

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук

**УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**
(*конференция Пятницкого*)

*Материалы
XV Международной конференции*

3 – 5 июня 2020 г., Москва

Москва
ИПУ РАН
2020

УДК 681.51

ББК 32.96

У81

Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной конференции (3 – 5 июня 2020 г., Москва) / [Ред. В. Н. Тхай]. — М.: ИПУ РАН, 2020.

В научное издание включены материалы XV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Издание предназначено для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

Утверждено к печати Программным комитетом конференции

Программный комитет конференции: А.Ю. Александров, И.М. Ананьевский, А.С. Андреев, И.Н. Барабанов, С.Н. Васильев, Н.Н. Болотник, С.Н. Васильев, А.А. Галяев, Ю.Ф. Голубев, А.М. Ковалев, А.П. Крищенко, А.Б. Куржанский, Ю.С. Ледяев, А.А. Мартынюк, Б.Т. Поляк, Л.Б. Рапопорт, Е.Я. Рубинович, А.А. Тихонов, В.Н. Тхай, Т.Ф. Филишова, Ф.Л. Черноусько

© Коллектив авторов, 2020

© ИПУ РАН, 2020

XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) проводится Федеральным государственным бюджетным учреждением науки Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук при поддержке Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (ОЭММПУ РАН). Конференция проводится при информационной поддержке IEEE Russia Section.

Основные научные направления XV Конференции: общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения; общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний; методы функций Ляпунова; гладкая и негладкая динамика; вопросы управляемости и наблюдаемости; проблемы робастного управления; управление в механических и электромеханических системах; управление роботами и мехатронными системами; колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах, устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.

Конференция проводится один раз в два года. Ранее конференция проходила (до 2004 г. — в формате Международного семинара): в Таллине (1987), в Москве (1992), в Самаре (1994), в Москве (1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2016, 2018).



О возможности гравитационного захвата небесных тел в Солнечной системе

Л. В. Авданина, Т. В. Сальникова, А. С. Самохин

РУДН, Москва, Россия

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

ИПУ РАН, Москва, Россия

l.avdanina@inbox.ru, tatiana.salnikova@gmail.com, samokhin@ipu.ru

В настоящей работе изучается вопрос о возможности захвата космической массы (астероида или кометы) Солнцем, если эта масса попадает в сферу действия Юпитера. Задача определения возможных зон накопления материальных тел чрезвычайно важна для безопасности космических полётов. Рассматривается возмущенная задача Кеплера в следующей постановке. Пусть космическая масса попадает в Солнечную систему с параболической относительно Солнца скоростью. Посредством компьютерного моделирования изучается возможность перехода космической массы на периодические орбиты вследствие гравитационного влияния Юпитера. В результате многочисленных экспериментов найдены области возможного скопления частиц. Предлагаемый способ исследования явления захвата может быть применен к различным объектам в рамках ограниченной задачи трех тел.

Ключевые слова: гравитационный захват, компьютерное моделирование, безопасность полётов, скопление космической массы, Солнечная система, численное моделирование, задача Кеплера

Исследование заключается в изучении вопроса формирования Солнечной системы и получении знаний о населенности межпланетного пространства небесными телами. Важность и актуальность исследования подчеркивается в ряде работ [1, 2]. Попадая под влияние гравитационного поля Юпитера и его спутников, прилетающие тела из дальнего космоса (кометы, астероиды, метеоры, пылевые частицы), меняют траектории своего движения, задерживаясь на орбитах Солнца. Они способствуют, таким образом, расширению и образованию новых астероидных и пылевых скоплений в межпланетном пространстве таких космических объектов как пояс астероидов между Марсом и Юпитером, астероиды троянской группы, летающие на орбите Юпитера в областях около точек Лагранжа L_4 и L_5 , облака Кордылевского [3, 4].

В работе рассматривается плоская возмущенная задача Кеплера. Необходимо вычислить методами прямого и обратного интегрирова-

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x, \\ \dot{V}_x = -\frac{xM_s\gamma}{R_1^3} + \frac{(R\cos(\omega t) - x)M_J\gamma}{R_2^3}, \\ \dot{y} = V_y, \\ \dot{V}_y = -\frac{yM_s\gamma}{R_1^3} + \frac{(R\sin(\omega t) - y)M_J\gamma}{R_2^3}, \end{cases}$$

где x, y – проекции векторов скоростей на оси координат, рассматриваемой материальной точки; M_S – масса Солнца, M_J – масса Юпитера, R_1 – радиус-вектор от материальной точки к Солнцу, R_2 – к Юпитеру, R – расстояние от Солнца до Юпитера, γ – гравитационная постоянная.

Численным интегрированием ищутся области старта малого тела и моделируется его дальнейшее движение относительно Солнца в течение нескольких сотен лет после пертурбационного маневра у планеты. Авторами создан программно-прикладной комплекс на языке С для исследования движения и орбитальной эволюции астероидов. В программе реализован явный метод Рунге-Кутты, основанный на расчетных формулах Дормана-Принса 5(4) с автоматическим выбором шага. Задачу удалось решить, были определены области захвата. Построены графики, подтверждающие формирование скоплений малых небесных тел, характерные зоны их появления в Солнечной системе.

Список литературы

1. *Vieira Neto E., Winter O.C.* Gravitational capture of asteroids by gas drag // *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. V. 2009, Article ID 897570. 11 p. doi:10.1155/2009/897570.
2. *Araujo R.A.N., Winter O.C., Prado A.F.B.A., Vieira Martins R.* Sphere of influence and gravitational capture radius: A dynamical approach // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2008. V. 391. No. 2. P. 675–684. doi:10.1111/j.1365-2966.2008.13833.x.
3. *Salnikova T., Stepanov S.* Existence of elusive Kordylewsky cosmic dust clouds // *Acta Astronautica*. 2019. V. 163. Part A. P. 138–141. doi:10.1016/j.actaastro.2019.02.013.
4. *T. Salnikova, S. Stepanov, A. Shuvalova* Probabilistic model of the Kordylewsky dust clouds formation // *Acta Astronautica*. 2018. V. 150. P. 85–91, doi:10.1016/j.actaastro.2017.12.022.

The Possibility of Celestial Bodies Gravitational Capture in the Solar System

L. V. Avdanina, T. V. Salnikova, A. S. Samokhin

RUDN, Moscow, Russia

MSU, Moscow, Russia

ICS RAS, Moscow, Russia

`l.avdanina@inbox.ru`, `tatiana.salnikova@gmail.com`, `samokhin@ipu.ru`

In this paper, we study the possibility of capturing the cosmic mass (asteroid or comet) by the Sun, if this mass falls within the scope of Jupiter. The task of determining possible zones of material accumulation bodies is extremely important for the safety of space flights. The perturbed Kepler problem is considered in the following statement. Let the cosmic mass fall into the Solar system at a parabolic speed relative to the sSun. Using computer modeling, the possibility of the transition of cosmic mass to periodic orbits due to the gravitational influence of Jupiter was studied. As a result of numerical simulations, areas of possible particle accumulation were found. The proposed method for studying the capture phenomenon can be applied to various objects in the model of the limited three-body problem.

Управляемость и краевые задачи оптимального управления с ограничениями

С. А. Айсагалиев¹, С. С. Айсагалиева¹, И. В. Севрюгин²

НИИ ММ КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан¹

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан²

Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz, a_sofiya@mail.ru, Ilya.Sevryugin@kaznu.kz

Предлагается новый метод решения краевых задач оптимального управления с краевыми условиями из заданных множеств при наличии фазовых и интегральных ограничений, а также голономных связей для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с выпуклым функционалом. В отличие от известных методов решения задач оптимального управления разработан совершенно новый подход — принцип погружения. Принцип погружения создан на основе исследования разрешимости и построения общего решения интегрального уравнения.

Ключевые слова: оптимальное управление, краевые задачи, дифференциальные уравнения, принцип погружения

Следует отметить, что решение задачи оптимального управления с ограничениями по методу множителей Лагранжа связано с существованием седловой точки функционала Лагранжа. Имеются задачи для которых функционал Лагранжа не имеет седловую точку, однако такие задачи имеют оптимальное решение.

В данной работе предлагается один из методов устранения указанного недостатка путем построения общего решения интегрального управления следующего вида

$$(1) \quad Kw = \int_{t_0}^{t_1} K(t_*, \tau)w(\tau)d\tau = \beta, \quad t_* \in I = [t_0, t_1],$$

где $K(t_*, \tau) = K(\tau)$ — известная матрица порядка $n_1 \times m_1$ с элементами из L_2 , $t_* \in [t_0, t_1]$ — фиксированная точка, $w(\tau) \in L_2(I, R^{m_1})$ — искомая функция $\beta \in R^{n_1}$.

Задача 1. Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (1) для любых $\beta \in R^{n_1}$.

Задача 2. Найти общее решения интегрального уравнения (1) для любых $\beta \in R^{n_1}$.

