного числа лежат в вершинах правильного многоугольника, центр которого находится в начале координат. Если использовать векторное представление комплексного числа, то практически очевидно, что сумма этих корней равна нулю. Можно ли это доказать алгебраически? Эта задача взята из учебного пособия [4].

Ответ. Пусть дано комплексное число $w = \rho e^{i\varphi}$. Обозначим корни n-ой степени из него $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$. Здесь $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $k \in \{0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, n-1\}$. Нужно доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} = 0$. Докажем более общее утверждение, о том что равна нулю сумма корней из комплексного числа, возведённых в любую целую ненулевую степень (и отрицательную тоже).

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^m = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)m}{n}} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} + \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i(\varphi+2\pi)m}{n}} + \ldots + \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i(\varphi+2\pi(n-1))m}{n}} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} + \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} e^{\frac{2i\pi m}{n}} + \ldots + \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(e^{\frac{2i\pi m}{n}}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

Это сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}}$ и знаменателем $q = e^{\frac{2i\pi m}{n}}$. Согласно известной формуле $\boxed{S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}}$ имеем

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(\left(e^{\frac{2i\pi m}{n}}\right)^n - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} = \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(e^{\frac{2i\pi mn}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} = \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(e^{2i\pi m} - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(\cos(2\pi m) + i\cdot\sin(2\pi m) - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} = \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \left(1 + i\cdot 0 - 1\right)}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^m e^{\frac{i\varphi m}{n}} \cdot 0}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} = \frac{0}{e^{\frac{2i\pi m}{n}} - 1} = 0.$$

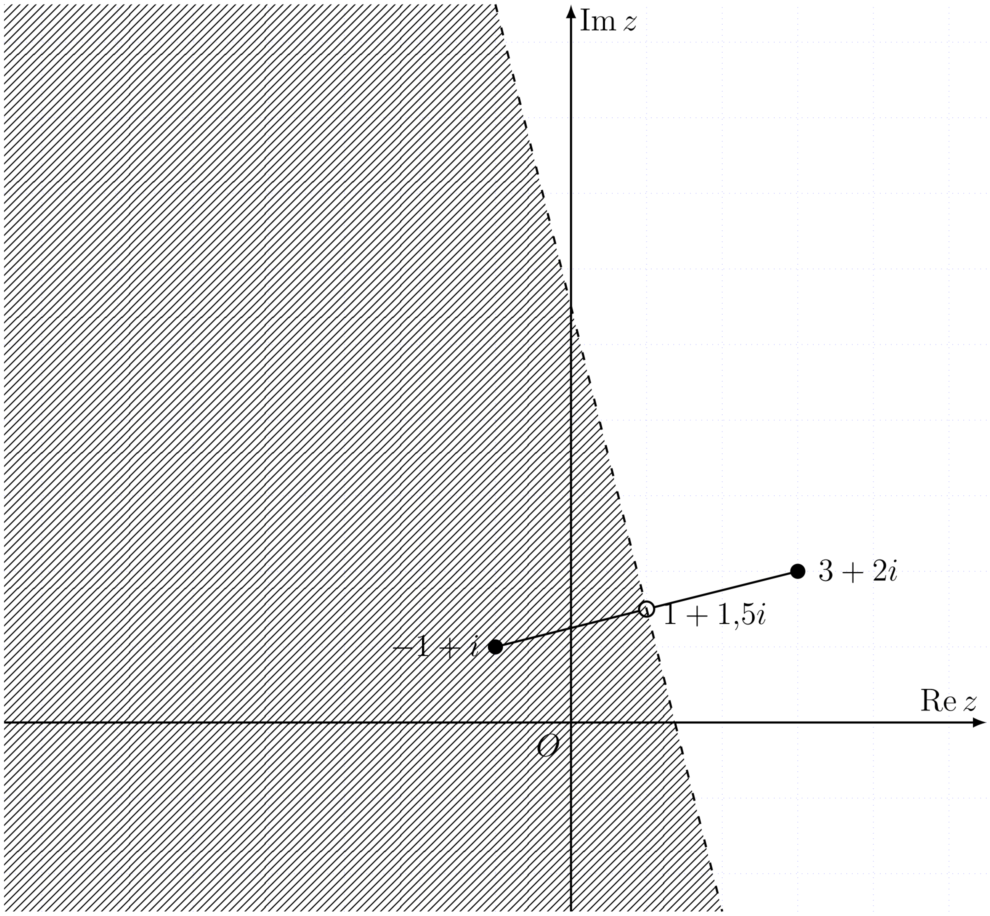
Вопрос 8.53. Изобразить на комплексной плоскости такие числа z, что

