САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сахаров В.Ю., Черняев П.К.

Диалоги о пределах

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики
в качестве учебного пособия
для студентов нематематических и естественных факультетов

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Шепелявый А.И.* (СПбГУ)
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Утина Н.В.* (СПбГАСУ)

Печатается по рекомендации к опубликованию
Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 "Математика и механика"
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Сахаров В.Ю., Черняев П.К. Диалоги о пределах. Учебное пособие. — СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2020 — 45 с.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Экономика", "Бизнес-информатика", "Менеджмент", "Государственное и муниципальное управление", "Нефтегазовое дело", "Социология", "Социальная работа", "Биология", "География", "Картография и геоинформатика", "Гидрометрология", "Экология и природопользование", "Зелеустройство и кадастры", "Химия", "Химия физика и механика материалов", "Геология", "Почвоведение". В пособии рассматривается тема "Пределы" из дисциплины "Математический анализ" или "Высшая математика". Пособие основано исключительно на тех вопросах, которые задавались студентами экономического факультета СПбГУ на консультациях. Приведённые в пособии решения и объяснения иногда могут показаться слишком подробными, но ведь если студентам этот материал оказался непонятен "с первого раза", то, естественно, отвечать приходится не только повторяя фрагмент лекции или практического занятия, а и комментируя его с разных сторон. Некоторые объяснения дополнительно снабжены иллюстрациями.

Настоящее пособие может быть полезно для студентов, изучающих общий курс высшей математики самостоятельно.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Данное пособие создано на основе некоторой части годового курса “Адаптационная математика”, введённого в учебную программу экономического факультета СПбГУ по инициативе $\boxed{\text{О.А.Иванова}}$ и П.К.Черняева. Изначально планировалось, что эта дисциплина призвана ликвидировать пробел в знаниях современных студентов, возникший в средней школе, а их уровень поднять до того, который имели их сверстники 30 лет назад. Но в процессе работы оказалось, что у студентов возникает большое количество вопросов и по текущему материалу тоже. Эти вопросы были собраны и отсортированы по темам. Иногда читателю будет казаться, что вопросы слишком простые и их не следовало обсуждать в книге. Если эти вопросы всё-таки были заданы, то это значит, что существуют студенты, которые либо действительно не знали, как решить такую простую задачу, либо хотели убедиться в правильности своих знаний.

Пособие написано в жанре диалога студента, пришедшего на консультацию, и дежурного преподавателя. Иногда после ответа на вопрос, преподаватель, желая показать обучающемуся проблему с разных сторон, придумывал свой вопрос, слегка изменив задание, которое принёс студент. Некоторые задачи оказались слишком громоздкими. При изложении в учебном пособии они разделены на серии вопросов.

Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных замечаний.

1. ВОПРОСЫ НА ПОНИМАНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА

Вопрос 1.1. Докажите с помощью определения, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ответ. Напомним определение конечного предела последовательности:

Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного ε существует такое число k, что из неравенства $n > k$ следует неравенство $\|x_n - A\| < \varepsilon$.

Было бы очень полезно писать не просто k, а $k(\varepsilon)$, поскольку для разных ε будут разные, зависящие от него $k(\varepsilon)$. Тогда нахождение функции $k(\varepsilon)$ как раз и обеспечивало бы существование предела.

В данном случае $x_n = \frac{1}{n}$, $A = 0$ и требуемое неравенство приобретает вид

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Если принять $k(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, то при $n > k(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ требуемое неравенство окажется справедливым.

Вопрос 1.2. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1}$ и докажите этот результат с помощью определения предела.

Ответ. Поделим каждое слагаемое числителя и каждое слагаемое знаменателя на старшую степень дроби (на n).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \Rrightarrow$$

Замечание. В случае прерываний математических вычислений на комментарии, здесь и далее, вместо обычного знака ревенства будем использовать значок $\Rrightarrow$. Это своего рода “гиперссылка”.

В ответе на вопрос 1.1 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, поэтому

$$\Rrightarrow \frac{4-0}{2+0} = 2.$$

Здесь была использована теорема о пределе арифметических операций, которая будет молчаливо применяться и в дальнейшем, начиная буквально со следующего вопроса. Напомним эту теорему.

Пределом суммы, разности, произведения или частного двух функций (напомним, что последовательность это частный случай функции) является соответственно сумма, разность, произведение или частное (в случае частного требуется отличие предела знаменателя от нуля) пределов этих функций, если эти пределы **существуют и конечны**.

Теперь докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$ с помощью определения предела. Запишем неравенство, которое должно быть выполнено в определении предела

$$\left|\frac{4n-1}{2n+1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{4n-1-2(2n+1)}{2n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-3}{2n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon}<2n+1 \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon}-1<2n \Leftrightarrow n>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right).$$

Если принять $k(\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)$, то при $n>k(\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)$ требуемое неравенство окажется справедливым, что и доказывает утверждение.

Вопрос 1.3. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n^2}$ и докажите этот результат с помощью определения предела.

Ответ. Поделим каждое слагаемое числителя и каждое слагаемое знаменателя на старшую степень дроби (то есть на n^2).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{2}{n^2}-1}=\frac{3}{0-1}=-3.$$

Теперь докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n^2}=-3$ с помощью определения предела. Запишем неравенство, которое должно быть выполнено в определении предела

$$\left|\frac{3n^2}{2-n^2}-(-3)\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n^2}{2-n^2}+1\right|<\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{n^2+2-n^2}{2-n^2}\right|<\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow \left|\frac{2}{2-n^2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Дальнейшие выкладки справедливы только при $n>1$. Поэтому, после нахождения выражения, которое должно будет превзойдено номером n, в качестве функции $k(\varepsilon)$ нужно будет взять наибольшее из этого выражения и единицы.

$$\frac{2}{n^2-2}<\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon}<n^2-2 \Leftrightarrow n^2>2+\frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\sqrt{2+\frac{6}{\varepsilon}}.$$

Если принять $k(\varepsilon)=\max\left\{1;\sqrt{2+\frac{6}{\varepsilon}}\right\}$, то при $n>k(\varepsilon)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n>1 \\ n>\sqrt{2+\frac{6}{\varepsilon}}\end{array}\right.$ и n будет больше единицы, и (поэтому) будут справедливы выкладки, описанные выше. Утверждение доказано.

Интересно, что в данном конкретном случае функцию $k(\varepsilon)$ можно упростить. Поскольку $\varepsilon>0$, то $\sqrt{2+\frac{6}{\varepsilon}}>\sqrt{2}>1$. Поэтому $k(\varepsilon)=\sqrt{2+\frac{6}{\varepsilon}}$.

Вопрос 1.4. Докажите, что если $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to c$, то $\lim\limits_{x\to c}e^{\alpha(x)}=1$.

Ответ. Напомним определение конечного предела функции:

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке c, если для любого положительного ε существует такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x\neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$ выполняется неравенство $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.

Поскольку в данном вопросе неизвестно что такое c, конечное оно или бесконечное, односторонний предел или двусторонний, то в определении пришлось "дипломатично" применить термин *окрестность*, а не использовать конкретное неравенство.

Обратим внимание, что если для некоторого малого значения ε_{small} существует указанная окрестность, то эта же окрестность вполне подойдёт и для большего значения $\varepsilon_{big} > \varepsilon_{small}$, поскольку из неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon_{small}$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon_{small} < \varepsilon_{big} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_{big}$. Поэтому часто говорят не просто "для любого ε", а, усиливая смысл, "для любого сколь угодно малого ε". Естественно, ε называют сколь угодно малым числом.

Ещё нужно знать, что такое бесконечно малая функция.

Функция называется бесконечно малой в некоторой точке, если её предел в этой точке равен нулю.

Фактически в этом определении нет ничего нового. Если в определении предела функции (см. выше) вместо числа A поставить нуль, то получится определение бесконечно малой функции:

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке c, если для любого положительного ε существует такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $\alpha(x)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Перейдём к решению задачи. Выберем произвольное (сколь угодно малое положительное) число $\varepsilon \in (0; 1)$. Поскольку по условию $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to c$, то для любого положительного числа, в частности и для $\ln(1+\varepsilon)$, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $\alpha(x)$, а следовательно и в область определения функции $e^{\alpha(x)}$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \ln(1+\varepsilon)$$

$$-\ln(1+\varepsilon) < \alpha(x) < \ln(1+\varepsilon).$$

Обратим внимание, что $\ln(1-\varepsilon) < -\ln(1+\varepsilon)$. Действительно, $\ln(1-\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon) < 0 \Leftrightarrow \ln\left((1-\varepsilon)(1+\varepsilon)\right) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(1-\varepsilon^2\right) < 0$ является верным неравенством. Поэтому

$$\ln(1-\varepsilon) < -\ln(1+\varepsilon) < \alpha(x) < \ln(1+\varepsilon)$$

$$\ln(1-\varepsilon) < \alpha(x) < \ln(1+\varepsilon)$$

$$e^{\ln(1-\varepsilon)} < e^{\alpha(x)} < e^{\ln(1+\varepsilon)}$$

$$1-\varepsilon < e^{\alpha(x)} < 1+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < e^{\alpha(x)} - 1 < \varepsilon$$

$$\left|e^{\alpha(x)} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Следовательно, существование указанной выше окрестности доказывает, что $\lim\limits_{x\to c} e^{\alpha(x)} = 1$.

Вопрос 1.5. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, где A конечное число, то $\lim\limits_{x\to c} e^{f(x)} = e^A$.

Ответ. Вспомним (или узнаем) ещё одну теорему (она называется “необходимый и достаточный признак существования конечного предела функции”):

> Для того, чтобы конечное число A было пределом функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией.

Поэтому

$$\lim_{x\to c} e^{f(x)} = \lim_{x\to c} e^{A+\alpha(x)} = \lim_{x\to c} \left(e^A e^{\alpha(x)}\right) = e^A \cdot \lim_{x\to c} e^{\alpha(x)} = e^A \cdot 1 = e^A.$$

Вопрос 1.6. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to c} e^{f(x)} = 0$.

Ответ. Напомним определение бесконечного предела функции для отрицательной бесконечности:

> Говорят, что $-\infty$ является пределом функции $f(x)$ в точке c, если для любого числа M существует такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Для доказательства того, что конечное число ноль является пределом функции, возьмём произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Согласно определению того, что $-\infty$ является пределом функции $f(x)$ в точке c, для любого числа, в частности и для $\ln\varepsilon$, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$, а следовательно и в область определения функции $e^{f(x)}$, выполняется неравенство

$$f(x) < \ln\varepsilon \Leftrightarrow e^{f(x)} < e^{\ln\varepsilon} \Leftrightarrow e^{f(x)} < \varepsilon.$$

Из-за положительности экспоненты можно написать и так:

$$\left|e^{f(x)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - 0\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, существование указанной выше окрестности доказывает, что $\lim\limits_{x\to c} e^{f(x)} = 0$.

Вопрос 1.7. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to c} e^{f(x)} = +\infty$.

Ответ. Напомним определение бесконечного предела функции для положительной бесконечности:

> Говорят, что $+\infty$ является пределом функции $f(x)$ в точке c, если для любого числа N существует такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x) > N$.