Решения задач 1, 2 позволяют выделить все множества допустимых управлений для задачи управляемости и построить решение следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$(2) \quad J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t) dt \rightarrow \inf$$

при условиях

$$(3) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1],$$

с краевыми условиями

$$(4) \quad (x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1, \quad S_0 \subset R^n, \quad S_1 \subset R^n,$$

при наличии фазовых ограничений

$$(5) \quad x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n | \omega(t) \leq L(t)x \leq \varphi(t), t \in I\},$$

интегральных ограничений

$$(6) \quad g_j(u(\cdot), x_0, x_1) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1};$$

$$(7) \quad g_j(u(\cdot), x_0, x_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2},$$

а также с учетом голономных связей

$$(8) \quad \Gamma_j(x(t), t) = e_j^*(t)x(t) + r_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad t \in I,$$

и ограничений на значение управления

$$(9) \quad u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I\}.$$

Решены следующие задачи:

Задача 3. Найти необходимое и достаточное условия существования решения задачи управляемости (3) – (9).

Задача 4. Найти допустимое управление $(\bar{u}(t), \bar{x}_0, \bar{x}_1) \in U \times S_0 \times S_1$.

Задача 5. Найти оптимальное управление $(\bar{u}_0(t), \bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*) \in U \times S_0 \times S_1$.

Список литературы

1. *Айсағалиев С.А., Айсағалиев С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1993. № 4. Т. 29. С. 1475-1486.
2. *Айсағалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. 1996. № 6. Т. 32. С. 3-11.
3. *Айсағалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2012. № 6. Т. 48. С. 826-838.

Controllability and Boundary Value Problems of Optimal Control with Constraints

S. A. Aisagaliev¹, S. S. Aisagalieva¹, I. V. Sevryugin²

Research Institute Of Mathematics And Mechanics at Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan¹

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan²
Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz, a_sofiya@mail.ru, Ilya.Sevryugin@kaznu.kz

In paper proposed a new method for solving boundary value optimal control problems with boundary conditions from given sets in the presence of phase and integral constraints, as well as holonomic constraints for linear ordinary differential equations with a convex functional. In contrast to the well-known methods for solving optimal control problems, a completely new approach has been developed called “the principle of immersion”. The immersion principle is based on the study of solvability and the construction of a general solution of some integral equation.

Проблема Айзермана в теории абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем

С. А. Айсагалиев¹, А. М. Аязбаева²

НИИ ММ КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан¹

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан²

Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz, a_ayazbaeva@mail.ru

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями, на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: Неособое преобразование, абсолютная устойчивость, несобственные интегралы, проблема Айзермана, свойства решений.

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty),$$

где A, B, S — постоянные матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n$ соответственно, матрица A — гурвицева, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0, j = \overline{1, n}, \lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы $A, |x_0| < \infty, \varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)), \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

Функция

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(\sigma) &\in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m)\} \\ 0 &\leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \mu_{0i}\sigma_i^2, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad \varphi(0) = 0, \\ |\varphi(\sigma)| &\leq \varphi_*, \quad \forall \sigma, \quad \sigma \in R^m, \quad 0 < \varphi_* < \infty, \end{aligned}$$

где $\mu_0 = \operatorname{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m}) > 0$ — диагональная матрица порядка $m \times m, |\cdot|$ — евклидова норма, $\varphi_* = \operatorname{const} > 0, (*)$ — знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2). Регулируемые системы с уравнением вида $\dot{x} = A_0x + B\bar{\varphi}(\sigma), \sigma = Sx$ с неограниченной нелинейностью $\bar{\varphi}(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma), \varphi(\sigma) \in \Phi_0, h = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_m)$ сводятся к системе (1), (2), когда матрица $A = A_0 + BhS$ — гурвицева.

Для систем с ограниченными ресурсами (1), (2) получены оценки фазовых переменных и тождеств вдоль решения системы. Найдены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы и сформулированы условия абсолютной устойчивости. Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости. Основные результаты, полученные в работе, и эффективность предлагаемого метода показаны на примере.

Отметим, что проблема Айзермана не всегда имеет решение. Следовательно для решения проблемы Айзермана необходимо выделить класс многомерных регулируемых систем, путем наложения дополнительных требований к свойствам нелинейностей. Функция $\sigma(t) = Sx(t)$, $t \in [0, \infty)$ является управлением сформулированное по принципу обратной связи, а матрица S порядка $m \times n$ называется матрицей обратной связи. В докладе делается попытка решения проблем Айзермана для многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями путем выбора матрицы обратной связи S .

Предлагаемый метод основан на априорной оценке несобственных интегралов вдоль решения системы, без привлечения частотной теоремы и разрешающих уравнений А.И. Лурье и является продолжением научных исследований из [1–3]

Список литературы

1. Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. 1994. № 5. Т. 30. С. 748-757.
2. Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А. К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения. 1999. № 8. Т. 30. С. 3-11.
3. Айсагалиев С.А. Проблема Айзермана в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Математический сборник, ИМ РАН. 2018. № 6. Т. 209. С. 3-24.

Aizerman's Problem in the Theory of Absolute Stability of Multidimensional Controlled Systems

S. A. Aisagaliev¹, A. M. Ayazbayeva²

Research Institute Of Mathematics And Mechanics at Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan¹

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan²
Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz, a_ayazbaeva@mail.ru

A new method is proposed for studying the absolute stability of the equilibrium position of multidimensional controlled systems with limited nonlinearities, based on the estimation of improper integrals along the solution of the system. A class of multidimensional nonlinear controlled systems is identified for which the Iserman problem has a solution. For this class of controlled systems, the necessary and sufficient conditions for absolute stability are obtained.

УДК 531.36

Построение функционалов Ляпунова–Красовского для нелинейных механических систем с запаздыванием

А. Ю. Александров

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
a.u.aleksandrov@spbu.ru

Для некоторых классов нелинейных механических систем с запаздыванием предложены новые конструкции функционалов Ляпунова–Красовского. С помощью этих функционалов получены условия устойчивости положений равновесия и оценки времени переходных процессов, а также условия устойчивости для соответствующих систем с переключающимися силовыми полями.

Ключевые слова: механическая система, запаздывание, асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова–Красовского

1. Введение

Во многих прикладных задачах действующие на механическую систему силы зависят не только от текущих значений координат и скоростей, но и от предыстории процесса [1, 2]. Математические модели

таких систем могут описываться дифференциально-разностными уравнениями запаздывающего типа. При этом важной проблемой является исследование влияния запаздывания на устойчивость решений [1]. В широком классе случаев величина запаздывания может быть неизвестна. Поэтому с практической точки зрения весьма актуальна задача нахождения условий, гарантирующих устойчивость программных режимов при любых значениях запаздывания.

В настоящей работе исследуются нелинейные механические системы, находящиеся под воздействием однородных диссипативных и потенциальных сил. Предполагается, что потенциальные силы содержат постоянные запаздывания. Предлагаются специальные конструкции функционалов Ляпунова–Красовского, с помощью которых выводятся условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость положений равновесия рассматриваемых систем при любых значениях запаздывания.

2. Основной результат

Пусть уравнения движения механической системы имеют вид

$$(1) \quad \ddot{q}(t) + \frac{\partial W(\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Pi_1(q(t))}{\partial q} + \frac{\partial \Pi_2(q(t - \tau))}{\partial q} = 0.$$

Здесь $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — n -мерные векторы обобщенных координат и скоростей соответственно; $W(\dot{q})$ — непрерывно дифференцируемая при $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ положительно определенная однородная порядка $\nu + 1$ функция, $\nu \geq 1$; $\Pi_1(q)$ и $\Pi_2(q)$ — непрерывно дифференцируемые при $q \in \mathbb{R}^n$ однородные порядка $\mu + 1$ функции, $\mu > 1$; τ — постоянное неотрицательное запаздывание. Таким образом, диссипативные силы могут быть как линейными, так и нелинейными, а потенциальные силы существенно нелинейны.

У системы (1) существует положение равновесия

$$(2) \quad q = \dot{q} = 0.$$

Исследуем условия устойчивости этого положения равновесия.

Чтобы получить требуемые условия, для системы (1) на основе подходов, разработанных в [3–5], предлагаются новые способы построения функционалов Ляпунова–Красовского полного типа. Заметим, что для случаев систем с линейными и нелинейными диссипативными силами применяются разные конструкции этих функционалов.

С использованием построенных функционалов доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $\Pi_1(q) + \Pi_2(q)$ положительно определена, и выполнено неравенство $\nu < (3\mu - 1)/(\mu + 1)$. Тогда положение равновесия (2) системы (1) асимптотически устойчиво при любом неотрицательном значении запаздывания τ .

Далее показывается, что с помощью указанных функционалов можно не только получить условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость при любых значениях запаздывания, но и оценить время переходных процессов, а также исследовать устойчивость соответствующих гибридных систем с переключающимися силовыми полями и определить классы законов переключения, для которых сохраняется асимптотическая устойчивость положений равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00146а).

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
3. Александров А.Ю. Об устойчивости равновесия нестационарных систем // ПММ. 1996. Т. 60. № 2. С. 205–209.
4. Александров А.Ю., Косов А.А. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 13–23.
5. Александров А.Ю., Жабко А.П., Печерский В.С. Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Сб. тр. VIII межд. научн. конф. «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. С. 5–8.

