УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 37D10, 37D40

Памяти В. А. Плисса

О проблемах теории устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств*

Н. А. Бегун

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Университет Тарбиат Модарес, Иран, P. O. Box: 14115-111, Тегеран

Для цитирования: *Бегун Н. А.* О проблемах теории устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 289–296.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.211

Данная статья представляет собой краткий обзор теории устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств. В серии работ, опубликованных автором совместно с В. А. Плиссом и Дж. Р. Селлом, было доказано, что слабо гиперболическое инвариантное множество является устойчивым даже в случае отсутствия условия Липшица. Однако открытым остается вопрос о единственности листов слабо гиперболического инвариантного множества возмущенной системы. Мы показываем связь этой проблемы с так называемой гипотезой экспансивности по площадкам (plaque expansivity conjecture) в теории динамических систем.

Ключевые слова: устойчивость, слабая гиперболичность, листовое множество, возмущенная система, единственность, экспансивность по площадкам.

1. Введение. Основной объект данного исследования — слабо гиперболическое инвариантное множество. Свойства таких множеств, в том числе устойчивость, на протяжении уже почти полувека являются одними из основополагающих в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, те или иные отсылки к ним можно найти почти в любом подразделе этой математической ветви. Крайне важными они являются и в прикладных дисциплинах. Это обуславливается тем, что на практике мы имеем дело не с «настоящей» системой, а лишь с моделью и, таким образом, долгосрочное поведение решений будет релевантным только в том случае, когда слабо гиперболическое инвариантное множество является (в том или ином смысле) устойчивым.

Ввиду вышесказанного неудивительно, что данная проблематика породила большое количество публикаций (см. [1–14]). Как правило в этих работах предполагалось, что нейтральное, устойчивое и неустойчивое линейные пространства соответствующей линеаризованной системы удовлетворяют условию Липшица. Наложение такого условия вполне объяснимо — классическая техника работы (особенно важная при доказательстве устойчивости) со слабо гиперболическим инвариантным множеством предполагает введение локальных координат в его окрестности, однако введение таких координат в отсутствие условия Липшица представляется чрезвычайно

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 19-01-00388, 18-01-00230).

затруднительным. С другой стороны, известны примеры слабо гиперболических инвариантных множеств, для которых условие Липшица не выполняется. Более того, доказано, что множество таких систем является множеством второй категории по Бэру. Таким образом, обширная теория была построена для очень «бедного» множества систем. Учитывая уже упомянутый прикладной аспект, возникла необходимость развития инструментария для работы со слабо гиперболическими инвариантными множествами, не обладающими условием Липшица. В серии работ [16–21] совместными усилиями В. А. Плисса, Дж. Р. Селла и автора данной статьи такой инструментарий был разработан, с помощью него были обобщены результаты для нелипшицева случая. Было доказано, что при достаточно малых C^1-возмущениях в окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы существует слабо гиперболическое инвариантное множество возмущенной системы. Более того, было доказано существование непрерывного отображения h такого, что $h(K) = K^Y$, где K, K^Y — слабо гиперболические инвариантные множества невозмущенной и возмущенной систем соответственно. Открытым, однако, остался вопрос о гомеоморфности h. Важность данного вопроса, кроме всего прочего, обуславливается тем, что одна лишь непрерывность h не гарантирует единственность листов слабо гиперболического инвариантного множества возмущенной системы. В данной статье исследуются возможные методы решения этой проблемы и показывается ее связь со сформулированной в [10] гипотезой экспансивности по площадкам (plaque expansivity conjecture).

2. Основные определения и результаты. В работе исследуются системы дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$
и
$$\dot{y} = X(y) + Y(y), \tag{2}$$
где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а X, Y — это C^1-функции, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Систему (1) в дальнейшем будем называть невозмущенной системой, систему (2) — возмущенной.

Для каждых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $x(t, x_0)$ максимально продолженное решение системы (1). Аналогично обозначим через $y(t, y_0)$ максимально продолженное решение системы (2).

