САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Пономаренко А.К., Сахаров В.Ю., Черняев П.К.

Высшая математика. Семестр 1: теория, задачи и индивидуальные задания

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2018

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики в качестве учебного пособия для студентов естественных факультетов

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор *Ю.В. Чурин*
(Санкт-Петербургский государственный университет),
доктор физ.-мат. наук, профессор *Н.А. Бодунов*
(зав. кафедрой №1 высшей математики
СПб электротехнического университета «ЛЭТИ»)

*Печатается по рекомендации к опубликованию
Учебно-методической комиссии
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Пономаренко А.К., Сахаров В.Ю., Черняев П.К. Высшая математика. Семестр 1: теория, задачи и индивидуальные задания. Учебное пособие. – СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2018 – 70 с.

Учебное пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. В пособии рассматривается темы: “Упрощение уравнений кривых второго порядка”, “Правило Лопиталя”, “Построение графиков функций”, “Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений” курса “Высшая математика”. Необходимые для решения задач теоретические сведения приводятся в каждом разделе. Особое внимание уделяется вопросам, которые, как показывает опыт проведения практических занятий, вызывают у студентов наибольшие трудности в понимании.

Пособие содержит подробные решения типовых (и не только) примеров и задач, снабжено иллюстрациями; в конце разделов указаны №№ примеров из задачников для самостоятельной работы. Имеются также 25 вариантов контрольных заданий. Задания составлены с расчетом на индивидуальную работу в пределах стандартной группы для практических занятий.

Материалы пособия в течение нескольких лет использовались при изучении курса «Высшая математика» для направления «Химия» химического факультета СПбГУ.

Настоящее пособие может быть полезно для студентов, изучающих указанный выше курс или соответствующие темы в других курсах, а также преподавателям.

Авторы благодарны Янису Эриковичу Эзериньшу за корректуру рукописи и полезные советы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. [1]

1.1. *Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости.* [2]

Здесь будут рассмотрены преобразования прямоугольных декартовых координат для следующих движений плоскости: параллельного переноса, поворота и их композиций.[3]

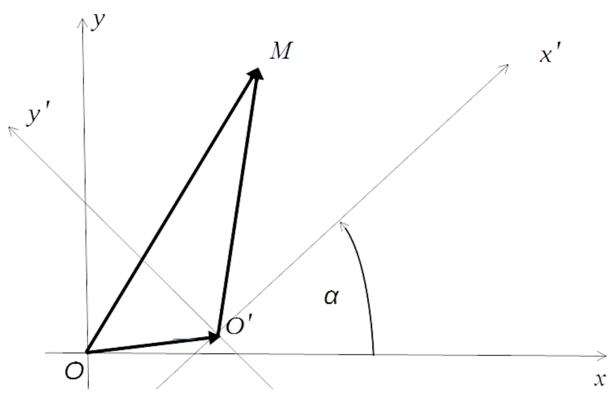


Рис. 1

Пусть на плоскости заданы две системы прямоугольных декартовых координат Oxy и $O'x'y'$. Точка O' имеет координаты x_0, y_0 в системе Oxy, ось $O'x'$ образует угол α с осью Ox. (Система координат $O'x'y'$ получена из системы Oxy с помощью параллельного переноса на вектор (x_0, y_0) и поворота на угол α вокруг точки O'.)

Возьмем произвольную точку M на плоскости. Пусть в системе Oxy она имеет координаты x, y, в системе $O'x'y'$ — x' ,y'.

Обозначим $\bar\imath, \bar\jmath$ орты осей Ox и Oy, $\bar\imath', \bar\jmath'$ — орты осей $O'x'$ и $O'y'$ соответственно.

Умножим скалярно обе части равенства $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ на $\bar\imath$. Получим

$$\overline{OM} \cdot \bar\imath = \overline{OO'} \cdot \bar\imath + \overline{O'M} \cdot \bar\imath,$$

или

$$(x\bar\imath + y\bar\jmath) \cdot \bar\imath = (x_0\bar\imath + y_0\bar\jmath) \cdot \bar\imath + (x'\bar\imath' + y'\bar\jmath') \cdot \bar\imath,$$

$$x(\bar\imath \cdot \bar\imath) + y(\bar\jmath \cdot \bar\imath) = x_0(\bar\imath \cdot \bar\imath) + y_0(\bar\jmath \cdot \bar\imath) + x'(\bar\imath' \cdot \bar\imath) + y'(\bar\jmath' \cdot \bar\imath),$$

$$x = x_0 + x' \cos\alpha + y' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

---

[1] О кривых второго порядка см., например, [1], [2].

[2] Материал этого раздела играет вспомогательную роль.

[3] Подробнее см. Замечание 2 на стр. 11.

т.е.

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha.$$

Аналогично после умножения скалярно равенства $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ на $\overline{\jmath}$ найдем

$$y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Итак, имеем следующие формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x &= x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

В случае, когда поворот не требуется (случай параллельного переноса на вектор (a, b)), формулы (1) принимают вид

$$\begin{cases} x &= x_0 + x', \\ y &= y_0 + y'. \end{cases} \quad (2)$$

При только повороте осей координат (без параллельного переноса) формулы (1) записываются в виде

$$\begin{cases} x &= x' \cos\ \alpha - y' \sin\ \alpha, \\ y &= x' \sin\ \alpha + y' \cos\ \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

1.2. *Преобразование уравнения кривой второго порядка. Инварианты преобразования. Классификация кривых второго порядка.*

1.2.1. *Преобразование уравнения кривой второго порядка.*

Преобразуем уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат точки $M(x, y)$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4)$$

$(A, B, C, D, E, F$ — вещественные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$, которое определяет некоторую кривую второго порядка на плоскости.

Сначала повернем оси координат системы Oxy на угол α вокруг начала координат — точки O. Обозначим как и выше x', y' координаты произвольной точки M плоскости в "новой" системе координат $Ox'y'$. "Старые" координаты x, y этой точки будут связаны с x', y' соотношениями (3)

$$\begin{cases} x &= x' \cos\ \alpha - y' \sin\ \alpha, \\ y &= x' \sin\ \alpha + y' \cos\ \alpha. \end{cases}$$

Уравнение (4) перейдет в

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} A' &= \quad A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B' &= \quad (C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ C' &= \quad A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \\ D' &= \quad D\cos\alpha + E\sin\alpha, \\ E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

ВЫВОД. При повороте осей координат вокруг их начала на угол α свободный член уравнения (4) не изменяется, остальные коэффициенты преобразуются по формулам (6).

Осуществим параллельный перенос на вектор (x_0, y_0) осей координат системы Oxy, получим

$$Ax''^2 + 2Bx''y'' + Cy''^2 + 2D''x'' + 2E''y'' + F'' = 0, \tag{7}$$

где

$$\begin{cases} x'' = x - x_0, \\ y'' = y - y_0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D'' &= \quad Ax_0 + By_0 + D, E'' = Bx_0 + Cy_0 + E, \\ F'' &= Ax_0^2 + 2By_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \end{aligned} \tag{8}$$

ВЫВОД. При параллельном переносе осей координат на вектор (x_0, y_0) коэффициенты при слагаемых второй степени координат в уравнении (4) не изменяются, а остальные коэффициенты преобразуются по формулам (8).

1.2.2. *Инварианты преобразования уравнения кривой второго порядка.*

При применении формул преобразования координат некоторые величины остаются неизменными. Их называют инвариантами преобразования. Нетрудно показать (см., например [2]), что это следующие величины:

$$I_1 = A + C, I_2 = \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,\ I_3 = \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

(Об определителях см. раздел 4.)

1.2.3. *Классификация кривых второго порядка.*

Общепринята следующая классификация кривых второго порядка:

– если для кривой второго порядка, заданной уравнением (4), $\delta > 0$, то кривая называется кривой эллиптического типа,

– если $\delta<0$, то кривая называется кривой гиперболического типа,

– если $\delta=0$, то кривая называется кривой параболического типа.

Кривые также делятся на центральные и нецентральные. Если кривая имеет единственный центр (центр симметрии), то она называется центральной кривой. Для нахождения центра симметрии кривой можно использовать уравнения

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{9}$$

(См. (8))

Если последняя система уравнений относительно координат x_0, y_0 центра не имеет единственного решения, то кривая нецентральная.

1.3. *Приведение к каноническому виду уравнений кривых второго порядка.*

В канонических уравнениях эллипса, гиперболы, параболы нет слагаемого, содержащего произведение координат. Приравняем B' из системы равенств (6) к нулю. После деления обеих частей полученного уравнения на $\cos^2\alpha$ получаем

$$B\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (C-A)\,\mathrm{tg}\,\alpha - B = 0.$$

Это уравнение относительно $\mathrm{tg}\,\alpha$. Его решения

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{C - A \pm \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}$$

определяют два взаимно перпендикулярных направления. Возьмем для определенности положительное решение. Если, например, $B > 0$, то это

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{C - A + \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

Рассматриваемое уравнение относительно α имеет счетное множество решений. Для наших целей достаточно лишь одного из них:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{C - A + \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

Вычислим теперь $\cos\alpha = \left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^{-1}$, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$, затем по формулам (6) — A', C', D', E'. Уравнение (5) примет вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0. \tag{10}$$

Замечание.

При $B' = 0$ $\delta = A'C'$.

Рассмотрим случаи $\delta > 0, \delta < 0, \delta = 0$.

1.3.1. *Преобразование уравнения кривой эллиптического типа.*

Пусть $\delta > 0$. (A' и C' одного знака.)

Если хоть один из коэффициентов D' или E' не равен нулю, сделаем параллельный перенос повернутой системы $Ox'y'$ (вектор переноса (x_0, y_0) выберем позже):

$$\begin{cases} x' &= \overline{x} + x_0, \\ y' &= \overline{y} + y_0. \end{cases} \tag{11}$$

Подставим выражения (11) в уравнение (10), получим

$$A'\overline{x}^2 + C'\overline{y}^2 + 2(A'x_0 + D')\overline{x} + 2(C'y_0 + E')\overline{y} + \overline{F} = 0, \tag{12}$$

где

$$\overline{F} = A'x_0^2 + C'y_0^2 + 2D'x_0 + 2E'y_0 + F. \tag{13}$$

Положим

$$\begin{cases} A'x_0 + D' &= 0, \\ C'y_0 + E' &= 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_0 &= -\frac{D'}{A'}, \\ y_0 &= -\frac{E'}{C'}. \end{cases}$$

При таком выборе a и b уравнение (10) запишется в виде

$$A'\overline{x}^2 + C'\overline{y}^2 = -\overline{F}. \tag{14}$$

Напомним, что в этом уравнении A' и C' одного знака.

Если $\overline{F} = 0$, то уравнение (14) определяет только одну точку $\overline{O}(0,0)$ в системе кординат $O'\,\overline{x}\,\overline{y}$.