Для доказательства того, что $+\infty$ является пределом функции, возьмём произвольное число N. Согласно определению того, что $+\infty$ является пределом функции $f(x)$ в точке c, для любого числа, в частности и для $\ln N$, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$, а следовательно и в область определения функции $e^{f(x)}$, выполняется неравенство

$$f(x) > \ln N \Leftrightarrow e^{f(x)} > e^{\ln N} \Leftrightarrow e^{f(x)} > N.$$

Следовательно, существование указанной выше окрестности доказывает, что $\lim\limits_{x \to c} e^{f(x)} = +\infty$.

Вопрос 1.8. Докажите, что если $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to c$, то $\lim\limits_{x \to c} \ln(1 + \alpha(x)) = 0$.

Ответ. Для доказательства того, что конечное число ноль является пределом функции, возьмём произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Поскольку по условию $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to c$, то $\lim\limits_{x \to c} \alpha(x) = 0$. Согласно определению конечного предела функции, для любого положительного числа, в частности и для $(1 - e^{-\varepsilon})$, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $\alpha(x)$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x) - 0| < 1 - e^{-\varepsilon}$$

$$|\alpha(x)| < 1 - e^{-\varepsilon}$$

$$-\left(1 - e^{-\varepsilon}\right) < \alpha(x) < 1 - e^{-\varepsilon}.$$

Обратим внимание, что $1 - e^{-\varepsilon} \leqslant e^{\varepsilon} - 1$. Действительно, $2 \leqslant e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}$ является частным случаем неравенства Коши ($a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ при $a, b \geqslant 0$; $a = e^{\varepsilon}$, $b = e^{-\varepsilon}$, $e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon} \geqslant 2\sqrt{e^{\varepsilon} e^{-\varepsilon}} = 2\sqrt{1} = 2$). Поэтому

$$-\left(1 - e^{-\varepsilon}\right) < \alpha(x) < 1 - e^{-\varepsilon} \leqslant e^{\varepsilon} - 1$$

$$-1 + e^{-\varepsilon} < \alpha(x) < e^{\varepsilon} - 1$$

$$e^{-\varepsilon} < 1 + \alpha(x) < e^{\varepsilon}.$$

Так как даже $e^{-\varepsilon} > 0$, то, во-первых, неравенство можно логарифмировать, а, во-вторых, аргумент x из рассматриваемой окрестности принадлежит области определения функции $\ln(1 + \alpha(x))$.

$$\ln\left(e^{-\varepsilon}\right) < \ln(1 + \alpha(x)) < \ln\left(e^{\varepsilon}\right)$$

$$-\varepsilon < \ln(1 + \alpha(x)) < \varepsilon$$

$$|\ln(1 + \alpha(x))| < \varepsilon\,.$$

Следовательно, существование указанной выше окрестности доказывает, что $\lim\limits_{x \to c} \ln(1 + \alpha(x)) = 0$.

Вопрос 1.9. Докажите, что если $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, где A конечное положительное число, то $\lim\limits_{x \to c} \ln(f(x)) = \ln A$.

Ответ. По необходимому и достаточному признаку существования конечного предела A (см. вопрос 1.5 на странице 8) функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to c$.

Поэтому

$$\lim_{x\to c} \ln(f(x)) = \lim_{x\to c} \ln(A + \alpha(x)) = \lim_{x\to c} \ln\left(A\left(1 + \frac{\alpha(x)}{A}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to c}\left(\ln A + \ln\left(1 + \frac{\alpha(x)}{A}\right)\right) \Rightarrow$$

Так как предел суммы равен сумме пределов, если они конечны, то

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} \ln A + \lim_{x\to c} \ln\left(1 + \frac{\alpha(x)}{A}\right) \Rightarrow$$

Первый из пределов это предел константы, он равен значению этой константы. А второй предел равен нулю согласно предыдущему вопросу, поскольку, если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая, то $\frac{\alpha(x)}{A}$ тоже бесконечно малая функция.

$$\Rightarrow \ln A + 0 = \ln A.$$

Вопрос 1.10. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to c} \ln(f(x)) = +\infty$.

Ответ. Для доказательства того, что $+\infty$ является пределом функции, возьмём произвольное положительное число N. Согласно определению того, что $+\infty$ является пределом функции $f(x)$ в точке c (см. вопрос 1.7 на странице 8), для любого числа, в частности и для $\ln N$, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$, выполняется неравенство

$$f(x) > e^N.$$

Это неравенство можно логарифмировать, поскольку экспонента всегда принимает положительные значения, а левая часть больше неё и, следовательно, тоже положительная. Тогда получим

$$\ln(f(x)) > \ln e^N \Leftrightarrow \ln(f(x)) > N.$$

Существование указанной выше окрестности и доказывает, что $\lim\limits_{x\to c} \ln(f(x)) = +\infty$.

Вопрос 1.11. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ и $f(x) > 0$, то $\lim\limits_{x\to c} \ln(f(x)) = -\infty$.

Ответ. Для доказательства того, что $-\infty$ является пределом функции, возьмём произвольное число M (см. вопрос 1.6 на странице 8). Согласно определению того, что конечное число ноль является пределом функции $f(x)$ в точке c (см. вопрос 1.4 на странице 6), для любого сколь угодно малого числа, в частности и для e^M, должна существовать такая окрестность точки c, что для каждого аргумента $x \neq c$ из этой окрестности и входящего в область определения функции $f(x)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - 0| < e^M \Leftrightarrow |f(x)| < e^M \Leftrightarrow -e^M < f(x) < e^M.$$

Поскольку $f(x) > 0$, то

$$f(x) < e^M \Leftrightarrow \ln(f(x)) < \ln e^M \Leftrightarrow \ln(f(x)) < M.$$

Существование указанной выше окрестности и доказывает, что $\lim\limits_{x \to c} \ln(f(x)) = -\infty$.

Вопрос 1.12. Докажите, что если $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$, где A конечное положительное число, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = B$, где B конечное число, то $\lim\limits_{x \to c} \left((f(x))^{g(x)}\right) = A^B$.

Ответ. Используя свойства логарифма совершим преобразования

$$\lim_{x \to c} \left((f(x))^{g(x)}\right) = \lim_{x \to c} e^{\ln\left((f(x))^{g(x)}\right)} = \lim_{x \to c} e^{g(x)\ln(f(x))} \Rightarrow$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to c} g(x) = B$, а из вопроса 1.9 следует, что $\lim\limits_{x \to c} \ln(f(x)) = \ln A$, то так как предел произведения равен произведению пределов, если они существуют и конечны, то предел показателя степени будет равен $B \ln A$. Следовательно, согласно вопросу 1.5 имеем результат:

$$\Rightarrow e^{B \ln A} = e^{\ln\left(A^B\right)} = A^B.$$

2. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Вопрос 2.13. Является ли неопределённостью $(+0)^1$?

Ответ. Нет, не является. Ничто не мешает применить простейшую формулу $a^1 = a$ для $a = 0$. Получим $0^1 = 0$.

Вопрос 2.14. Является ли неопределённостью $(-\infty - \infty)$?

Ответ. Нет, не является. Здесь бесконечности одного знака и они “не конфликтуют”. Обе бесконечности “хотят” одного и того же: сделать ответ равным минус бесконечности. А предел, согласно определению, может быть бесконечным. В таком случае он тоже признаётся существующим. Если ответ бесконечность, то это не неопределённость: $-\infty - \infty = -\infty$.

Вопрос 2.15. Является ли неопределённостью произведение $+\infty \cdot (-\infty)$?

Ответ. Нет, не является. Здесь бесконечности также “не конфликтуют”. Обе бесконечности “хотят” одного и того же: сделать ответ равным бесконечно большим по модулю. Вопрос заключается только в знаке получающейся бесконечности. Как известно, произведение чисел разных знаков отрицательно. Поэтому вполне логично утверждение, записанное в сокращенной форме: $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Вопрос 2.16. Какие бывают неопределённости?

Ответ. Если в списке, следующем ниже, ничего не пропущено, то: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 все возможные неопределённости.

Вопрос 2.17. Докажите, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. Заметим, что это частный случай теоремы 3.28 из §16 на странице 88 учебного пособия [2].

Ответ. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{2^n}{n!}$. Докажем, что начиная с некоторого номера эта последовательность убывает.

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 2 < n+1 \Leftrightarrow n > 1.$$

Доказали, что начиная с $n = 2$ последовательность x_n убывает. Так как $x_n > 0$, то эта последовательность ограничена снизу. Есть теорема:

Если последовательность начиная с некоторого номера убывает и ограничена снизу, то она имеет конечный предел.

Следовательно, предел этой последовательности существует и конечен. Обратим внимание, что

$$x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1}\cdot x_n.$$

Обозначим существующий конечный предел последовательности $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Поскольку $\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ фактически является той же последовательностью, что и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, только с нумерацией, сдвинутой на единицу, то она имеет тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot x_n\right) \Leftrightarrow A = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow A = 0\cdot A \Leftrightarrow A = 0.$$

Утверждение доказано.

Вопрос 2.18. Докажите, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0$, где $a > 1$. Это пример 16 на странице 52 учебного пособия [3].

Ответ. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{n}{a^n}$. Докажем, что начиная с некоторого номера эта последовательность убывает.

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{a^{n+1}} < \frac{n}{a^n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{a} < n \Leftrightarrow n+1 < an \Leftrightarrow 1 < an - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < n(a-1) \Leftrightarrow n > \frac{1}{a-1}.$$

То есть, если взять номер, превосходящий число $\frac{1}{a-1}$, то начиная с этого номера последовательность будет убывать. Так как $x_n > 0$, то эта последовательность ограничена снизу. Есть теорема (см. страницу 12):

Если последовательность начиная с некоторого номера убывает и ограничена снизу, то она имеет конечный предел.

Следовательно, предел этой последовательности существует.

Обратим внимание, что $x_n = \frac{n}{a^n} \Leftrightarrow a^n = \frac{n}{x_n}$. При этом

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} = \frac{n+1}{a \cdot a^n} = \frac{n+1}{a \cdot \frac{n}{x_n}} = \frac{x_n(n+1)}{a \cdot n} = \frac{x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a}.$$

Обозначим существующий конечный предел последовательности $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Поскольку $\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ фактически является той же последовательностью, что и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, только с нумерацией, сдвинутой на единицу, то она имеет тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = b$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то, переходя к пределу получим,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{b(1+0)}{a} \Leftrightarrow ab = b \Leftrightarrow ab - b = 0 \Leftrightarrow (a-1)b = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

То есть, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Вопрос 2.19. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$, где $a > 1$.

Ответ. Задача отличается от предыдущей тем, что переменная n могла принимать только натуральные значения, а переменная $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим $n = [x]$. Здесь квадратные скобки обозначают функцию *целая часть числа*. Это наибольшее целое, не превосходящее данное. Очевидно, неравенство

$$n \leqslant x < n+1.$$

Так как $a > 1$, то

$$a^n \leqslant a^x < a^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} \geqslant \frac{1}{a^x} > \frac{1}{a^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{n+1}} \leqslant \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^n}.$$

Умножая эти два неравенства, получим также верное неравенство

$$n \cdot \frac{1}{a^{n+1}} \leqslant x \cdot \frac{1}{a^x} < (n+1) \cdot \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow \frac{n}{a^{n+1}} \leqslant \frac{x}{a^x} < \frac{n+1}{a^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{a \cdot a^n} \leqslant \frac{x}{a^x} < \frac{a \cdot (n+1)}{a^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{[x]}{a \cdot a^{[x]}} \leqslant \frac{x}{a^x} < \frac{a \cdot ([x]+1)}{a^{[x]+1}}.$$

Обратим внимание, что последнее из полученных неравенств написано для вещественной переменной x. Процитируем нужный вариант теоремы о сжатой функции

> Если существует такое число M, что при $x > M$ верно неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и существуют $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, причём он тоже равен A.

