Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

А. С. Михайлов, В. С. Михайлов, А. Э. Чоке-Риверо

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ПАМЯТЬЮ

Посвящается Василию Михайловичу Бабичу

§1. Введение

Для функции $K \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, называемой ядром релаксации, и потенциала $q \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ рассмотрим начально-краевую задачу для следующей динамической системы:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) + \int\limits_0^t K(t-s)u(x,s)\,ds = 0, \\ x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \\ u(0,t) = f(t), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функция $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ интерпретируется как *граничное управление*. Решение (1) обозначается как u^f. Соответствие вход-выход в системе (1) реализуется с помощью *оператора отклика* R, действующего в $L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и определенного как

$$Rf = u^f_x(0,t). \tag{2}$$

Конечность скорости распространения сигнала в системе (1) подразумевает следующую постановку обратной задачи: предполагая, что ядро релаксации известно и фиксировано некоторое $T > 0$, необходимо восстановить потенциал $q(x)$, $x \in (0,T)$ из знания оператора отклика $R^{2T} := R|_{L_2(0,2T)}$.

Ключевые слова: уравнение я памятью, обратная задача, уравнения Гельфанда–Левитана, метод Граничного управления.

Работа Виктора Михайлова и Александра Михайлова была поддержана грантами РФФИ 18-01-00269, 20-01-00627 и Проектом фонда Volkswagen “From Modeling and Analysis to Approximation.” Работа третьего автора была поддержана проектом CONACYT, A1-S-31524 и CIC-UMSNH, Мексика.

В работах [9, 10] была рассмотрена обратная динамическая задача для следующей динамической системы:

$$\begin{cases} v_t(x,t) - \int\limits_0^t N(t-s)\left(v_{xx}(x,s) + \widetilde{q}(x)v(x,s)\right)\,ds = 0, \\ 0 < x < L, \quad t > 0, \\ v(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0 \\ v(0,t) = g(t), \quad v(L,t) = 0 \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

где ядро $N \in C^3(0,L)$ такое что $N(0) = 1$, потенциал $\widetilde{q} \in C(0,L)$ и $g \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ – граничное управление. Решение (3) обозначим $v^g(x,t)$. Соответствие вход-выход в системе, задающееся оператором отклика, обозначим как

$$\widetilde{R}f = v_x^g(0,t), \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Для этой системы автором исследована обратная задача о восстановлении потенциала $\widetilde{q}(x)$, $x \in (0,L)$ при известном ядре N из знания оператора отклика $\widetilde{R}|_{L_2(0,2L)}$. Заметим, что системы (1) и (3) связаны некоторой заменой, связывающей искомые функции, известной как "трюк МакКеми" подробности приведены в [9].

В [9, 10] автор частично использовал спектральные методы при решении обратной задачи, для этого, в частности, требуется граничное условие при $x = L$ для (3). Заметим, что эти методы не всегда адекватны в динамических задачах, и в нашем подходе мы используем чисто динамическую технику.

Во втором разделе мы выводим представление типа Дюамеля для решения (1) и вводим операторы метода Граничного управления [4, 6]. В последнем разделе мы выводим уравнения Гельфанда–Левитана, с помощью которого восстанавливается потенциал.

§2. Прямая задача. Операторы метода Граничного управления.

Сначала выведем представление Дюамеля для функции u^f:

Лемма 1. *Решение* (1) *допускает следующее представление*

$$u^f(x,t) = f(t-x) + \int\limits_x^t w(x,s)f(t-s)\,ds, \tag{5}$$

где $w(x,s)$ является решением следующей задачи Гурса:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + qw + \int\limits_0^t K(t-s)w(x,s)\,ds + K(t-x) = 0, \\ x > 0, \quad t > 0, \\ \frac{d}{dx}w(x,x) = -\frac{1}{2}q(x), \quad x \geqslant 0, \\ w(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Из представления (5) следует, что

$$\begin{aligned} u_{tt}^f(x,t) = f''(t-x) + \int\limits_x^t w_{ss}(x,s)f(t-s)\,ds \\ + w_s(x,x)f(t-x) + w(x,x)f'(t-x), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} u_{xx}^f(x,t) = f''(t-x) - \frac{d}{dx}w(x,x)f(t-x) + w(x,x)f'(t-x) \\ - w_x(x,x)f(t-x) + \int\limits_x^t w_{xx}(x,s)f(t-s)\,ds \end{aligned} \tag{8}$$

