Санкт–Петербургский
государственный университет

Т.А. Ефимова

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Методическое пособие

Санкт–Петербург
2019

УДК 517.31
ББК 22.161

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Осипов А.В (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, доцент Ипатова Л. П (СПбГМТУ)

*Рекомендовано к размещению в репозитории СПбГУ
Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 “Математика и механика”
Санкт-Петербургского государственного университета.*

Ефимова Т.А
Некоторые методы интегрирования элементарных функций, методическое пособие
СПб.: СПбГУ, 2019.- 32 с.

В методическом пособии изложены некоторые методы интегрирования элементарных функций. Пособие состоит из трех глав и приложения. Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, основные формулы, подробно разбираются решения типовых примеров, предлагаются примеры для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним. В приложении приводятся варианты заданий, которые можно использовать для аудиторных и домашний контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов нематематических специальностей, в частности для студентов института наук о Земле, изучающих тему “Неопределенный интеграл “, в качестве дополнительной литературы. С его помощью студенты могут усвоить основные методы интегрирования и применить свои знания в изучении специальных дисциплин.

Оглавление

Введение ... 4
Глава I. Неопределенный интеграл. Определение и свойства ... 4
§ 1. Первообразная функция и ее свойства ... 4
§ 2. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов ... 6
Глава 2. Некоторые методы интегрирования ... 11
§ 1. Непосредственное интегрирование ... 11
§ 2. Простейшая замена переменной (подведение множителя под знак дифференциала) ... 12
§ 3. Замена переменной в неопределенном интеграле ... 15
§ 4. Интегрирование по частям. ... 17
Глава 3. Некоторые классы интегрируемых функций ... 20
§ 1. Интегрирование рациональных функций ... 20
§ 2. Интегрирование тригонометрических функций ... 25
§ 3. Тригонометрические подстановки ... 29
Приложение. Контрольные задания. ... 30
Литература. ... 32

Введение

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университетов и технических вузов очного, вечернего и заочного отделений.

Оно составлено на основе опыта автора чтения лекций и проведения практических занятий по высшей математике в институте наук о Земле СПбГУ. При составлении пособия были учтены программы курсов высшей математики на других естественных факультетах.

Пособие состоит из трех глав и приложения. Главы I – 3 разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, основные формулы, формулировки теорем (доказательства теорем не приводятся, их можно найти в [1] – [3]). Подробно разбираются решения типовых примеров. Кроме того, предлагаются примеры для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним.

Нумерация формул и теорем сквозная, примеры нумеруются двумя цифрами первая – номер главы, вторая – номер примера. В приложении приведены 6 вариантов контрольных заданий, которые можно использовать для аудиторных и домашних контрольных работ. Предполагается, что студенты, изучающие материал данного пособия, знают теорию дифференциального исчисления и хорошо владеют техникой дифференцирования. Отметим, что некоторые вопросы могут быть исключены преподавателем из рассмотрения, особенно при малом количестве часов или слабой подготовке студентов.

С помощью пособия студенты смогут самостоятельно усвоить основные теоретические вопросы, стандартные приёмы интегрирования функций, а также подготовиться к восприятию специальных курсов, читающихся на факультетах.

Глава I. Неопределенный интеграл. Определение и свойства

§ 1. Первообразная функция и ее свойства

Операция нахождения производной называется дифференцированием. В некоторых задачах математики требуется находить функцию, если известна её производная.

Определение 1. Операция, обратная операции дифференцирования, то есть нахождение функции по ее производной, называется интегрированием.

Приведём необходимые определения.

Определение 2. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

для любого $x \in (a,b)$.

Замечание. В тех случаях, когда промежуток (a,b) определяется естественно, то есть в соответствии с областями определения функций, его обычно не указывают.

Сформулируем свойства первообразной функции.

Теорема 1.

1 . Если функция $F(x)$ первообразная для функции *f(x)* ($x \in (a,b)$), то функция *F(x)+C*, где *C* произвольная постоянная, тоже первообразная для *f(x)*.

2. Если $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ первообразные для *f(x),* то $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C постоянная **(** $x \in (a,b)$**).**

Замечание. Из свойства 2 следует, что, если *F(x)* первообразная для функции *f(x)*, то любая её первообразная имеет вид *F(x)+C*, где *C* некоторая постоянная. Таким образом, чтобы знать все первообразные для данной функции, достаточно знать одну из них.

Примеры

1.1. Найти первообразные для данных функций

а. $f(x) = x^2$ **б.** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

в. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

Решение

а. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ одна из первообразных для *f(x)* ($x \in (-\infty, +\infty)$), так как $F'(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$**.**

б. $F(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ одна из первообразных для $f(x)$, так как $F'(x) = \left(\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)' = x^{\frac{1}{3}}$**.**

в. $F(x) = \operatorname{tg} x$ одна из первообразных для $f(x)$**,** так как $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

1.2. Доказать, что функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$

а. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ **б.** $F(x) = 2\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$, $x > 0$

в. $F(x) = e^x(\sin x - \cos x)$, $f(x) = 2e^x \sin x$

Решение

а. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ одна из первообразных для *f(x)* ($x\in(-1,+1)$), так как

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

б. $F(x)=2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ одна из первообразных для $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$, так как

$$F'(x)=\left(2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'=\frac{2}{2\sqrt{x}}-2\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=(1-\frac{1}{1+x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1+x-1}{(1+x)\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{1+x}=f(x)$$

$x>0$.