$$|z+1-i| < |3-z+2i| < |z+i|.$$

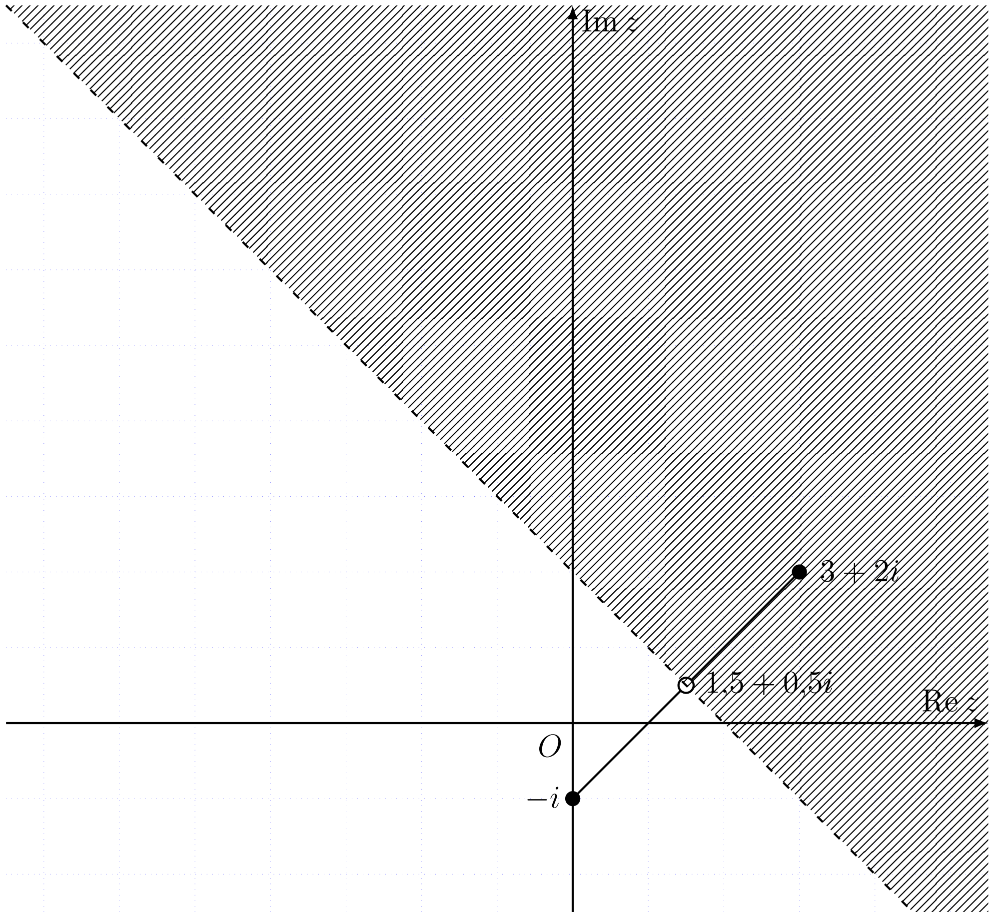
Ответ. Перепишем подмодульные выражения в виде разностей $\big|z-(-1+i)\big| < \big|z-(3+2i)\big| < \big|z-(-i)\big|$. Это сделано для того, чтобы все три части неравенства приобрели геометрический смысл расстояний от точки комплексной плоскости z до точек $(-1+i)$, $(3+2i)$ и $(-i)$, соответственно. Из школьной геометрии известно, что геометрическим местом точек, расстояние от которых до одной точки меньше, чем до другой, является полуплоскость (естественно, та полуплоскость, которая содержит более близкую точку). Границей этой полуплоскости является серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего данные точки.

Построим две полуплоскости, соответствующие неравенствам $\big|z-(-1+i)\big| < \big|z-(3+2i)\big|$ и $\big|z-(3+2i)\big| < \big|z-(-i)\big|$. Серединные перпендикуляры будем строить не с помощью циркуля и линейки, а используя понятие углового коэффициента.

Рассмотрим отрезок, соединяющий точки $(-1+i)$ и $(3+2i)$. Очевидно, его середина равна среднему арифметическому его концов $\frac{(-1+i)+(3+2i)}{2} = \frac{2+3i}{2} = 1+1,5i$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через эти две точки, равен $\frac{2-1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$. Угловой коэффициент перпендикуляра к этой прямой равен $-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = -4$. Поэтому формула для серединного перпендикуляра имеет вид $y = 1,5 - 4(x-1)$, где для краткости обозначено $y = \operatorname{Im} z$, а $x = \operatorname{Re} z$. И геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому неравенству $\big|z-(-1+i)\big| < \big|z-(3+2i)\big|$ будет открытая (не содержащая ограничивающую прямую, из-за строгости неравенства в условии) полуплоскость, в которой находится точка $(-1+i)$.