Если $\overline{F} \neq 0$ и его знак противоположен знаку A' и C', то уравнение (14) задает эллипс

$$\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2} + \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2} = 1 \quad \text{с полуосями } \overline{a} = \sqrt{-\frac{\overline{F}}{A'}},\ \overline{b} = \sqrt{-\frac{\overline{F}}{C'}}.$$

Замечание.

Следует отметить, что кривая эллиптического типа является центральной кривой, так как определитель системы уравнений (9) относительно координат x_0, y_0 центра кривой совпадает с не равным нулю определителем δ. Поэтому по теореме Крамера (см. раздел 4) эта система имеет единственное решение.

Если знаки $\overline{F}$, A' и C' совпадают, то уравнение (14) задает пустое множество точек плоскости (так называемый "мнимый эллипс") .

1.3.2. *Преобразование уравнения кривой гиперболического типа.*

Пусть $\delta < 0$. (A' и C' разных знаков.)

Заметим, что выкладки предыдущего пункта, вплоть до уравнения (14), сохраняют свою силу.

Если $\overline{F} > 0, A' > 0, C' < 0$, то уравнение (14) определяет гиперболу $-\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2} + \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2} = 1$ с полуосями мнимой $\overline{a} = \sqrt{\frac{\overline{F}}{A'}}$, и вещественной $\overline{b} = \sqrt{-\frac{\overline{F}}{C'}}$.

Аналогично рассматриваются случаи

$$\overline{F} > 0, A' < 0, C' > 0,$$
$$\overline{F} < 0, A' > 0, C' < 0,$$
$$\overline{F} < 0, A' < 0, C' > 0.$$

В каждом из этих случаев получается гипербола.

Если $\overline{F} = 0$, то уравнение (14) определяет пару пересекающихся в точке $\overline{O}$ прямых.

Действительно, при $\begin{cases} A' > 0, \\ C' < 0 \end{cases}$ уравнение (14) принимает вид

$$\left(\sqrt{A'}\,\overline{x}\right)^2 - \left(\sqrt{-C'}\,\overline{y}\right)^2 = 0,$$

т.е.

$$\left(\sqrt{A'}\,\overline{x} - \sqrt{-C'}\,\overline{y}\right) \cdot \left(\sqrt{A'}\,\overline{x} + \sqrt{-C'}\,\overline{y}\right) = 0,$$

или

$$\left[\begin{array}{lcl} \sqrt{A'}\,\overline{x} + \sqrt{-C'}\,\overline{y} & = & 0, \\ \sqrt{A'}\,\overline{x} - \sqrt{-C'}\,\overline{y} & = & 0. \end{array}\right.$$

При $\begin{cases} A' & < & 0, \\ C' & > & 0 \end{cases}$ имеем аналогично

$$\left[\begin{array}{rcl} \sqrt{-A'}\,\overline{x} + \sqrt{C'}\,\overline{y} & = & 0, \\ \sqrt{-A'}\,\overline{x} - \sqrt{C'}\,\overline{y} & = & 0. \end{array}\right.$$

Замечание.

Так же, как выше, проверяется, что кривая гиперболического типа — центральная кривая.

1.3.3. *Преобразование уравнения кривой параболического типа.* Пусть $\delta = 0$. ($A' \cdot C' = 0$.) Нетрудно проверить, что при $B' = 0$ $A'^2 + \mathrm{C}'^2 > 0$. Таким образом, при $B' = 0$ и $A'C' = 0$ возможны два случая: $A' = 0, C' \neq 0$ или $C' = 0, A' \neq 0$.

Если $A' \neq 0$, $C' = 0$, уравнение (5) записывается в виде

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0. \tag{15}$$

Пусть $E' \neq 0$.

Сделаем снова параллельный перенос (11). Придем к уравнению

$$A'\overline{x}^2 + 2(A'x_0 + D')\overline{x} + 2(C'y_0 + E')\overline{y} + \overline{F} = 0, \tag{16}$$

где $\overline{F}$ определено равенством (13), причем $C' = 0$.

Положим $\begin{cases} A'x_0 + D' & = & 0, \\ \overline{F} & = & 0 \end{cases}$, т.е.

$$\begin{cases} A'x_0 + D' & = & 0, \\ A'x_0^2 + 2D'x_0 + 2E'y_0 + F & = & 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_0 & = & -\frac{D'}{A'}, \\ \\ y_0 & = & -\frac{A'x_0^2 + 2D'x_0 + F}{2E'}. \end{cases}$$

При таком выборе x_0 и y_0 уравнение (5) примет вид

$$\overline{x}^2 = -2\frac{C'}{A'}\overline{y}, \text{ где } \overline{C} = E' - \frac{C'}{2E'}(A'x_0^2 + 2D'x_0 + F) = E',$$

которое определяет параболу, симметричную относительно оси $O'\,\overline{y}$, вершина которой совпадает с точкой O'.

Если $E' = 0$, то уравнение (5) запишется в виде

$$A'x'^2 + 2D'x' + F = 0,$$

или

$$\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 - F' = 0, \quad F' = \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 - \frac{F}{A'}.$$

Если $F' < 0$, то это уравнение определяет пустое множество; если $F' > 0$, — пару параллельных прямых
$x' + \frac{D'}{A'} + \sqrt{F'} = 0$ и $x' + \frac{D'}{A'} - \sqrt{F'} = 0$;
если $F' = 0$, — пару слившихся прямых $x' + \frac{D'}{A'} = 0$.

Аналогично рассматривается случай $\begin{cases} A' &= 0, \\ C' &\neq 0. \end{cases}$

В этом случае при $D' \neq 0$ с помощью параллельного переноса (11), где $\begin{cases} y_0 &= -\frac{E'}{C'}, \\ \\ x_0 &= -\frac{C'y_0^2 + 2E'y_0 + F}{2D'}, \end{cases}$ получаем уравнение параболы

$$\overline{y}^2 = -2\frac{\overline{D}}{C'}\overline{x}, \text{ причем } \overline{D} = D' - \frac{A'}{2D'}(C'y_0^2 + 2E'y_0 + F) = D'.$$

Если $D' = 0$, имеем:
при $F' < 0$ $\left(F' = \left(\frac{E'}{C'}\right)^2 - \frac{F}{C'}\right)$ пустое множество;
при $F' > 0$ — пару параллельных прямых
$y' + \frac{E'}{C'} + \sqrt{F'} = 0$ и $y' + \frac{E'}{C'} - \sqrt{F'} = 0$;
при $F' = 0$ — пару слившихся прямых $y' + \frac{E'}{C'} = 0$.

Замечание 1.

Так как $\delta = 0$, то система (9) не имеет единственного решения. Поэтому кривая параболического типа не является центральной кривой.

Замечание 2.

При изучении темы «Упрощение уравнений кривых второго порядка» важная роль отводится движениям плоскости. Рассмотрим основные их свойства, сформулировав предварительно определение.

Движением плоскости называется отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояния между точками. Иными словами, расстояние между любыми двумя точками точками плоскости равно расстоянию между их образами. Точка, совпадающая с собственным образом, называется неподвижной точкой.

Всякое движение плоскости является взаимно однозначным отображением (биекцией). Композиция двух движений является движением.

Всякое движение плоскости может быть представлено как композиция не более чем трех осевых симметрий, при этом ни одно движение плоскости не представимо в виде композиции как четного, так и нечетного числа осевых симметрий.

Движения, представимые в виде композиции четного числа осевых симметрий, называются *движениями первого рода.* Всякое движение первого рода является параллельным переносом или поворотом (тождественное преобразование является частным случаем параллельного переноса и поворота, центральная симметрия является частным случаем поворота). *Тождественным преобразованием плоскости* называется преобразование плоскости, при котором все точки плоскости являются неподвижными. Легко видеть, что тождественное преобразование плоскости является движением.

Движения, представимые в виде композиции нечетного числа осевых симметрий, называются *движениями второго рода.* Всякое движение второго рода является осевой симметрией или скользящей симметрией. *Скользящей симметрией* называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии.

Композицией двух движений одного рода является движение первого рода, комозицией двух движений различного рода является движение второго рода.

Подробнее см. [14].

Приведем примеры преобразования уравнений.

ПРИМЕР 1.

Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0,$$

указать тип кривой, им определяемой, найти координаты вершин, фокусов и уравнения директрис в исходной системе координат, сделать чертеж кривой в этой системе.

Исходное уравнение — уравнение вида (4), где
$A = 5$, $B = 2$, $C = 8$, $D = -16$, $E = -28$, $F = 80$.

Здесь $\delta = AC - B^2 = 16$, $\delta > 0$, откуда следует, что исходное уравнение определяет кривую эллиптического типа.

После поворота осей координат на угол α (см. формулы (3)) приходим, как указано выше, к уравнению

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0, \text{ относительно } \mathrm{tg}\,\alpha,$$

корни которого $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Возьмем $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Далее находим

$$\begin{array}{rcrcr} A' &=& 5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha &=& 9, \\ C' &=& 5\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha &=& 4, \\ D' &=& -16\cos\alpha - 28\sin\alpha & = & -\frac{72}{\sqrt{5}}, \\ E' &=& 16\sin\alpha - 28\cos\alpha & = & \frac{4}{\sqrt{5}}. \end{array}$$

Исходное уравнение примет вид:

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Выполним параллельный перенос

$$\begin{cases} x' &=& \overline{x} + x_0, \\ y' &=& \overline{y} + y_0. \end{cases}$$

Будем иметь:

$$9'\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 - 18\left(x_0 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)\overline{x} + 8\left(y_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\overline{y} + \overline{F}_1 = 0,$$

где $\overline{F}_1 = 5x_0^2 + 4y_0^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x_0 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_0 + 80 = 0$. Приравняем нулю коэффициенты при $\overline{x}$, $\overline{y}$, получим

$$\begin{cases} x_0 &=& \frac{8}{\sqrt{5}}, \\ \\ y_0 &=& -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Последнее уравнение примет вид

$$9'\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 - 36 = 0, \text{ или } \frac{\overline{x}^2}{4} + \frac{\overline{y}^2}{9} = 1.$$

Таким образом мы выяснили, что исходная кривая — эллипс с большой полуосью $a = 3$ и малой $b = 2$. Фокусы эллипса лежат на оси $\overline{O}\,\overline{y}$.

Для того чтобы нарисовать эллипс в исходной системе координат, выразим, используя формулу (1), “старые” координаты x, y через "новые" $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\begin{cases} x &= \left(\overline{x}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\left(\overline{y}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \\ y &= \left(\overline{x}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\left(\overline{y}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x &= \frac{\overline{x}-2\overline{y}}{\sqrt{5}}+2,\\ \\ y &= \frac{2\overline{x}+\overline{y}}{\sqrt{5}}+3.\end{cases} \tag{17}$$

Отсюда вытекает, что точка $\overline{O}$ в системе Oxy имеет координаты $(2;3)$.