в. $F(x)=e^x(\sin x-\cos x)$ одна из первообразных для $f(x)=2e^x\sin x$, так как

$$F'(x)=\left(e^x\right)'(\sin x-\cos x)+e^x(\sin x-\cos x)'=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)=2e^x\sin x=f(x).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти первообразные для данных функций

а. $f(x)=x^4$ **б.** $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi k$ **в.** $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

2. Доказать, что функция $F(x)$ первообразная для $f(x)$

а. $F(x)=\sqrt{x^2+a^2}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ **б.** $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}-\dfrac{1}{2}\ e^{x^2}$, $f(x)=x^3e^{x^2}$

в. $F(x)=\operatorname{tg}x-x+5$, $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$

Ответы

1.а. $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ **б.** $F(x)=-\operatorname{ctg}x$, $x\neq\pi k$ **в.** $F(x)=\sqrt{x}$, $x>0$

§ 2. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов

Определение 3. Неопределенным интегралом функции *f(x)* называется совокупность всех первообразных для данной функции. Для неопределенного интеграла принято обозначение $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, *x* – переменная интегрирования, *f(x)* – подынтегральная функция, *f(x)dx* – подынтегральное выражение.

Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $F'(x) = f(x)$, C произвольная постоянная.

Примеры

1.3. Найти интегралы

а. $\int x^2 dx$ **б.** $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение

а. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\frac{x^3}{3}$ первообразная для x^2 (пример 1.1 . а.).

б. $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C$, так как $\sqrt{1-x^2}$ первообразная для $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (пример 1.2. б.).

Сформулируем свойства неопределенного интеграла.

Теорема 2.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Линейность интеграла.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Из свойства 4 вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, а также, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

Отметим, что свойство 4 переносится на любое конечное число слагаемых, то есть

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \ldots + \alpha_n \int f_n(x)dx.$$

Можно доказать, что любая непрерывная функция имеет первообразную. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что все подынтегральные функции непрерывны.

Известно, что производная элементарной функции – элементарная функция. Однако, интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией.

Известны интегралы от элементарных функций (например, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{-x^2} dx$), которые не могут быть выражены с помощью элементарных функций (“неберущиеся” интегралы).

Приведем таблицу интегралов.

Таблица основных интегралов.

	Функция	Неопределенный интеграл	Примечание
1	0	C	
2	x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\alpha \neq -1$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
4	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$a>0,\ a \neq 1$
4.a	e^x	$e^x + C$	
5	$\sin x$	$-\cos x + C$	
6	$\cos x$	$\sin x + C$	
7	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, k –.целое
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$x \neq \pi k$, k – целое
9	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$ $-\arccos\frac{x}{a}+C$	$a>0$, $\lvert x\rvert < a$
10	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$ $-\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a}+C$	$a>0$
11	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert+C$	$a>0$

12	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\|+C$	α – любое

Отметим, что большая часть формул таблицы верна для $x \in (-\infty, +\infty)$. Если формулы справедливы не для всех *x*, то это указано в примечании. Формулы 1, 2, 4, 4.а, 5, 6, 7, 8 следуют из таблицы производных. В формулах 9, 10 два ответа, так как $\arcsin\frac{x}{a}+\arccos\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}$. В примерах при нахождении этих интегралов следует писать один из ответов. Если a=1, то формулы 9 и 10 следуют из таблицы производных.

Формула 11 называется короткий логарифм, а формула 12 – длинный логарифм.

Примеры

1.4. Доказать формулу 9 из таблицы интегралов.

Решение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Достаточно доказать, что функция $\arcsin\frac{x}{a}+C$ первообразная для подынтегральной функции. Действительно, $\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

1.5. Доказать формулу 12 из таблицы интегралов.

Решение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$

Найдем производную правой части.

а. Если $x+\sqrt{x^2+\alpha}>0$, то

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C\right)'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)+C\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Следовательно, если выражение под знаком модуля положительно, то справедлива формула

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)+C \qquad (3).$$

б. Если $x+\sqrt{x^2+\alpha}<0$, то (см. а).

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C\right)' = \left(\ln\left(-\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\right)+C\right)' == \frac{1}{-\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)}\left(-\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Следовательно, если выражение под знаком модуля отрицательно, то справедлива формула

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left(-\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\right)+C\,. \qquad (4).$$

Формулы (3) и (4) объединены в формуле 12 из таблицы интегралов

Примеры

Найти табличные интегралы

1.6.а. $\int \sqrt{x}dx$ **б.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k$ **в.** $\int 2^x dx$

г. $\int \frac{dx}{x^2-1}$ **д.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ **е.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ **ж.** $\int \frac{dx}{x^2-5}$

Решение

а. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ **б.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$, $x \neq \pi k$

в. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}+C$**.**

Интегралы **г.** и **д.** находятся по формуле 12 (длинный логарифм)

г. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ **д.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$

е. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$ (формула 9, $a=\sqrt{2}$).