Множество $W \subset \mathbb{R}^n$ называется *инвариантным множеством* системы (1), если из $x_0 \in W$ следует, что $x(t, x_0) \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\Phi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, фундаментальную матрицу линейной системы
$$\dot{x} = \frac{\partial X(x(t, x_0))}{\partial x}\, x, \tag{3}$$
удовлетворяющую условию $\Phi(0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что система (3) является *слабо гиперболической* с константами $a, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4, если $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0 > \lambda_4$, $\lambda_0 \geqslant 0$, $a \geqslant 1$, и существуют дополняющие друг друга линейные пространства $U^n(x_0)$, $U^u(x_0)$ и $U^s(x_0)$ такие, что $\dim U^n(x_0) = k$, $\dim U^u(x_0) = m$, $\dim U^s(x_0) = n - m - k$,
$$\Phi(t, x_0)U^i(x_0) = U^i(x(t, x_0)),\ i = n, s, u, \tag{4}$$
для любого $t \in \mathbb{R}$ и выполнены следующие условия:

1) если $\bar{x} \in U^s(x_0)$, то
$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leqslant a|\bar{x}|e^{-\lambda_1 t}, \ t \geqslant 0; \tag{5}$$

2) если $\bar{x} \in U^n(x_0)$, то
$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leqslant a|\bar{x}|e^{-\lambda_2 t}, \ t \leqslant 0, \tag{6}$$
и
$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leqslant a|\bar{x}|e^{-\lambda_3 t}, \ t \geqslant 0; \tag{7}$$

3) если $\bar{x} \in U^u(x_0)$, то
$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leqslant a|\bar{x}|e^{-\lambda_4 t}, \ t \leqslant 0; \tag{8}$$

4) если $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, то
$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leqslant a|\bar{x}|e^{\lambda_0 |t|}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Линейное пространство $U^s(x_0)$ называется *устойчивым линейным пространством*, линейное пространство $U^u(x_0)$ — *неустойчивым линейным пространством*, а линейное пространство $U^n(x_0)$ — *нейтральным линейным пространством.*

Из свойств (5)–(9) можно сделать следующий вывод о поведении решений системы (3). По устойчивому линейному пространству происходит экспоненциальное сжатие в положительном направлении, по неустойчивому линейному пространству — экспоненциальное сжатие в отрицательном направлении. По нейтральному линейному пространству может наблюдаться экспоненциальное сжатие как в положительном, так и в отрицательном направлениях, однако не быстрее чем, соответственно, по устойчивому и неустойчивому линейным пространствам.

Предположим, что существует $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное инвариантное множество системы (1). Будем называть K *слабо гиперболическим инвариантным множеством*, если выполнены следующие условия:

1) система (3) слабо гиперболична для любого $x_0 \in K$ с фиксированными константами a, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, и λ_4;

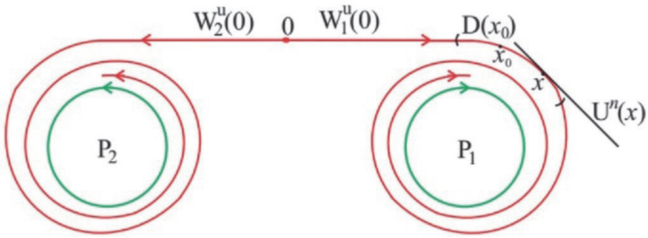
2) существует $r > 0$, такое что для любого $x_0 \in K$ существует k-мерный локально инвариантный диск $D(x_0) \subset K$, такой что его радиус равен r и
   (a) x_0 является центральной точкой $D(x_0)$;
   (b) если $x \in D(x_0)$, то линейное пространство $U^n(x)$ касается диска $D(x_0)$ в точке x.