Замечание.

Координаты центра $\overline{O}$ можно найти также и из системы уравнений (9).

Для того чтобы начертить эллипс по полученному уравнению, нарисуем вначале оси координат $\overline{O}\,\overline{x}$ и $\overline{O}\,\overline{y}$: повернем оси Ox и Oy вокруг точки $O(0,0)$ на угол $\alpha=\operatorname{arctg}2$, получим оси $O'x'$ и $O'y'$, через точку $\overline{O}(2,3)$ проведем оси $\overline{O}\,\overline{x}$ и $\overline{O}\,\overline{y}$ параллельно $O'x'$ и $O'y'$, в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ нарисуем эллипс с полуосями 2 и 3. (См. Рис. 2). [4]

Вершины эллипса — точки A', A'' в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ имеют координаты $A'(0,3)$, $A''(0,-3)$.

Их координаты в системе Oxy находим по формулам (17):

$$\begin{cases} x=\frac{0-2\cdot(\pm3)}{\sqrt{5}}+2,\\ \\ y=\frac{2\cdot0+(\pm3)}{\sqrt{5}}+3\end{cases},\ \text{т.е.}\ \begin{cases} A'\left(2-\frac{6}{\sqrt{5}},3+\frac{3}{\sqrt{5}}\right),\\ \\ A''\left(2+\frac{6}{\sqrt{5}},3-\frac{3}{\sqrt{5}}\right).\end{cases}$$

Точно так же получаем координаты фокусов F' и F'':
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, $F'(0,\sqrt{5})$, $F''(0,-\sqrt{5})$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$, $F'(0,4)$, $F''(4,2)$ — в системе Oxy.

[4] Отметим, что эллипс пересекает ось Oy в точках с ординатами 2 и 5.

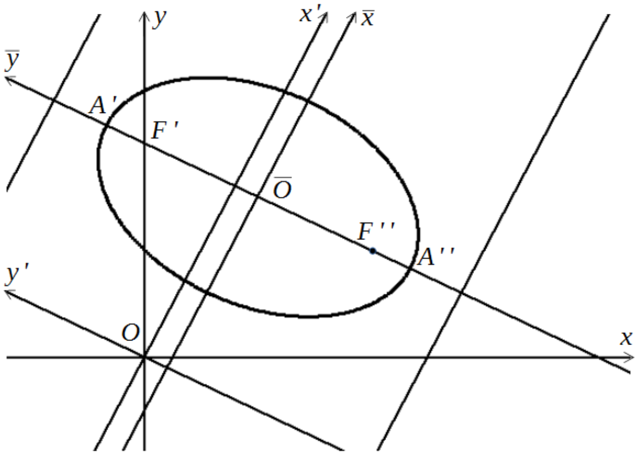


Рис. 2

Уравнения директрис в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ имеют вид: $\overline{y} = \pm\frac{a}{\epsilon}$, т.е. $\overline{y} = \pm\frac{a}{\frac{c}{a}}$, или $\overline{y} = \frac{a^2}{c}$, т.е. $\overline{y} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.Чтобы записать уравнения директрис в системе Oxy, выразим $\overline{y}$ через x, y из равенств (17). Получим $\overline{y} = \frac{-2x+y+1}{\sqrt{5}}$, и уравнения директрис запишутся в следующем виде: $\frac{-2x+y+1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$, т.е. $2x - y + 8 = 0$ и $2x - y - 10 = 0$.

ПРИМЕР 2.

Уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

привести к каноническому виду, найти координаты вершины, фокуса, написать уравнение директрисы, сделать чертеж кривой в исходной системе координат.

Здесь $\delta = 0$, и заданное уравнение определяет кривую параболического типа.

Повернув оси координат на угол α (см. формулы (3)) и приравняв нулю коэффициент B' при произведении координат $x'y'$, приходим к уравнению $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$.

Выберем решение $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя равенства (6), приходим к уравнению

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0.$$

Выполним параллельный перенос

$$\begin{cases} x' &= \overline{x} + x_0, \\ y' &= \overline{y} + y_0, \end{cases}$$

получим

$$2\overline{y}^2 - 8\sqrt{2}\overline{x} + 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}y_0 + 1\right)\overline{y} + 2b^2 - 8\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0 + 25 = 0.$$

Приравняем к нулю коэффициент при $\overline{y}$ и свободный член уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{2}y_0 + 1 &= 0, \\ 2y_0^2 - 8\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0 + 25 &= 0, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} y_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \\ x_0 &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

При таком выборе x_0 и y_0 последнее уравнение записывается в виде

$$\overline{y}^2 = 4\sqrt{2}\overline{x},$$

определяет параболу с осью симметрии $\overline{O}\,\overline{x}$ и параметром $p = 2\sqrt{2}$. Как и выше, устанавливаем связь между координатами x, y и $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\begin{cases} x &= (\overline{x} + x_0)\cos\alpha - (\overline{y} + y_0)\sin\alpha, \\ y &= (\overline{x} + x_0)\sin\alpha + (\overline{y} + y_0)\cos\alpha, \end{cases} \quad \text{т. е.} \begin{cases} x = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{2}} + 2, \\ y = \frac{\overline{x} + \overline{y}}{\sqrt{2}} + 1. \end{cases} \tag{18}$$

Начало координат новой системы — точка $\overline{O}(2,1)$ в системе Oxy. Выполним чертеж аналогично тому, как это было сделано в примере 1 (См. Рис. 3.). Отметим попутно, что рассматриваемая парабола касается оси Ox в точке $(0,5)$, т.к. исходное уравнение при $y = 0$ принимает форму $x^2 - 10x + 25 = 0$ и имеет два одинаковых корня $x = 5$. При $y = 0$ данное в условии уравнение имеет вид $y^2 - 6y + 25 = 0$, не имеет вещественных решений и, следовательно, парабола не пересекает ось Oy.

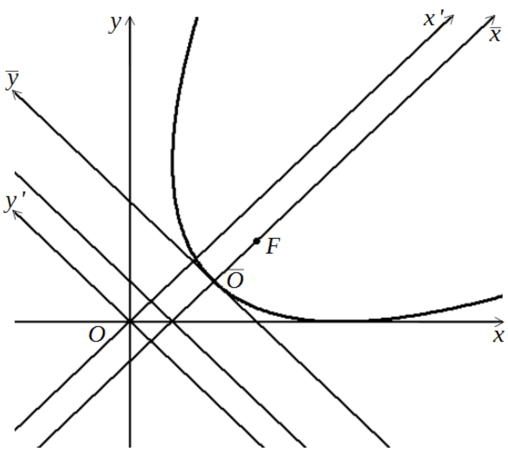


Рис. 3

Вершина параболы – точка $\overline{O}(2,1)$ в системе Oxy. Фокус $F(\sqrt{2},0)$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$ и $F(3,2)$ – в системе Oxy. Уравнение директрисы: $\overline{x} = -\frac{p}{2}$, т.е. $\overline{x} = -\sqrt{2}$ в системе $\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y}$. Из равенств (9) находим $\overline{x} = \frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$, и уравнение директрисы в системе Oxy имеет вид $\frac{x+y-3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$, т.е. $x + y - 1 = 0$.

У п р а ж н е н и е. Из задачника [13] решите задачи №№ 472*, 506*, 541, 618.

З А Д А Н И Е 1.

Привести к каноническому виду данные ниже уравнения, указать типы кривых, ими определяемых, найти координаты вершин, фокусов и написать уравнения директрис (а для гиперболы — и асимптот), сделать чертежи кривых в исходной системе координат.

Номер варианта	Уравнения кривых
1.	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 14x - 2y - 13 = 0$, $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
2.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$, $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$
3.	$3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$
4.	$21x^2 + 24xy + 14y^2 + 18x - 4y - 139 = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
5.	$4x^2 + 20xy - 11y^2 + 8x + 20y - 1 = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16y + 32 = 0$
6.	$36x^2 - 24xy + 29y^2 - 96x + 82y - 91 = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$
7.	$11x^2 + 24xy + 4y^2 + 42x + 64y + 51 = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 + 16x - 16y - 32 = 0$
8.	$5x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$, $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$

Номер варианта	Уравнения кривых
9.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 128x + 128y - 32 = 0,$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$
10.	$25x^2 + 14xy + 25y^2 - 64x - 64y - 224 = 0,$ $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 86y + 39 = 0$
11.	$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0,$ $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$
12.	$x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0,$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$
13.	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0,$
14.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 64x + 64y - 224 = 0,$ $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 110x - 20y - 50 = 0$
15.	$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$
16.	$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0,$ $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$
17.	$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x + 16y + 24 = 0,$ $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
18.	$29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0,$ $x^2 - 2xy + y^2 + 10x - 2y + 13 = 0$
19.	$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 12 = 0$
20.	$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 2y + 13 = 0$
21.	$3x^2 + 10xy + 3y^2 + 2x + 14y - 13 = 0,$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 46x - 22y - 19 = 0$
22.	$25x^2 - 14xy + 25y^2 - 64x + 64y - 224 = 0,$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 70x + 10y - 75 = 0$
23.	$4xy + 3y^2 - 16x - 12y - 36 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$
24.	$14x^2 + 24xy + 21y^2 + 4x - 18y - 139 = 0,$ $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$
25.	$9x^2 + 24xy + 41y^2 + 18x + 24y - 36 = 0,$ $x^2 - 2xy + y^2 - 8y + 4 = 0$

2. *ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.* [5]

Введем вначале понятие “неопределенность”. Говорят, что выражение $\frac{u(x)}{v(x)}$ при $x \to b$ ($b \in \mathbf{R}$, $b = +\infty$, $b = -\infty$), $x \to b+0, x \to b-0$ представляет собою неопределенность вида "$\frac{0}{0}$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = 0$, "$\frac{\infty}{\infty}$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = \infty$.

Аналогично определяются остальные пять типов неопределенностей: "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0" (соответственно, $u(x)\cdot v(x)$ есть неопределенность вида "$0 \cdot \infty$" при $x \to b$, если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = \infty$;
$u(x) - v(x)$ — неопределенность "$\infty - \infty$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to b} u(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = -\infty$;
$u(x)^{v(x)}$ — неопределенность "1^∞", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = \infty$;
"0^0", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = 0$; "$\infty^0$", если $\lim\limits_{x\to b} u(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to b} v(x) = 0$.) [6]

Правило Лопиталя непосредственно применяется для раскрытия неопределенностей вида "$\frac{0}{0}$" и "$\frac{\infty}{\infty}$":
$\lim\limits_{x\to b} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$, если $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ существует и функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют некоторым условиям (См., например, [3–6]).