Construction of Lyapunov–Krasovskii Functionals for Nonlinear Mechanical Systems with Delay

A. Yu. Aleksandrov

Saint Petersburg State University, Russia
a.u.aleksandrov@spbu.ru

New constructions of Lyapunov–Krasovskii functionals are proposed for certain classes of nonlinear mechanical systems with delay. With the aid of these functionals, stability conditions of equilibrium positions and estimates of transient times, as well as stability conditions for corresponding systems with switching force fields are obtained.

**О применении метода усреднения
в задаче о лоренцевой стабилизации ИСЗ
на слабонаклонной орбите**

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
a.u.aleksandrov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

Решается задача лоренцевой стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат на орбите малого наклона в условиях возмущающего гравитационного момента. Для решения этой задачи, отличающейся неполным управлением, развивается прием усреднения дифференциальных уравнений. Используется оригинальная конструкция нестационарной функции Ляпунова.

Ключевые слова: спутник, стабилизация, функция Ляпунова, метод усреднения

1. Введение

Для решения актуальной проблемы угловой ориентации ИСЗ могут использоваться силы различной природы. В частности, электродинамический эффект, вызванный лоренцевым взаимодействием заряженного ИСЗ с геомагнитным полем, рассматривается с 1988 г. как основа для специального класса систем управления ориентацией ИСЗ [1]. Управляемый лоренцев момент, действующий на заряженный ИСЗ или эквивалентный ему с механической точки зрения ИСЗ с двойным электростатическим слоем, может быть довольно большим и может успешно использоваться в качестве восстанавливающего момента в окрестности положения относительного равновесия ИСЗ [2], особенно для угловой стабилизации больших экранированных космических аппаратов. Применение управляемого лоренцева момента не требует перемещения каких-либо массивных тел и не требует никакого расхода рабочего вещества. Эти качества делают лоренцев момент похожим на момент магнитного взаимодействия, который широко используется для стабилизации углового положения ИСЗ. В некоторых случаях лоренцева система управления ориентацией ИСЗ имеет ряд преимуществ по сравнению с магнитной системой управления (МСУ) [3], в частности, — в

тех случаях, когда элементы МСУ, создающие сильные магнитные поля на борту ИСЗ, являются нежелательными.

Возможность угловой стабилизации ИСЗ с использованием управляющего лоренцева момента исследовалась в [3] на основе метода усреднения. Однако из-за определенных трудностей в применении метода усреднения авторам пришлось наложить жесткие ограничения на моменты инерции спутника (рассматривался ИСЗ с равными моментами инерции). К тому же, полученные условия на параметры управления не вполне конструктивны. В данной работе, следуя той же идее, которая использовалась в [3], развивается техника усреднения для задачи трехосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат с использованием лоренцевой системы управления.

2. Основной результат

Рассматривается ИСЗ с лоренцевой системой угловой стабилизации на орбите малого наклона. Наклонение орбиты ИСЗ по отношению к геомагнитному экватору, являющееся первой существенной особенностью задачи, приводит к квазипериодическим функциям времени в индукции геомагнитного поля и, как следствие, к нестационарным возмущениям в дифференциальных уравнениях движения. Решается задача стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента, что составляет вторую существенную особенность. Кроме того, поставленная задача отличается неполным управлением — в этом ее третья особенность.

При построении математической модели, описывающей динамику механической системы, ограничиваются учетом основных действующих сил и моментов, относя все остальные силы и моменты к категории возмущающих. В некоторых случаях структура возмущающих сил и моментов известна, и их влияние может быть учтено с использованием теории возмущений. Методы теории возмущений широко и успешно используются в задачах динамики ИСЗ. Наибольшие трудности возникают при анализе динамики систем с нестационарными возмущениями. В этих случаях эффективным инструментом исследования влияния возмущений на устойчивость является метод усреднения. Однако, применение этого метода хорошо разработано только для случаев быстро изменяющихся нестационарностей.

В статье [4] предложен оригинальный подход к построению функций Ляпунова, с помощью которого найдены новые достаточные условия асимптотической устойчивости для нелинейных нестационарных дифференциальных систем на базе усредненных уравнений, но без

предположения о том, что правые части дифференциальных систем являются быстро изменяющимися функциями времени. Применение этого подхода к данной задаче позволяет получать конкретные оценки параметров управления, обеспечивающих решение проблемы лоренцевой стабилизации ИСЗ.

3. Заключение

Предложено оригинальное и строгое математическое обоснование, позволяющее учесть влияние возмущающего гравитационного момента на динамику вращательного движения ИСЗ. Предложено строгое математическое обоснование возможности получения оценок на параметры управления, при которых обеспечивается асимптотическая устойчивость положения равновесия ИСЗ и гарантированно решается задача угловой стабилизации ИСЗ с помощью лоренцева момента. Доказательство основано на использовании метода функций Ляпунова. При этом предложена оригинальная конструкция нестационарной функции Ляпунова, учитывающая структуру возмущающего момента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00146-а).

Список литературы

1. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame // *Acta Astronautica*. 2017. V. 139. P. 122–129.
2. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2: Вычисление момента и оценки его составляющих // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. I*. 1999. Вып. 3. № 15. С. 81–91.
3. *Giri D. K., Sinha M.* Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // *Int. J. Dyn. Contr.* 2017. V. 5. No. 3. P. 644–652.
4. *Александров А.Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // *ПММ*. 1996. Т. 60. № 2. С. 205–209.

On the Application of the Averaging Method in the Problem of Lorentz Stabilization of a Satellite on a Slightly Inclined Orbit

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Tikhonov

Saint Petersburg State University, Russia
a.u.aleksandrov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

The problem of Lorentz stabilization of a satellite in the orbital

coordinate system on an orbit of small inclination under conditions of a disturbing gravitational torque is studied. To solve this problem, which is characterized by incomplete control, the averaging technique for differential equations is developed. An original construction of a Lyapunov function is used.

УДК 517.977.56

Оптимальное управление параметрическими колебаниями гибкого трубопровода

*И. М. Алесова, Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Поточкая,
Ю. Ю. Пупышева*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

alesovaim@mail.ru, levon-lkb@yandex.ru, irinapototskaya@yandex.ru,
j poupycheva@mail.ru

Рассматриваются колебания гибкого трубопровода с протекающей жидкостью с учетом периодически пульсирующего внутреннего давления, вызванного работой нагнетательного оборудования (насосы, компрессоры). Решается задача оптимального управления объектом по критерию минимума ресурсов с дополнительными ограничениями на величину и скорость управляющего воздействия (инерционное управление). Предлагается численный метод для расчета моментов переключения ступеней кусочно-линейного управления, основанный на применении функции Лагранжа. Представлены численные примеры гашения колебаний при различном числе ступеней и различных начальных условиях.

Ключевые слова: трубопровод, параметрические колебания, оптимальное управление

1. Описание объекта управления

Уравнение движения гибкого шланга с пульсирующим давлением имеет вид [1, 2] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} v = (N - P_0 - P_1 \cos \omega t - m v^2) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + u(t),$$

где $y(s, t)$ — поперечные перемещения относительно равновесного (прямолинейного) положения; s — нормированная дуговая координата;

$m = \mu_2/\mu$ — относительная масса жидкости; $\mu = \mu_1 + \mu_2$ — суммарная погонная масса трубопровода и жидкости соответственно; $v = \text{const}$ — относительная скорость течения жидкости; $N = \text{const}$ — натяжение в стенках трубопровода; $P(s, t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ — сила давления в поперечном сечении жидкости; P_0 — статическое давление; P_1, ω — амплитуда и частота динамических воздействий; $u(t)$ — управляющее воздействие.

Для нахождения решения уравнения используется метод Бубнова–Галеркина [3]. Каждая форма колебаний описывается неоднородным уравнением Матье относительно параметра движения $T_k(t)$

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + \pi^2 k^2 (a - 2q \cos \omega t) T_k = u(t) \gamma_k,$$

где параметры $a = N - P_0 - m v$; $q = P_1/2$; $\gamma_k = \pi k/4$.

2. Задача оптимального управления и метод решения

При синтезе управления в качестве критерия оптимальности используется функционал управляющего момента (функционал «расхода»)

$$J(t) = \int_{T_l}^{T_k} |u(t)| dt \rightarrow \min,$$

где T_l, T_k — моменты начала и окончания процесса управления.

При этом учитываются ограничения на величину управляющего воздействия

$$|u(t)| \leq u_0,$$

и значение скорости управления

$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq v_0,$$

где $u_0 > 0$ — заданное граничное значение управления; $v_0 > 0$ — заданное граничное значение допустимой скорости управления.

Согласно принципу максимума Понтрягина функция скорости управления $v(t)$ имеет кусочно-постоянный вид:

$$v(t) = v_0 \text{sign}(\psi_3),$$

где ψ_3 — сопряженная функция.

В результате, функция управления $u(t)$ имеет кусочно-линейный вид с возможными участками постоянства. Допустимые формы ступеней функции управления $u(t)$ — «трапецевидная» и «треугольная».

С учетом вида управления задача оптимального управления может быть сформулирована как задача нелинейного программирования относительно моментов включения и выключения ступеней управления. Основной особенностью задачи является сепарабельность минимизируемого функционала и краевых условий относительно моментов переключения положительных и отрицательных t_j, \hat{t}_j ступеней управления.