Заметим, что из определения слабо гиперболического инвариантного множества не следует единственность дисков $D(x_0)$. В работах [1, 2] Плисс и Селл предполагали, что слабо гиперболическое инвариантное множество обладает дополнительным *свойством Липшица*:

(c) отображение $x_0 \to U^n(x_0)$ является липшицевым отображением из K в $Gr(k, \mathbb{R}^n)$, где Gr — это грассманово многообразие.

В работе [1] доказано, что из свойства (c) следует единственность дисков. Известно, однако, что такое ограничение является достаточно существенным. Множество систем, не обладающих таким свойством, является множеством второй категории по Бэру.

В работах [16–21] делалось следующее предположение:



Пример слабо гиперболического инвариантного множества $K = 0 \cup W_1^u(0) \cup W_2^u(0) \cup P_1 \cup P_2$, где 0 — гиперболическая точка покоя, $W_1^u(0)$ и $W_2^u(0)$ — ветви неустойчивого многообразия, P_1 и P_2 — предельные циклы.

(c′) если $D_1(x_0)$ и $D_2(x_0)$ — два диска в точке x_0 со свойствами (a) и (b), то $D_1(x_0) = D_2(x_0)$.

Заметим, что предположение (c′) связано не столько со свойствами системы, сколько со строением множества K — мы утверждаем не единственность диска, удовлетворяющего определенному набору условий, но его единственность во множестве K.

Определим множества $\Upsilon_1(x_0), \Upsilon_2(x_0), \Upsilon_3(x_0), \ldots, \Upsilon(x_0)$, $x_0 \in K$, следующим образом:

$$\Upsilon_1(x_0) = \bigcup_{x \in D(x_0)} D(x), \quad \Upsilon_{i+1}(x_0) = \bigcup_{x \in \Upsilon_i(x_0)} D(x), \ i \geqslant 1,$$

$$\Upsilon(x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(x_0).$$

Очевидно, что $\Upsilon(x_0) \subset K$ — инвариантное множество. Заметим также, что из единственности $D(x_0)$ следует единственность $\Upsilon(x_0)$. Множество $\Upsilon(x_0)$ будем называть *листом* слабо гиперболического инвариантного множества K, проходящим через точку x_0. В том случае, когда нам не важна точка x_0, будем обозначать лист просто Υ.

В статье [2] Плисс и Селл доказали следующее утверждение.

Теорема. *Пусть K — компактное слабо гиперболическое инвариантное множество системы* (1)*, удовлетворяющее свойству* (c)*. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|Y\|_{C^1} \leqslant \delta$, то существует гомеоморфное отображение $h : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $|h(x) - x| \leqslant \varepsilon$;

2) $K^Y = h(K)$ *является слабо гиперболическим инвариантным множеством системы* (2);

3) *для любого листа $\Upsilon \subset K$ множество $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ является листом K^Y.*

Позже, в статье [21], являющейся итоговой для серии работ [16–21], был доказан аналог вышеприведенной теоремы для случая, когда вместо свойства (c) слабо гиперболическое инвариантное множество удовлетворяет свойству (c′). Было показано, что существует непрерывное отображение h, удовлетворяющее условиям 1–3 теоремы. Вопрос о гомеоморфности h остался открытым.

3. Гипотеза экспансивности по площадкам. Пусть M — компактное гладкое многообразие. Диффеоморфизм f называется *частично гиперболичным*, если существует инвариантное расслоение

$$T_x(M) = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus E^n(x), \ x \in M,$$

и непрерывные положительные функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ : \ M \ \to \ \mathbb{R}$, такие что $\lambda_1(x), \lambda_2(x) < 1$, $\lambda_1(x) < \lambda_3(x) < \lambda_4(x) < \lambda_2^{-1}(x)$, $x \in M$, и существует $N \in \mathbb{N}$, такое что выполнены следующие условия:

1) если $\bar{x} \in E^s(x_0)$, $|\bar{x}| = 1$, то $|Df^N(x)\bar{x}| \leqslant \lambda_1(x_0)$;

2) если $\bar{x} \in E^n(x_0)$, $|\bar{x}| = 1$, то $\lambda_3(x_0) \leqslant |Df^N(x)\bar{x}| \leqslant \lambda_4(x_0)$;

3) если $\bar{x} \in E^u(x_0)$, $|\bar{x}| = 1$, то $|Df^N(x)\bar{x}| \geqslant \lambda_2^{-1}(x_0)$.