ПРИМЕР 1. Найти $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\cos nx}$, $\quad n, m \in \mathbf{N}$.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{(\sin mx)'}{(\sin nx)'} = \frac{m}{n} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos mx}{\cos nx} = \frac{m}{n} \frac{\cos m\pi}{\cos n\pi} =$$
$$= \frac{m}{n}(-1)^{m+n}.\ [7]$$

ПРИМЕР 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\mu}{a^x}$, $\quad \mu,\ a \in \mathbf{R}_+,\ a > 1$.

Пусть $n - 1 < \mu \le n$, $n \in \mathbf{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\mu}{a^x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^\mu)'}{(a^x)'} = \frac{\mu}{\ln a} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu-1}}{a^x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=}$$

---

[5] Гийо́м де Лопита́ль (1661–1704) – французский математик, член Парижской АН.

[6] Точно так же определяются эти неопределенности при $x \to b - 0$, $x \to b + 0$, $b \in \mathbf{R}$.

[7] Знак равенства перед пределом отношения производных можно написать лишь после того, как будет установлено, что этот предел существует.

$$\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \frac{\mu}{\ln a} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^{\mu-1})'}{(a^x)'} = \frac{\mu(\mu-1)}{\ln^2 a} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu-2}}{a^x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \dots =$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{\ln^n a} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu-n}}{a^x} = 0.$$

Для раскрытия неопределенностей других типов следует предварительно преобразовать их к виду "$\frac{0}{0}$" или "$\frac{\infty}{\infty}$". Например, пусть $u(x)\cdot v(x)$ есть неопределенность вида "$0\cdot\infty$" при $x\to b$. Запишем $u(x)\cdot v(x)$ в виде $u(x)\cdot v(x) = \dfrac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$. Имеем при $x\to b$ неопределенность "$\frac{0}{0}$".

Для неопределенностей "1^∞", "0^0", "∞^0" выражение $u(x)^{v(x)}$ преобразуется к виду $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\frac{\ln u(x)}{v^{-1}(x)}}$. В силу непрерывности показательной функции имеем $\lim\limits_{x\to b} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to b}\frac{\ln u(x)}{v^{-1}(x)}}$.

ПРИМЕР 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(\sin 2x)^{\ln^{-1}x}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to+0}(\sin 2x)^{\ln^{-1}x} \overset{\text{“}0^0\text{”}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x}} = e,$

т.к. $$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{1}{x}} =$$
$$= 2\lim_{x\to+0}\frac{x}{\operatorname{tg} 2x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} 2\lim_{x\to+0}\frac{(x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = 2\lim_{x\to+0}\frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = 1.$$

У п р а ж н е н и е. Из задачника [11] решите примеры №№ 1332 – 1339, 1347, 1352, 1356 – 1363.

З А Д А Н И Е 2. (Часть 1.)

Используя правило Лопиталя, найти пределы

Номер варианта	Пределы
1.	1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x - \operatorname{arctg}(\pi - x)}{(x-\pi)^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to1}(\ln x)^{\sin\pi x}$.
2.	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x - 2x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\ln 2x)^{\operatorname{tg}(1-2x)}$.
3.	1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to+0}(c\operatorname{tg} x)^{-\ln^{-1}x}$.

Номер варианта	Пределы
4.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\,2x-2\arcsin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{4}\right)^{c\,\mathrm{tg}\,\pi(1-x)}$.
5.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-2\arcsin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}(c\,\mathrm{tg}\,x)^{\dfrac{2}{\ln\,x+1}}$.
6.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\,2x-2\arcsin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(c\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}}$.
7.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\mathrm{arctg}\,3x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}(c\,\mathrm{tg}\,2x)^{\dfrac{3}{\ln\,x+2}}$.
8.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x-2\arcsin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(c\,\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.
9.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x-2\sin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln^{-1}(\sin\,x)}$.
10.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\,2x-2\sin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\cos\,\dfrac{\pi x}{2}}$.
11.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-2\sin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin\,x)^{\ln\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)}$.
12.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\,x-\arcsin\,x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}(\sin\,x)^{\dfrac{3}{\ln\,x+2}}$.
13.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin\,2x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\cos\,x)^{\ln(\sin\,x)}$.
14.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\ln(\cos\,x)}{x^4}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}(-\ln\,x)^{x}$.
15.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln\left(\dfrac{\sin\,x}{x}\right)^2}{x^2}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{2}{x}\right)^{\dfrac{3}{\ln\,x}}$.

Номер варианта	Пределы
16.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x - 3\sin x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$.
17.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x - 3\operatorname{tg} x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$.
18.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x - 3\arcsin x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.
19.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x - 3\operatorname{tg} x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
20.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x - 3\sin x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
21.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
22.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x + 2\ln(\cos x)}{x^4}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.
23.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to +0}\left(e^{2x}-1\right)^{\frac{2}{\ln x}}$.
24.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\operatorname{arctg} x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.
25.	1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x - 3\arcsin x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{c\operatorname{tg} 2x}$.

3. *ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.*

Для исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать предлагаемую ниже схему:

1. Найти область определения D_f функции (если она не задана).[8]

2. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической или не обладает этими свойствами.[9] В силу симметрии достаточно исследовать четную и нечетную функции только для неотрицательных значений аргумента из ее области определения, периодическую — только на каком-либо промежутке значений аргумента длиной в один период. Если удается выяснить, что график имеет какую-либо другую симметрию, то это надо использовать для уменьшения объема исследований.

3. Выяснить поведение функции на границе множества значений аргумента, на котором исследуется функция (это множество найдено в пункте 2.). В частности, найти асимптоты, если они имеются.

4. Если возможно, то найти нули и интервалы постоянства знака функции. Вычислить ординату точки пересечения ее графика с осью ординат.

5. Используя производную первого порядка функции, найти интервалы монотонности функции и ее экстремумы.

6. С помощью производной второго порядка найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

После этого нанести на координатной плоскости асимптоты и все полученные выше характерные точки (нули, точки экстремума и т.д.) [10] вместе с элементами графика (для уточнения отдельных частей графика желательно построить, кроме характерных, найденные дополнительно точки), все эти точки соединить линией (линиями, если график состоит из нескольких частей), учитывая характер изменения функции (возрастание, убывание, выпуклость, вогнутость).

[8] В качестве области определения функции находим ее область естественного определения, т.е. множество всех вещественных значений аргумента, для которых функция имеет вещественные значения.

[9] Графики четной и нечетной функций симметричны относительно оси ординат и начала координат соответственно, график периодической функции состоит из периодически повторяющейся его части.

[10] В точках перегиба следует нанести касательные к графику, для чего предварительно вычислить соответствующие значения первой производной.

Приведем примеры построения графиков.

ПРИМЕР 1.

Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ и построить ее график.

1. Данная функция определена всюду, кроме точки $x = -2$, следовательно, $D_y = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая. Исследуем ее на всей D_y.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Будем искать уравнение прямолинейной асимптоты в виде $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+3)^3}{x(x+2)^2} = 1$,

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2 + 23x + 27}{x^2 + 4x + 4} = 5.$$

Итак, при $x \to +\infty$ график функции имеет асимптоту $y = x + 5$. Точно так же проверятся, что при $x \to -\infty$ график функции имеет ту же самую асимптоту.

Далее, т.к. $\lim\limits_{x\to-2\pm0} y = +\infty$, то $x = -2$ — вертикальная асимптота.

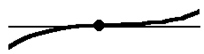
4. Функция обращается в нуль при $x = -3$. Эта точка делит область определения функции на части $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, +\infty)$. Составляем таблицу

Интервал	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
Знак y	$-$	$+$	$+$

5. Находим $y' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$. Ясно, что $D_{y'} = D_y$.

"Подозрительные" на экстремум точки — лишь стационарные точки, т.е. точки, в которых производная первого порядка равна нулю. Это точки $x = -3$ и $x = 0$. Они делят область определения y' на части $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$.

Составим таблицу

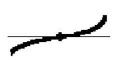
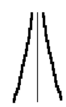
Интервал	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
Знак y'	$+$	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$ (возрастает)	$\nearrow$ (возрастает)	$\searrow$ (убывает)	$\nearrow$ (возрастает)
Замечание	При $x=-3$ нет экстремума. 		При $x=0$ $\min y$. $y_{min}=y(0)=\frac{27}{4}$. 	

6. Далее, $y''=6\frac{x+3}{(x+2)^4}$, $D_{y''}=D_y$; $y''=0$ при $x=-3$. "Подозрительная" на перегиб точка — $x=-3$. Как и выше, получаем интервалы $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,+\infty)$. Составим таблицу

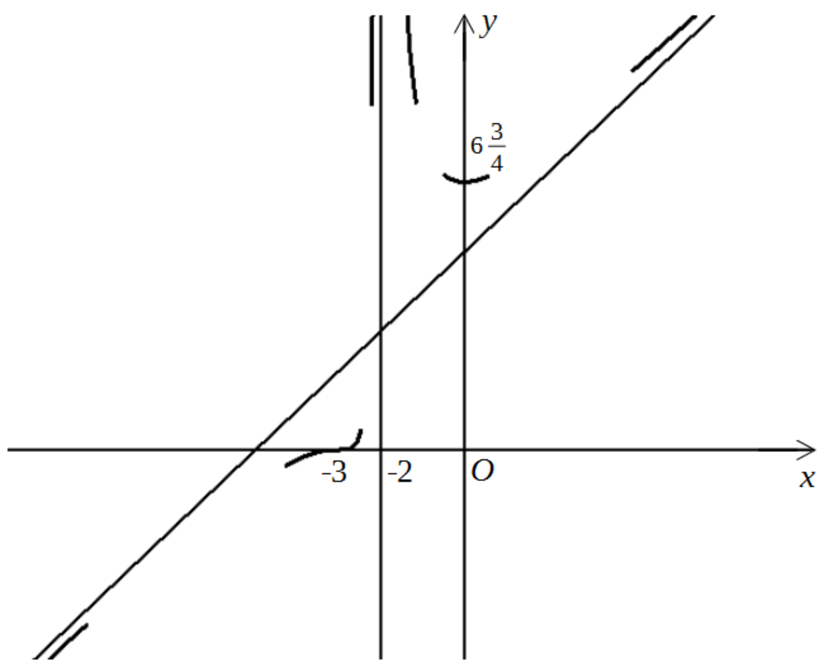
Интервал	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,+\infty)$
Знак y''	$-$	$+$	$+$
y	$\frown$ (вогнута)	$\smile$ (выпукла)	$\smile$ (выпукла)
Замечание	При $x=-3$ перегиб. $y_{пер}=y(-3)=0$. (См. предыдущую таблицу.)		