В нашем случае

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{a \cdot a^{[x]}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a \cdot a^n} = \frac{0}{a} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot([x]+1)}{a^{[x]+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot(n+1)}{a^{n+1}}=a\cdot 0=0.$$

Так как последовательность $\frac{n+1}{a^{n+1}}$ фактически является той же последовательностью $\frac{n}{a^n}$ только с нумерацией, сдвинутой на единицу.

По теореме о сжатой функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}$ тоже равен нулю.

Вопрос 2.20. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$, где $a>1$.

Ответ. Обратим внимание на то, что данный предел представляет из себя неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ только при $m>0$, поэтому разберём только этот случай.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{a^{\frac{x}{m}}}\right)^m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^x}\right)^m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{b^x}\right)^m=0^m=0.$$

Здесь было обозначено $b=a^{\frac{1}{m}}$.

Вопрос 2.21. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^m}=0$, где $m>0$.

Ответ. Сделаем замену переменной $t=\ln x$. Новая переменная $t\to+\infty$. Тогда $x=e^t$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\left(e^t\right)^m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{tm}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\left(e^m\right)^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^t}=0.$$

Здесь было обозначено $a=e^m$.

Вопрос 2.22. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^m}=0$, где $k>0$ и $m>0$.

Ответ. Сделаем замену переменной $t=\ln x$. Новая переменная $t\to+\infty$. Тогда $x=e^t$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{\left(e^t\right)^m}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{e^{tm}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{\left(e^m\right)^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{a^t}=0.$$

Здесь было обозначено $a=e^m$.

Вопрос 2.23. Докажите, что предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Это теорема 3.30 из §16 на странице 89 учебного пособия [2].

Ответ. Запишем неравенство, которое должно быть выполнено в определении предела

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon\Leftrightarrow\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon\Leftrightarrow n<(1+\varepsilon)^n\Leftrightarrow\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1.$$

Рассмотрим последовательность $x_n=\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$. Поскольку $\varepsilon>0$, то $1+\varepsilon>1$ и последовательность x_n это хорошо изученная в вопросе 2.18 последовательность $x_n=\frac{n}{a^n}$, предел которой равен нулю. Напомним ещё одну теорему:

Если последовательность x_n, имеет конечный предел, равный A и $B>A$, то существует номер, начиная с которого верно неравенство $x_n<B$.

В данном случае предел последовательности x_n равен $A=0$, а $B=1$. Согласно теореме существует номер, начиная с которого $x_n<1\Leftrightarrow\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$. Существование такого номера и доказывает требуемое утверждение.

Вопрос 2.24. Может ли периодическая функция иметь предел на бесконечности?

Ответ. Если подойти к этому вопросу формально, то ответ "да". Дело в том, что константа тоже является периодической функцией и при этом имеет на бесконечности предел (совпадающий со своим значением).

А если периодическая функция не является константой, то тогда её предела на бесконечности не существует. Докажем, что конечное число C не может быть её пределом.

Если функция $f(x)$ не является константой, то она имеет по крайней мере два различных значения. Обозначим их A и B. Поскольку эти значения различные, то одно из них больше другого. Пусть для определённости $A < B$. Периодическая функция в окрестности бесконечной точки будет бесконечное число раз принимать как значение A, так и значение B.

В определении конечного предела неравенство $|f(x) - C| < \varepsilon$ при некоторых условиях должно выполняться для любого $\varepsilon > 0$. В частности, и для $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Поскольку в окрестности бесконечной точки возможно как $f(x) = A$, так и $f(x) = B$, то одновременно должны выполняться оба неравенства, геометрический смысл которых заключается в том, что две точки A и B должны поместиться в промежуток, длина которого короче расстояния между ними, что невозможно.

$$\begin{cases} |A-C| < \frac{B-A}{2} \\ |B-C| < \frac{B-A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{B-A}{2} < A-C < \frac{B-A}{2} \\ -\frac{B-A}{2} < B-C < \frac{B-A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -B+A < 2A-2C < B-A \\ -B+A < 2B-2C < B-A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -B+A-2A < -2C < -2A+B-A \\ -B+A-2B < -2C < -2B+B-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B-A < -2C < B-3A \\ A-3B < -2C < -B-A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -B-A < -2C < -B-A \Rightarrow -B-A < -B-A.$$

Как видно, алгебраическим путём тоже можно получить противоречие.

Доказательство того, что периодическая функция, не являющаяся константой, не может на бесконечности иметь бесконечного предела, предоставим читателю.

Вопрос 2.25. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(-\sin x)$.

Ответ. Данная в условии функция периодическая. Можно даже сказать, что её период совпадает с периодом синуса, то есть равен 2π. Согласно предыдущему вопросу её предела на бесконечности не существует.

Вопрос 2.26. Какие основные пределы нужно знать?

Ответ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{ctg}x=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}\operatorname{ctg}x=-\infty,\quad \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}x=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\sin x,\quad \lim_{x\to\infty}\cos x,\quad \lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}x,\quad \lim_{x\to\infty}\operatorname{ctg}x\quad \text{не существуют},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}e^x,\quad \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x,\quad \lim_{x\to\infty}\operatorname{arcctg}x\quad \text{не существуют},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0,\ \text{где } n>0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(kx)}{x}=k,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(kx)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin(kx)}{x}=k,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}(kx)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+kx)}{x}=\frac{k}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{kx}-1}{x}=k,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^{kx}-1}{x}=k\ln a,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p,\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+kx)^p-1}{x}=kp,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

3. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вопрос 3.27. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n}{n}$.

Ответ. Разделим почленно числитель на знаменатель и воспользуемся теоремой о пределе суммы:

> Предел суммы двух последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, если они существуют и конечны.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2\cdot\ln n}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\ln n}{\sqrt{n}}\Rightarrow$$

Сумма пределов здесь написана “авансом”. В ближайшем будущем оба эти предела будут найдены и окажутся конечными, что оправдает применение теоремы о пределе суммы.

Первый из пределов равен нулю, это вопрос 1.1. Второй предел тоже равен нулю, это частный случай вопроса 2.21. Итого:

$$\Rightarrow 0+0=0.$$

Вопрос 3.28. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+9+\ldots+3^n}{1+3^n}$.

Ответ. Как бы странно не прозвучало, но самое сложное в задании это многоточие. Поэтому нужно сначала “свернуть” выражение с многоточием, чтобы оно оказалось записанным в виде формулы. Нетрудно разглядеть в числителе сумму членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1=1$ и знаменателем $q=3$. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна

$$1+3+9+\ldots+3^n=S_n=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{1\cdot\left(3^n-1\right)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+9+\ldots+3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\left(1+3^n\right)}\Rightarrow$$

Почленно поделим числитель и знаменатель на старшее слагаемое, то есть на 3^n.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{2\left(\frac{1}{3^n}+1\right)}\Rightarrow$$

По аналогии с вопросом 1.6 на странице 8 можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{-n}=0$. Поэтому

$$\Rightarrow\frac{1-0}{2\left(0+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Вопрос 3.29. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{1+3^x}$.

Ответ. По аналогии с вопросом 1.5 на странице 8 можно считать, что $\lim\limits_{x\to 0}3^x=3^0=1$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{1+3^x}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Вопрос 3.30. Найдите $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+3^{\operatorname{ctg}x}}$.

Ответ. Из свойств котангенса известно, что $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{ctg}x=-\infty$. Поэтому по аналогии с вопросом 1.6 на странице 8 можно считать, что $\lim\limits_{x\to -0}3^{\operatorname{ctg}x}=0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+3^{\operatorname{ctg}x}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Вопрос 3.31. Найдите $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{1+3^{\operatorname{ctg} x}}$.

Ответ. Из свойств котангенса известно, что $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$. Поэтому по аналогии с вопросом 1.7 на странице 8 можно считать, что $\lim\limits_{x\to+0} 3^{\operatorname{ctg} x} = +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{1+3^{\operatorname{ctg} x}} = \left[\frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

Замечание. Формально нельзя использовать знаки бесконечностей в алгебраических выражениях. Поэтому подобные действия, фактически являющиеся мыслями, материализовавшимися на бумаге, принято брать в скобки.

Вопрос 3.32. Найдите $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot e^{-x}\right)$.

Ответ. Как следует из решения, приведённого ниже, данный предел не является неопределённостью.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot e^{-x}\right) = \left[\sqrt[3]{(-\infty+1)^2} \cdot e^{-(-\infty)} = \sqrt[3]{(-\infty)^2} \cdot e^{+\infty}\right] =$$

$$= \left[\sqrt[3]{+\infty} \cdot (+\infty) = +\infty \cdot (+\infty)\right] = +\infty.$$

Обратите внимание на аккуратную работу со знаками бесконечностей. Хочется напомнить, что существуют три вида знака бесконечности: $+\infty$, $-\infty$ и ∞.

Вопрос 3.33. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x + 2\right)$.

Ответ. В данном задании аргумент стремится к бесконечности без знака. Это означает, что нужно найти два разных предела при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Если эти два предела окажутся одинаковыми, то им равен и предел при $x \to \infty$. А если они окажутся разными, то предела при $x \to \infty$ не существует. Из этого правила есть одно исключение, под которое подпадает данный предел.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x + 2\right) = \left[3 \cdot \sqrt[3]{(-\infty-1)^2} - 2(-\infty) + 2\right] =$$

$$= \left[3 \cdot \sqrt[3]{(-\infty)^2} - (-\infty) + 2 = 3 \cdot \sqrt[3]{+\infty} + \infty + 2 = 3 \cdot (+\infty) + \infty\right] =$$

$$= [+\infty + \infty] = +\infty.$$

Предел на плюс бесконечности окажется неопределённостью

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x + 2\right) = \left[3 \cdot \sqrt[3]{(+\infty-1)^2} - 2(+\infty) + 2\right] =$$

$$= \left[3 \cdot \sqrt[3]{(+\infty)^2} - (+\infty) + 2 = 3 \cdot \sqrt[3]{+\infty} - \infty + 2 = 3 \cdot (+\infty) - \infty = +\infty - \infty\right] \Rightarrow$$

Эту неопределённость возможно раскрыть с помощью алгебраических преобразований.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\left(3 - 2\sqrt[3]{x-1}\right)\right) =$$

$$= \left[\sqrt[3]{(+\infty-1)^2}\left(3-2\sqrt[3]{+\infty-1}\right) = \sqrt[3]{(+\infty)^2}\left(3-2\sqrt[3]{+\infty}\right)\right] =$$

$$= \left[\sqrt[3]{+\infty}\,(3-2(+\infty)) = +\infty\,(3-(+\infty)) = +\infty\,(3-\infty) = +\infty(-\infty)\right] = -\infty.$$

Вроде бы пределы получились разные. Один равен минус бесконечности, а другой равен плюс бесконечности. Но у этих ответов есть объединяющий термин: бесконечность без знака. Поэтому исходный предел признаётся существующим и равным бесконечности без знака

$$\lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}-2x+2\right) = \infty.$$

Сравните данную задачу с вопросом 3.42.