Предположим, что E^n соответствует единственное слоение W^n многообразия M, такое что в каждой точке E^n касается W^n. То же самое предположим относительно $E^s \oplus E^n$ и $E^u \oplus E^n$. В таком случае диффеоморфизм f называется *динамически когерентным*.

Последовательность $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, называется *центральной d-псевдотраекторией*, если $f(x_k) \in W^n(x_{k+1})$ и

$$dist_n(f(x_k), x_{k+1}) \leqslant d, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $dist_n$ — это риманова метрика на W^n.

Частично гиперболичный динамически когерентный диффеоморфизм f называется *экспансивным по площадкам*, если существует d, такое что для любых двух центральных d-псевдотраекторий $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, из того, что $dist(x_k, y_k) < d$ следует, что $dist_n(x_k, y_k) < d$, $k \in \mathbb{Z}$, где $dist$ — это метрика на M.

В 1977 году Хирш, Пью и Шуб в [10] сформулировали следующую гипотезу.

Гипотеза. Любой частично гиперболичный динамически когерентный диффеоморфизм является экспансивным по площадкам.

В литературе данная гипотеза носит имя гипотезы экспансивности по площадкам (plaque expansivity conjecture).

4. Открытые вопросы. Является ли отображение h в статье [21] гомеоморфизмом или оно лишь непрерывно? На данный момент это основной вопрос данной области исследования. Покажем, как он связан с гипотезой экспансивности по площадкам.

Слой W^n при «переводе» на язык дифференциальных уравнений эквивалентен листу Υ слабо гиперболического инвариантного множества. Динамическая когерентность диффеоморфизма означает единственность в каждой точке слоя W^n. Из единственности дисков D следует единственность листов Υ.

Далее, предположим что h не является гомеоморфизмом. Это означает, что существуют $x_1, x_2 \in K$, такие что $h(x_1) = h(x_2) = y_0$. Рассмотрим траекторию возмущенной системы $y(t, y_0)$. Из инвариантности множества K^Y и из того, что $h(K) = K^Y$, следует, что существуют кривые $\mu_1(t), \mu_2(t) \subset K$, такие что

$h(\mu_1(t)) = h(\mu_2(t)) = y(t, y_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu_1(0) = x_1$, $\mu_2(0) = x_2$. Легко видеть, что $\mu_1(t), \mu_2(t)$ являются аналогами центральных псевдотраекторий. Действительно, в силу инвариантности листов $\mu_i(t) \in \Upsilon(x_i)$, $i = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$, при фиксированном $\check{t}$ для любого $\upsilon > 0$ можно выбрать такое δ, что если $\|Y\| < \delta$, то $\left|x(\check{t}, \mu_i(t)) - \mu_i(t + \check{t})\right| < \upsilon$, $t \in \mathbb{R}$. Существование такого δ следует из того, что кривые $\mu_1(t), \mu_2(t)$ лежат вблизи решения возмущенной системы $y(t, y_0)$. Если сформулировать аналог описанной выше гипотезы для слабо гиперболического инвариантного множества, то из него будет следовать, что $x_1 \in D(x_2)$. Но из свойств отображения h следует, что $x_1 \notin D(x_2)$. Приходим к противоречию.

Заметим также, что данная гипотеза остается недоказанной на протяжении пятидесяти лет, что, ввиду вышеприведенных рассуждений, дает основание полагать, что вопрос о гомеоморфности h также представляется весьма затруднительным. Можно, однако, доказать некоторые частные случаи, например для коразмерности 1, то есть когда лист Υ имеет размерность $n - 1$.