Полученные результаты можно, удобства ради, свести в таблицу.[11]

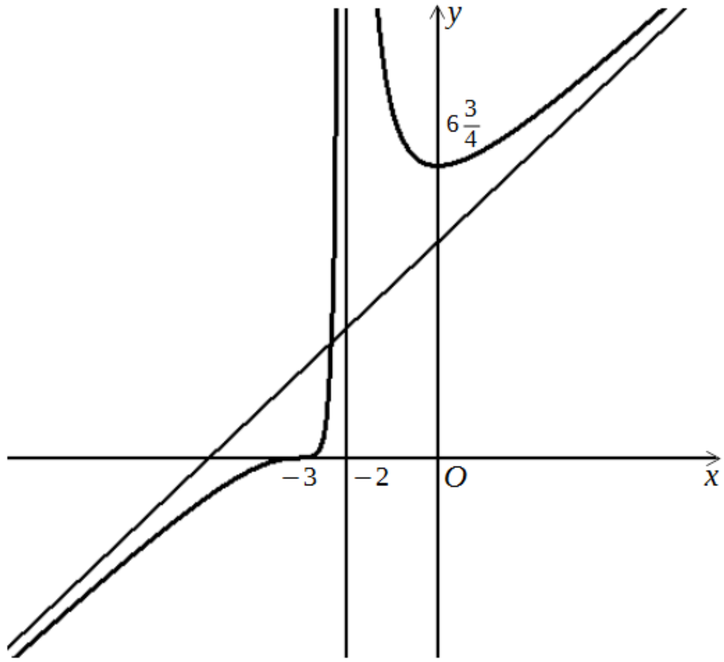
[11] Запись $^-O^+$ ниже означает, что слева от рассматриваемой точки функция отрицательна, а справа положительна. Аналогично и для $^+O^+$.

x	$-\infty$	-3	-2		0	$+\infty$
			$-2-0$	$-2+0$		
y	$-\infty$	${}^{-}0^{+}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$
y'	$+$	${}^{+}0^{+}$	$+$	$-$	${}^{-}0^{+}$	$+$
y''	$-$	${}^{-}0^{+}$	$+$	$+$	$+$	$+$
Замечание	Асимптота $y = x + 5$ 	Перегиб 	Разрыв 		min 	Асимптота $y = x + 5$ 

Нанесем на координатной плоскости асимптоты и характерные точки вместе с соответствующими элементами графика



Соединим полученные точки плавными кривыми, учитывая характер изменения функции на каждом из интервалов $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$.



ПРИМЕР 2.

Исследовать функцию $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

1. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2. Функция ни четная, ни нечетная, непериодическая. Исследуем ее на D_y.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$. Будем искать уравнение прямолинейной асимптоты при $x \to +\infty$ в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = $ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - kx) = -\infty$.

Итак, при $x \to +\infty$ график функции не имеет асимптоты. Аналогичная ситуация и при $x \to -\infty$.

4. Находим нули функции: $2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x} - 1.5) = 0$, откуда получаем $x = 0$ и $x = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Составляем таблицу

Интервал	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{27}{8}\right)$	$\left(\frac{27}{8}, +\infty\right)$
Знак y	$-$	$-$	$+$

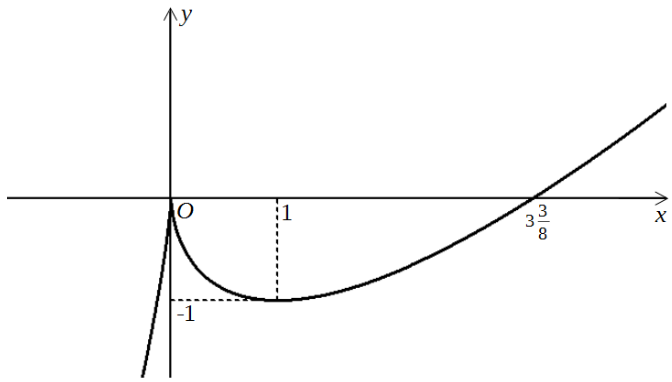
5. Находим $y' = 2 - 2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$, $D_{y'} = D_y \backslash \{0\}$. Подозрительные на экстремум точки: $x = 1$ — стационарная точка и $x = 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm 0} y' = \infty$, а функция у непрерывна в точке $x = 0$. Это значит, что в точке $(0,0)$ график функции имеет вертикальную касательную. Составим таблицу

Интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Знак y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$ (возрастает)	$\searrow$ (убывает)	$\nearrow$ (возрастает)
Замечание	При $x = 0$ max y. $y_{max} = y(0) = 0$. 		При $x = 1$ min y. $y_{min} = y(1) = -1$. 

6. Далее, $y'' = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $D_{y''} = D_{y'}$. Т.к. $y'' > 0$ на $D_{y''}$, то функция y выпукла на этом множестве.

Ввиду небольшого объема исследований результаты не будем оформлять в виде таблицы, а сразу нанесем характерные точки и начертим график функции.

Замечание. Отметим, что в точке $O(0,0)$ график имеет вертикальную касательную.



ПРИМЕР 3.

Исследовать функцию $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ и построить ее график.

1. $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2. Функция нечетная, 2π-периодическая. Поэтому достаточно исследовать ее на промежутке $[0, \pi]$.

3. $y(0) = y(\pi) = 0$.

4. $y = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x & = & (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$

На сегменте $[0, \pi]$ содержатся лишь нули $x = 0$ и $x = \pi$. На интервале $(0, \pi)$ функция $y > 0$.

5. $y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$.

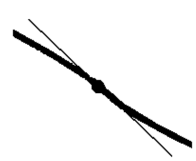
$y' = 0$ при $x = \frac{1}{3}\pi(1 + 2k)$ и $x = \pi(1 + 2l)$, $k, l \in \mathbf{Z}$. На сегменте $[0, \pi]$ содержатся только два нуля $x = \frac{1}{3}\pi$ и $x = \pi$. В точке $x = \pi$ производная равна нулю, но экстремума нет. Вопрос, почему в точке $x = \pi$ нет экстремума, предлагаем решить читателю самостоятельно исходя из свойств нечётности и периодичности.

Имеем таблицу

Интервал	$\left(0, \frac{1}{3}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{3}\pi, \pi\right)$
Знак y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$ (возрастает)	$\searrow$ (убывает)
Замечание	При $x = \frac{1}{3}\pi \quad \max\ y$ с горизонтальной касательной. $y_{max} = y\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}3.$ 	

6. $y'' = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x(1 + 4\cos x)$.

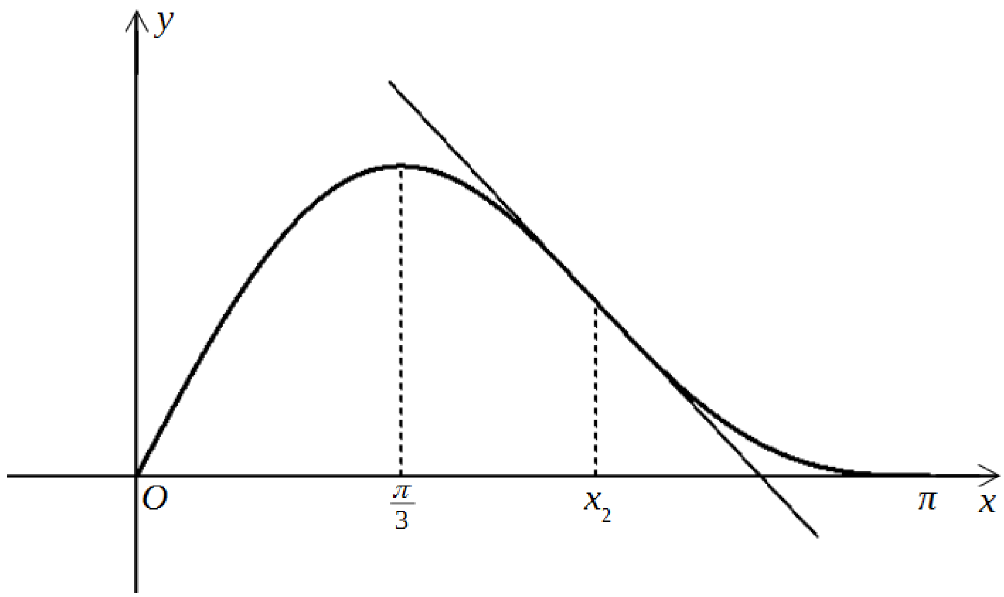
Нули y'', принадлежащие сегменту $[0, \pi]$: $x_1 = 0$, $x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1{,}82$ и $x_3 = \pi$. Составляем таблицу

Интервал	$(0, x_2)$	(x_2, π)
Знак y''	$-$	$+$
y	$\frown$ (вогнута)	$\smile$ (выпукла)
Замечание	При $x = x_2$ перегиб. $y_{пер} = y(x_2) = \sin x_2 + 0.5\sin 2x_2 \approx 0{,}73$ 	

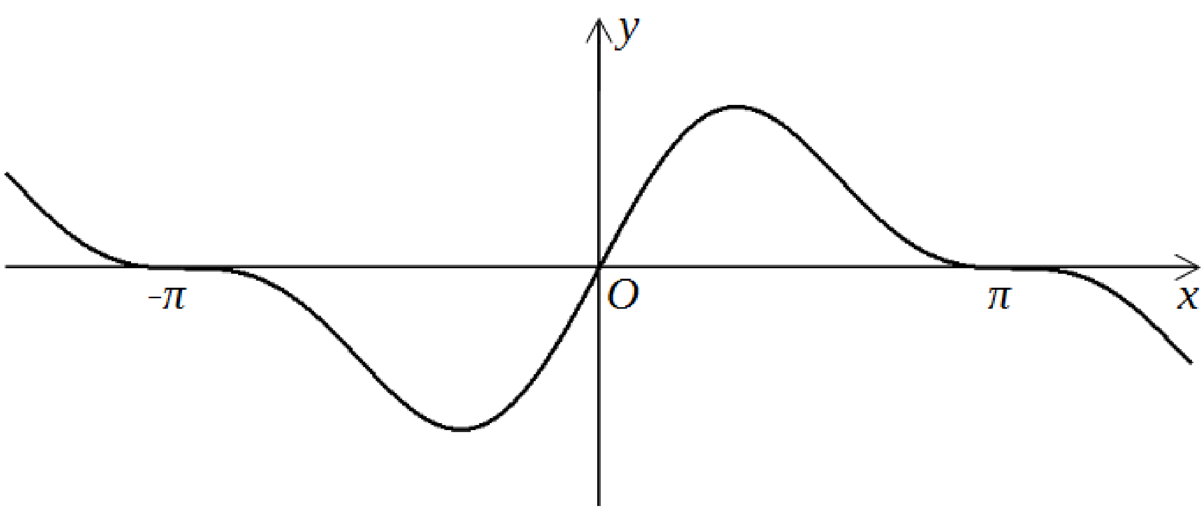
$$y'_{пер} = y'(x_2) = \cos x_2 + \cos 2x_2 \approx -1{,}125,^{12}\ y'(0) = 2,\ y'(\pi) = 0.$$

Построим график сужения исходной функции на промежуток $[0, \pi]$.