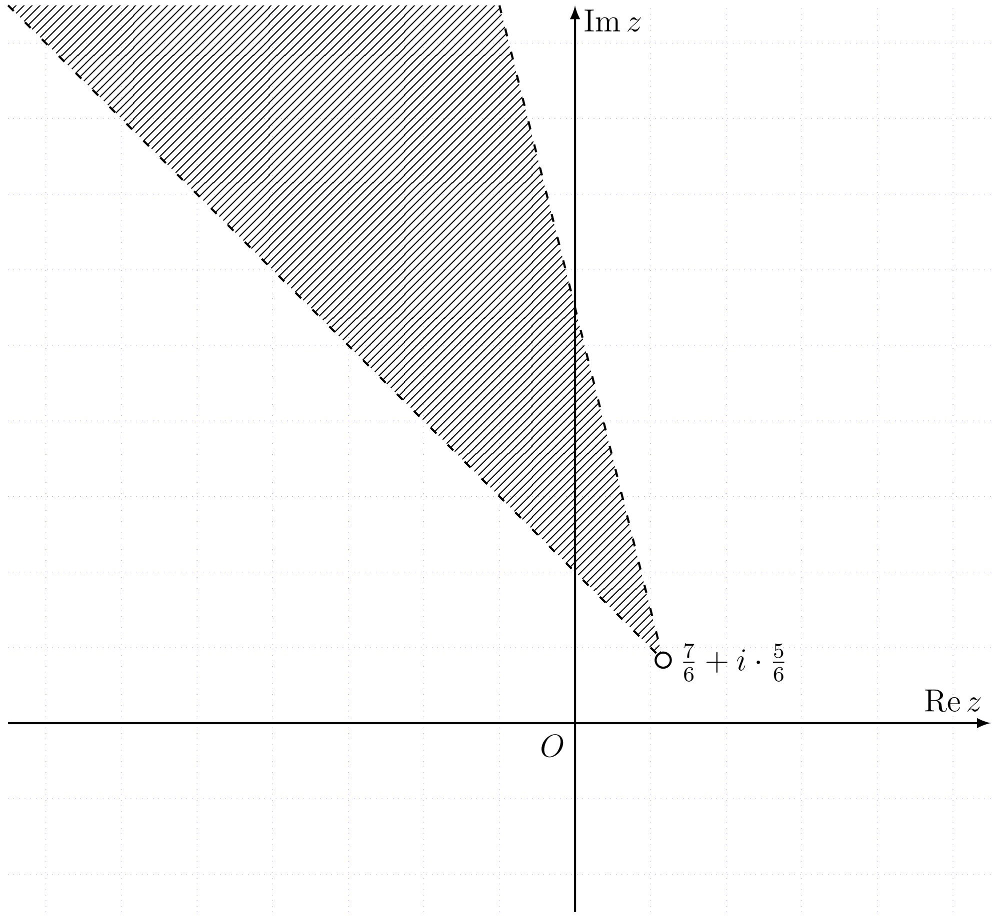


Теперь рассмотрим отрезок, соединяющий точки $(3+2i)$ и $(-i)$. Его середина равна $\frac{(3+2i)+(-i)}{2} = \frac{3+i}{2} = 1,5+0,5i$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через эти две точки, равен $\frac{2-(-1)}{3-0} = 1$. Угловой коэффициент перпендикуляра к этой прямой равен $-\frac{1}{1} = -1$. Поэтому формула для серединного перпендикуляра имеет вид $y = 0,5-(x-1,5)$. И геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому неравенству $|z-(3+2i)| < |z-(-i)|$ будет открытая (не содержащая ограничивающую прямую, из-за строгости неравенства в условии) полуплоскость, в которой находится точка $(3+2i)$.



Теперь вспомним, что неравенство в условии было двойное, и пересечём полученные открытые полуплоскости. В результате образуется внутренняя из зон, ограниченных углом. Вершина угла, и сам угол, естественно, не принадлежат изображённому множеству. Чтобы получить координаты вершины, нужно решить систему

$$\begin{cases} y = 1,5 - 4(x-1) \\ y = 0,5 - (x - 1,5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2{,}5 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6}, \\ y = \frac{5}{6}. \end{cases}$$



Вопрос 8.54. Возможно ли решить предыдущую задачу, если не догадаться до геометрического смысла модулей, данных в условии?