Подстановка этих выражений в (1) дает соотношение

$$\begin{aligned} 0 = &\int\limits_x^t \left(w_{ss}(x,s) - w_{xx}(x,s) + q(x)w(x,s)\right) f(t-s)\,ds \\ &+ \left(2\frac{d}{dx}w(x,x) + q(x)\right) f(t-x) \\ &+ \int\limits_0^t K(t-s)f(s-x)\,ds + \int\limits_0^t K(t-s)\int\limits_x^s w(x,\tau)f(s-\tau)\,d\tau\,ds \end{aligned} \tag{9}$$

Первый член в (9) после замены переменных $s - x = t - \tau$ превращается в

$$\int\limits_x^{x+t} K(s-x)f(t-s)\,ds. \tag{10}$$

Второй член в (9) после замены переменных $\tau = s - \alpha$ может быть переписан как

$$\int_0^t K(t-s)\int_0^{s-x} w(x,s-\alpha)f(\alpha)\,d\alpha\,ds$$

и после смены порядка интегрирования получим

$$-\int_{-x}^{0}\int_{0}^{x+\alpha} K(t-s)w(x,s-\alpha)f(\alpha)dsd\alpha + \int_{0}^{t-x}\int_{\alpha+x}^{t} K(t-s)w(x,s-\alpha)f(\alpha)dsd\alpha$$

$$= [s-\alpha = l] - \int_{-x}^{0}\int_{0}^{x+\alpha} K(t-s)w(x,s-\alpha)f(\alpha)dsd\alpha \tag{11}$$

$$+ \int_{0}^{t-x}\int_{x}^{t-\alpha} K(t-(\alpha+l))w(x,l)\,dl f(\alpha)\,d\alpha = [s = t-\alpha]$$

$$-\int_{-x}^{0}\int_{0}^{x+\alpha} K(t-s)w(x,s-\alpha)f(\alpha)dsd\alpha + \int_{t}^{x}\int_{x}^{s} K(s-l)w(x,l)\,dl f(t-s)ds.$$

Подставляя (7), (8), (10), (11) в (9) и используя то, что функция f произвольная, и что $f(\alpha)$ равна нулю при $\alpha < 0$, мы получим первое уравнение в (6). Взяв $t = x$ в (9) и выбирая $f(0) \neq 0$ мы придем ко второму уравнению в (6) $\square$

Пространство $\mathcal{F}^T := L_2(0,T)$ со стандартным скалярным произведением называется *внешним пространством* системы (1). Функция $u^f(\cdot,t)$ является *состоянием* системы (1) в момент времени t. Пространство состояний $\mathcal{H}^T := L_2(0,T)$ со стандартным скалярным произведением – *внутреннее пространство системы* (1). Оператор управления $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$ задается правилом:

$$W^T f = u^f(x,T).$$

Из представления (5) следует *граничная управляемость* динамической системы, эквивалентная следующему

Утверждение 1. *Оператор W^T является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно (5), оператор W^T имеет представление

$$\left(W^T f\right)(x) = f(T-x) + \int\limits_x^T w(x,s) f(T-s)\, ds. \tag{12}$$

Таким образом, граничная управляемость эквивалентна разрешимости следующей задачи: для заданного $a \in \mathcal{H}^T$ найти такое f, что

$$W^T f = a. \tag{13}$$

Тогда результат Утверждения следует из того, что (13) – уравнение типа Вольтерра второго рода. $\square$

Связывыающий оператор $C^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$ вводится правилом

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T)\right)_{\mathcal{H}^T}. \tag{14}$$

Согласно Утверждению 1, C^T является изоморфизмом в $\mathcal{F}^T$. Введем функцию Благовещенского по правилу

$$\psi(t,s) = \left(u^f(\cdot,t), u^g(\cdot,s)\right)_{\mathcal{H}^T}$$

Следующее утверждение является ключевым в методе Граничного управления:

Утверждение 2. *Оператор C^T определяется обратными динамическими данными R^{2T} и функцией K.*