Для расчета неизвестных моментов переключения t_j, \hat{t}_j наиболее эффективным с точки зрения вычислительной сложности является метод функций Лагранжа. Для безусловной минимизации функции Лагранжа применяется метод Ньютона.

3. Результаты

Работа алгоритма проиллюстрирована на примерах гашения колебаний при различных начальных условиях с помощью «полных» и «неполных» (момент включения управления фиксирован) ступеней управления.

4. Заключение

Решена задача синтеза оптимального инерционного управления для уравнения Матье по критерию расхода с ограничениями на величину и скорость управления на примере гашения колебаний гибкого трубопровода с протекающей жидкостью. Предложенный численный метод расчета может быть применен для синтеза программного инерционного управления механическими объектами, описываемыми линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Список литературы

1. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982.
2. *Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М.* Пространственные колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Нефтегазовое дело. Уфа: УГНТУ, 2011.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

Optimal Control of Parametric Oscillations of a Flexible Pipeline

*I. M. Alesova, L. K. Babadzhanjanz, I. Yu. Pototskaya,
Yu. Yu. Pupycheva*

Saint-Petersburg State University, Russia

alesovaim@mail.ru, levon-lkb@yandex.ru, irinapototskaya@yandex.ru,
j popycheva@mail.ru

Oscillations of a flexible pipeline with a flowing liquid are considered taking into account the periodic internal pressure caused by the discharge equipment (pumps, compressors). The problem of the optimal control of the object by the criterion of minimum resources with additional restrictions on the value and speed of the control (inertial control) is solved. The numerical method of reduction to unconditional minimization for calculation of switching moments of piecewise constant control is presented. Numerical examples of oscillation damping at different number of control stages and different initial conditions are demonstrated.

УДК 621.855

Метод Кулакова Ф.М. билатерального дистанционного управления космическими манипуляционными роботами

Г. В. Алферов, П. А. Ефимова, В. С. Королев, Д. В. Шиманчук

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

alferovgv@gmail.com, yefimovapa@gmail.com, vokorol@bk.ru,
d.shimanchuk@spbu.ru

Предлагается метод дистанционного управления космическим роботом. Он предназначен для выполнения в сложной внешней среде операций с предметами, которые могут свободно перемещаться в пространстве или ограничены голономными связями. Это характерно при выполнении сборочных операций при освоении космического пространства.

Ключевые слова: копирующее управление; дистанционное управление; адаптивное управление; устойчивость процессов управления.

1. Введение

Разрабатываемый метод Кулакова Ф.М. [1-5] билатерального дистанционного управления обеспечивает возможность дистанционного управления манипуляционными роботами, функционирующими в недетерминированной внешней среде, состоящей, в частности, из набора твердых тел, как свободно перемещаемых в пространстве, так и имеющих голономные связи, что характерно при выполнении сборочных операций. Сложность реализации метода обусловлена значительными запаздываниями в передаче управляющих сигналов от центра управления к дистанционно управляемому роботу и получении сигналов обратной связи. Особенно сложно осуществлять решение задачи управления, когда имеет место запаздывание в передаче сигналов силовой обратной связи, возникающих при выполнении операций с предметами, возможные перемещения которых ограничены связями.

2. Предлагаемый метод

Чтобы успешно выполнить такие операции при использовании традиционных методов билатерального копирующего управления, рука человека в процессе выполнения требуемой операции, должна ощущать через перемещаемую ей рукоятку, задающую положение рабочей части инструмента (схвата), обратную связь по силе его взаимодействия с предметами внешней среды и соответствующим образом реагировать на эту силу. Запаздывание существенно осложняет выполнение требуемой операции и делает это невозможным при величине запаздывания больше 0,5-0,8 сек. Предлагаемый метод существенно снижает влияние запаздывания. Это достигается тем, что сигнал обратной связи по силе замыкается не через человека, удерживающего рукоятку, а через управляющий компьютер, на котором реализована следящая система управления роботом по силовому взаимодействию. Эта система должна отслеживать текущее значение этой силы измеряемой силомоментным запястным сенсором. Программные значения силы формируются заранее в процессе обучения робота требуемому действию, с использованием билатерально управляемой модели робота, а также модели его внешней среды при отсутствии какого-либо запаздывания. Подавляющее число существующих в настоящее время методов дистанционного билатерального управления, при наличии запаздывания решает задачу управления путем совершенствования традиционных методов билатерального управления с помощью прогноза или за счет использования, так называемых, «пассивных» методов управления. Однако они не дают возможность кардинального решения задачи дистанцион-

ного управления. При их использовании допустимые запаздывания не может превышать 1,5 сек. или имеют место другие ограничения обусловленные низкой транспарентностью билатерального управления, а также ограниченной величиной создаваемой системой управления роботом силы его взаимодействия с объектами внешней среды. В соответствии с ранее сказанным, разрабатываемый метод, в отличие от традиционных on-line методов, относится к классу off-line методов, когда управление роботом формируется не сразу, а только после обучения робота требуемой операции с помощью «модельной» среды. В процессе обучения формируется сигнал управления. Его отработка осуществляется спустя некоторое время только после получения этого сигнала системой управления реального робота. При таком способе реализации дистанционного управления величина запаздывания в передаче сигналов управления не влияет на процесс выполнения роботом требуемого действия. Успешность же выполнения зависит только от точности моделей внешней среды и самого робота. В предложенном подходе предусмотрена адаптация поведения робота к возможной неточности модели внешней среды, в частности, среды достаточно распространенного типа, состоящей из набора твердых тел, как свободно перемещаемых в пространстве, так и имеющих голономные связи.

3. Заключение

В методе Кулакова Ф.М. билатерального дистанционного управления решается проблема запаздывания в передаче сигнала, что делает метод более предпочтительным. Предусмотрена адаптация поведения робота к возможной неточности достаточно широкого класса внешних сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-00419).

Список литературы

1. *Кулаков Ф.М.* Методы супервизорного телеуправления космическими роботами // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 161–181.
2. *Кулаков Ф.М., Соколов Б.В., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Дистанционное управление с адаптацией к изменениям его внешней среды // Вест. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2018. № 4 (43). С. 16–26.
3. *Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Копирующее управление удаленными роботами с задержкой в передаче сигнала // Вест. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 3(46). С. 47–55.
4. *Кулаков Ф.М., Шмыров А.С., Шиманчук Д.В.* Управление космическим роботом с использованием неустойчивой точки либрации // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2014. № 7. С. 23–28.

5. 5. *Kulakov F.M., Kadry S., Alferov G.V., Efimova P.A.* Remote Control of Space Robots Change Adaptive in its External Environment // International Journal of Online and Biomedical Engineering. 2019. V. 15. No. 7. P. 84–98.

Kulakov F.M. Method of Bilateral Remote Control of Space Manipulation Robots

G. V. Alferov, P. A. Efimova, V. S. Korolev, D. V. Shymanchuk

Saint Petersburg State University of Saint Petersburg, Russia
alferovgv@gmail.com, yefimovapa@gmail.com, vokorol@bk.ru,
d.shimanchuk@spbu.ru

A method of remote control of a space robot is proposed. It is designed to perform operations in a complex external environment with objects that can move freely in space or are limited by holonomic connections. This is typical when performing assembly operations in the exploration of outer space.

Оценивание стохастических многошаговых включений в счетных пространствах

Б. И. Ананьев

ИММ УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия

Рассматриваются многошаговые стохастические включения в произведении двух счетных фазовых пространств. Проекция состояния на одно из них считается наблюдаемым, а на другое ненаблюдаемым. Правая часть включения является мультиотображением, зависящим от предыдущего состояния и случайного элемента вероятностного пространства. Случайный переход на каждом шаге не зависит от предыдущих шагов. Рассмотрено два способа оценивания ненаблюдаемых состояний, которые основаны на разных видах формирования множества переходных вероятностей. Показано, что эти способы, вообще говоря, приводят к различным множествам условных распределений для ненаблюдаемых состояний процесса. В случае неатомического вероятностного пространства доказана теорема о совпадении рассмотренных схем фильтрации.

Ключевые слова: стохастические включения, условные распределения, фильтрация

1. Введение

В известной монографии [1] в главе 9 рассматривается задача оптимальной нелинейной фильтрации марковских процессов со счетным числом состояний. Подобная задача возникает при исследовании статистики случайных процессов, где ненаблюдаемый процесс принимает дискретные значения, а помеха в канале наблюдения носит характер «белого» гауссовского шума. В настоящем докладе исследуется близкая проблема в дискретном варианте, причем предполагается, что уравнение для ненаблюдаемой компоненты заменяется стохастическим включением. Такая ситуация возникает в случае неполной статистики переходных процессов. Результаты настоящей работы могут использоваться в задачах восстановления входных воздействий и задачах коррекции движения механических систем при наличии коммуникационных ограничений в виде неточных цифровых каналов связи.