Вопрос 3.34. Найдите $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-3}$.

Ответ. Легко убедиться, что предел является неопределённостью

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-3} = \left[\frac{1-1}{1-2+1}=\frac{0}{0}\right]$$

Чтобы раскрыть эту неопределённость, разложим числитель и знаменатель на множители. Для упрощения расчётов сделаем замену переменной $t=\sqrt[3]{x}$, тогда при $x=t^3$ и $t\to-1$ получим

$$\lim_{t\to-1}\frac{1+t^3}{t^2-2t-3} = \lim_{t\to-1}\frac{(1+t)\,(1-t+t^2)}{(t+1)(t-3)} \Rightarrow$$

Сокращать дроби можно на основании теоремы о предельном переходе в равенстве:

Если две функции $f(x)=g(x)$ при $x\neq c$ и существует $\lim\limits_{x\to c}f(x)$, то существует и $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\lim\limits_{x\to c}f(x)$.

Действительно, после сокращения дроби получится функция, которая отличается от несокращённого варианта только тем, что она определена в точке $t=-1$, а до сокращения дробь в этой точке не была определена, так как на ноль делить нельзя. В итоге получаем

$$\Rightarrow \lim_{t\to-1}\frac{1-t+t^2}{t-3} = \frac{1+1+1}{-1-3} = -\frac{3}{4}.$$

Вопрос 3.35. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$.

Ответ. Отметим, что согласно области допустимых значений аргумент $x>0$, и поэтому не может стремиться к минус бесконечности. Следовательно, условие $x\to\infty$ можно трактовать, как $x\to+\infty$. Очевидно, предел является неопределённостью

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{+\infty+\infty}{+\infty}=\frac{+\infty}{+\infty}\right] \Rightarrow$$

Почленно поделим числитель на знаменатель.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}+1}+\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+1}\Rightarrow$$

Здесь была использована теорема о пределе суммы (см. страницу 31).

$$\Rightarrow \sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}=1+1=2.$$

Вопрос 3.36. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}\right)$.

Ответ. Отметим, что согласно области допустимых значений аргумент $x\geqslant 1$, и поэтому не может стремиться к минус бесконечности. Следовательно, условие $x\to\infty$ можно трактовать, как $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}\right)=\left[\sqrt{(+\infty)^3+\infty}+\sqrt{(+\infty)^3-1}=\right]$$

$$\left[=\sqrt{+\infty+\infty}+\sqrt{+\infty-1}=\sqrt{+\infty}+\sqrt{+\infty}=+\infty+\infty\right]=+\infty.$$

Вопрос 3.37. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

Ответ. В отличие от предыдущего этот предел является неопределённостью.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-1}\right)=[+\infty-\infty]\Rightarrow$$

Такую неопределённость можно раскрыть домножив числитель и (равный пока единице) знаменатель на сумму этих же корней (такое выражение называется сопряжённым), чтобы образовалась разность квадратов.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+x)-(x^3-1)}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x-x^3+1}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-1}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\Rightarrow$$

Получилась неопределённость другого вида. Опыт решения задач показывает, что неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ раскрыть проще, чем неопределённость $(+\infty-\infty)$. Почленно поделим числитель и знаменатель на старшее слагаемое, то есть на $\sqrt{x^3}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=\frac{0+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{0}{2}=0.$$

Вопрос 3.38. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-5x}{\sqrt{5x-2}}+\sqrt{5x}\right)$.

Ответ. Отметим, что согласно области допустимых значений аргумент $x > \frac{2}{5}$ и поэтому не может стремиться к минус бесконечности. Сложим дроби, приведя их к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-5x}{\sqrt{5x-2}}+\sqrt{5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-5x+\sqrt{5x}\cdot\sqrt{5x-2}}{\sqrt{5x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x(5x-2)}-(5x-1)}{\sqrt{5x-2}}\Rightarrow$$

В числителе появилась неопределённость вида $(+\infty-\infty)$. Домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю, чтобы в числителе образовалась разность квадратов.

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x(5x-2)}-(5x-1)\right)\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}{\sqrt{5x-2}\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x(5x-2)}\right)^2-(5x-1)^2}{\sqrt{5x-2}\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x(5x-2)-(25x^2-10x+1)}{\sqrt{5x-2}\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-10x-25x^2+10x-1}{\sqrt{5x-2}\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{5x-2}\left(\sqrt{5x(5x-2)}+(5x-1)\right)}=\left[\frac{-1}{+\infty}\right]=0.$$

Вопрос 3.39. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+1}\right)\right)$.

Ответ. В этом пределе проблема в первой скобке, которая является неопределённостью вида $(\infty-\infty)$. Для раскрытия этой непреоделённости нужно домножить (и одновременно разделить) это выражение на неполный квадрат суммы, чтобы образовалась разность кубов.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+1}\right)\right)\Rightarrow$$

Поскольку выражение не помещается в одну строку, сделаем это действие устно

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3\right)\left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+1}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3-(x+1))\left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+1}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+1}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} \Rightarrow$$

Получилась неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Почленно поделим числитель и знаменатель на старшее слагаемое, то есть на $\sqrt[3]{x^2}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt[3]{0+0}+\sqrt[3]{0+0}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^2+\sqrt[3]{1+0}\cdot\sqrt[3]{1+0}+\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^2} = 0.$$

Вопрос 3.40. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5^x-3^x+2^x}{5^{x+1}+3^{x+1}-2^x}$.

Ответ. Данный предел представляет из себя неопределённость вида $\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty}$. Поскольку в этом задании старшим слагаемым является 5^x, то почленно разделим на него числитель и знаменатель.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x-3^x+2^x}{5^{x+1}+3^{x+1}-2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x}{5+3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-\left(\frac{2}{5}\right)^x} \Rightarrow$$

Основание каждой из получившихся степеней меньше единицы, поэтому они все стремятся к нулю.

$$\Rightarrow \frac{1-0+0}{5+3\cdot 0-0} = \frac{1}{5}.$$

Вопрос 3.41. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^3-2}+\sqrt[3]{x^4+x^2}}$.

Ответ. Данный предел представляет из себя неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поскольку в этом задании старшим слагаемым является $\sqrt{x^3}$, то почленно разделим на него числитель и знаменатель. Некоторая сложность заключается в том, что нужно понять на какую именно степень нужно делить выражения под кубическими корнями. Для упрощения работы можно предложить делить в два этапа. Сначала на первую степень, а потом на квадратный корень.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^3-2}+\sqrt[3]{x^4+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x-\frac{2}{x^2}}+\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}} \Rightarrow$$

Теперь нужно делить на квадратный корень. Это означает что выражения, стоящие под кубическими корнями, нужно делить на $x\sqrt{x}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}} = \frac{\sqrt[3]{0+0}+\sqrt{0-0}}{\sqrt{1-0}+\sqrt[3]{0+0}} = 0.$$

Вопрос 3.42. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2+7x-2}\right)$. Задача взята из учебного пособия [1].

Ответ. Данный предел представляет из себя неопределённость вида $(+\infty - \infty)$. Домножим числитель и, равный пока единице, знаменатель на сопряжённое выражение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2+7x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2+7x-2}\right)\left(\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}\right)}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+7x-2}\right)^2}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x+5)-(x^2+7x-2)}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+5-x^2-7x+2}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-8x}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}.$$

Получилась неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. И для её раскрытия хотелось бы разделить на x. Проблема заключается в том, что по условию $x\to\infty$, а не к плюс бесконечности. Стремление $x\to\infty$ означает, что нужно одновременно рассматривать $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, тем более, что область определения функции не запрещает стремление аргумента к отрицательной бесконечности. Рассмотрим стремление к обеим бесконечностям.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7-8x}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7}{x}-8}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{0-8}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{-8}{2}=-4.$$

При стремлении к минус бесконечности, естественно, $x<0$ и делить квадратные корни на отрицательное число некомфортно. Поэтому делить будем на положительное число $(-x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7-8x}{\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{x^2+7x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{7}{-x}-\frac{8x}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2}-\frac{x}{(-x)^2}+\frac{5}{(-x)^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{(-x)^2}+\frac{7x}{(-x)^2}-\frac{2}{(-x)^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{7}{x}+8}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{7x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{7}{x}+8}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{0+8}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{8}{2}=4.$$

Пределы на плюс и минус бесконечности получились разными. Следовательно, двустороннего предела на бесконечности без знака не существует. Может показаться, что ответом является ± 4. Но это противоречит теореме о единственности предела:

Если функция имеет в некоторой точке конечный предел, то он единственный.

Возможна запись

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}-\sqrt{x^2+7x-2}\right)=\mp 4.$$

но в ней содержится информация о двух односторонних пределах, а не об одном двустороннем.

Сравните данную задачу с вопросом 3.33.

Вопрос 3.43. Найдите $\lim\limits_{x\to+0}(x^5+x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$. Задача взята из учебного пособия [1].

Ответ. Данный предел является неопределённостью 0^0. Для того, чтобы вместо степени работать с более простым действием (умножением) сделаем следующее преобразование (фактически прологарифмируем; подробнее это описано в вопросе 1.12):

$$\lim_{x\to+0}\left(x^5+x^7\right)^{\frac{3}{\ln x}}=\lim_{x\to+0}e^{\ln\left(\left(x^5+x^7\right)^{\frac{3}{\ln x}}\right)}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{3}{\ln x}\ln\left(x^5+x^7\right)}.$$

Сославшись на вопрос 1.5 найдём отдельно предел от показателя степени.

$$\lim_{x\to+0}\frac{3}{\ln x}\ln\left(x^5+x^7\right)=\lim_{x\to+0}\frac{3\ln\left(x^5\left(1+x^2\right)\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{3\left(\ln\left(x^5\right)+\ln\left(1+x^2\right)\right)}{\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{3\left(5\ln x+\ln\left(1+x^2\right)\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\left(3\cdot\frac{5\ln x+\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(3\cdot\left(5+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\right)\right)\Rightarrow$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, то

$$\Rightarrow\left[3\cdot\left(5+\frac{\ln(1+0)}{-\infty}\right)\right]=\left[3\cdot\left(5+\frac{0}{-\infty}\right)\right]=3\cdot(5+0)=15.$$

В итоге, окончательный ответ: e^{15}.

Вопрос 3.44. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+x^7)^{\frac{3}{\ln x}}$.

Ответ. Данный предел является неопределённостью ∞^0. Для того, чтобы вместо степени работать с более простым действием (умножением) сделаем следующее преобразование (фактически прологарифмируем; подробнее это описано в вопросе 1.12):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5+x^7\right)^{\frac{3}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(\left(x^5+x^7\right)^{\frac{3}{\ln x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{3}{\ln x}\ln\left(x^5+x^7\right)}.$$

Сославшись на вопрос 1.5 найдём отдельно предел от показателя степени.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\ln x}\ln\left(x^5+x^7\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln\left(x^7\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\ln\left(x^7\right)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{\ln x}\Rightarrow$$

Если параллельно смотреть на решение предыдущего примера, то может возникнуть вопрос, почему в одном случае за скобку выносится наименьшая степень (пятая), а в другом случае наибольшая (седьмая).