[12] В точке перегиба $(x_2, y(x_2))$ угол наклона касательной к оси Ox равен $-\operatorname{arctg} y'(x_2) \approx -0{,}844$ радиана.



Используя нечетность функции, продолжим ее график на промежуток $[-\pi, 0)$:



Эта часть графика, соответствующая промежутку $[-\pi, \pi]$, продолжается далее на $(\pi, 3\pi]$, $(3\pi, 5\pi]$, $\ldots$, и на $[-3\pi, -\pi)$, $[-5\pi, -3\pi)$, $\ldots$.

Упражнение. Из задачника [11] решите примеры №№ 1402 — 1412, 1430, 1434, 1438.

З А Д А Н И Е 2. (Часть 2.)

номер варианта	По полной схеме исследовать функции и построить их графики.
1.	1) $y=\dfrac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$, 2) $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$, 3) $y=2x+3x^{\frac{2}{3}}$.
2.	1) $y=5\dfrac{\ln x+2}{\sqrt{x}}$, 2) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$, 3) $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.
3.	1) $y=4\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$, 2) $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$, 3) $y=x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$.
4.	1) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{8}{(3-x)^2}$, 2) $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$, 3) $y=x+e^{-x}$.
5.	1) $y=x^2e^{2x}$, 2) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, 3) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.
6.	1) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, 2) $y=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3) $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.
7.	1) $y=\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$, 2) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, 3) $y=\sqrt[3]{(x+6)x^2}$.
8.	1) $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$, 2) $y=x\ln^2 x$, 3) $y=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$.
9.	1) $y=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$, 2) $y=\dfrac{x^3}{27}(x+5)^2$, 3) $y=3\sqrt[3]{\cos 2x}$.

номер варианта	По полной схеме исследовать функции и построить их графики.
10.	1) $y=\dfrac{3(x-1)^4+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, 2) $y=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$, 3) $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.
11.	1) $y=\dfrac{\ln x+3}{10x^2}$, 2) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$, 3) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2(x-3)^2}$.
12.	1) $y=\dfrac{x^2-10x+16}{x^2}$, 2) $y=x-\mathrm{arctg}\ x$, 3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}e^{-x}$.
13.	1) $y=\dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$, 2) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos 3x$, 3) $y=2x+3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
14.	1) $y=5\dfrac{\ln x+1}{\sqrt{x}}$, 2) $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$, 3) $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$.
15.	1) $y=4\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$, 2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3) $y=\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.
16.	1) $y=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$, 2) $y=e^x-x$, 3) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{27}{(2-x)^2}$.
17.	1) $y=10x^2e^{-2x}$, 2) $y=\sqrt[3]{x^2+6x+8)^2}$, 3) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.
18.	1) $y=\dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)^2}$, 2) $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 3) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+3)^2}$.

номер варианта	По полной схеме исследовать функции и построить их графики.
19.	1) $y = x\,e^{-\frac{1}{x-2}}$, 2) $y = \dfrac{(x+1)^3}{2(x+2)^2}$, 3) $y = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.
20.	1) $y = \dfrac{(x+1)^4}{(x+2)^3}$, 2) $y = 1 - x\ln^2 x$, 3) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^2}$.
21.	1) $y = (1-x)e^{-\frac{1}{x+1}}$, 2) $y = -\dfrac{x^3}{27}(x+5)^2$, 3) $y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x + 2$.
22.	1) $y = \dfrac{3(x+1)^4 - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$, 2) $y = \dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$, 3) $y = (x+4)\sqrt[3]{(1-x)^2}$.
23.	1) $y = \dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$, 2) $y = \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$, 3) $y = \sqrt[3]{x^2}e^{x+1}$.
24.	1) $y = \dfrac{x^2 - 8x - 25}{(x+1)^2}$, 2) $y = e^{\frac{1}{4-x^2}}$, 3) $y = \sqrt[3]{x^2}e^{1-x}$.
25.	1) $y = \dfrac{(x+3)^2}{x+2}$, 2) $y = \sqrt[3]{x^2}e^{2+x}$, 3) $y = \sqrt[3]{\sin x + \cos x}$.

4. *МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.*

1. Вычисление определителей.

Определитель (детерминант) порядка n обозначается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ или}$$

$$\Delta = \det A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — квадратная матрица}$$

порядка n.

a_{ij} [13] называются элементами определителя Δ (матрицы A) соответственно.

В записи определителя (матрицы) элементы a_{ij} располагаются рядами. Горизонтальные ряды называются строками, вертикальные — столбцами. Строки нумеруются сверху вниз, столбцы — слева направо. Таким образом, в записи a_{ij} индекс i означает номер строки, j — номер столбца, на пересечении которых находится a_{ij}.

Определение [7,8].

$$\text{Определителем (детерминантом) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ матрицы } A$$

называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца и снабженных знаками “плюс” или “минус” по

[13] Читается “aij”.

следующему правилу: слагаемое $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ в выражении определителя снабжается знаком “плюс”, если перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ вторых индексов (при условии, что первые индексы расположены в порядке возрастания $(1, 2, \dots, n)$) четная, и “минус”, если нечетная.

Перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ называется четной, если число инверсий $[j_1, j_2, \dots, j_n]$ в ней четное, и нечетной, если число инверсий нечетное.

Инверсией (беспорядком) в перестановке $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ называется такое расположение индексов, при котором старший индекс расположен левее младшего. Например, в перестановке $(3, 2, 1, 4)$ чисел $1, 2, 3, 4$ — три инверсии: число 3 расположено левее чисел 1 и 2 (две инверсии), число 2 расположено левее 1 (одна инверсия). Таким образом, $[3, 2, 1, 4] = 3$.

Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1, j_2, \dots, j_n]} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}. \qquad (*)$$

Число слагаемых в правой части равенства (*) равно $n!$ (числу перестановок вторых индексов в произведении $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$).

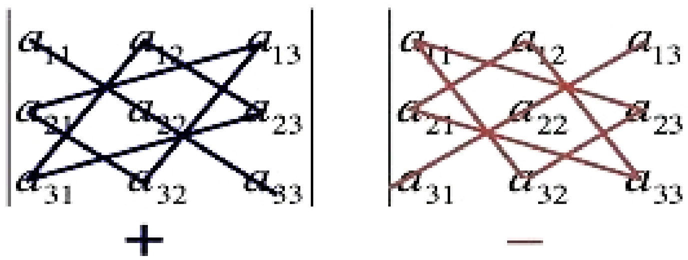
В соответствии с определением детерминанта определители 2-го порядка вычисляют по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определители 3-го порядка подсчитывают по схеме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - $$
$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для облегчения запоминания последнего выражения можно использовать правило Саррюса [14](правило треугольников):



Главной диагональю определителя называется диагональ, идущая из левого верхнего угла в записи определителя в правый нижний угол, побочной диагональю —диагональ, соединяющая правый верхний угол с левым нижним.

Со знаком "плюс" в выражении определителя берутся произведения элементов, находящихся на главной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали.

Со знаком "минус" — произведения элементов, находящихся на побочной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников, одна из сторон которых параллельна побочной диагонали.

ПРИМЕР.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 1 + (-5)\cdot(-2)\cdot(-2) -$$

$$-(-5)\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-2) = -20 + 15 + 4 = -1.$$

Определители более высокого порядка находят, используя их основные свойства, в частности:

а) Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

б) К любой строке определителя можно прибавить любую другую строку того же определителя, умноженную на какое-либо число.[15]

[14]Саррю́с, Пьер Фредери́к (1798–1861) — французский ученый - математик.

[15]Строки и столбцы определителя рассматриваются как векторы. Следует отметить, что строки и столбцы "равноправны", т.е. если какое-нибудь свойство имеет место для строк, то

При этом определитель сохраняет свое значение.

в) Имеет место разложение определителя по элементам i-й строки

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

j–го столбца

$$det\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в $det\,A$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} — дополнительный минор, соответствующий a_{ij}, — определитель порядка $(n-1)$, полученный из $det\,A$ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

г) Определитель с двумя одинаковыми строками (двумя одинаковыми столбцами) равен нулю.

При практическом вычислении определителя стремятся с помощью свойства б) получить как можно больше нулей в какой-нибудь строке (или в каком-нибудь столбце), а затем разложить полученный определитель по элементам этой строки (этого столбца).

ПРИМЕР.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -20 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & 15 \end{vmatrix}$.

Вынесем из последнего столбца общий множитель 5:

оно справедливо и для столбцов и наоборот.

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко 2-му столбцу 1-й, умноженный на -2, к 3-му — 1-й. Будем иметь

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по элементам 1-й строки:

$$\Delta = 5 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к 1-й строке 2-ю, умноженную на 2, затем ко 2-й строке прибавим 3-ю, также умноженную на 2:

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим теперь этот определитель по элементам 1-го столбца:

$$\Delta = 5 \cdot (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot (1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-8)) = 45.$$

2. *Основные действия с матрицами.*

Основные действия с матрицами — это сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, нахождение обратной матрицы.

При сложении матриц [16] складываются все их соответствующие элементы, т.е. элементы, находящиеся в одних и тех же строках и в одних и тех же столбцах. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Краткости ради это будем в дальнейшем записывать так: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$. По определению $A + B =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Аналогично, $A - B =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

При умножении матрицы на число на это число умножается каждый элемент матрицы:[17]

$$\alpha\cdot A = (\alpha\cdot a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \cdots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \cdots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \cdots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}, \ \alpha \text{ — число.}$$

[16]Складываемые матрицы должны иметь одинаковые размеры, т.е. у них должно быть одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

[17]Не путать с умножением определителя на число: на это число умножается лишь одна строка (или лишь один столбец) определителя.

ПРИМЕР.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Найти } 3A - B.$$

$$3A - B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \quad - 0 & 3 \cdot 2 - (-1) & 3 \cdot (-3) - 2 \\ 3 \cdot (-2) - 3 & 3 \cdot 4 - 2 & 3 \cdot 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 \\ -9 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

При умножении матриц вектор-строка левого множителя умножается скалярно на вектор-столбец правого множителя:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{m \times p}, \quad \text{где}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$ [18]

ПРИМЕР. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

---

[18] Элемент c_{ij} матрицы-произведения равен скалярному произведению i-й строки левой матрицы-множителя и j-го столбца правого множителя.

Обратной матрицей для квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ порядка n называется матрица A^{-1} такая, что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где $E = (\delta_{ij})_{n\times n}$ — единичная матрица, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i \end{cases}$ — символ Кронекера.[19]

Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы — ее неособенность ($det\,A \neq 0$).

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{det\,A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $det\,A$. Буквой T, помещенной справа над матрицей или вектором будем обозначать результат транспонирования.