Листы слабо гиперболического множества делятся на два типа — к первому относятся листы конечного объема, ко второму — бесконечного. На примере, изображенном на рисунке, предельные циклы P_1 и P_2 являются листами первого типа, лист $0 \cup W_1^u(0) \cup W_2^u(0)$ является листом второго типа. Из теоремы Пуанкаре — Бендиксона следует, что для размерности $n = 2$ одномерные листы первого типа всегда топологически являются окружностями. Зная это утверждение, легко можно показать, что h является гомеоморфизмом. Отсюда вытекает вопрос о топологической структуре листа коразмерности 1 в общем случае (иными словами, об аналоге теоремы Пуанкаре — Бендиксона для размерностей больше 2). Заметим, что этот вопрос, даже без учета приложения к доказательству гомеоморфности h, представляется весьма интересным.

Легко показать, например, что предельный двумерный лист первого типа для случая $n = 3$ не может быть сферой. Действительно, из теоремы Брауэра мы знаем, что на сфере существует точка покоя x_0. В силу гиперболичности существует инвариантный диск Перрона $D^p(x_0)$, проходящий через x_0. Из того, что лист является предельным, следует, что существует $x_1 \in K$, такое что $x_1 \in D^p(x_0)$, откуда следует, что $D^p(x_0) \in K$, что противоречит условию единственности дисков.

Для размерности $n > 3$ вопрос представляется более затруднительным.

Литература

1. *Pliss V. A., Sell G. R.* Perturbations of attractors of differential equations // J. Differential Equations. 1991. Vol. 92. P. 100–124.

2. *Pliss V. A., Sell G. R.* Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets // J. Differential Equations. 1997. Vol. 149. P. 1–51.

3. *Pliss V. A., Sell G. R.* Approximations of the long-time dynamics of the Navier — Stokes equations. In: Differential Equations and Geometric Dynamics: Control Science and Dynamical Systems. Lecture Notes. 1993. Vol. 152. P. 247–277.

4. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., 1977.

5. *Монаков В. Н.* Расположение интегральных поверхностей у слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений // Вестн. Ленинград. ун-та. 1973. Вып. 1. С. 68–74.

6. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol. 21. P. 193–226.

7. *Kelley Al.* Stability of the center-stable manifold // J. Math. Anal. Appl. 1967. Vol. 18. P. 336–344.

8. *Kelley Al.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Differential Equations. 1967. Vol. 3. P. 546–570.

9. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Вып. 28. С. 1297–1324.

10. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant Manifolds. In: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 583. New York: Springer-Verlag, 1977.

11. *Sacker R. J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Holder continuity // J. Math. Mech. 1969. Vol. 18. P. 705–762.

12. *Sell G. R.* The structure of a flow in the vicinity of an almost periodic motion // J. Differential Equations. 1978. Vol. 27. P. 359–393.

13. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. P. 747–817.

14. *Temam R.* Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1988.

15. *Песин Я.* Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности. МЦНМО, 2004.

16. *Бегун Н. А.* Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 4. С. 3–12.

17. *Бегун Н. А.* О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 1. С. 80–88.

18. *Бегун Н. А.* Об устойчивости листовых инвариантных множеств трехмерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Вып. 3. С. 12–19.

19. *Бегун Н. А.* Возмущения слабо гиперболических инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Вып. 1. С. 23–33.

20. *Бегун Н. А., Плисс В. А., Селл Дж. Р.* Об устойчивости гиперболических аттракторов систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 139–148.