ж. $\int \frac{dx}{x^2-5}$ **.** Вынесем за знак интеграла множитель (–1) и воспользуемся формулой 11 ($a=\sqrt{5}$), тогда $\int \frac{dx}{x^2-5} = -1\int \frac{dx}{5-x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right|+C$**.**

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать формулы 3, 10,11 из таблицы интегралов

2. Найти табличные интегралы

а. $\int \sqrt[3]{x}dx$ **б.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ **в.** $\int 5^x dx$

г. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6}}$ **д.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$ **е.** $\int \frac{dx}{10+x^2}$

Ответы

2 . а. $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ **б.** $\operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ **в.** $\frac{5^x}{\ln 5} + C$

г. $\ln\left|x + \sqrt{x^2+6}\right| + C$ **д.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2-5}\right| + C$ ***е.*** $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{10}} + C$

Глава 2. Некоторые методы интегрирования

§ 1. Непосредственное интегрирование

При решении следующих примеров надо сделать тождественные преобразования подынтегральной функции и воспользоваться свойством линейности интеграла. В результате можно свести интеграл к сумме табличных интегралов. Этот метод называется непосредственным интегрированием.

Примеры

2.1. Вычислить интегралы

а. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) dx$ **б.** $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$ **в.** $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

г. $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx$ **д.** $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$

Решение

а. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx$.

На основании свойства 4 (линейность интеграла) и табличных интегралов 3 и 2 (α= –2, α= –3) можно записать

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \ln|x| + 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + C .$$

Замечание. Писать произвольную постоянную после каждого интеграла не следует. Обычно все произвольные постоянные суммируются и обозначаются одной буквой *C*, которую записывают в окончательный ответ.

б. $\int \frac{dx}{9x^2-25}$. Преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись табличным интегралом 11 $\left(a=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}\right)$, будем иметь $\int \frac{dx}{9x^2-25}=-\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{25}{9}-x^2}=\frac{-1}{9\cdot 2\cdot \frac{5}{3}}\cdot \ln\left|\frac{x+\frac{5}{3}}{x-\frac{5}{3}}\right|+C=$

$$=-\frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x+5}{3x-5}\right|+C.$$

в. $\int \mathrm{tg}^2\, x dx$. Так как $\mathrm{tg}^2\, x=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, то

$$\int \mathrm{tg}^2\, x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\, x-x+C$$

(мы воспользовались табличными интегралами 7 и 2 (α=0)).

г. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$**.** Представим числитель в виде $x^2=\left(x^2+4\right)-4$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов,

Тогда $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx=\int \frac{\left(x^2+4\right)-4}{x^2+4}dx=\int \frac{x^2+4}{x^2+4}dx-4\int \frac{dx}{x^2+4}=x-4\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=x-2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$

(первый интеграл табличный (формула 2) второй интеграл табличный (формула 10) .

д. $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x\left(1+x^2\right)}$**.** Представим числитель в виде $(1+x)^2=1+2x+x^2=(1+x^2)+2x$

и разобьем интеграл на сумму двух интегралов.

Тогда $\int \frac{(1+x)^2 dx}{(1+x)^2}=\int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x)^2}dx=\int \frac{dx}{x}dx+2\int \frac{dx}{1+x^2}=\ln|x|+2\,\mathrm{arctg}\, x+C$

(табличные интегралы 3 и 10) .

§ 2. Простейшая замена переменной (подведение множителя под знак дифференциала)

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то

$$\int f\left(\varphi(x)\right)d(\varphi(x))=F((\varphi(x))+C. \qquad (5)$$

То есть, формула интегрирования справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией аргумента *x*.

Примеры

2.2.Вычислить интегралы

а. $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x}$ **б.** $\int \sqrt{\sin x}\, d(\sin x)$.

Решение

а. $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C$.

Мы воспользовались табличным интегралом 3 и формулой (5) при $\varphi(x) = \ln x$.

б. $\int \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$.

Мы воспользовались табличным интегралом 2 $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ и формулой (5) при $\varphi(x) = \sin x$.

При решении примеров 2.3 – 2.5 надо использовать свойства дифференциала

1. $dx=d(x+c)$ c постоянная

2. $dx = \frac{d(cx)}{c}$ c постоянная

3. $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ a и b постоянные

Примеры

2.3 . Вычислить интегралы

а. $\int \frac{dx}{x-a}$ **б.** $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ $k \neq 1$.

Решение а. $\int \frac{dx}{x-a}$. Воспользовавшись первым свойством дифференциала и табличным интегралом согласно формуле (5), получим $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln\left|x-a\right| + C$.

б. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ $k \neq 1$ Воспользовавшись первым свойством дифференциала и табличным интегралом 2 ($\alpha = -k$), согласно формуле (5), получим $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$.

Примеры

2.4. Вычислить интегралы

а. $\int \cos 5x dx$ **б.** $\int e^{-2x} dx$

Решение

а. $\int \cos 5x dx$. Так как $dx = \dfrac{d(5x)}{5}$ (свойство 2), то

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

(воспользовались табличным интегралом 6 и формулой (5)).

б. $\int e^{-2x}dx$. Так как $dx = \dfrac{d(-2x)}{-2}$, то $\int e^{-2x}dx = \int \dfrac{e^{-2x}d(-2x)}{-2} = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C$.

2.5 . Вычислить интегралы

а. $\int \sqrt{2x+3}dx$ **б.** $\int (1-3x)^{23}dx$

Решение

а. $\int \sqrt{2x+3}dx$. Поскольку $dx = \dfrac{d(2x+3)}{2}$, то $\int \sqrt{2x+3}dx = \int \sqrt{2x+3}\ \dfrac{d(2x+3)}{2} = \dfrac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

(воспользовались табличным интегралом 2 $\left(\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$ и формулой (5)).