ПРИМЕР. Найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

[19] Леопо́льд Кро́некер (1823–1891) — немецкий математик, член Берлинской АН.

Используем формулу (18). Вычисляем $det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$.

Прибавим ко 2-му столбцу 1-й:

$det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$. Прибавим к последней строке предпоследнюю, умноженную на 2: $det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Затем разложим этот определитель по элементам 2-го столбца:

$det\, A = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

Далее,

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -1, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 1, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 7, A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4,$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4, A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2.$

Итак, $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Замечание. Ниже для нахождения обратной матрицы будет использован метод Гаусса.[20]

[20]Карл Фри́дрих Га́усс (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, астроном, физик и геодезист.

3. *Собственные числа и собственные векторы матриц.*
Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — квадратная матрица порядка n.

Ненулевой вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ [21] называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному (характеристическому) числу λ этой матрицы, если имеет место равенство

$$AX = \lambda X \tag{19}$$

Для отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы, соответствующих этим числам, преобразуем уравнение (19):

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)\, X = \overline{0}, \quad \text{где } \ \overline{0} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})^T$$

есть нулевой вектор-столбец.

Последнее уравнение в координатной форме записывается в виде однородной системы n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \cdots & & \ldots\ldots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0. \end{cases} \tag{20}$$

Как хорошо известно (например, [7, 8]), однородная система линейных алгебраических уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда определитель системы равен нулю. Поэтому

$$det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Левая часть равенства (21) является многочленом степени n относительно λ и называется характеристическим многочленом. Корни

[21] Транспонирование означает, что рассматриваемый вектор X есть вектор-столбец.

характеристического многочлена и являются характеристическими (собственными) числами матрицы A. Множество всех собственных чисел матрицы образует ее спектр.

При практическом отыскании собственных чисел и собственных векторов матрицы:

а)находят все решения уравнения (21), т.е. спектр матрицы;

б)для каждого собственного числа λ решают систему (20).

ПРИМЕР. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Записываем и раскрываем характеристический определитель:

$$det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -6+2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -6+2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -6+2\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((5-\lambda)(2-$$

$$-\lambda) - 6 + 2\lambda) - 6 + 2\lambda + 5 - \lambda = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + \lambda - 1 =$$

$$= (\lambda - 1)\left(1 - (\lambda - 4)^2\right) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5).$$

Итак, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ — характеристические числа матрицы A.

Найдем теперь собственные векторы, соответствующие этим собственным числам.

1. $\lambda = \lambda_1$. Обозначим $X^{(1)} = (x_1, x_2, x_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_1. Запишем соответствующую систему (3) в матричном виде:
$(A - \lambda_1 E) \cdot X^{(1)} = (0, 0, 0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_1 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$ решение которой $x_1 = x_2 = x_3 = c$,

где c — произвольное число, не равное нулю. Итак, $X^{(1)} = c{\cdot}(1,1,1)^T$.

2. $\lambda = \lambda_2$. Обозначим $X^{(2)} = (t_1, t_2, t_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_2. Система (3) в матричном виде для рассматриваемого случая:
$(A - \lambda_2 E) \cdot X^{(2)} = (0,0,0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_2 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 - t_3 = 0, \\ -t_1 - t_3 = 0, \end{cases}$$ решение которой имеет вид

$$\begin{cases} t_2 = t_1, \\ t_3 = -t_1 \end{cases}$$, где $t_1 = c$, c — произвольное число, не равное нулю.

Т.о., $X^{(2)} = c \cdot (1,1,-1)^T$.

3. $\lambda = \lambda_3$. Обозначим $X^{(3)} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_2. Система (3) в матричном виде для рассматриваемого случая:
$(A - \lambda_3 E) \cdot X^{(3)} = (0, 0, 0)^T$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_3 & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda_3 & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 - 2u_2 - 3u_3 = 0, \end{cases}$$, решение которой имеет вид

$$\begin{cases} u_2 = -u_1, \\ u_3 = u_1 \end{cases}$$, где $u_1 = c$, c — произвольное число, не равное нулю.

Т.о., $X^{(3)} = c \cdot (1, -1, 1)^T$.

4. *Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.*

Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных. Пусть система содержит n неизвестных. Используя элементарные преобразования, [22] исключают одно из неизвестных из всех уравнений системы, кроме одного. В полученной системе с $(n-1)$ неизвестным снова исключают одно из неизвестных и т.д. В конце концов приходят к системе с треугольной (или трапециевидной) матрицей, эквивалентной исходной системе. В этом, как говорят, состоит пря-

[22] Элементарные преобразования систем уравнений — это: а) умножение обеих частей какого-нибудь уравнения системы на отличное от нуля число, б) прибавление к какому-либо уравнению системы другого уравнения той же системы, умноженного на какое-нибудь число (при этом, естественно, умножаются обе части уравнения, складываются левые и правые части уравнений соответственно), в) перестановка местами каких-либо уравнений системы. Элементарные преобразования систем приводят к эквивалентным системам.

мой ход метода Гаусса. Обратным ходом называют решение системы, полученной в результате прямого хода.

Замечание. При решении систем линейных алгебраических уравнений вместо самой системы удобно записывать расширенную матрицу системы [23] и соответствующие элементарные преобразования выполнять со строками этой матрицы.

ПРИМЕР 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1, \\ x - y + z = -1, \\ 2x - y - z = 2, \\ x + 2y - 2z = 5. \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы —

$$A_{\text{р}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right).$$ Переставим местами 1-ю и 2-ю строки:

[23] Матрицей системы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,\quad x_1, x_2, \cdots, x_n$ — неизвестные, называется матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, расширенной матрицей системы — $A_{\text{р}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

$$A_{\text{р}} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{и прибавим к последней:}]{\substack{\text{1-ю строку умножим на } (-2) \\ \text{и прибавим ко 2-й и 3-й,} \\ \text{1-ю строку умножим на } (-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(т.е. умножим на } \frac{1}{3}\text{):}]{\substack{\text{Последнюю строку} \\ \text{разделим на 3}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{и последнюю строки:}]{\text{Переставим 2-ю}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad (**) \qquad \xrightarrow[\text{и прибавим к предпоследней:}]{\substack{\text{2-ю строку умножим на } (-5) \\ \text{и прибавим к последней,} \\ \text{2-ю строку умножим на } (-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{Предпоследнюю строку} \\ \text{разделим на } (-2), \\ \text{последнюю — на 7:}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом пришли к системе с двумя одинаковыми уравнениями

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ \quad\;\; y - z = 2, \\ \qquad\quad\; z = -1, \\ \qquad\quad\; z = -1. \end{cases}.$$

Отбрасываем последнее уравнение и получаем систему

$$\begin{cases} x - y + z = -1, \\ \quad\;\; y - z = 2, \\ \qquad\quad\; z = -1. \end{cases}$$

На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса. Обратный ход — решение последней системы. Значение z уже известно из последнего уравнения. Из предпоследнего находим $y = 1$, из 1-го — $x = 1$.

Решение исходной системы имеет следующий вид: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = -1. \end{cases}$

Отметим, что имеется много разновидностей метода Гаусса (без обратного хода, с выбором главного элемента по столбцу, по всей матрице, компактный метод Гаусса и др., см., например, [9,10]).

При использовании метода Гаусса без обратного хода получают нули не только под главной диагональю матриц, возникающих из расширенной матрицы системы с помощью элементарных преобразований, но и над главной диагональю.

Так в рассматриваемом примере, исходя из системы, определяемой матрицей (**), можно исключить неизвестное y не только из 3-го и 4-го уравнений, но и из 1-го, неизвестное z не только из 4-го, но и из 1-го и 2-го:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{2-ю строку прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на } (-1) \\ \text{и прибавим к предпоследней,} \\ \text{умножим на } (-5) \\ \text{и прибавим к последней:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Как и выше, получаем}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{3-ю строку прибавим ко 2-й,} \\ \text{умножим на } (-1) \\ \text{и прибавим к последней:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Искомое решение расположено справа от вертикальной черты.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1-ю строку умножим на } (-2) \\ \text{и прибавим ко 2-й ,} \\ \text{умножим на } (-3) \\ \text{и прибавим к последней:}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2-ю строку умножим на } (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{3-ю строку прибавим к 1-й,} \\ \text{2-ю строку умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 3-й:}}}$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{3-ю строку разделим на 2:}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{Последнюю строку умножим на } -6 \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на 3} \\ \text{и прибавим ко 2-й:}}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right).
$$

Таким образом пришли к системе $\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -2 - 13x_4, \\ \qquad x_2 \qquad = \frac{3}{2} + 9x_4, \\ \qquad\qquad x_3 = \frac{1}{2} + 2x_4, \end{cases}$

решение которой записывается в виде $\begin{cases} x_1 = -2 - 13t, \\ x_2 = \frac{3}{2} + 9t, \\ x_3 = \frac{1}{2} + 2t, \\ x_4 = t, \end{cases}$ t — произвольное число.

5. *Использование метода Гаусса для отыскания элементов обратной матрицы.*

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно использовать и для нахождения элементов обратной матрицы. Пусть имеется квадратная неособенная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ порядка n. Обозначим $A^{-1} = (x_{ij})_{n\times n}$.

По определению $A \cdot A^{-1} = E$, где E— единичная матрица порядка n, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $X^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})^T$ — j–й столбец матрицы A^{-1}, $E^{(j)} = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})^T$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для нахождения всех элементов обратной матрицы нужно решить n систем линейных алгебраических уравнений $A \cdot X^{(j)} = E^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ с одной и той же матрицей системы A. Эти системы можно решать методом Гаусса параллельно, т.е. элементарные преобразования над строками производить, исходя из следующего аналога расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

В качестве примера с помощью метода Гаусса без обратного хода найдем обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{Ко 2-й строке прибавим 1-ю,} \\ \text{К 3-й, умноженной на 2, прибавим} \\ \text{1-ю, умноженную на } -3\text{:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{2-ю строку умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на 4 и прибавим к 3-й:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{3-ю строку умножим на } -1 \\ \text{и прибавим к 1-й,} \\ \text{умножим на } -2 \text{ и прибавим ко 2-й:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{1-ю строку разделим на } -2\text{,} \\ \text{2-ю умножим на } -1\text{:}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right), \text{ откуда } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример был решен выше другим способом.

Упражнение. Из задачника [12] решите примеры №№ 274, 278, 287 — 289, 293 — 303, 410 — 412, 444, 465, 468, 470, 452.

ЗАДАНИЕ 3.

В каждом варианте:

1) Вычислить определитель.

2) Найти $3AB-2C$. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ — общая для всех вариантов.

3) Для матрицы A найти обратную A^{-1} и проверить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

4) Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

5) С помощью метода Гаусса решить системы.

6) Методом Гаусса найти обратную матрицу для матрицы A пункта 3).