Доказательство. Для $f, g \in C_0^\infty(0,T)$ мы вычислим:

$$\begin{aligned}
\psi_{tt}(t,s) &= \int\limits_0^T u^f_{tt}(x,t) u^g(x,s)\, dx \\
&= \int\limits_0^T \left(u^f_{xx}(x,t) - q(x) u^f(x,t) - \int\limits_0^t K(t-\tau) u^f(x,\tau) d\tau \right) u^g(x,s) dx \\
&= \int\limits_0^T u^f(x,t) u^g_{xx}(x,s) - q(x) u^f(x,t) u^g(x,s)\, dx - u^f_x(0,t) u^g(0,s) \\
&+ u^f(0,t) u^g_x(0,s) - \int\limits_0^t K(t-\tau) \int\limits_0^T u^f(x,\tau) u^g(x,s)\, dx\, d\tau
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T u^f(x,t)u^g_{xx}(x,s) - q(x)u^f(x,t)u^g(x,s)\,dx$$

$$- \left(R^T f\right)(t)g(s) + f(t)\left(R^T g\right)(s) - \int_0^t K(t-\tau)\psi(\tau,s)\,d\tau.$$

Заметим, что оба слагаемых $u^f_x(T,t)u^g(T,s)$ и $u^f(T,t)u^g_x(T,s)$ равны нулю, т.к. функции f и g финитны и верна формула представления (12). Преобразуя

$$\begin{aligned}\psi_{ss}(t,s) &= \int_0^T u^f(x,t)u^g_{ss}(x,s)\,dx \\ &= \int_0^T u^f(x,t)u^g_{xx}(x,s) - q(x)u^f(x,t)u^g(x,s)\,dx \\ &- \int_0^s K(s-\alpha)\psi(t,\alpha)\,d\alpha,\end{aligned}$$

мы видим, что функция $\psi(t,s)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче для волнового уравнения

$$\begin{cases}\psi_{tt}(t,s) - \psi_{ss}(t,s) - \int\limits_0^t K(t-\tau)\psi(\tau,s)d\tau + \int\limits_0^s K(s-\alpha)\psi(t,\alpha)d\alpha \\ = (Rf)(t)g(s) - f(t)(Rg)(s), \\ \psi(0,s) = \psi(t,0) = \psi_s(0,s) = \psi_t(t,0),\end{cases} \tag{15}$$

решение которой можно показать, сведя (15) к интегральному уравнению, аналогично тому, как это сделано в [9, 10]. Остается заметить, что

$$\left(C^T f, g\right) = \psi(T,T). \qquad \square$$

Оператор C^T, будучи ограниченным оператором в $\mathcal{F}^T$, задается своим ядром $c(t,s)$:

$$\left(C^T f\right)(t) = \int_0^T c(t,s)f(s)\,ds.$$

Так так мы знаем квадратичную форму (14) для всех $f, g \in C_0^\infty(0, T)$, ядро $c(t, s)$ нам так же известно.

§3. Уравнения Гельфанда–Левитана.

Введем обозначения:

$$J_T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T, \quad (J_T f)(t) = f(T - t),$$

$$W^T = (I + M) J_T, \quad (M f)(x) = \int_x^T w(x, s) f(s)\, ds.$$

Тогда для обратного оператора имеем

$$\left(W^T\right)^{-1} = J_T (I + L), \quad (L f)(x) = \int_x^T z(x, s) f(s)\, ds.$$

Из равенства $(I + M)(I + L) = I$ следует условие на интегральные ядра на диагонали:

$$z(x, x) = -w(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\alpha)\, d\alpha.$$

Для произвольных $f, g \in \mathcal{F}^T$, по определению C^T имеем:

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T}. \tag{16}$$

Положим $f = (W^T)^{-1} a$, $g = (W^T)^{-1} b$, $a, b \in \mathcal{H}^T$ и перепишем (16) как

$$(C^T J_T (I + L) a, J_T (I + L) b)_{\mathcal{F}^T} = (a, b)_{\mathcal{H}^T}, \tag{17}$$

Поскольку указанное выше равенство выполняется для всех $a, b \in \mathcal{H}^T$, после введения обозначения $\widetilde{C}^T := J_T C^T J_T$ мы видим, что (17) приводит к следующему операторному уравнению

$$(I + L)^* \widetilde{C}^T (I + L) = I. \tag{18}$$

Обозначим

$$C_T := \widetilde{C}^T - I, \quad \text{и} \quad (C_T f)(t) = \int_0^T c_T(t, s) f(s)\, ds, \tag{19}$$