б. $\int (1-3x)^{23}dx$.Поскольку $dx = -\dfrac{1}{3}d(1-3x)$,то

$$\int (1-3x)^{23}dx = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{23}d(1-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{24}}{24} + C = -\frac{1}{72}(1-3x)^{24} + C.$$

Пусть интеграл имеет вид $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Заметим , что $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, то есть внесем множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала. В результате получим $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Тогда, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$ (см. формулу (5))

Примеры

2.6. Найти интегралы

а. $\int e^{x^3}x^2dx$ **б.** $\int \operatorname{tg} x dx$ **в.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$

Решение

а. $\int e^{x^3}x^2dx$. Заметив, что $x^2dx = \dfrac{1}{3}dx^3$, и воспользовавшись табличным интегралом 4.а и

формулой (5), получим $\int e^{x^3}x^2dx = \dfrac{1}{3}\int e^{x^3}dx^3 = \dfrac{1}{3}e^{x^3} + C$.

б. $\int \operatorname{tg} x dx$. $\quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

Мы внесли sin x под знак дифференциала, воспользовались табличным интегралом 3 и формулой (5).

в. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$. Заметим, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$. Внесли $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ под знак дифференциала. Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x} = \int \frac{d\arcsin x}{\arcsin^2 x} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$. Воспользовались табличным интегралом 2 при $\alpha = -2$ и формулой (5).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти интегралы

а. $\int \frac{d(x-2)}{x-2}$ **б.** $\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^4+1}}$ **в.** $\int \frac{d\sin x}{\sin^2 x}$

2. Найти интегралы

а. $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ **б.** $\int \sin\frac{x}{2} dx$ **в.** $\int \cos(3x+2) dx$

3. Найти интегралы

а. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ **б.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$ **в.** $\int \frac{x dx}{x^2+1}$

Ответы

1. **а.** $\ln|x-2| + C$ **б.** $\ln\left|x^2 + \sqrt{x^2+1}\right| + C$ **в.** $-\frac{1}{\sin x} + C$

2. **а.** $-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C$ **б.** $-2\cos\frac{x}{2} + C$ **в.** $\frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$

3. **а.** $e^{\sin x} + C$ **б.** $\ln(\operatorname{arctg} x) + C$ **в.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

§ 3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt, \qquad (6).$$

где функция *x(t)* имеет обратную функцию *t(x),* и их производные связаны формулой $x'_t = \frac{1}{t'_x}$.

Подобрав функцию *x(t)* можно добиться того, что интеграл в правой части имеет более простой вид. Отметим, что некоторые замены переменных будут рассмотрены в главе 3.

Примеры

2.7. Вычислить интегралы

а $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}$ **б.** $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}$ **в.** $\int x\sqrt{x-2}dx$

Решение

а. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}$. Сделаем замену переменной $t=\sqrt{x}$, которая позволит избавиться от корня под знаком интеграла. Тогда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Интеграл (формула (6)) примет вид

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}=\int \frac{t\cdot 2tdt}{t+2}=2\int \frac{t^2dt}{t+2}$. Приведем числитель к виду $t^2=(t^2-4)+4$ и представим интеграл в виде суммы двух интегралов, тогда

$$2\int \frac{t^2dt}{t+2}=2\int \frac{(t^2-4)+4}{t+2}dt=2\left(\int \frac{t^2-4}{t+2}dt+4\int \frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=2\left(\int (t-2)dt+4\int \frac{dt}{t+2}\right)=2\int (t-2)d(t-2)+8\int \frac{d(t+2)}{t+2}=$$

$$=2\frac{(t-2)^2}{2}+8\ln|t+2|+C=(t-2)^2+8\ln|t+2|+C \quad \text{(примеры § 2).}$$

Перейдем от переменной t к переменной x. Так как $t=\sqrt{x}$, то получим

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}=(\sqrt{x}-2)^2+8\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C.$$

б. $I=\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}$. Из квадратного трехчлена x^2+x+1 выделим полный квадрат

$$x^2+x+1=x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Тогда $I=\int \frac{(x+2)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. Сделаем замену переменной $x+\frac{1}{2}=t$, $x=t-\frac{1}{2}$, $dx=dt$. Интеграл I примет вид $I=\int \frac{\left(t-\frac{1}{2}+2\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$.

Для нахождения первого интеграла заметим, что $tdt=\frac{1}{2}d(t^2+\frac{3}{4})$. Второй интеграл табличный (формула 10). Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

Вернемся к переменной x. Так как $t=x+\frac{1}{2}$, то исходный интеграл I равен

$$I=\int\frac{(x+2)dt}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Замечание. Этим методом находятся любые интегралы вида

$I=\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$ (линейная функция, деленная на квадратный трехчлен).

в. $\int x\sqrt{x-2}dx$. Сделаем замену переменной $t^2=x-2$, тогда $x=t^2+2$ и $dx=d\left(t^2+2\right)=2tdt$.

По формуле (6) , $\int x\sqrt{x-2}dx=\int\left(t^2+2\right)t\cdot 2tdt=\int\left(2t^4+4t^2\right)dt=2\int\left(t^4+2t^2\right)dt=2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}\right)+C$.