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(7\ln x+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{7\ln x+\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\ln x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(3\cdot\left(7+\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\ln x}\right)\right)\Rightarrow$$

Разгадка того, какую именно степень нужно выносить, заключается в том, какая степень остаётся в скобках. Оставшаяся степень должна стремиться к нулю.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, то

$$\Rightarrow\left[3\cdot\left(7+\frac{\ln(0+1)}{+\infty}\right)\right]=\left[3\cdot\left(7+\frac{0}{+\infty}\right)\right]=3\cdot(7+0)=21.$$

В итоге, окончательный ответ: e^{21}.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Вопрос 4.45. Разве предел от дроби $\frac{\sin x}{x}$ не равен единице?

Ответ. Судя по всему, задавший этот вопрос знает так называемый *первый замечательный предел* $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$. См., например, [5]. Но давайте ещё раз прочитаем определение предела функции. Хотя бы самое начало этого определения.

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если ...

Как видим, для нахождения предела, кроме функции $f(x)$ должна быть задана ещё и предельная точка x_0. То есть, если в пределе $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ вместо предельной точки ноль поставить другое число, то ответ может быть другим:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 1}{1}=\sin 1,$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 2}{2},$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0\,,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\,,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0.$$

В последнем случае использована теорема о том, что

> Произведение бесконечно малой в некоторой точке функции на ограниченную в окрестности этой же точки функцию есть бесконечно малая в той же точке функция.

Вопрос 4.46. Как использовать бесконечно малые функции при нахождении пределов?

Ответ. Есть правило:

> При вычислении пределов дробей (и не только дробей) бесконечно малые функции, являющиеся сомножителями числителя или знаменателя, можно заменять на эквивалентные им функции.

В виде формулы это может выглядеть так: если при $x\to c$ эквивалентны две пары функций $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ и $\beta(x)\sim\delta(x)$, то

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)\cdot\alpha(x)}{g(x)\cdot\beta(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)\cdot\gamma(x)}{g(x)\cdot\delta(x)}\,.$$

Для использования этого правила на практике нужен запас знаний об эквивалентностях. Вот некоторый набор эквивалентных при $x\to 0$ функций:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,$$
$$(1+x)^p-1\sim px,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\,.$$

Вопрос 4.47. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$.

Ответ. Указанные выше эквивалентности справедливы при стремлении аргумента к нулю. Поэтому сделаем замену переменной так, чтобы новая переменная стремилась к нулю. Пусть $t=\frac{1}{x}$ тогда $x=\frac{1}{t}$. Так как $x\to+\infty$, то $t\to+0$. Это частный случай того, что $t\to 0$, и поэтому можно будет осуществлять замену эквивалентных бесконечно малых функций.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}\cdot\sin t\right)\Rightarrow$$

Вот момент замены синуса на свой аргумент

$$\Rightarrow\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}\cdot t\right)=\lim_{t\to+0}\sqrt{\frac{1}{t}}=+\infty.$$

Вопрос 4.48. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^2+x)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$.

Ответ. Сделаем замену переменной. Пусть $t = \frac{1}{x}$ тогда $x = \frac{1}{t}$. Так как $x \to \infty$, то $t \to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^2+x\right)\cdot\arcsin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}\right)\cdot\arcsin t\cdot\sin t\right) \Rightarrow$$

Заменим на эквивалентные

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right)\cdot t\cdot t\right) = \lim_{t\to 0}(1+t) = 1+0 = 1.$$

Вопрос 4.49. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$.

Ответ. На всякий случай, обратим внимание, что в силу области определения, стремление $x \to \infty$ фактически означает $x \to +\infty$. Сделаем виртуально подстановку $t = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, заметив, что такое $t \to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную, записав вместо арктангенса его аргумент.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow$$

Поскольку в этой дроби старшим слагаемым является $\sqrt{x}$, то почленно разделим на него числитель и знаменатель. При этом каждое слагаемое внутри кубического корня нужно будет разделить на куб квадратного корня.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x-1}}{2\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt[3]{0-0}}{2\sqrt{1+0}} = 0.$$

Вопрос 4.50. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x^2-1}$.

Ответ. Сделаем замену переменной. Пусть $t = x-1$ тогда $x = t+1$. Так как $x \to 1$, то $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x^2-1} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{(t+1)^2-1} = \lim_{t\to 0}\frac{e\cdot e^t-e}{t^2+2t+1-1} = \lim_{t\to 0}\frac{e\cdot(e^t-1)}{t^2+2t} \Rightarrow$$

Заменим разность (e^t-1) на эквивалентную бесконечно малую t.

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{e\cdot t}{t\cdot(t+2)} = \lim_{t\to 0}\frac{e}{t+2} = \frac{e}{0+2} = \frac{e}{2}.$$

Вопрос 4.51. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-2^x}{2^{2x}-3^x}$.

Ответ. Из эквивалентности $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$ выведем следствие: $a^x - 1 = e^{\ln(a^x)} - 1 = e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a$, поскольку $x\ln a \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-2^x}{2^{2x}-3^x} = \lim_{x\to 0}\frac{9^x-2^x}{4^x-3^x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\left(\left(\frac{9}{2}\right)^x-1\right)}{3^x\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x-1\right)} \Rightarrow$$

Заменим на эквивалентные бесконечно малые

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2^x \left(x \cdot \ln\left(\frac{9}{2}\right)\right)}{3^x \left(x \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \cdot \ln\left(\frac{9}{2}\right)}{3^x \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{2^0 \cdot \ln\left(\frac{9}{2}\right)}{3^0 \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

Вопрос 4.52. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\left(3^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}}\right)\right)$.

Ответ. Сделаем замену переменной. Пусть $t = \frac{1}{x}$ тогда $x = \frac{1}{t}$. Так как $x \to \infty$, то $t \to 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(x\left(3^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} \cdot \left(3^t - 4^t\right)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{3^t \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^t\right)}{t} \Rightarrow$$

Приведём выражение к нужному виду для замены на эквивалентную бесконечную малую функцию

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{-3^t \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^t - 1\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-3^t \cdot t \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} -3^t \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= -3^0 \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) = -\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

Вопрос 4.53. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)\right)$.

Ответ. Выделим под логарифмом целую часть, чтобы использовать эквивалентность $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{1+2x-3x}{1+2x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{-3x}{1+2x}\right)\right) \Rightarrow$$

Сделаем виртуально подстановку $t = \frac{-3x}{1+2x}$, заметив, что такое $t \to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{-3x}{1+2x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-3}{1+2x} = \frac{-3}{1+2\cdot 0} = -3.$$

Вопрос 4.54. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \left(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}} - 1\right)\right)$.

Ответ. Сделаем виртуально подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$, заметив, что такое $t \to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \left(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

Сделаем ещё одну виртуальную подстановку $u = \frac{1}{x}$, заметив, что такое $u \to 0$. Произведём замену бесконечно малых функций на эквивалентные.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Вопрос 4.55. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)$.

Ответ. Не исключено, что в условии присутствует опечатка. Но, тем не менее, такой вопрос тоже может быть задан.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(e^{\ln\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}\right)}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3}-1\right)\right)\Rightarrow$$

Сделаем виртуально подстановку $t=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3$, заметив, что такое $t\to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3\right)\Rightarrow$$

Сделаем ещё одну виртуальную подстановку $u=\frac{1}{x^2}$, заметив, что такое $u\to 0$. Произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3\right)=\lim_{x\to\infty}(x\cdot\ln 3)=\infty.$$

Если немного изменить условие, то предел будет конечным числом (см. следующий вопрос).

Вопрос 4.56. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)$.

Ответ. Полностью повторим логику решения предыдущего предела.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(e^{\ln\left(3^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}\right)}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3}-1\right)\right)\Rightarrow$$

Сделаем виртуально подстановку $t=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3$, заметив, что такое $t\to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3\right)\Rightarrow$$

Сделаем ещё одну виртуальную подстановку $u=\frac{1}{x^2}$, заметив, что такое $u\to 0$. Произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln 3\right)=\lim_{x\to\infty}\ln 3=\ln 3.$$

Вопрос 4.57. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+\operatorname{tg}x)}{(1+2\operatorname{arctg}x)^{\frac{3}{2}}-1}$.

Ответ. В числителе перейдём к натуральному логарифму, а в знаменателе сделаем виртуально подстановку $t = 2\,\mathrm{arctg}\,x$, заметив, что такое $t \to 0$, чтобы произвести замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+\mathrm{tg}\,x)}{(1+2\,\mathrm{arctg}\,x)^{\frac{3}{2}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\ln(1+\mathrm{tg}\,x)}{\ln 10}\right)}{\frac{3}{2}\cdot 2\,\mathrm{arctg}\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\mathrm{tg}\,x)}{3\cdot \ln 10 \cdot \mathrm{arctg}\,x} \Rightarrow$$

В числителе виртуально подставим $u = \mathrm{tg}\,x$. Поскольку и $u \to 0$, то возможно заменить бесконечно малую функцию на эквивалентную. В знаменателе арктангенс тоже можно поменять на свой аргумент.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{3\cdot \ln 10\cdot x} \Rightarrow$$

Теперь пришло время заменить на свой аргумент тангенс.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\cdot \ln 10\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cdot \ln 10} = \frac{1}{3\cdot \ln 10}\,.$$

Вопрос 4.58. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\cdot \ln\frac{x-2}{x+2}\right)$.

Ответ. Выделим под логарифмом целую часть, чтобы использовать эквивалентность $\ln(1+t) \sim t$ при $t \to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot \ln\frac{x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot \ln\frac{x+2-4}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot \ln\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)\right) \Rightarrow$$

Сделаем виртуально подстановку $t = \frac{-4}{x+2}$, заметив, что такое $t \to 0$. И произведём замену бесконечно малой функции на эквивалентную.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot \frac{-4}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{1+\frac{2}{x}} = \frac{-4}{1+0} = -4.$$

Вопрос 4.59. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{\cos 4x-\cos x}$.

Ответ. Данный предел является неопределённостью $\frac{0}{0}$. Воспользуемся тригонометрической формулой $\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{\cos 4x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{-2\sin\frac{4x-x}{2}\cdot \sin\frac{4x+x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{-2\sin\frac{3x}{2}\cdot \sin\frac{5x}{2}} \Rightarrow$$

Аргументы в обоих синусах стремятся к нулю. Это означает, что воспользовавшись эквивалентностью синусы можно заменить на их аргументы.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{-2\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{5x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(x+1)}{-3\cdot 5} = \frac{2\cdot(0+1)}{-3\cdot 5} = -\frac{2}{15}\,.$$

Вопрос 4.60. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2\sin x}{x(\cos x-2x)}$.

Ответ. Данный предел представляет из себя неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поскольку в этом задании старшим слагаемым является x^2, то почленно разделим на него числитель и знаменатель.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\sin x}{x(\cos x-2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{\cos x}{x}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}\cdot\sin x}{\frac{1}{x}\cdot\cos x-2}\Rightarrow$$

В силу теоремы:

Произведение бесконечно малой в некоторой точке функции на ограниченную в окрестности этой же точки функцию есть бесконечно малая в той же точке функция.