2. Постановка задачи

Пусть не более чем счетные множества X_0, \dots, X_N обозначают ненаблюдаемые состояния, а множества Y_0, \dots, Y_N — наблюдаемые состояния. Число N — конечный горизонт. Введем декартовы произведе-

ния $Z_0 = X_0 Y_0, \dots, Z_N = X_N Y_N$. Если задано вероятное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , то пусть случайный переход из Z_{k-1} в Z_k осуществляется согласно включению

$$(1) \quad z_k \in H_k(z_{k-1}, \omega),$$

что означает отсутствие некоторых статистических данных о распределении переходной вероятности. Множество всех подмножеств из X обозначаем \mathcal{P}_X . Отображения $H_k : Z_{k-1}\Omega \rightarrow \mathcal{P}_{Z_k}$ предполагаются $\mathcal{P}_{Z_{k-1}}\mathcal{G}_k|\mathcal{P}_{Z_k}$ -измеримыми, где набор σ -алгебр $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_N \subset \mathcal{F}$ предполагается независимым в совокупности. Для всякого отображения $H : X \rightarrow \mathcal{P}_Y$ *верхний прообраз* множества B определяется как $H^*(B) = \{x \in X \mid H(x) \cap B \neq \emptyset\}$ и измеримость понимается в смысле этого прообраза. *Нижний прообраз* для H определяется как $H_*(B) = \{x \in X \mid H(x) \subset B\}$. На измеримом пространстве (Y, \mathcal{B}) с помощью отображения H , заданного на (Ω, \mathcal{F}, P) , определяются функции множества $P^*(B) = P(H^*(B))$ и $P_*(B) = P(H_*(B))$. Эти функции, вообще говоря, не являются вероятностными мерами.

Для отображения H_k из (1) рассмотрим множество *измеримых селекторов*: $S(H_k) = \{h : Z_{k-1}\Omega \rightarrow Z_k\}$, таких что отображение h $\mathcal{P}_{Z_{k-1}}\mathcal{G}_k|\mathcal{P}_{Z_k}$ -измеримо и $h(z, \omega) \in H_k(z, \omega) \forall (z, \omega) \in H_k^*(Z_k)$. Для селектора $h_k \in S(H_k)$ определяем стохастическое ядро $q_k(\cdot|z)$ (переходную вероятность) согласно формуле $q_k(D|z) = P(h_k^-(D)_z)$, $\forall D \in \mathcal{P}_{Z_k}$, $\forall z \in Z_{k-1}$, $q_0(D) = P(z_0^-(D))$, $\forall D \in \mathcal{P}_{Z_0}$, где символом U_z обозначено сечение множества, в нашем случае множества $h_k^-(D)$. Объединяя все такие ядра, введем множество

$$(2) \quad \mathcal{Q}_k = \{q_k(\cdot|z) \mid h_k \in S(H_k)\}, \quad k \in 1 : N.$$

По ядрам $q_k \in \mathcal{Q}_k$ обычным образом рекуррентно определяются условные распределения $\hat{q}_k(x|y^k)$, где $y^k = \{y_0, \dots, y_k\}$. Такие условные распределения образуют множество $\hat{\mathcal{Q}}_k$. Построение данного множества назовем *селекторной схемой*. Обозначим символом \mathbf{P}_k набор всевозможных ядер $q(\cdot|z_{k-1})$ на Z_k при условии Z_{k-1} . Определим верхнюю вероятность $P_k^{*z}(D) = P(H_k^*(D)_z)$ в зависимости от $z \in Z_{k-1}$ и введем множество

$$(3) \quad \mathcal{M}_k = \{q \in \mathbf{P}_k \mid q(D|z) \leq P_k^{*z}(D) \quad \forall D \in \mathcal{P}_{Z_k} \quad \forall z \in Z_{k-1}\}.$$

С помощью ядер из (3) сформируем множество условных распределений \mathcal{M}_k . Построение такого множества назовем схемой с *верхней*

вероятностью. Имеем включения $\mathcal{Q}_k \subset \mathcal{M}_k$ и $\hat{\mathcal{Q}}_k \subset \hat{\mathcal{M}}_k$. Построение множества (3) несколько проще. Рассмотрим также совокупность \mathcal{M}_k^z вероятностных мер, удовлетворяющих неравенству в (3) для всех $D \in \mathcal{P}_{Z_k}$ при фиксированном $z \in Z_{k-1}$. Множества \mathcal{M}_k и \mathcal{M}_k^z выпуклы и иногда компактны. Нас интересует вопрос о совпадении множеств (2), (3) и соответствующих схем фильтрации.

3. Основной результат

Как показывают примеры в [2], множества (2), (3) могут существенно отличаться. Однако в силу счетности рассматриваемых фазовых пространств и при дополнительном условии неатомичности вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) селекторная и с верхней вероятностью схемы фильтрации совпадают. Множество $A \in \mathcal{F}$ называется атомом, если $P(A) > 0$ и для всякого $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$ справедливо равенство $P(B) = P(A)$, либо $P(B) = 0$. Вероятностное пространство, не содержащее атомов, называется *неатомическим*.

Теорема 1. Пусть фазовые пространства $Z_0 = X_0 Y_0, \dots, Z_N = X_N Y_N$ включения (1) являются счетными и вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) неатомическое. Тогда множества переходных вероятностей (2), (3) совпадают и, следовательно, совпадают селекторная и с верхней вероятностью схемы фильтрации.

Кратко поясним доказательство. Для всякого стохастического ядра $q_k(\cdot|z) \in \mathcal{M}_k$ найдется измеримое отображение h_k , такое что $q_k(D|z) = \lambda(h_k^{-1}(D)_z)$. Здесь λ — мера Лебега. Указанное отображение строится с помощью функции квантили и с учетом счетности множеств Z_k . Далее используется результат из [3], согласно которому на каждом неатомическом пространстве существует измеримое отображение $\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ с равномерным распределением. Подставив это отображение в h_k , получим композицию $h_k(z, \alpha(\omega))$, которая обладает нужными свойствами. Итак, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{M}_k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00544-а).

Список литературы

1. Ширяев А.Н., Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. Ananyev V.I. One Problem of Statistically Uncertain Estimation // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвящ. 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 16–20 сентября 2019. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. С. 375–379.

3. *Miranda E., Couso I., Gil P.* Upper probabilities and selectors of random sets, in: P. Grzegorzewski O. Hryniewicz M.A. Gil (Eds.), *Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis*, Physics-Verlag, Heidelberg, 2002, pp. 126–133.

Estimation of Stochastic Multistage Inclusions in Denumerable Sets

B. I. Ananyev

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg,
Russia

Multistage stochastic inclusions are considered in the product of two denumerable phase spaces. The state projection to one of them is considered observable, and on another not observable. The right part of the inclusion is the multimapping depending on the previous state and random element of some probability space. Random transition on each step does not depend from previous steps. Two ways of estimation of not observed states are considered, which are based on different types of forming of the set of transitional probabilities. It is shown that these ways, generally speaking, lead to various sets of conditional distributions for not observed states of process. In case of non-atomic probability spaces the theorem of coincidence of the considered schemes of filtration is proved.

УДК 531.36; 62-50

Управляемое перемещение платформы с упругими элементами

И. М. Ананьевский

ИПМех РАН, Москва, Россия
anan@ipmnet.ru

Конструируется закон ограниченного по модулю управления, позволяющий перемещать платформу с упругими элементами в заданное состояние покоя в условиях неполноты информации о фазовом состоянии системы и при наличии внешних возмущений.

Ключевые слова: линейная механическая система, система осцилляторов, синтез управления, возмущения

1. Постановка задачи

Рассматривается задача управления механической системой, представляющей собой платформу, несущую упругое звено. Упругое звено моделируется присоединенным к платформе твердым телом, к которому подвешены два линейных диссипативных осциллятора (рис. 1). Платформа движется по горизонтальной прямой под действием управляющей силы и внешнего возмущения. Предполагается, что координата и скорость платформы, а также координата несущего тела в каждый момент времени известны, тогда как фазовые переменные осцилляторов не доступны для измерений.

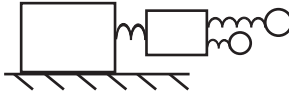


Рис. 1: Платформа с телом, несущим осцилляторы

Динамика системы подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} &= k_0(x_0 - \xi) + u + v, \\
 (1) \quad m_0\ddot{x}_0 &= -k_0(x_0 - \xi) + \sum_{i=1}^2 (k_i(x_i - x_0) + \gamma_i(\dot{x}_i - \dot{x}_0)), \\
 m_i\ddot{x}_i &= -k_i(x_i - x_0) - \gamma_i(\dot{x}_i - \dot{x}_0), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Здесь ξ , M — координата и масса платформы, x_0 , m_0 — координата и масса несущего тела, k_0 — жесткость пружины, соединяющей платформу и несущее тело, x_i — координата массы m_i , а k_i , γ_i — жесткость пружины и коэффициент диссипации i -го осциллятора, $i = 1, 2$.

На управление u и возмущение v накладываются ограничения

$$(2) \quad |u| \leq U, \quad |v| \leq \rho U, \quad 0 < \rho < 1.$$

Требуется построить управление, которое остановит платформу в заданном терминальном положении за конечное (нефиксированное) время и погасит колебания несущего тела и осцилляторов.