21. *Begun N. A., Pliss V. A., Sell G. R.* On the stability of weakly hyperbolic invariant sets // Journal of Differential Equations. 2017. Vol. 262, no. 4. P. 3194–3213.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2019 г.;
после доработки 10 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Бегун Никита Андреевич — канд. физ.-мат. наук; nikitabegun88@gmail.com

On problems of the theory of stability of weakly hyperbolic invariant sets*

N. A. Begun

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Tarbiat Modares University, P. O. Box: 14115-111, Tehran, Iran

For citation: Begun N. A. On problems of the theory of stability of weakly hyperbolic invariant sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 289–296. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.211 (In Russian)

This paper represents a brief survey of the theory of stability of weakly hyperbolic invariant sets. In a series of papers published by the author together with V. A. Pliss and G. R. Sell, it was proved that a weakly hyperbolic invariant set is stable even in the absence of the Lipschitz condition. However, the question of uniqueness of leafs of a weakly hyperbolic invariant set of a perturbed system remains open. The paper shows the relationship of

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants 19-01-00388, 18-01-00230).

this problem with the so-called plaque expansivity conjecture in the theory of dynamical systems.

Keywords: stability, weak hyperbolicity, leaf set, perturbed system, singularity, plaque espansivity conjecture.

References

1. Pliss V. A., Sell G. R., "Perturbations of attractors of differential equations", *J. Differential Equations* **92**, 100–124 (1991).

2. Pliss V. A., Sell G. R., "Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets", *J. Differential Equations* **149**, 1–51 (1997).

3. Pliss V. A., Sell G. R., "Approximations of the long-time dynamics of the Navier — Stokes equations", in: *Differential Equations and Geometric Dynamics: Control Science and Dynamical Systems, Lecture Notes* **152**, 247–277 (1993).

4. Pliss V. A., *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations* (Nauka Publ., Moscow, 1977). (In Russian)

5. Monakov V. N., "The arrangement of the integral surfaces of weakly nonlinear systems of differential equations", *Vestnik Leningrad. Univ.*, issue 1, 68–74 (1973). (In Russian)

6. Fenichel N., "Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows", *Indiana Univ. Math. J.* **21**, 193–226 (1971).

7. Kelley Al., "Stability of the center-stable manifold", *J. Math. Anal. Appl.* **18**, 336–344 (1967).

8. Kelley Al., "The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds", *J. Differential Equations* **3**, 546–570 (1967).

9. Pliss V. A., "A reduction principle in the theory of stability of motion", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28**, 1297–1324 (1964). (In Russian)

10. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M., *Invariant Manifolds*, in Ser. *Lecture Notes in Mathematics* **583** (Springer-Verlag, New York, 1977).

11. Sacker R. J., "A perturbation theorem for invariant manifolds and Holder continuity", *J. Math. Mech.* **18**, 705–762 (1969).

12. Sell G. R., "The structure of a flow in the vicinity of an almost periodic motion", *J. Differential Equations* **27**, 359–393 (1978).

13. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817 (1967).

14. Temam R., *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (Springer-Verlag, New York, 1988).

15. Pesin Y. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*, in: *Lectures in Advanced Mathematics* (EMS, Zurich, 2004).

16. Begun N. A., "On the stability of leaf invariant sets of two-dimensional periodic systems", *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **45**, issue 4, 145–152 (2012).

17. Begun N. A., "On the closeness of leaf invariant sets of perturbed systems", *Differential Equations and Control Processes* (1), 80–88 (2013). (In Russian)

18. Begun N. A., "On the stability of invariant sets of leaves of three-dimensional periodic systems", *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **47**, issue 3, 95–101 (2014).

19. Begun N. A., "Perturbations of weakly hyperbolic invariant sets of three-dimension periodic systems", *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **48**, issue 1, 21–33 (2015).

20. Begun N. A., Pliss V. A., Sell G. R., "On the stability of hyperbolic attractors of systems of differential equations", *Differential Equations* **52** (2), 139–148 (2016).

21. Begun N. A., Pliss V. A., Sell G. R., "On the stability of weakly hyperbolic invariant sets", *Journal of Differential Equations* **262** (4), 3194–3213 (2017).

Received: October 24, 2019
Revised: December 10, 2019
Accepted: December 12, 2019

Author's information:

Nikita A. Begun — nikitabegun88@gmail.com