имеем

$$\Rightarrow\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}\,.$$

Вопрос 4.61. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2\sin x}{x(\cos x-2x)}$.

Ответ. Разделим почленно числитель на знаменатель и воспользуемся теоремой о пределе разности:

Предел разности двух функций равен разности пределов этих функций, если они существуют и конечны.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2\sin x}{x(\cos x-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\cos x-2x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(\cos x-2x)}\Rightarrow$$

Разность пределов здесь написана “авансом”. В ближайшем будущем оба эти предела будут найдены и окажутся конечными, что оправдает применение теоремы о пределе разности. Заменим синус на его аргумент.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x-2x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\cos x-2x)}=\frac{0}{\cos 0-2\cdot 0}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x-2x}=$$

$$=0-\frac{1}{\cos 0-2\cdot 0}=-\frac{1}{1-0}=-1.$$

Вопрос 4.62. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-2}+\sin\left(n^{-1}\right)}{n^{-1}\cdot(3+n^{-1})}$.

Ответ. Разделим почленно числитель на знаменатель и воспользуемся теоремой о пределе суммы:

Предел суммы двух последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, если они существуют и конечны.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2}+\sin\left(n^{-1}\right)}{n^{-1}\cdot\left(3+n^{-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}\Rightarrow$$

Сумма пределов здесь написана “авансом”. В ближайшем будущем оба эти предела будут найдены и окажутся конечными, что оправдает применение теоремы о пределе суммы. Заменим синус на его аргумент.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{3+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{0}{3+0}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}=0+\frac{1}{3+0}=\frac{1}{3}\,.$$

Вопрос 4.63. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^7-\left(1+x^3\right)^9}{(1+\operatorname{tg}(x^2))^5-1}$.

Ответ. В числителе вычтем и добавим единицу, чтобы использовать эквивалентность $(1+t)^p-1\sim pt$ при $t\to 0$. В знаменателе эту эквивалентность уже можно использовать, сделав виртуально подстановку $t=\operatorname{tg}\left(x^2\right)$, заметив, что такое $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^7-\left(1+x^3\right)^9}{\left(1+\operatorname{tg}\left(x^2\right)\right)^5-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^7-1-\left(1+x^3\right)^9+1}{5\operatorname{tg}\left(x^2\right)}\Rightarrow$$

Теперь в знаменателе можно заменить тангенс на его аргумент.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^7-1-\left(\left(1+x^3\right)^9-1\right)}{5x^2}\Rightarrow$$

Разделим почленно числитель на знаменатель и “авансом” воспользуемся теоремой о пределе разности. После чего в обоих числителях сделаем задуманную изначально замену эквивалентных бесконечно малых функций.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\sin x)^7-1}{5x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^3\right)^9-1}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{7x\sin x}{5x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{9x^3}{5x^2}\Rightarrow$$

Осталось ещё синус поменять на свой аргумент.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{7x\cdot x}{5x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{9x}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}-\lim_{x\to 0}\frac{9\cdot 0}{5}=\frac{7}{5}-0=\frac{7}{5}\,.$$

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Вопрос 5.64. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Ответ. Известен так называемый *второй замечательный предел* $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$. См., например, [5]. Второй замечательный предел позволяет раскрывать неопределённости вида 1^∞. Сделаем замену переменной, чтобы им воспользоваться: $t=\frac{1}{x}$, $x=\frac{1}{t}$, $t\to\infty$,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Вопрос 5.65. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

Ответ. Предел представляет из себя неопределённость 1^∞. Раскроем её с помощью второго замечательного предела. Выделим в основании целую часть, равную единице.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{2x-1}\Rightarrow$$

Показатель степени домножим и разделим на одно и то же выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом. Помним свойство, что при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{2}\cdot\frac{2}{3x-1}\cdot(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{3x-1}}$$

Последовательность доказательств, завершившихся вопросом 1.12, позволяет отдельно найти пределы от основания и от показателя степени. Основание стремится к числу e. Для понимания этого достаточно сделать замену $t=\frac{3x-1}{2}$, $\frac{1}{t}=\frac{2}{3x-1}$, $t\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Предел показателя находится очень просто:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(2x-1)}{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(2-\frac{1}{x})}{3-\frac{1}{x}} = \frac{2(2-0)}{3-0} = \frac{4}{3}.$$

В итоге, окончательный ответ: $e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4} = e\cdot\sqrt[3]{e}$.

Вопрос 5.66. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{2x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}}$.

Ответ. Предел представляет из себя неопределённость 1^∞. Раскроем её с помощью второго замечательного предела. Выделим в основании целую часть, равную единице.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{2x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{3x}-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{x}} \Rightarrow$$

Показатель степени домножим и разделим на одно и то же выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом. Помним свойство, что при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\frac{x+\sqrt{3x}}{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}\cdot\frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\frac{x+\sqrt{3x}}{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}}\right)^{\frac{(-\sqrt{2x}-\sqrt{3x})\cdot\sqrt{x}}{x+\sqrt{3x}}}$$

Последовательность доказательств, завершившихся вопросом 1.12, позволяет отдельно найти пределы от основания и от показателя степени. Основание стремится к числу e. Для понимания этого достаточно сделать замену $t = \frac{x+\sqrt{3x}}{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}$, $\frac{1}{t} = \frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}$, $t \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}}\right)^{\frac{x+\sqrt{3x}}{-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Предел показателя находится очень просто:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\sqrt{2x}-\sqrt{3x}\right)\cdot\sqrt{x}}{x+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{\frac{3}{x}}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+0} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

В итоге, окончательный ответ: $e^{-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}\cdot e^{\sqrt{3}}}$.

Вопрос 5.67. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$.

Ответ. Поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}x = 0$, то предел, данный в условии, представляет из себя неопределённость 1^{∞}. Раскроем её с помощью второго замечательного предела. Обратим внимание, что во втором замечательном пределе внутри скобки стоит знак “плюс”. Поэтому сделаем в основании из разности сумму.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(-\operatorname{ctg}x))^{\frac{1}{2x-\pi}} \Rightarrow$$

Показатель степени домножим и разделим на одно и то же выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом. Помним свойство, что при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(-\operatorname{ctg}x))^{-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot(-\operatorname{ctg}x)\cdot\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left((1+(-\operatorname{ctg}x))^{-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}\right)^{-\operatorname{ctg}x\cdot\frac{1}{2x-\pi}} \Rightarrow$$

Последовательность доказательств, завершившихся вопросом 1.12, позволяет отдельно найти пределы от основания и от показателя степени. Основание стремится к числу e. Для понимания этого достаточно сделать замену $t = -\frac{1}{\operatorname{ctg}x}$, $\frac{1}{t} = -\operatorname{ctg}x$, $t \to \infty$:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(-\operatorname{ctg}x))^{-\frac{1}{\operatorname{ctg}x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Предел показателя находится с помощью замены бесконечно малой функции на эквивалентную. Для нахождения эквивалентной функции сделаем замену переменной так, чтобы эта переменная стремилась к нулю: $u = x - \frac{\pi}{2}$, $x = u + \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\operatorname{ctg}x\cdot\frac{1}{2x-\pi}\right) = \lim_{u\to0}\left(-\operatorname{ctg}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)-\pi}\right) \Rightarrow$$

Используем одну из формул приведения

$$\Rightarrow \lim_{u\to 0}\left(-\left(-\operatorname{tg} u\right)\cdot\frac{1}{2u+\pi-\pi}\right)=\lim_{u\to 0}\left(\operatorname{tg} u\cdot\frac{1}{2u}\right)=\lim_{u\to 0}\left(u\cdot\frac{1}{2u}\right)=\lim_{u\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

В итоге, окончательный ответ: $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\,.$

Вопрос 5.68. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Ответ. Так как $\sin 0=0$, а $\cos 0=1$, то предел является неопределённостью 1^{∞}. Используем второй замечательный предел. Для этого “создадим” в основании выражение, начинающееся на “1+”.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{x}\Rightarrow$$

Показатель степени домножим и разделим на одно и то же выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом. Помним свойство, что при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right)^{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\cdot x}$$

Последовательность доказательств, завершившихся вопросом 1.12, позволяет отдельно найти пределы от основания и от показателя степени. Основание стремится к числу e. Для понимания этого достаточно сделать замену $t=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$, $\frac{1}{t}=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1$, $\frac{1}{t}\to+0$, $t\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

Мог возникнуть вопрос, почему переменная t стремится именно к плюс бесконечности, а не к бесконечности без знака (на самом деле для получения ответа знак бесконечности не принципиален). То, что $t\to+\infty$ объясним одновременно с вычислением предела от показателя степени.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\cdot x\right)\Rightarrow$$

Воспользуемся тригонометрическими формулами двойных углов

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=1-2\sin^{2}\alpha\end{array}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\left(2\sin\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x}+1-2\sin^2\frac{1}{2x}-1\right)\cdot x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(2\sin\frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x}-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sin\frac{1}{2x}\left(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right)\Rightarrow$$

Вероятно, сейчас видно, что при очень больших положительных значениях x выражение $\frac{1}{t}=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1=2\sin\frac{1}{2x}\left(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}\right)>0$.

Так как $\frac{1}{2x}$ есть бесконечно малая функция, то синус, являющийся сомножителем, можно заменить на эквивалентную.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{1}{2x}\left(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}\right)=$$
$$=\cos 0-\sin 0=1-0=1.$$

В итоге, окончательный ответ: $e^1=e$.

Вопрос 5.69. Найдите $\lim\limits_{x\to 6+0}(19-3x)^{\frac{1}{6-x}}$. Сформулируйте “на языке $\varepsilon-\delta$” определение предела для этого конкретного случая. Схематически изобразите график данной функции в соответствующей окрестности.

Ответ. Прежде чем как формулировать определение и рисовать график, найдём значение предела. Он является неопределённостью 1^∞. Раскроем её с помощью второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 6+0}(19-3x)^{\frac{1}{6-x}}=\lim_{x\to 6+0}(1+18-3x)^{\frac{1}{6-x}}\Rightarrow$$

Показатель степени домножим и разделим на одно и то же выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом. Помним свойство, что при возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6+0}(1+18-3x)^{\frac{1}{18-3x}(18-3x)\frac{1}{6-x}}=\lim_{x\to 6+0}\left((1+18-3x)^{\frac{1}{18-3x}}\right)^{3(6-x)\frac{1}{6-x}}=$$
$$=\lim_{x\to 6+0}\left((1+18-3x)^{\frac{1}{18-3x}}\right)^{3}\Rightarrow$$

Заменим переменную $t=\frac{1}{18-3x}$, $\frac{1}{t}=18-3x$, $\frac{1}{t}\to -0$, $t\to-\infty$.

$$\Rightarrow \lim_{t\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{3}=e^3.$$

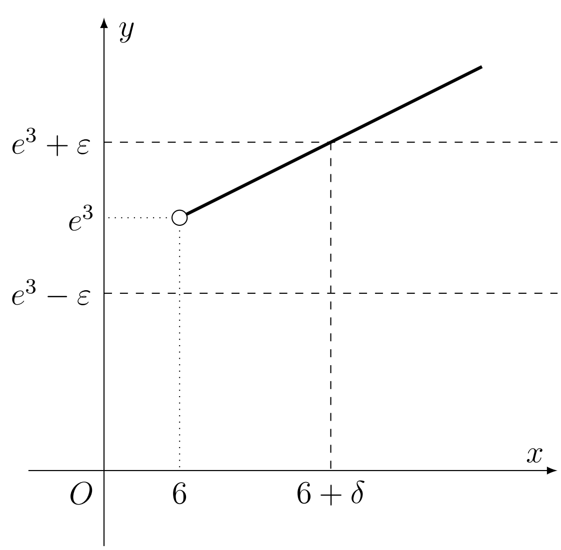
Сформулируем определение предела для данного конкретного случая. Число e^3 является правосторонним пределом функции $(19-3x)^{\frac{1}{6-x}}$ в точке 6, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое что из неравенства $6<x<6+\delta$ следует неравенство $\left|(19-3x)^{\frac{1}{6-x}}-e^3\right|<\varepsilon$.