Рассматриваемая система служит моделью сложного технического объекта, содержащего упругие звенья, который необходимо переместить в заданное положение с помощью ограниченной силы за конечное время в условиях неполноты информации о текущем состоянии упругих звеньев.

Аналогичная задача о перемещении платформы с двумя подвешенными непосредственно к ней осцилляторами, т. е. без промежуточного несущего тела, фазовые состояния которых не измеряются, решена в [1].

2. Основной результат

Построен закон управления, удовлетворяющий ограничению (2) и, при некоторых предположениях относительно ρ , останавливающий систему (1) в заданном состоянии покоя за конечное время. Предложенное управление имеет форму обратной связи и использует лишь доступную информацию о фазовом состоянии всей системы, т. е. зависит лишь от координаты и скорости платформы и координаты несущего тела.

Для решения задачи использован подход, разработанный в [2].

Работа выполнена в рамках Программы РАН I.2.30 «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации» (AAAA-A17-117121120031-8).

Список литературы

1. *Ананьевский И. М., Ишханян Т. А.* Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019, N 1. С. 42-51.
2. *Ovseevich A.* A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // JOTA. 2015. V. 165. No. 2. P. 532-544.

Controlled Motion of a Platform with Elastic Elements

I. M. Ananievski

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
anan@ipmnet.ru

A bounded feedback control is constructed that allows to bring a platform with elastic elements to the equilibrium under incomplete information on the phase state of the system and in the presence of external disturbances.

Достаточные условия устойчивости положения равновесия импульсной системы

О. В. Анашкин, О. В. Юсупова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь, Россия
oanashkin@yandex.ru

Рассматривается периодическая система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием второго порядка. Получены достаточные условия устойчивости положения равновесия в критическом случае, когда матрица монодромии линейного приближения имеет пару комплексно сопряженных собственных значений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, критический случай устойчивости, периодичность.

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{|m| \geq 2} f_m x^m, \quad t \neq \tau_k, \quad x(t^+) = Bx(t) + \sum_{|m| \geq 2} g_m x^m, \quad t = \tau_k,$$

где $x(t^+) = \lim_{s \rightarrow t+0} x(s)$, $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$, $x = (x_1, x_2)^T$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det B \neq 0$, $f_m, g_m \in \mathbb{R}^2$, $\tau_k = k\theta$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \theta$. Ряды в правой части системы предполагаются абсолютно сходящимися в некоторой окрестности нуля.

Не ограничивая общности, будем предполагать, что матрица монодромии линеаризации в нуле

$$\dot{x} = Ax, \quad t \neq \tau_k, \quad x(t^+) = Bx(t), \quad t = \tau_k$$

имеет канонический вид: $M = e^{\theta A} B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Таким образом, мы имеем дело с критическим случаем устойчивости нулевого решения импульсной системы (1).

Наш подход основан на методике исследования устойчивости импульсной системы, реализованной в статье [1]. Сначала произведем в системе (1) линейную замену переменных $y = \Psi(t)x$, где $\Psi(t) = e^{(\tau_{k+1}-t)A}$

при $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$, $\Psi(\tau_k^+) = e^{\theta A}$, $\Psi(\tau_k) = I$, $k = 0, 1, \dots$. Замена приводит систему (1) к виду

$$(2) \quad \dot{y} = \sum_{|m| \geq 2} \tilde{f}_m(t) y^m, \quad t \neq \tau_k, \quad y(t^+) = My(t) + \sum_{|m| \geq 2} \tilde{g}_m(t) y^m, \quad t = \tau_k,$$

где $\sum_{|m|=s} \tilde{f}_m(t) y^m = \sum_{|m|=s} \Psi(t) f_m[\Psi^{-1}(t)y]^m$, $\tilde{g}_m = e^{\theta A} g_m$, $|m| = s = 2, 3, \dots$.

Обозначим через $y(t, y_0)$ решение дифференциального уравнения импульсной системы (2), с начальным условием $y(0) = y_0$. Разложим $y(t, y_0)$ в ряд по начальным данным в окрестности начала координат $y(t, y_0) = y_0 + \sum_{m \geq 2} s_m(t) y_0^m$, $s_m(0) = 0$. Подставляя этот ряд в формулу импульсного оператора системы (2), получим аппроксимацию оператора эволюции импульсной системы (2) за период θ :

$$(3) \quad y(\theta^+, y_0) = My_0 + \sum_{|m|=2}^3 p_m y_0^m + \dots,$$

где $p_m = \tilde{g}_m + Ms_m(\theta)$, при $|m| = 2$;

$$(4) \quad \begin{aligned} p_{30} &= \tilde{g}_{30} + Ms_{30}(\theta) + 2s_{20}^{(1)} \tilde{g}_{20} + s_{20}^{(2)} \tilde{g}_{11}, \\ p_{21} &= \tilde{g}_{21} + Ms_{21}(\theta) + 2s_{11}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{20} + (s_{20}^{(1)}(\theta) + s_{11}^{(2)}(\theta)) \tilde{g}_{11} + \\ &\quad + 2s_{20}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02}, \\ p_{12} &= \tilde{g}_{12} + Ms_{12}(\theta) + 2s_{22}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{20} + (s_{02}^{(2)}(\theta) + s_{11}^{(1)}(\theta)) \tilde{g}_{11} + \\ &\quad + 2s_{11}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02}, \\ p_{03} &= \tilde{g}_{03} + Ms_{03}(\theta) + 2s_{02}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02} + s_{02}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{11}. \end{aligned}$$

Благодаря существенной нелинейности уравнения (2) для значений $s_m(\theta)$ имеем очень простые рекуррентные соотношения: $s_m(\theta) = \int_0^\theta \tilde{f}_m(t) dt$, для $|m| = 2$, $s_m(\theta) = \int_0^\theta (\tilde{f}_m(t) + r_m(t)) dt$, для $|m| = 3$, где функции $r_m(t)$ зависят только от $s_n(t)$ с $|n| < |m|$.

Таким образом исходная задача сводится к проблеме устойчивости нулевой неподвижной точки гладкого отображения

$$(5) \quad P(u) = Mu + \sum_{|m|=2}^3 p_m u^m, \quad p_m = (p_m^{(1)}, p_m^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь удобно перейти к комплексно сопряженным переменным $z = u_1 + iu_2$, $\bar{z} = u_1 - iu_2$. Положим $e^{i\gamma} = \alpha + i\beta$, $\gamma \in (0, 2\pi)$. В новых переменных отображение (5) примет вид

$$(6) \quad \tilde{z} = F(z) = e^{i\gamma} z + \sum_{|m|=2}^3 F_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2}, \quad F_m \in \mathbb{C}.$$

Приведём отображение (6) к нормальной форме [2] до третьего порядка. Учитывая наличие резонансов третьего порядка $i(m_1 - m_2)\gamma = \pm i\gamma$, $|m| = 3$, и отбрасывая все одночлены более высоких степеней, получим так называемое *модельное отображение* [3]

$$\hat{w} = e^{i\gamma} w(1 + \mathcal{A}|w|^2),$$

где

$$\mathcal{A} = F_{21}e^{-i\gamma} + \frac{2e^{-i\gamma} - 1}{1 - e^{i\gamma}} F_{20}F_{11} + \frac{3(e^{3i\gamma} - 1)|F_{02}|^2}{1 - \cos 3\gamma} + \frac{(e^{-i\gamma} - 1)|F_{11}|^2}{1 - \cos \gamma}.$$

Знак первой ляпуновской величины $L = \text{Re } \mathcal{A}$ определяет характер устойчивости нулевого решения исходной импульсной системы (1), а именно, решение устойчиво асимптотически, если $L < 0$ и неустойчиво, если $L > 0$.

В докладе обсуждается зависимость характера устойчивости нулевого решения системы (1) от значения параметра γ .

Список литературы

1. *Бабенко С.В., Слынько В.И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием второго порядка в критических случаях // Доповіді НАНУ. 2008. №6. 46-52.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пушцино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.

Sufficient Conditions for Stability of the Equilibrium Position of the Impulsive System

O. V. Anashkin, O. V. Yusupova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
oanashkin@yandex.ru

A periodic system of the second-order impulsive system is considered. Sufficient conditions are obtained for the stability of the equilibrium

position in the critical case when the linear approximation monodromy matrix has a pair of complex conjugate eigenvalues.

УДК 62-50

Прямой метод Ляпунова в задачах о стабилизации движений манипуляционных систем

А. С. Андреев, О. А. Перегудова

УлГУ, Ульяновск, Россия
asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com

В докладе представлен обзор развития прямого метода Ляпунова в решении задач о стабилизации движений многозвенных роботов манипуляторов. Рассмотрены различные модели роботов: с призматическими и цилиндрическими шарнирами, в том числе, с учетом свойств упругости соединительных элементов звеньев. Излагаются новые результаты о стабилизации установившихся движений манипуляторов с упругими шарнирами.

Ключевые слова: манипуляционный робот, упругие шарниры, стабилизация движения, функционал Ляпунова

1. Введение

Прямой метод Ляпунова является одним из эффективных методов решения задачи о стабилизации движений манипуляторов в нелинейной постановке. В докладе дан обзор известных исследований в этом направлении, дополняющий краткие обзоры, представленные в работах [1, 2].