Так как $x=t^2+2$, то $t=\sqrt{x-2}$, и исходный

интеграл равен $\int x\sqrt{x-2}dx=2\left(\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^5}{5}+\frac{2}{3}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^3}{3}\right)+C$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы

а. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}}$ **б**. $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ **в.** $\int\frac{x+1}{x^2-2x+6}dx$

Ответы

а. $\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}-3(1+x)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|+C$ **б.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$

в. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+6\right|+\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$

§ 4. Интегрирование по частям.

Справедлива формулы

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx \qquad (7)$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \;, \qquad (8)$$

где подынтегральные функции непрерывны.

Эти формулы позволяют свести интеграл $\int udv$ к интегралу $\int vdu$ более простого вида , Для их применения подынтегральное выражение представляется в виде произведения функции u на выражение dv, содержащее dx . Из последнего выражения интегрированием находим v. Функцию u следует выбирать так, чтобы она упрощалась при дифференцировании.

Методом интегрирования по частям находятся интегралы, содержащие показательную, логарифмическую или обратные тригонометрические функции. При этом эти функции обозначаются за u. Также по частям находятся интегралы, содержащие произведения многочлена степени n на $\cos \alpha x$ или $\sin \alpha x$.

Примеры

2.8. Вычислить интегралы

а. $\int x\cos 2xdx$ **б.** $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ **в.** $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$

Решение

а. $\int x\cos 2xdx$ **.** Положим $u = x$ $dv=\cos 2xdx$, тогда $du = dx$

$v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x$ (см. пример 2.3).

По формуле (8) можно записать

$$\int x\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot x - \int \frac{1}{2}\sin 2xdx = \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Замечание. С помощью формулы интегрирования по частям вычисление исходного интеграла свелось к вычислению более простого интеграла. Заметим, что, если положить $u=\cos 2x$, $dv = x\,dx$, то интеграл в правой части не упростится, так как под знаком интеграла появится множитель x^2 .

б. $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$. Положим $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $dv = dx$, тогда $v = x$,

$du = d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx$. По формуле (8) $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

В последнем интеграле представим числитель в виде $x^2 = \left(x^2 + a^2\right) - a^2$, тогда

$$I = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{\left(\left(x^2+a^2\right)-a^2\right)dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{\left(x^2+a^2\right)dx}{\sqrt{a^2+x^2}} +$$

$$+a^2 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|.$$

(последний интеграл – табличный (формула 12)). В результате относительно интеграла I получилось уравнение

$I = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2 \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$, отсюда

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right) + C.$$

Замечание. Этот метод называется методом сведения интеграла к самому себе.

в. $I=\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$. Пусть $u = x$, тогда $du = dx$,

$dv = \cos x \frac{dx}{\sin^3 x} \cdot$, тогда $v = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin^{-2} x}{-2}$.

Следовательно, $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} \cdot x + \int \frac{dx}{2\sin^2 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} \cdot x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$

(формула (8)).

Задачи для самостоятельного решения

1. $\int (x+1)e^x dx$ **2.** $\int x^5 \ln x dx$ **3.** $\int x^2 \sin x dx$

4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ **5.** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **6.** $\int 2^x \sin x dx$

Ответы

1. $xe^x + C$ **2.** $\frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C$ **3.** $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

4. $2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$ **5.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C$

6. $\frac{1}{1+\ln^2 2}\left(-2^x\cos x + 2^x \sin x \ln 2\right) + C$

Глава 3. Некоторые классы интегрируемых функций

§ 1. Интегрирование рациональных функций

Целой рациональной функцией или многочленом называется функция вида $f_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, где $n \geq 0$, $a_0, ... a_n$ - вещественные числа, $a_n \neq 0$. Число n называется степенью многочлена , $f_0(x) = a_0$ – многочлен нулевой степени.

Известно, что многочлен $f_n(x)$ ($n \neq 0$) можно представить в виде

$$f_n(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} ... (x - c_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} ... \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s},$$

при этом квадратные трехчлены не имеют вещественных корней, то есть $p_m^2 - 4q_m < 0$ (m=1,...s), $k_1 + ... + k_r + 2(l_1 + ... + l_s) = n$.

Дробно - рациональной функцией (Д.Р.Ф.) называется отношение целых рациональных функций $Q(x) = \dfrac{g_m(x)}{f_n(x)}$, где $g_m(x)$ – многочлен степени m, $f_n(x)$ – многочлен степени n.

Если $m \geq n$, то Д.Р.Ф. называется неправильной. Если $m<n$, то Д.Р.Ф. называется правильной.

Справедливы утверждения

Теорема 3. Неправильную Д.Р.Ф. можно представить в виде суммы многочлена и правильной Д.Р.Ф.

$Q(x) = \dfrac{g_m(x)}{f_n(x)} = \varphi_{m-n}(x) + \dfrac{q_k(x)}{f_n(x)}$, $m \geq n$, $\varphi_{m-n}(x)$ – многочлен степени m–n, $\dfrac{q_k(x)}{f_n(x)}$ – правильная Д.Р.Ф. ($k<n$).

Правильную Д.Р.Ф. можно представить в виде суммы простейших дробей вида

1. $\dfrac{A}{x-c}$ **2.** $\dfrac{A}{(x-c)^k}$, $k > 1$ **3.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2 - 4q < 0$.

4. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $p^2 - 4q < 0$, $k > 1$.

При этом, если $f_n(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} ... (x - c_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} ... \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}$, то каждому множителю $(x - c_m)^{k_m}$ соответствует сумма k_m дробей $\dfrac{A_1}{x - c_m} + ... \dfrac{A_{k_m}}{(x - c_m)^{k_m}}$, а множителю $\left(x^2 + p_m x + q_m\right)^{l_m}$ соответствует сумма l_m дробей

$\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+...+\dfrac{M_{l_m}x+N_{l_m}}{\left(x^2+px+q\right)^{l_m}}$. Коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов. Этот метод будет рассмотрен в примерах. Интегрирование простейших дробей вида **1, 2** рассмотрено в главе 2 (примеры 2.3 а.и б.), вида **3 -** в главе 2 (пример 2.6, б), интегрирование дробей вида **4** требует более сложных методов, которые в данном пособии не рассматриваются.

Таким образом, интегрирование Д.Р.Ф. сводится к интегрированию многочленов и простейших дробей.

Примеры

3.1.Вычислить интегралы

а. $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}dx$ **б.** $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$ **в.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-1}$

Решение

а. $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}dx$. Д.Р.Ф., стоящая под знаком интеграла, неправильная. Разделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^2+1 & \underline{x^3-4x} \\ \underline{x^4-4x^2} & \quad x \\ \quad 5x^2+1 & \end{array}$$

Так как, делимое (x^4+x^2+1) равно делителю (x^3-4x) умноженному на частное x плюс остаток ($5x^2+1$),

то $x^4+x^2+1=x\left(x^3-4x\right)+\left(5x^2+1\right)$ и Д.Р.Ф. можно представить в виде

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}=\frac{x\left(x^3-4x\right)+\left(5x^2+1\right)}{x^3-4x}=x+\frac{5x^2+1}{x^3-4x}. \qquad (9)$$

Правильную Д.Р.Ф. $\dfrac{5x^2+1}{x^3-4x}=\dfrac{5x^2+1}{x(x-2)(x-2)}$ представим в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{5x^2+1}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} \qquad (10)$$

(поскольку множители в знаменателе в первой степени, каждому из них соответствует одна простейшая дробь).

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем друг к другу числители, тогда

$$5x^2+1=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2). \qquad (11)$$

В правой части сгруппируем члены с одинаковыми степеням x

$5x^2+1=x^2\left(A+B+C\right)+x(2B-2C)-4A$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

При x^2: $5=A+B+C$, при x: $0=2B-2C$, при x^0: $1=-4A$.

Этот метод называется методом сравнения коэффициентов

Решая систему $\begin{cases}5=A+B+C\\0=2B-2C\\A=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$, находим $\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\B=\dfrac{21}{8}\\C=\dfrac{21}{8}\end{cases}$.

Коэффициенты A, B, C можно найти иначе.

Равенство (11)

$5x^2+1=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$ справедливо при любых значениях x.

Положим в этом равенстве x равным корням знаменателя.

При $x=0$: $0+1=A(0-2)(0+2)$, тогда $A=-\dfrac{1}{4}$.

При $x=2$: $5\cdot 2^2+1=B\cdot 2(2+2)$, тогда $B=\dfrac{21}{8}$.

При $x=-2$: $5\cdot(-2)^2+1=B\cdot(-2)(-2+2)$, тогда $C=\dfrac{21}{8}$.

Замечание. В данном примере вторым способом коэффициенты находятся быстрее и независимо друг от друга.

Этот метод называется методом частных значений. Подставляя в формулу (10) найденные A, B и C, получим $\dfrac{5x^2+1}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{x}+\dfrac{\frac{21}{8}}{x-2}+\dfrac{\frac{21}{8}}{x+2}$.

Интеграл $\int\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}dx$ (с учетом (9)) можно переписать в виде

$$\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3-4x}dx=\int\left(x+\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{21}{8}}{x-2}+\frac{\frac{21}{8}}{x+2}\right)dx=$$

$$=\int xdx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{21}{8}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{21}{8}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{21}{8}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{21}{8}\ln|x+2|+C.$$

б. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$. Д.Р.Ф. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ правильная, представим её в виде суммы простейших дробей. Множителю $(x+1)^2$ соответствуют две простейшие дроби вида $\frac{A}{(x+1)^2}$ и $\frac{B}{x+1}$, а множителю *(x*–1*)* одна простейшая дробь вида $\frac{C}{x-1}$. Тогда

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\ . \qquad (12)$$

Приводем правую часть к общему знаменателю и приравняем друг к другу числители, тогда

$$x^2+1=A(x-1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)^2. \qquad (13).$$

Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов найдем *A*, *B*, *C*

Полагая в равенстве (13) $x=1$ и $x=-1$, найдем коэффициенты *A* и *C*.

При $x=1$: $1+1=C(1+1)^2$, тогда $C=\frac{1}{2}$.

При $x=-1$: $(-1)^2+1=A(-1-1))$, тогда $A=-1$.

Приравняв слева и справа коэффициенты при x^2, найдем *B*.

При x^2: 1=*B*+*C*, тогда *B*=1–*C*=$\frac{1}{2}$.