ВАРИАНТ 1.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -12 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4, \\ x - 7y + 3z = -2, \\ 3x + 5y + 4z = -1, \\ 8x - 15y + z = 7. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y + z - 3u = 1, \\ x - 4y + 3z + 4u = 0, \\ 3x - y + 2z - u = 0. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 2.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & -5 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -15 & 2 \\ 12 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x + 7y - 4z = 10, \\ x - 5y + 3z = -7, \\ 10x - y + 2z = 0, \\ 7x + 3y + z = 7. \end{cases}$, $\begin{cases} 5x + y - z + 3u = 2, \\ x + 2y - z - 7u = 1, \\ 2x - y + 4z + u = 0. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 3.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & -5 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 4 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 1, \\ x + 5y - 15z = 4, \\ 13x + 4y + 6z = -9, \\ 3x - 2y + 5z = -5. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - 3z + u = 1, \\ x + 5y + z - 2u = 0, \\ 3x - y + 2z + 3u = -5. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 4.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ -2 & -3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 10 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 25 & -2 \\ 7 & 13 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 1, \\ x + 8y - 2z = -3, \\ 2x + 15y + 3z = 1, \\ 4x - 7y + 4z = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y + z + 3u = 2, \\ x + 2y + z + u = 3, \\ 5x + 5y - 2z + 6u = 11. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 5.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 13 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 11x + 3y + 4z = 1, \\ 2x + y - 4z = -5, \\ 12x - 3y + z = 4, \\ x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - 3z + u = 1, \\ x - 2y + 2z - 3u = 2, \\ 4x - 3y + z - 5u = 5. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 6.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 14 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 8x + 2y - z = 4, \\ x + 4y + z = 2, \\ 15x + 7y - 2z = 11, \\ 12x - 4y + z = -6. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + 3y - z + 2u = 5, \\ x + 2y + 3z - u = 1, \\ 5x + 9y + 8z - u = -8. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 7.

1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ -3 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 8y+ & z= & 3, \\ x- & 15y- & 2z= & 4, \\ 3x+ & 7y- & 4z= & 10, \\ 4x+ & 9y+ & 3z= & 5. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 3y+ & 2z- & u= & 4, \\ 2x+ & y- & z+ & 3u= & 6, \\ 4x- & 5y+ & 3z+ & u= & 14. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 8.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 2 & 4 \\ 14 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 6x- & 2y+ & 3z= & -8, \\ x+ & 5y+ & z= & 3, \\ 4x+ & y- & 2z= & 5, \\ 18x+ & y+ & z= & -1. \end{cases}$, $\begin{cases} x+ & 2y- & z+ & 3u= & 2, \\ 2x- & y+ & 3z+ & u= & 1, \\ 5x- & 5y & + & 10u= & 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 9.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 14 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} x + 15y + 3z = 1, \\ 4x - 11y + 11z = 3, \\ 3x + 16y + 9z = 3, \\ 5x - 7y - 12z = -22. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x + y - 3z + 2u = 6, \\ x + 2y + 2z - 3u = -4, \\ 4x + 5y + z - 4u = 14. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 10.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -4 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 22 & -3 \\ 17 & -13 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x - 3y + 15z = 8, \\ 3x + y - 8z = 1, \\ 7x - 3y + 19z = 13, \\ x - 6y - 12z = 13. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y + z + 3u = 2, \\ x + 2y + z + u = 3, \\ 5x + 5y - 2z + 6u = 11. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 11.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -14 \\ 3 & 4 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 8y+ & 5z= & 1, \\ x- & 9y- & 4z= & 7, \\ 3x+ & 14y+ & z= & 8, \\ 2x- & 10y- & 2z= & 8. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 3y+ & z- & 8u= & 12, \\ 2x+ & y- & 3z+ & u= & 3, \\ 4x- & 5y- & z- & 15u= & 27. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 12.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & -19 \\ 13 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x+ & y+ & z= & 3, \\ x- & 10y+ & 2z= & -3, \\ 3x+ & 14y- & 3z= & 9, \\ 2x- & 8y- & z= & 4. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 3y+ & 5z- & u= & 2, \\ 2x+ & y- & 3z+ & 3u= & -3, \\ 4x- & 5y+ & 7z+ & 5u= & 1. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 13.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -4 & -4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 14 & -17 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x- & 2y+ & 12z = & 5, \\ x+ & 2y- & 8z = & -1, \\ 4x+ & y+ & 15z = & 3, \\ 8x- & 7y+ & 4z = & 15. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+ & y- & z+ & 3u = & 1, \\ x+ & 2y+ & 3z- & u = & -4, \\ 4x+ & 5y+ & 5z+ & u = & -7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 14.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ -3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 12x- & 4y- & z = & 7, \\ x+ & y+ & 6z = & 4, \\ 2x- & 3y+ & 12z = & 18, \\ 13x+ & 2y+ & z = & -3. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 2y+ & 3z- & 3u = & 15, \\ 2x+ & 3y- & z+ & 4u = & 5, \\ 5x- & 3y+ & 8z- & 5u = & 50. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 15.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -19 \\ 13 & -2 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ & 4y- & z = & 7, \\ x- & 13y+ & 2z = & -4, \\ 3x- & 17y- & 3z = & 15, \\ 5x- & 13y- & 4z = & 22. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 2y+ & 3z- & u = & -1, \\ 2x+ & 3y- & z+ & 4u = & 5, \\ 4x- & y+ & 5z+ & 2u = & 3. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 16.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 23 & -13 \\ 14 & -7 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 4x+ & 2y- & z = & 7, \\ 13x- & y- & 2z = & 4, \\ 17x- & 3y+ & 3z = & -15, \\ 13x- & 5y+ & 4z = & -22. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 4y- & 5z- & 2u = & -3, \\ 2x- & y- & 3z+ & u = & 1, \\ 3x+ & 2y- & z+ & 4u = & 5. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 17.

1) $\begin{vmatrix} -3 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -15 & 12 \\ 11 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x+ & 2y+ & 7z = & 3, \\ x+ & y+ & 8z = & 6, \\ 3x- & 2y- & z = & 3, \\ 15x- & 3y+ & 2z = & 8. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & y+ & 4z+ & u = & 1, \\ 2x+ & 3y- & 5z+ & 2u = & 5, \\ 4x+ & y+ & 3z+ & 4u = & 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 18.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & 4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 5x+ & 7y+ & z = & 4, \\ x+ & 2y- & 5z = & 5, \\ 15x- & 6y- & 3z = & 3, \\ 7x+ & 3y+ & z = & 0. \end{cases}$, $\begin{cases} x- & 2y+ & 8z+ & 3u = & 4, \\ 3x+ & y- & 2z- & u = & 15 \\ 5x- & 3y+ & 14z+ & 5u = & 23. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 19.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & -3 & -4 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 25 & -2 \\ -7 & 13 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x- \; 2y+ \; 5z = 8, \\ 3x+ \; 3y- \; 19z = -6, \\ x- \; 5y+ \; 7z = 16, \\ 5x+ \; y- \; 13z = 2. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x- \; y+ \; 3z- \; 7u = -1, \\ x+ \; 2y- \; 2z+ \; 4u = 3, \\ 5x+ \; 5y- \; 3z+ \; 5u = 8. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 20.

1) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -3 & 4 \\ 5 & 31 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ \; 10y+ \; z = 9, \\ x- \; 13y- \; 2z = 7, \\ 3x+ \; 15y+ \; 4z = 11, \\ 7x+ \; 8y+ \; 20z = 15. \end{cases}$, $\begin{cases} x- \; 2y+ \; 3z- \; u = 5, \\ 2x+ \; y- \; z+ \; 4u = -7, \\ 4x- \; 3y+ \; 5z+ \; 2u = 3. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 21.

1) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 13 & -21 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x+ \ \ y+ \ \ 4z = 1, \\ x- \ \ 2y- \ \ 12z = 2, \\ 2x- \ \ 3y+ \ \ z = -16, \\ 15x+ \ \ 8y+ \ \ 19z = 21. \end{cases}$, $\begin{cases} x+ \ \ 5y+ \ \ 2z- \ \ 3u = 5, \\ 2x- \ \ y+ \ \ 3z+ \ \ 2u = -15, \\ 5x+ \ \ 4y+ \ \ 9z- \ \ 7u = 0. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 22.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 22 & -3 \\ -4 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x+ \ \ 7y+ \ \ 2z = 8, \\ x- \ \ 15y+ \ \ 3z = 14, \\ 13x+ \ \ 14y- \ \ z = -18, \\ 3x- \ \ 9y+ \ \ 4z = 17. \end{cases}$, $\begin{cases} x- \ \ 5y+ \ \ 3z- \ \ u = 4, \\ 2x+ \ \ 3y- \ \ 4z+ \ \ 3u = -1, \\ 4x- \ \ 7y+ \ \ 2z+ \ \ u = 7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 23.

1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 27 & -12 \\ -5 & 13 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x- & 15y+ & 2z = & 5, \\ x- & 7y- & 4z = & -3, \\ 2x+ & 19y+ & 7z = & 9, \\ 4x- & 9y- & 2z = & 2. \end{cases}$, $\begin{cases} 5x+ & y- & 2z+ & u = & 1, \\ 2x+ & 3y+ & z- & 2u = & 3, \\ x+ & 4y- & z- & u = & 4. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 24.

1) $\begin{vmatrix} -4 & -4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -13 & 17 \\ -3 & 4 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 3x+ & 8y+ & z = & 2, \\ x- & 15y- & 3z = & 4, \\ 2x+ & 9y+ & 10z = & -8, \\ 4x- & 11y- & 7z = & 11. \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+ & y- & 3z- & u = & 5, \\ x- & 2y+ & 4z- & 3u = & -4, \\ 5x- & 5y+ & 9z- & 10u = & -7. \end{cases}$.

ВАРИАНТ 25.

1) $\begin{vmatrix} -6 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ -6 & -5 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}$. 2) $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 23 & -15 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -3 & -8 & -7 \\ -2 & -7 & -5 \end{pmatrix}$. 4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ -6 & 7 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4, \\ x - 5y - 6z = -3, \\ 4x - 2y - 3z = 3, \\ 3x + 4y + 2z = 9. \end{cases}$, $\begin{cases} 3x + y - 2z - 5u = 1, \\ x - 2y + 2z + 3u = 3, \\ 4x - 4y - 3z - 4u = -7. \end{cases}$.

Л и т е р а т у р а

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1969.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, Физматлит, 1999.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.1.М., Наука, 1958.
4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М., Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, ч.1., М., ГИТТЛ, 1955.
6. Рудин У. Основы математического анализа. М. Мир, 1976.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.
9. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб, издательство СПбГУ, 1998.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., Наука, 1973.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1975.
12. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. СПб, Лань, 2007.
13. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
14. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. Часть I. СПб, Специальная литература, 1997.