Ответ. Возможно. Перейдём к вещественным координатам по формуле $z = x + iy$, где x, $y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|z + 1 - i| < |3 - z + 2i| < |z + i|$$

$$\left|x + iy + 1 - i\right| < \left|3 - (x + iy) + 2i\right| < \left|x + iy + i\right|$$

$$\left|x + 1 + i(y - 1)\right| < \left|3 - x + i(2 - y)\right| < \left|x + i(y + 1)\right|$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} < \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2} < \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 < 9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2 < x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$2x - 2y + 2 < -6x - 4y + 13 < 2y + 1$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2 < -6x - 4y + 13 \\ -6x - 4y + 13 < 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 2y - 11 < 0 \\ -6x - 6y + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - \frac{11}{2} < 0 \\ -x - y + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -4x + \frac{11}{2}\,, \\ y > -x + 2. \end{cases}$$

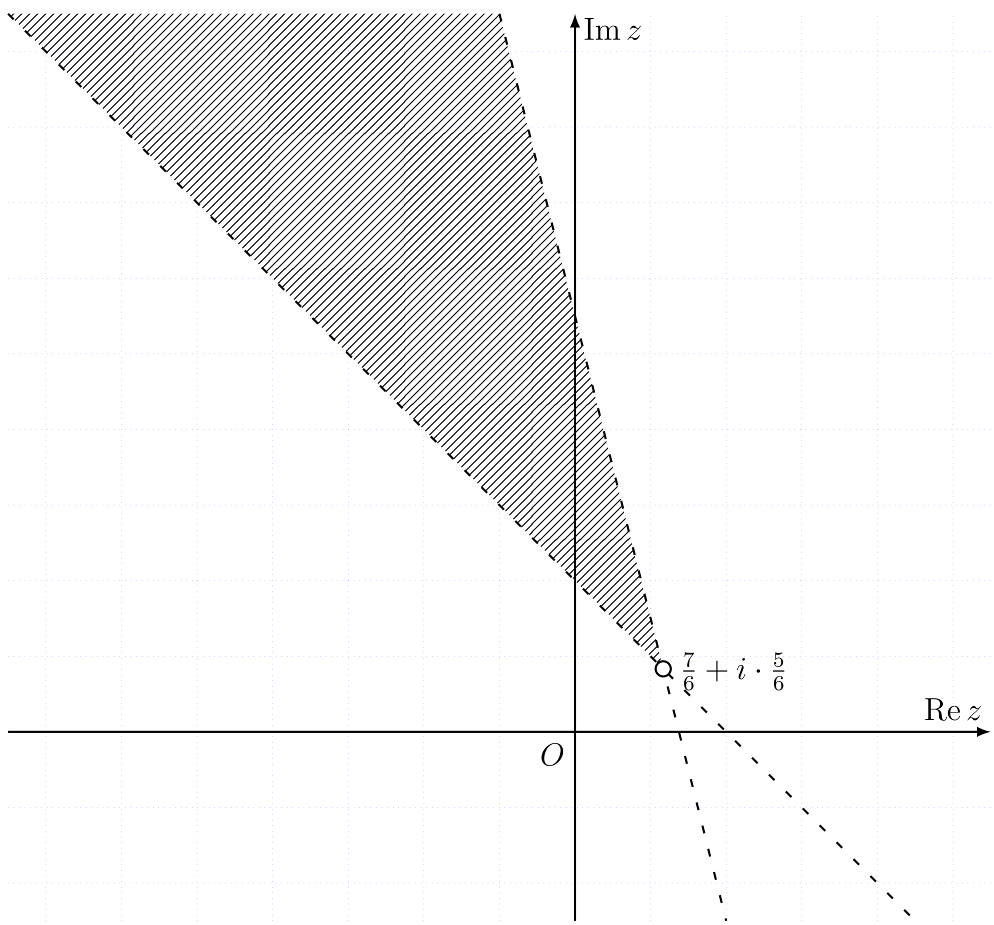
Найдем пересечение прямых, являющихся границами этих полуплоскостей.

$$\begin{cases} y = -4x + \frac{11}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$-4x + \frac{11}{2} = -x + 2 \Leftrightarrow \frac{7}{2} = 3x$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{6}\,, \\ y = \frac{5}{6}\,. \end{cases}$$

Теперь изобразим на рисунке эти прямые и заштрихуем ту часть плоскости, которая находится ниже первой прямой и выше второй прямой.



9. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Вопрос 9.55. Как решается линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, если дискриминант его характеристического уравнения отрицательный?

Ответ. Из курса дифференциальных уравнений [7] известно, что дифференциальное уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0$$

где a, b и c вещественные числа (а не функции) при различных корнях λ_1 и λ_2 соответствующего характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеет общее решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Пусть дискриминант характеристического уравнения $D = b^2 - 4ac < 0$. Тогда корни этого характеристического уравнения являются комплексными числами:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|D|}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \alpha \pm i \cdot \beta,$$

где обозначено $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2a}$. А общим решением является

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\cdot\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\cdot\beta)x}.$$

Вроде бы всё в порядке, но оказывается, что ответ на задачу, где присутствовали исключительно вещественные числа и функции, вышел из поля вещественных чисел в комплексное:

$$y = C_1 e^{\alpha x + i\cdot\beta x} + C_2 e^{\alpha x - i\cdot\beta x}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} e^{i\cdot\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\cdot\beta x}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i \cdot \sin(\beta x)\big) + C_2 e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i \cdot \sin(\beta x)\big).$$

Разгадка этого парадокса заключается в том, что при отрицательном дискриминанте постоянные интегрирования C_1 и C_2 являются не вещественными числами, а комплексными:

$$y = (C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i \cdot (C_1 - C_2)e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

И получившиеся коэффициенты действительно вещественные. Обозначим их $D_1 = C_1 + C_2$ и $D_2 = i \cdot (C_1 - C_2)$. В качестве упражнения найдём, при каком условии это произойдёт. Пусть $C_1 = A_1 + i \cdot B_1$, $C_2 = A_2 + i \cdot B_2$, где A_1, A_2, B_1 и B_2 вещественные числа. Тогда

$$\begin{cases} D_1 = A_1 + i \cdot B_1 + A_2 + i \cdot B_2 \\ D_2 = i \cdot (A_1 + i \cdot B_1 - A_2 - i \cdot B_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 = A_1 + A_2 + i \cdot (B_1 + B_2) \\ D_2 = B_2 - B_1 + i \cdot (A_1 - A_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 = A_1 + A_2 \\ 0 = B_1 + B_2 \\ D_2 = B_2 - B_1 \\ 0 = A_1 - A_2 \end{cases}$$

То есть четыре константы A_1, A_2, B_1 и B_2 не являются произвольными, а связаны соотношениями

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 = -B_2 \end{cases}$$

Окончательно, общее решение в вещественной форме имеет вид

$$y = D_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + D_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Вопрос 9.56. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 6y' + 13y = 0$. Задача взята из сборника [3].

Ответ. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ и решим его. Дискриминант этого квадратного уравнения равен $D = 6^2 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$. Так как дискриминант отрицательный, то корни квадратного уравнения комплексные: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$. И согласно теории (см. вопрос 9.55) общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} \cos(2x) + C_2 e^{-3x} \sin(2x).$$

Вопрос 9.57. Решите дифференциальное уравнение $4y'' - 8y' + 5y = 0$. Задача взята из сборника [3].

Ответ. Составим характеристическое уравнение $4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$ и решим его. Дискриминант этого квадратного уравнения равен $D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64 - 80 = -16$. Так как дискриминант отрицательный, то корни квадратного уравнения комплексные: $\lambda_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 4} = \dfrac{8 \pm 4i}{8} = 1 \pm i \cdot \dfrac{1}{2}$. И согласно теории (см. вопрос 9.55) общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{x} \cos\frac{x}{2} + C_2 e^{x} \sin\frac{x}{2}.$$

Вопрос 9.58. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 25y = 0$.

Ответ. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 25 = 0$. Решения этого квадратного уравнения очевидны: $\lambda_{1,2} = \pm 5i$. И согласно теории (см. вопрос 9.55), так как $e^0 = 1$, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x).$$

Литература

1. Барт В.А., Черняев П.К. Индивидуальные задания по математическому анализу: Учеб. пособие. — СПб: СПбГУ, 2012, 32 с.

2. Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М., Ионин Ю.И. Алгебра и начала анализа: задачи и решения: Учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2004, 296 с.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов. — 20-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985, 384 с.

4. Волков В.А., Ефимова Т.А., Райнес А.А., Шмидт Р.А. Задачник-практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре: Учебное пособие. — Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986, 262 с.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. — М: 1981, 688 с.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968, 431 с.

7. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1965, 368 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008, 624 с.

9. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, изд. 9. — М.: Наука, 1968, 304 с.