Подставляя найденные значения *A*, *B* и *C* в (12), получим

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Тогда интеграл примет вид $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}++\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx=$

$$=-\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{2}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

в. $\int \frac{dx}{x^3-1}$.Д.Р.Ф. $\frac{1}{x^3-1}$ – правильная. Разложим на множители знаменатель $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$ (квадратный трехчлен не имеет вещественных корней) и представим её в виде суммы простейших дробей. Множителю $(x-1)$ соответствует простейшая дробь вида $\frac{A}{x-1}$, а множителю (x^2+x+1)– простейшая дробь вида $\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.Тогда

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad (14).$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая друг к другу числители, получим равенство

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)\cdot(x-1) \qquad (15).$$

Полагая в равенстве (15) $x=1$, найдем коэффициент A.

При $x=1$: $1=A(1+1+1)$, тогда $A=\frac{1}{3}$.

Приравняв слева и справа коэффициенты при x^2 и x, найдем B и C.

При x^2 : $0=A+B$, тогда $B=-A=-\frac{1}{3}$.

При x : $0=A-B+C$, тогда $C=-A+B=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$.

Итак $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$.

Подставляя найденные значения A, B и C в (14), получим

$$\frac{1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}.$$

Тогда интеграл примет вид

$$\int\frac{dx}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|-\left.\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Мы воспользовались тем, что второй интеграл

$$I=\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

(см. пример 2.7.б, глава 2).

Задачи для самостоятельного решения

1.а. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ **б.** $\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx$

2. а. $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$ **б.** $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$

3. а. $\int\frac{x}{x^3+1}dx$ **б.** $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

Ответы

1. а. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$ **б.** $3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C$

2. а. $2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C$ **б.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$

3.а. $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

б. $-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{2}+C$

§ 2. Интегрирование тригонометрических функций

1 . Универсальная тригонометрическая подстановка

Интеграл вида $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R многочлен или Д.Р.Ф. от $\sin x$ и $\cos x$, сводится к рациональной функции от t с помощью подстановки $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $(-\pi<x<\pi)$, тогда

$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. По формулам тригонометрии $\sin x=2\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В результате этой подстановки интеграл примет вид

$I=\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int \widetilde{R}(t)dt$, где $\widetilde{R}(t)$ рациональная функция от t.

Эта подстановка называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Примеры

3.4. Вычислить интегралы

а. $I=\int\frac{dx}{\sin x}$ **б.** $I=\int\frac{dx}{\cos x}$

Решение а. $I=\int\frac{dx}{\sin x}$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ (-\pi<x<\pi)$, получим $I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

(см. примеры § 2).

б. $I=\int\frac{dx}{\cos x}$. Представим этот интеграл в виде $I=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$.

Применив результаты примера 3.4,а, получим $I=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

Замечание. Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким результатам, поэтому иногда цель может быть достигнута с помощью других подстановок.

2.Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$.

Следует сделать замену переменной $\sin x=t$ или внести cos x под знак дифференциала). Тогда интеграл примет вид $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\widetilde{R}(\sin x)d\sin x=\int\widetilde{R}(t)dt$.

($\widetilde{R}(t)$ рациональная функция от t) .

3.Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$.

Следует сделать замену переменной $\cos x=t$ (или внести sin x под знак дифференциала). Тогда интеграл примет вид $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\widetilde{R}(\cos x)d\cos x=\int\widetilde{R}(t)dt$ ($\widetilde{R}(t)-$ рациональная функция от t).

4. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, в частности, если подынтегральное выражение имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$, то рекомендуется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Примеры

3.5. Вычислить интегралы

а. $I = \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin^2 x}$ **б.** $I = \int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$

Решение

а. $I = \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin^2 x}$. Ясно, что подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$. Сделаем замену переменной $\sin x = t$ или внесем $\cos x$ под знак дифференциала и воспользуемся табличным интегралом 10.

Тогда $I = \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

б. $I = \int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$. Ясно,что $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Представим полынтегральную функцию в виде $\frac{1}{3 + \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \left(\frac{3}{\cos^2 x} + 1\right)} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \left(3 \cdot \left(1 + tg^2 x\right) + 1\right)} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \left(3tg^2 x + 4\right)}$.

Сделаем замену переменной $\operatorname{tg} x = t$, тогда $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, и интеграл примет вид

$$I = \int \frac{dx}{3 + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \left(3 \operatorname{tg}^2 x + 4\right)} = \int \frac{dt}{3t^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{2}\right) + C$$ (табличным интеграл 10).

5. Интегралы вида $I = \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ находятся следующим образом:

а. если n или m нечётные, то следует сделать замену $\cos x = t$ $(\sin x = t)$,

б. если n и m чётные, то следует воспользоваться формулами тригонометрии

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Примеры

3.6. Вычислить интегралы

а. $I = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ **б.** $I = \int \cos^2 x dx$

Решение

а. $I=\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x dx$. Так как *n* нечётное, то сделаем замену переменной $\cos x=t$ (внесём sin*x* под знак дифференциала $\sin xdx=-d(\cos x)$). Тогда интеграл примет вид

$$I=\int \sin^3 x\cdot\cos^2 xdx=-\int \sin^2 x\cos^2 xd(\cos x)=$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)\cos^2 xd(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C$$

(см. примеры главы 2).