Даже для схематического изображения графика нужно знать, возрастает или убывает функция в рассматриваемой правосторонней окрестности. Упрощающая функцию замена переменной уже была сделана, и для решения проблемы осталось установить вид монотонности функции $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ при $t \to -\infty$. Кажется общеизвестным, что указанная функция возрастает при $t \to +\infty$. Но как она себя ведёт на отрицательной бесконечности? Сделаем замену переменной $t = -u$, так чтобы новая переменная стремилась к привычной плюс бесконечности.

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^{u} = \left(\frac{u-1+1}{u-1}\right)^{u} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{u-1}\right)^{u} = \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}.$$

Пришлось сделать ещё одну замену переменной $v = u - 1$. Конечно, можно было сразу заменить $v = -t - 1$, но тогда будет не понятно, как самостоятельно догадаться до аналогичной замены в похожей задаче. На странице 45 учебного пособия [4] доказывается, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает. К сожалению, но основании этого факта нельзя утверждать, что и функция $\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$ также убывает (можно утверждать только невозможность её возрастания). Доказательство убывания этой функции на плюс бесконечности выходит за рамки настоящего пособия и основано на использовании производных. Изобразим схематически в правосторонней окрестности точки $x = 6$ фрагмент графика функции, вертикальная координата переменной точки которого уменьшается по мере стремления с правой стороны горизонтальной координаты к точке $x = 6$.



Вопрос 6.70. Исследовать последовательность $x_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n-4}$, и найти её предел.

Ответ. Возможно, даже не понятно, что значит "исследовать последовательность". Под этим подразумевается, что нужно решить вопрос о её монотонности и ограниченности. Последовательность, данная в этом вопросе, возрастает, так как с ростом n увеличивается каждое из трёх слагаемых. Любая возрастающая последовательность всегда ограничена снизу, например своим первым членом. Обратите внимание, что по причинам связанным с областью определения квадратного корня, первым членом последовательности будет $x_4 = \sqrt{4+2} + \sqrt{4+3} + \sqrt{4-4} = \sqrt{6} + \sqrt{7}$. Докажем способом "от противного", что последовательность не ограничена сверху. Для этого предположим, что она ограничена сверху числом $M > 0$ и найдём противоречие.

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n-4} \leqslant M \Rightarrow \sqrt{n+3} < M \Leftrightarrow n+3 < M^2 \Leftrightarrow n < M^2 - 3.$$

Полученное неравенство перестанет выполняться, как только номер n превзойдёт число $(M^2 - 3)$. Противоречие найдено, следовательно, последовательность неограничена сверху. Из этого неизбежно вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n-4}\right) = +\infty$.

Вопрос 6.71. Исследовать последовательность $x_n = \frac{(2n+3)^{n+1}}{(2n+1)^{n+1}}$, и найти её предел.

Ответ. Упростим выражение, представив дробь в виде единой степени $x_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$. Найдём первые два члена последовательности, чтобы высказать предположение о том, возрастает она или убывает.

$$x_1 = \left(\frac{2\cdot 1+3}{2\cdot 1+1}\right)^{1+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

$$x_2 = \left(\frac{2\cdot 2+3}{2\cdot 2+1}\right)^{2+1} = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{343}{125}.$$

Поскольку без вычислений не ясно, какая из получившихся дробей больше, запишем наугад знак неравенства между ними и будем совершать равносильные преобразования. Пусть

$$\frac{25}{9} < \frac{343}{125} \Leftrightarrow 25\cdot 125 < 343\cdot 9 \Leftrightarrow 3125 < 3087.$$

Получилось неверное неравенство. Следовательно, мы не угадали и на самом деле $\frac{25}{9} > \frac{343}{125}$. То есть, $x_1 > x_2$. Это даёт основания попытаться доказать, что последовательность убывает. Докажем, что

$$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{2(n+1)+3}{2(n+1)+1}\right)^{n+1+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1} > \frac{2n+5}{2n+3} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1} > \frac{2n+5}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)(2n+5)}\right)^{n+1} > \frac{2n+5}{2n+3} \Leftrightarrow \left(\frac{4n^2+12n+9}{4n^2+12n+5}\right)^{n+1} > \frac{2n+5}{2n+3}.$$

Выделим в основаниях единицы

$$\left(\frac{4n^2+12n+5+4}{4n^2+12n+5}\right)^{n+1} > \frac{2n+3+2}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{4}{4n^2+12n+5}\right)^{n+1} > 1+\frac{2}{2n+3} \Leftarrow$$

Выражение в левой части представляет из себя бином Ньютона. Причём все слагаемые бинома положительные. В этом случае, опустив слагаемые начиная с некоторого можно получить верное неравенство

$$\boxed{(1+q)^m > 1+mq+\tfrac{m(m-1)}{2}\cdot q^2, \text{ при } q>0,\ m\in\mathbb{N}}$$

Почему авторы остановились именно на слагаемом с квадратом? Потому, что при подготовке этого учебного пособия опытным путём было установлено, что предыдущих слагаемых для доказательства недостаточно.

Если теперь доказать, что даже меньшее выражение окажется больше правой части (возможно, Вы заметили, что вместо знака равносильности в этом переходе стоит знак следования), то по свойству транзитивности это будет доказывать требуемое утверждение.

$$\Leftarrow 1+(n+1)\cdot\frac{4}{4n^2+12n+5}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{4}{4n^2+12n+5}\right)^2 > 1+\frac{2}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(n+1)}{4n^2+12n+5}+\frac{8n(n+1)}{(4n^2+12n+5)^2} > \frac{2}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+2}{4n^2+12n+5}+\frac{4n^2+4n}{(4n^2+12n+5)^2} > \frac{1}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+2)(2n+3)\left(4n^2+12n+5\right)+\left(4n^2+4n\right)(2n+3) > \left(4n^2+12n+5\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4n^2+10n+6\right)\left(4n^2+12n+5\right)+8n^3+8n^2+12n^2+12n >$$
$$> 16n^4+144n^2+25+96n^3+40n^2+120n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16n^4+40n^3+24n^2+48n^3+120n^2+72n+20n^2+50n+30 >$$
$$> 16n^4+88n^3+164n^2+108n+25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 122n + 5 > 108n \Leftrightarrow 14n + 5 > 0.$$

Получилось верное неравенство. Убывание последовательности доказано.

Убывающая последовательность всегда ограничена сверху своим первым членом, в данном случае числом $\frac{25}{9}$. Снизу данная последовательность ограничена нулём, так как она очевидно состоит из положительных чисел.

Найдём предел этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2(n+1)}{2n+1}} = e^1 = e,$$

поскольку предел показателя степени: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{2+\frac{1}{n}} = \frac{2(1+0)}{2+0} = 1.$

7. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ РЕКУРРЕНТНО

Вопрос 7.72. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 15}$, где $x_1 = 5$.

Ответ. Найдём

$$x_2 = \sqrt{2x_1 + 15} = \sqrt{2\cdot 5 + 15} = \sqrt{10+15} = \sqrt{25} = 5.$$

Очевидно, что все $x_n = 5$. Данная последовательность постоянна. Её предел равен этой постоянной: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$.

Вопрос 7.73. Как найти предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением?

Ответ. Так, как в предыдущем примере, везёт далеко не всегда. Обычно в задачах последовательность не является константой. Простейшим рекуррентным соотношением будет зависимость $x_{n+1} = f(x_n)$. Если предположить, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, поскольку это та же самая последовательность, только с нумерацией, сдвинутой на единицу. Переходя в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ к пределу (отметим, что этот переход возможен только для непрерывной функции $f(x)$), получим уравнение $A = f(A)$, из которого можно найти конечное число A. Сразу скажем, что после решения этого уравнения задача ещё не будет решена полностью. Во-первых, таких значений A может оказаться несколько, а предел последовательности единственен; во-вторых, решение данного уравнения не доказывает существование предела; и наконец, в-третьих, предел может оказаться и бесконечностью!

Вопрос 7.74. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, где $x_1 = 0$.

Ответ. Пусть существует конечное число $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, поскольку это та же самая последовательность, только с нумерацией, сдвинутой на единицу. Перейдём в равенстве $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ к пределу. Получим уравнение $A = \sqrt{6 + A}$. Решим его. Поскольку квадратный корень всегда неотрицателен, то необходимо выполнение условия $A \geqslant 0$. Чтобы избавиться от квадратного корня, возведём уравнение в квадрат $A^2 = 6 + A$. Получилось квадратное уравнение $A^2 - A - 6 = 0$. Найдём его дискриминант $D = 1 + 4 \cdot 6 = 1 + 24 = 25$. Корнями квадратного уравнения будут $A_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right.$. Из этих двух корней условию $A \geqslant 0$ удовлетворяет лишь $A = 3$. Всё вышесказанное означает только одно: если последовательность имеет конечный предел, то он равен 3. Докажем, что данная последовательность имеет конечный предел. Легко вычислить $x_2 = \sqrt{6}$, что больше, чем $x_1 = 0$. Можем высказать гипотезу, что последовательность x_n возрастает. Докажем это. Очевидно, $x_n \geqslant 0$, как квадратный корень. Поэтому

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \sqrt{6 + x_n} > x_n \Leftrightarrow 6 + x_n > x_n^2 \Leftrightarrow 0 > x_n^2 - x_n - 6 \Leftrightarrow (x_n + 2)(x_n - 3) < 0.$$

При $x_n \geqslant 0$ неравенство справедливо для $x_n < 3$. Это означает, что про последовательность будет доказано, что она возрастает, если она окажется ограниченной сверху числом 3. Ограниченность последовательности докажем методом математической индукции. Индукционная база: $x_1 = 0 < 3$ является верным неравенством. Индукционный переход: пусть $x_n < 3$, тогда $x_{n+1} < \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Итак, данная последовательность возрастает и ограничена сверху, поэтому она имеет конечный предел. И, как было доказано в самом начале, этот предел равен именно 3.

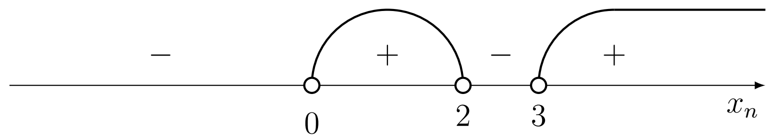
Вопрос 7.75. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, где $x_1 = 6$.