Эффективность различных подходов к решению задач об управлении манипуляторами исследуется, как правило, на примере двузвенного манипулятора, являющегося составным звеном многих манипуляционных систем. В докладе представлен сравнительный анализ эффективности ряда различных подходов.

Излагаются новые результаты по исследованию задачи о стабилизации движений многозвенных манипуляторов с упругими шарнирами.

2. Основной результат

Рассмотрим манипулятор с кинетической энергией

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} (\dot{s}' A_{ss}(s) \dot{s} + \dot{s}' A_{sr}(s) \dot{r} + \dot{r}' A_{rs}(s) \dot{s} + \dot{r}' A_{rr}(s) \dot{r}) + \frac{1}{2} \dot{S}' J \dot{S},$$

где $s, S \in R^k$, $r \in R^m$ — обобщенные координаты, A_{ss} , $A'_{sr} = A_{rs}$, A_{rr} — блоки положительно-определенной матрицы $A \in R^{(k+m) \times (k+m)}$, $J = \text{diag}(j_1, j_2, \dots, j_k)$, $j_k > 0$.

Полагаем, что потенциальная энергия манипулятора имеет вид

$$(2) \quad \Pi(s, S) = \Pi_1(s) + \frac{1}{2} (s - S)' C (s - S),$$

где $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_k)$, $c_i > 0$, $\Pi_1(s)$ — потенциальная энергия сил тяжести, $(\cdot)'$ — операция транспонирования.

Такую структуру кинетической и потенциальной энергии имеет, например, $(k + m)$ -звенный электромеханический манипулятор с k электроприводами. При этом s и S есть векторы углов между частью звеньев и соответствующими углами поворотов выходных валов электроприводов относительно этих звеньев, r — вектор координат остальных звеньев, A — матрица кинетической энергии звеньев, J — матрица инерции приводов, C — матрица жесткостей валов приводов.

Заметим, что координаты r_1, r_2, \dots, r_m являются циклическими. Уравнения движения манипулятора по координатам (s, r) могут быть записаны в форме уравнений Рауса [3]

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial R}{\partial s} &= - \frac{\partial \Pi_1}{\partial s} + C(S - s), \\ \dot{p} &= U_r, \quad \dot{r} = - \frac{\partial R}{\partial p}, \end{aligned}$$

где $R = R_2 + R_1 + R_0$ — функция Рауса, $R_2 = \frac{1}{2} \dot{s}' A(s) \dot{s}$, $B = A_{ss}(s) - A_{sr} A_{rr}^{-1} A_{rs}$, $R_1 = g'(s, p) \dot{s}$, $g = A_{sr}(s) A_{rr}^{-1}(s) p$, $R_0 = -\frac{1}{2} p' A_{rr}^{-1}(s) p$, U_r — управление по координатам r .

К уравнениям (3) присоединим уравнения по координатам S в следующей форме [1]

$$(4) \quad J \ddot{S} = C(s - S) + U_S,$$

где U_S — вектор управляющих моментов, приложенных к роторам электродвигателей.

При значении управлений

$$(5) \quad U_r = U_r^0, \quad U_s = U_s^0 = \left. \frac{\partial \Pi_1}{\partial s} \right|_{s=s_0} - \left. \frac{\partial R_0}{\partial s} \right|_{s=s_0, p=p_0},$$

система уравнений (3), (4) имеет решение

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{s} = \dot{S} = 0, \quad s = s_0, \quad S = S_0, \\ C(S_0 - s_0) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial s} \right|_{s=s_0} + \left. \frac{\partial \Pi_1}{\partial s} \right|_{s=s_0} - \left. \frac{\partial R_0}{\partial s} \right|_{s=s_0, p=p_0}, \\ p = p_0, \quad \dot{r} = \dot{r}_0 = - \left. \frac{\partial R_0}{\partial p} \right|_{p=p_0} = A_{rr}^{-1}(s_0)p_0, \quad r(t) = r_0 + \dot{r}_0 t, \end{aligned}$$

представляющее собой установившееся (стационарное) движение системы.

Доказывается, что задача о стабилизации движения (6) решается управлением вида

$$(7) \quad \begin{aligned} U_S = U_S^0 - \frac{\partial \Pi_S}{\partial S}(S, p_0) - \\ - \left(\frac{\partial f_1(S)}{\partial S} \right)' \int_{t=h(t)}^t P_1(t, \nu) (f_1(S(t)) - f_1(S(\nu))) d\nu, \\ U_r = - \frac{\partial \Pi_r(r(t) - \dot{r}_0 t)}{\partial r} - \left(\frac{\partial f_2(r(t) - \dot{r}_0 t)}{\partial r} \right)' \times \\ \times \int_{t=h(t)}^t P_2(t, \nu) (f_2(r(t) - \dot{r}_0 t) - f_2(r(\nu) - \dot{r}_0 \nu)) d\nu, \end{aligned}$$

где функции $\Pi_s : R^+ \times R^k \rightarrow R$, $\Pi_r : R^+ \times R^m \rightarrow R$ принадлежат множествам $G(k)$ и $G(m)$ соответственно, функция $h : R \rightarrow [0, a]$ принадлежит множеству H_a , функции $f_1 : R^k \rightarrow R^k$ и $f_2 : R^m \rightarrow R^m$ принадлежат множествам $F(k)$ и $F(m)$ соответственно, матрицы ядра $P_1 : ((t, \nu), t \in R, t - a \leq \nu \leq t) \rightarrow R^{k \times k}$, $P_2 : ((t, \nu), t \in R, t - a \leq \nu \leq t) \rightarrow R^{m \times m}$ принадлежат соответственно множествам $D(k)$ и $D(m)$, введенным в работе [4].

Доказательство проводится построением функционала Ляпунова на основе соответствующей теоремы из работы [4].

Решаются задача о стабилизации установившихся движений трехзвенного манипулятора с вертикальным ведущим звеном и упругими

шарнирами, а также задача о стабилизации установившихся движений манипулятора с шестью степенями свободы. Проводится теоретико-числовой анализ этих решений.

3. Заключение

В работе представлены обзор и результаты по решению задачи о стабилизации установившихся движений манипуляторов с упругими шарнирами на основе применения развития метода функционалов Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-41-730022 и № 19-01-00791).

Список литературы

1. *Avila-Becerril S., Loria A., and Panteley E.* Global position-feedback tracking control of flexible-joint robots // IEEE American Control Conference, Jul 2016, Boston, MA, United States. 2016.
2. *Andreev A., Peregodova O.* On Output Feedback Stabilization and Tracking Control of Elastic-Joint Robotic Manipulators // 23rd International Conference on Mechatronics Technology – ICMT 2019, Oct 2019, Fisciano Campus, University of Salerno, Italy. 2019. IEEE Xplore.
3. *Каранетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
4. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // Прикл. матем. и механ. 2017. Т. 81, Вып. 2. С. 137–153.

The Direct Lyapunov Method in the Motion Stabilization Problems of Robot Manipulators

A. S. Andreev, O. A. Peregodova

Ulyanovsk State University, Russia
asa5208@mail.ru, peregodovaoa@gmail.com

The report presents an overview of the development of the direct Lyapunov method in the motion stabilization problem of multi-link robot manipulators. Various robot models are considered such as ones with prismatic and cylindrical joints taking into account the elasticity properties of the connecting elements of the links.

Отслеживание траектории колесного мобильного робота с учетом проскальзывания колес

А. С. Андреев, О. А. Перегудова

УлГУ, Ульяновск, Россия
asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com

В работе исследуется задача робастного отслеживания траектории мобильного робота с омни-колесами с учетом проскальзывания колес. Построен закон управления по обратной связи, позволяющий решить задачу слежения при неизвестных параметрах скольжения.

Ключевые слова: колесный мобильный робот, отслеживание траектории, проскальзывание колес

1. Введение

Известно, что мобильные роботы с омни-колесами могут двигаться в произвольном направлении без поворота корпуса. Это обеспечивается тем, что колесо, по ободу которого нанизаны ролики, может двигаться как в направлении вдоль плоскости колеса, так и в перпендикулярном ему. Важным является вопрос об управлении движением робота в условиях проскальзывания колес.

В работе [1] построена модель динамики трехколесного робота, движущегося с проскальзыванием, но задача о построении управления такой системой не исследовалась. В работах [2, 3] построена нелинейная модель четырехколесного мобильного робота, учитывающая действие сил сухого и вязкого трения, и предложен закон управления для такой модели.

В настоящей статье исследуется задача отслеживания траектории робота с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс с учетом проскальзывания колес. Построен закон управления для такой модели, обеспечивающий асимптотическую устойчивость отслеживаемой траектории робота.

2. Основной результат

В работе рассматривается модель робота, состоящего из круглой платформы и трех омни-колес. При этом центр масс робота C_0 смещен относительно центра платформы C на некоторое расстояние. Робот движется по горизонтальной поверхности под действием управляющих моментов, получаемых при помощи трех независимых электродвигателей постоянного тока. Массово-инерционные характеристики робота

представлены в Таблице 1.