б. $I=\int \cos^2 xdx$. Так как *n, m* чётные (*n*=0), то воспользуемся формулой $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, тогда $I=\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ (см. примеры главы 2) .

Задачи для самостоятельного решения

1. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, найти интегралы

а. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ **б.** $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

2. Применяя подстановку $\sin x=t$ или $\cos x=t$, вычислить интегралы

а. $\int\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ **б.** $\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$

3. Применяя подстановку $\operatorname{tg}x=t$, найти интегралы

а. $\int\frac{\operatorname{tg}xdx}{1-\operatorname{ctg}^2 x}$ **б.** $\int\frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$

4. Вычислить интегралы

а. $\int\cos^2 x\sin^3 xdx$ **б.** $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$

Ответы

1. **а.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C$ **б.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-6}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$

2. **а.** $\ln|\sin x+2|+C$ **б.** $\frac{1}{\cos x}+C$

3. **а.** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^4 x-1\right|+C$ **б.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$

4. **а.** $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$ **б.** $\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

§ 3. Тригонометрические подстановки

Если подынтегральная функция содержит корни вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ($a>0$), то избавиться от иррациональности можно с помощью тригонометрических подстановок

для первого корня $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$),

для второго корня $x=a\cdot\mathrm{tg}t$ (или $x=a\cdot\mathrm{ctg}t$),

для третьего корня $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$) .

Примеры

3.7. Вычислить интегралы

а. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ **б.** $I=\int\dfrac{dx}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^3}$ в. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

Решение

а. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$**.** Сделаем замену переменной $x=a\sin t$ $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда $dx=a\cos tdt$,

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t$. ($\cos t>0$), тогда

$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos ta\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}\right)+C$ (см. пример 3.6. б) .

Так как $x=a\sin t$, то $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ и

$\sin 2t=2\sin t\cos t=\dfrac{2x}{a}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}=2x\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$.

Следовательно, интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}+x\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C=$

$=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)+C$.

б. $I=\int\dfrac{dx}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^3}$. Сделаем замену переменной $x=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t$ $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, отсюда

$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{2+x^2}=\sqrt{2+2\mathrm{tg}^2 t}=\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}$. Тогда интеграл примет вид

$I=\int\dfrac{dx}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^3}=\int\dfrac{\cos^3 t}{2\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}\ dt}{\cos^2 t}=\dfrac{1}{2}\int\cos tdt=\dfrac{1}{2}\sin t+C$. Вернёмся к переменной *x*.

$x=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t$, тогда $t=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$. Следовательно, интеграл

$$I=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^3}=\frac{1}{2}\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

в. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. Сделаем замену переменной $x=\dfrac{a}{\sin t}$, тогда $dx=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$ и

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Интеграл примет вид $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{a}{\sin t}\,\frac{a\cos t}{\sin t}}=-\frac{1}{a}\int dt=-\frac{1}{a}t+C$. Вернемся к старой переменной. Так как $\sin t=\dfrac{a}{x}$, то $t=\arcsin\dfrac{a}{x}$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$.

Задачи для самостоятельного решения

Применяя тригонометрические подстановки вычислить интегралы

1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ **2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ **3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3}$

Ответы

1. $-\mathrm{ctg}\arcsin x-\arcsin x+C$ **2.** $\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{2}\right|+C$ **3.** $-\dfrac{1}{2\sin\arccos\frac{2}{x}}+C$

Приложение. Контрольные задания.

В приложении приведены шесть вариантов контрольных работ. Контрольная работа состоит из пяти заданий на вычисление неопределенных интегралов методами, рассмотренными в методическом пособии: простейшая замена переменной (подведение множителя под знак дифференциала), интегрирование по частям, интегрирование дробно–рациональных функций, универсальная тригонометрическая подстановка, тригонометрические подстановки.

Отметим, что примеры 4 и 5 в контрольных работах более сложные, поэтому при малом числе часов их можно исключить.

Вариант 1

1. $\int e^{x^3} x^2 dx$.

2. $\int x \sin 2x dx$.

3. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx$.

4. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$.

5. $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Вариант 2

1. $\int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$

2. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3. $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 - 6x} dx$

4. $\int \frac{dx}{2 - 5\sin x}$

5. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$

Вариант 3

1. $\int \frac{x}{x^4 + 2} dx$

2. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

3. $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

Вариант 4

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

3. $\int \frac{9 - 5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

4. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

Вариант 5

1. $\int \frac{x dx}{x^2 + 4}$

2. $\int x \ln x dx$

3. $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$

4. $\int \frac{dx}{2 + \cos x} dx$

5. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$

Вариант 6

1. $\int \frac{\ln^{\frac{3}{2}} x}{x} dx$

2. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

3. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$

4. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$

Литература.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч 1. М.: Физматлит, 2005, 648 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа т 1. М.: Наука, 1968., 440 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления т.1. М.: Физматлит , 1996., 432 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Спб.; Профессия, 2001, 416 с.
5. Андрианова Т.Н., Волков В.А., Ефимова Т.А и др. Задачник – практикум по высшей математике. Интегральное исчисление .СПб.: из - во С.Петербургского университета, 1994, 232 с.
6 . Осипов А.В. Лекции по высшей математике. СПб .: изд – во С.Петербургского университета , 2012, 311с.
7. Осипов А.В. Лекции по высшей математике . СПб .: Лань, 2014. 320с.