и перепишем (18) как

$$L^* + (I + L^*)(L + C_T + C_T L) = 0. \tag{20}$$

Заметим, что оператор L^* имеет вид:

$$\left(L^*a\right)(t) = \int\limits_0^t z(x,t)a(x)\,dx.$$

Функция $z(x,s)$ была определена для $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant T$, продолжим ее нулем на множестве $s < x \leqslant T$ и введем функцию $\phi_x(s)$, $x,s \in [0,T]$ по правилу

$$\phi_x(s) = z(x,s) + c_T(x,s) + \int\limits_0^T c_T(s,\tau)z(x,\tau)\,d\tau.$$

Из равенства (20) следует, что

$$z(s,x) + \phi_x(s) + \int\limits_0^T z(s,\tau)\phi_x(\tau)\,d\tau = 0, \quad x,s \in (0,T).$$

Поскольку $z(s,x) = 0$ for $0 < x < s < T$, получаем, что

$$\phi_x(s) + \int\limits_s^T z(s,\tau)\phi_x(\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 < x < s < T.$$

Переписывая это уравнение как

$$((I+L)\phi_x(\cdot))(t) = 0, \quad 0 < x < s < T,$$

и учитывая обратимость $I+L$ (которая следует из Утверждения 1), получаем, что

$$\phi_x(s) = z(x,s) + c_T(x,s) + \int\limits_x^T c_T(s,\tau)z(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 < x < s < T. \tag{21}$$

Сформулируем этот результат как

Теорема 1. *Ядро оператора L удовлетворяет следующему интегральному уравнению*

$$z(x,s) + c_T(x,s) + \int\limits_x^T c_T(s,\tau)z(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 < x < s < T. \tag{22}$$

где c_T определяется динамическими обратными данными, см. Утверждение 2 *и* (19).

Решая уравнение (22) для всех $x \in (0, T)$, мы можем восстановить потенциал, используя

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}z(x, x).$$

Подводя итог, хотелось бы отметить следующее:

1) Использование чисто динамического подхода, дает возможность рассмотреть обратную задачу для системы (1) для более общего класса потенциалов $q \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ см. [2] и ядер $K \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.
2) Наличие динамического представления решения u^f (5) (представление Дюамеля), дает потенциальную возможность использовать продвинутую технику метода Граничного управления и исследовать задачу о характеризации динамических обратных данных в духе [5, 8].
3) Анализ решения прямой задачи (1) для общих коэффициентов, анализ решения уравнения для функции Благовещенского (15), а также задача о характеризации обратных данных, будут являться предметом изучения в следующих публикациях.

Список литературы

1. S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, J.-M. Wang, *Inverse problems for the heat equation with memory.* — Inverse Problems and Imaging **13**, No. 1 (2019), 31–38.
2. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* Inverse Problems **26**, No. 4 (2010), 045009.
3. S. A. Avdonin, L. Pandolfi, *A linear algorithm for the identification of a weakly singular relaxation kernel using two boundary measurements.* — J. Inverse Ill-Posed Problems **26**, No. 2 (2018), 299–310.
4. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* Inverse Problems **23**, No.5 (2007), R1-R67.
5. M. I. Belishev, *Boundary control and inverse problems: 1-dimensional variant of the BC-method.* — J. Math. Sciences, **155**, No. 3 (2008), 343–379.
6. M. I. Belishev, *Boundary control and tomography of Riemannian manifolds (the BC-method).* — Russian Math. Surveys Volume, **72**, No. 4 (2017), 581–644.
7. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems, **20**, No. 4 (2012), 461–488.
8. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method).* — Inverse Problems, **30**, No. 12 (2014).
9. L. Pandolfi, *Dynamical identification of a space varying coefficient in a system with persistent memory.* — J. Math. Anal. Appl. **465**, No. 1 (2018), 140–158.

10. L. Pandolfi, *Identification of a space varying coefficient of a linear viscoelastic string of Maxwell-Boltzman type.* https://arxiv.org/abs/1702.06770

Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. C., Choque-Rivero A. E. Dynamic inverse problem for the one-dimensional system with memory.

We study the inverse dynamic problem of recoverying the potential in the one-dimensional dynamical system with memory. The Gelfand–Levitan equations are derived for the kernel of the integral operator which is inverse to the control operator of the system. The potential is reconstructed from the solution of these equations.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 191023,
Санкт-Петербург, Фонтанка, д. 27
E-mail: mikhaylov@pdmi.ras.ru

Поступило 5 ноября 2020 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия
E-mail: vsmikhaylov@pdmi.ras.ru

Университет Мичоакана
де Сан Николас де Идальго,
Calle de Santiago Tapia 403, Centro,
58000 Morelia, Mich., Мексика
E-mail: abdon.ifm@gmail.com