Ответ. Пусть существует конечное число $A = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = A$, поскольку это та же самая последовательность, только с нумерацией, сдвинутой на единицу. Предположив, что $A \neq 0$ перейдём в равенстве $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$ к пределу. Получим уравнение $A = 5 - \frac{6}{A}$. Решим его. Домножим уравнение на $A \neq 0$. Получилось квадратное уравнение $A^2 - 5A + 6 = 0$. Найдём его дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Корнями квадратного уравнения будут $A_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right.$. Следовательно, конечным пределом последовательности может быть: 0 (пока ещё не доказано, что это не так), 2 и 3. Докажем, что данная последовательность имеет конечный предел. Легко вычислить $x_2 = 5 - \frac{6}{6} = 5 - 1 = 4$, что меньше, чем $x_1 = 6$. Можем высказать гипотезу, что последовательность x_n убывает. Докажем это.

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow 5 - \frac{6}{x_n} < x_n \Leftrightarrow 0 < x_n - 5 + \frac{6}{x_n} \Leftrightarrow \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{x_n} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{x_n} > 0.$$

Воспользуемся методом интервалов.



Это означает, что про последовательность будет доказано, что она убывает, если она окажется ограниченной снизу числом 3. Ограниченность последовательности докажем методом математической индукции. Индукционная база: $x_1 = 6 > 3$ является верным неравенством. Индукционный переход: пусть $x_n > 3$, тогда $x_{n+1} > 5 - \frac{6}{3} = 5 - 2 = 3$ (поскольку если увеличить знаменатель, то дробь будет меньше и перед дробью стоит знак “минус”). Итак, данная последовательность убывает и ограничена снизу, поэтому она имеет конечный предел. Естественно, этот предел равен 3, поскольку 2 (и тем более 0) не смогут быть её пределами из-за того, что $x_n > 3$.

Вопрос 7.76. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n - 1}$, где $x_1 = 6$.

Ответ. Пусть существует конечное число $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$, поскольку это та же самая последовательность, только с нумерацией, сдвинутой на единицу. Предположив, что $A \neq 1$ перейдём в равенстве $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n - 1}$ к пределу. Получим уравнение $A = 5 - \frac{6}{A-1}$. Решим его. Домножим уравнение на $A - 1 \neq 0$. Получилось квадратное уравнение $A(A-1) = 5(A-1) - 6 \Leftrightarrow A^2 - 6A + 11 = 0$. Найдём его дискриминант $D = 36 - 4 \cdot 11 = 36 - 44 < 0$. Отрицательность дискриминанта означает, что полученное уравнение не имеет вещественных корней. Поэтому никакое конечное число, кроме 1, не может быть пределом. Напомним, что предел ещё может быть бесконечным.

Практический опыт подсказывает, что данная последовательность не имеет предела.

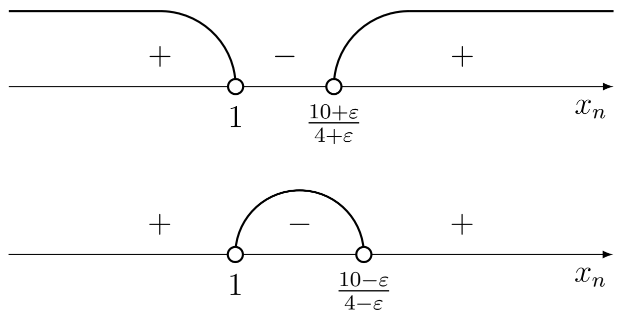
Сначала докажем, что предел не может быть равен 1. Сформулируем определение предела для этого случая. Число 1 будет пределом последовательности x_n, если для любого числа $\varepsilon > 0$ будет существовать такое число N, что для любого номера $n > N$ окажется верным неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Из этого определения следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют хотя бы два соседних члена последовательности, для которых одновременно выполнены неравенства $\begin{cases} |x_n - 1| < \varepsilon \\ |x_{n+1} - 1| < \varepsilon \end{cases}$. Найдём такое число $\varepsilon > 0$, для которого это не так. Первое неравенство имеет простое решение $-\varepsilon < x_n - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon$. Второе неравенство решается посложнее:

$$-\varepsilon < x_{n+1} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 5 - \frac{6}{x_n - 1} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 4 - \frac{6}{x_n - 1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\varepsilon < 4 - \frac{6}{x_n-1} \\ 4 - \frac{6}{x_n-1} < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \varepsilon - \frac{6}{x_n-1} > 0 \\ 4 - \varepsilon - \frac{6}{x_n-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4+\varepsilon)(x_n-1)-6}{x_n-1} > 0 \\ \frac{(4-\varepsilon)(x_n-1)-6}{x_n-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4+\varepsilon)x_n-4-\varepsilon-6}{x_n-1} > 0 \\ \frac{(4-\varepsilon)x_n-4+\varepsilon-6}{x_n-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4+\varepsilon)x_n-(10+\varepsilon)}{x_n-1} > 0 \\ \frac{(4-\varepsilon)x_n-(10-\varepsilon)}{x_n-1} < 0 \end{cases}.$$

Обратим внимание, что число ε может быть любым положительным. В том числе и сколь угодно малым. Поэтому все получившиеся скобки можно считать положительными. Используем метод интервалов, учитывая отношения порядка: $\frac{10+\varepsilon}{4+\varepsilon} = \frac{4+\varepsilon+6}{4+\varepsilon} = 1 + \frac{6}{4+\varepsilon} > 1$, и $\frac{10-\varepsilon}{4-\varepsilon} = \frac{4-\varepsilon+6}{4-\varepsilon} = 1 + \frac{6}{4-\varepsilon} > 1$.



Определив, что

$$\frac{10-\varepsilon}{4-\varepsilon} > \frac{10+\varepsilon}{4+\varepsilon} \Leftrightarrow (10-\varepsilon)(4+\varepsilon) > (10+\varepsilon)(4-\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40 + 6\varepsilon - \varepsilon^2 > 40 - 6\varepsilon - \varepsilon^2 \Leftrightarrow 12\varepsilon > 0,$$

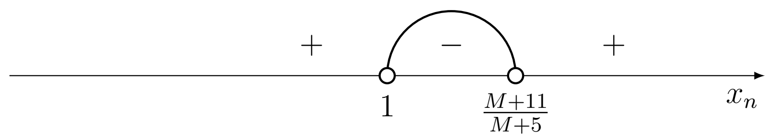
зафиксируем решение второго неравенства: $\frac{10+\varepsilon}{4+\varepsilon} < x_n < \frac{10-\varepsilon}{4-\varepsilon}$. Напомним, что решением первого неравенства было: $1-\varepsilon < x_n < 1+\varepsilon$. Теперь не составит труда подобрать хотя бы одно такое малое положительное число ε, чтобы система $\begin{cases} 1-\varepsilon < x_n < 1+\varepsilon \\ \frac{10+\varepsilon}{4+\varepsilon} < x_n < \frac{10-\varepsilon}{4-\varepsilon} \end{cases}$ не имела решений. Для этого нужно найти хотя бы одно такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $1+\varepsilon < \frac{10+\varepsilon}{4+\varepsilon}$. Подойдёт даже $\varepsilon = 1$, поскольку $2 < \frac{11}{5}$.

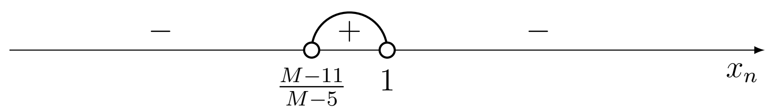
Теперь докажем, что предел не может быть равен бесконечности. Сформулируем определение предела и для этого случая. Бесконечность будет пределом последовательности x_n, если для любого числа $M > 0$ будет существовать такое число N, что для любого номера $n > N$ окажется верным неравенство $|x_n| > M$. Из этого определения следует, что для любого числа $M > 0$ существуют хотя бы два соседних члена последовательности, для которых одновременно выполнены неравенства $\begin{cases} |x_n| > M \\ |x_{n+1}| > M \end{cases}$. Найдём такое число $M > 0$, для которого это не так. Первое неравенство имеет простое решение $\left[\begin{array}{l} x_n < -M \\ x_n > M \end{array}\right.$. Второе неравенство решается посложнее:

$$\left[\begin{array}{l} x_{n+1} < -M \\ x_{n+1} > M \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 - \frac{6}{x_n-1} < -M \\ 5 - \frac{6}{x_n-1} > M \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 - \frac{6}{x_n-1} + M < 0 \\ 5 - \frac{6}{x_n-1} - M > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5(x_n-1)-6+M(x_n-1)}{x_n-1} < 0 \\ \frac{5(x_n-1)-6-M(x_n-1)}{x_n-1} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5x_n-5-6+Mx_n-M}{x_n-1} < 0 \\ \frac{5x_n-5-6-Mx_n+M}{x_n-1} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{(M+5)x_n-(M+11)}{x_n-1} < 0 \\ \frac{-(M-5)x_n+(M-11)}{x_n-1} > 0 \end{array}\right. .$$

Обратим внимание, что число M может быть любым положительным. В частности и сколь угодно большим. Поэтому все получившиеся скобки можно считать положительными. Используем метод интервалов, учитывая отношения порядка: $\frac{M+11}{M+5} = \frac{M+5+6}{M+5} = 1 + \frac{6}{M+5} > 1$, и $\frac{M-11}{M-5} = \frac{M-5-6}{M-5} = 1 - \frac{6}{M-5} < 1$.





Зафиксируем решение второго неравенства: $\frac{M-11}{M-5} < x_n < \frac{M+11}{M+5}$ & $x_n \neq 1$. Напомним, что решением первого неравенства было: $\left[\begin{array}{l} x_n < -M \\ x_n > M \end{array}\right.$. Теперь не составит труда подобрать хотя бы одно такое достаточно большое положительное число M, чтобы система $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_n < -M \\ x_n > M \end{array}\right. \\ \frac{M-11}{M-5} < x_n < \frac{M+11}{M+5} \end{array}\right.$ не имела решений. Для этого нужно найти хотя бы одно такое число $M > 0$, чтобы $\left\{\begin{array}{l} -M < \frac{M-11}{M-5} \\ M > \frac{M+11}{M+5} \end{array}\right.$. Подойдёт даже $M = 12$, поскольку $\left\{\begin{array}{l} -12 < \frac{1}{7} \\ 12 > \frac{23}{17} \end{array}\right.$.

Л и т е р а т у р а

1. Барт В.А., Черняев П.К. Индивидуальные задания по математическому анализу: Учеб. пособие – СПб: СПбГУ, 2012. — 32 с.

2. Беккер Б.М., Иванов О.А. Курс математического анализа. Семестр 1. СПб: ЭФ СПбГУ, 2010. — 226 с.

3. Волков В.А., Григорьева А.Н., Ефимова Т.А., Коломойцева З.Д., Марданов А.М. Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: Учебное пособие. Издательство Ленинградского университета, 1988. 224 с.

4. Осипов А.В. Лекции по высшей математике. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 311 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ 16-е изд. — М.: АЙРИС-пресс, 2019. — 608 с.:ил. — (Высшее образование).