Обозначение	Определение
m_0	масса платформы
m_1	масса колеса робота
ρ_0	радиус инерции платформы относительно центральной вертикальной оси
ρ_1	радиус инерции колеса относительно центральной вертикальной оси
r	радиус колеса
r_1	радиус инерции колеса относительно оси вращения
a	длина отрезка CC_i ($i = 1, 2, 3$)
α	угол между осью Cx_1 и прямой CC_0
d	длина отрезка CC_0
$I_\omega = m_1 r_1^2$	момент инерции колеса относительно его оси вращения

Таблица 1: Массово-инерционные характеристики робота

Уравнения динамики робота имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & (A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + \\ & + (B(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)U, \end{aligned}$$

где $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \psi$ — координаты платформы в неподвижной декартовой системе,

$$\begin{aligned} A(q_3) &= \begin{pmatrix} m & 0 & -s(q_3) \\ 0 & m & c(q_3) \\ -s(q_3) & c(q_3) & I_s \end{pmatrix}, \\ B(q_3, \dot{q}_3) &= \begin{pmatrix} h & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & h & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 2a^2h \end{pmatrix}, \\ P(q_3) &= \begin{pmatrix} \sin q_3 & \sin\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos q_3 & -\cos\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$c(q_3) = m_0 d \cos(\alpha + q_3)$, $s(q_3) = m_0 d \sin(\alpha + q_3)$, $S = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$ — матрица переменных коэффициентов, характеризующих проскальзывание колес, $E = \text{diag}(1, 1, 1)$ — единичная матрица, $U = (U_1, U_2, U_3)^T$, $h = 3c_\nu/(2r^2)$, c_ν — коэффициент момента противодвижущей силы мотора.

Пусть $q = q^{(0)}(t)$ — отслеживаемая траектория, которая является дважды непрерывно дифференцируемой функций времени. Предположим, что найдутся положительные числа ξ_1 , η_k и ζ_k ($k = 1, 2$), такие,

что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |q_k^{(0)}(t)| &\leq \xi_1, \quad |\dot{q}_k^{(0)}(t)| \leq \eta_1, \quad |\ddot{q}_k^{(0)}(t)| \leq \zeta_1 \quad (k = 1, 2), \\ |\dot{q}_3^{(0)}(t)| &\leq \eta_2, \quad |\ddot{q}_3^{(0)}(t)| \leq \zeta_2. \end{aligned}$$

В докладе дано решение задачи отслеживания траектории $q^{(0)}(t)$ робота при помощи управления

$$U = P^{-1}(q_3)(U^{(0)}(t, q_3) + U^{(2)}),$$

где функции $U^{(0)}(t)$ и $U^{(2)}$ определяются в виде

$$\begin{aligned} U^{(0)}(t, q_3) &= A(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + B(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t), \\ U_j^{(2)} &= -\gamma_j \arctan(q_j - q_j^{(0)}) - k_j \operatorname{sign}(\dot{q}_j - \dot{q}_j^{(0)}), \quad j = 1, 2, \\ U_3^{(2)} &= -\gamma_3 \sin\left(\frac{q_3 - q_3^{(0)}}{2}\right) - k_3 \operatorname{sign}(\dot{q}_3 - \dot{q}_3^{(0)}), \quad \gamma_j, k_j > 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3. Заключение

В докладе решена задача отслеживания нестационарной траектории мобильного робота с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс при проскальзывании колес. Построен разрывный закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость заданного движения робота.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00702).

Список литературы

1. *Stonier D., Cho S.-H., Choi S.-L., Kuppaswamy N.-S., Kim J.-H.* Nonlinear Slip Dynamics for a Omniwheel Mobile Robot Platform // IEEE International Conference on Robotics and Automation. Roma, Italy, April 10-14, 2007. P. 2367–2372.
2. *Lins Barreto S.J.C., Scolari Conceicao A.G., Dorea C.E.T., Martinez L., De Pieri E.R.* Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot // IEEE-ASME Trans. on Mechatron. 2014. No 2. P. 467–476.
3. *Huang Y., Cao Q., Leng C.* The Path-Tracking Controller Based on Dynamic Model with Slip for One Four-Wheeled OMR // Industrial Robot: An International Journal. 2010. V. 37. No 2. P. 193–201.

Trajectory Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot with Slip

A. S. Andreev, O. A. Peregudova

Ulyanovsk State University, Russia
asa5208@mail.ru, peregudovaoa@gmail.com

In this paper, the robust trajectory tracking control problem is considered for a mobile robot with omni wheels taking into account wheel slippage. The feedback control law is constructed, which allows us to solve the tracking problem with unknown slip parameters.

УДК 681.5

Исследование возможности построения закона управления БПЛА без использования инерциальных сенсоров

П. А. Андрусевич

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
89161544383@yandex.ru

В настоящей работе исследована возможность построения закона управления винтокрылым БПЛА без использования инерциальных сенсоров, вместо которых предлагается применить многоантенный GNSS-приемник. С использованием системы дифференциальных уравнений, описывающих вращательное и поступательное движение аппарата, получен и исследован закон управления. Применительность модели обоснована идентификацией по данным, измеренным сенсорами аппарата в процессе полета.

Ключевые слова: БПЛА, бэкстеппинг, модель движения, нелинейные системы

1. Введение

Чаще всего системы управления БПЛА строятся с использованием GPS-антенн совместно с БИНС. Однако инерциальные сенсоры отличаются наличием медленного дрейфа при интегрировании и требуют калибровки.

В настоящее время доступны многоантенные GNSS-приемники, позволяющие определять не только позицию, но и ориентацию аппара-

та. Например, четырехантенный TRE-Quattro компании Javad GNSS. Этот приемник способен синхронно регистрировать измерения фазы несущей частоты систем GPS, ГЛОНАСС и др. для каждой из антенн. Программное обеспечение приемника, оперируя с разностями фазовых измерений, определяет позицию, скорость поступательного движения, ориентацию и угловую скорость аппарата с частотой до 100 Гц. Точность полученной ориентации зависит от расстояний между антеннами прибора.

В настоящей работе дан анализ возможности применения прибора для управления винтокрылым БПЛА без использования БИНС.

2. Модель кинематики и динамики полета БПЛА

Для решения задачи используется следующая система дифференциальных уравнений, описывающих движение БПЛА.

Динамика двигательной установки с учетом инерционности винтов: $\dot{r}_i = k(k_u U_i - r_i)$, $i = 1, \dots, 4$, U_i — управления, r_i — обороты.

Уравнения Эйлера вращательного движения аппарата с учетом крутящих моментов двигателей ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости):

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\omega}_x &= J_1 (r_1 + r_3 - r_2 - r_4) + J_2 \omega_y \omega_z, \\ \dot{\omega}_y &= J_3 (r_3 + r_4 - r_1 - r_2) + J_4 \omega_z \omega_x, \\ \dot{\omega}_z &= \sum_{i=1}^4 (b r_i + \mu (U_i - r_i)). \end{cases}$$

Кинематические уравнения Пуассона:

$$(2) \quad \dot{Q} = Q A, \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение Ньютона поступательного движения с учетом аэродинамического сопротивления F_a (x, y, z — координаты аппарата):

$$(3) \quad M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 M \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_5 (r_1 + r_3 - r_2 - r_4) \end{bmatrix} - F_a.$$

Здесь $k, k_u, J_i, i = 1, \dots, 5, b, \mu, M$ — константы, идентифицированные по результатам полета путем минимизации интегральных критериев. Процесс идентификации подробно изложен в работе автора [1].

3. Контроллер управления

Для построения контроллера управления используется методология, основанная на идеях бэкстепинга и линеаризации обратной связи с построением эталонных систем и введением ограничений с помощью функции распределения нормального закона [2, 3].

Опишем кратко схему построения алгоритма управления, приводящего аппарат в точку x_0, y_0 . Требуемое поведение аппарата с учетом ограничений задается в виде эталонной системы уравнений:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x} - \lambda_1 \rho(\lambda_2 D) \frac{x - x_0}{D}) &= -\lambda_3 \operatorname{atan}(\lambda_3(\dot{x} - \lambda_1 \rho(\lambda_2 D) \frac{x - x_0}{D})), \\ \frac{d}{dt}(\dot{y} - \lambda_1 \rho(\lambda_2 D) \frac{y - y_0}{D}) &= -\lambda_3 \operatorname{atan}(\lambda_3(\dot{y} - \lambda_1 \rho(\lambda_2 D) \frac{y - y_0}{D})), \end{aligned}$$

где $D = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ — постоянные коэффициенты, $(\rho(\cdot) + 0.5)$ — функция распределения нормального закона.

В случае, если ускорения аппарата a_x, a_y, a_z были бы искомыми управлениями, то они выразились бы при подстановке уравнений (3) в (4). В нашем случае необходимо построить еще одну эталонную систему для углового движения, целью которой будет решение, полученное на предыдущем шаге, аналогично методу бэкстепинга [3]. Таким образом, получаем целевые $\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z$, а на следующем шаге — искомые управления $U_i, i = 1, \dots, 4$.

4. Заключение

В докладе будут представлены результаты вычислительных экспериментов с использованием данных ошибок, полученных с прибора TRE-Quattro в состоянии покоя, и описанной выше модели. В результате даются оценки размеров аппарата и частот измерений, необходимых для возможности стабилизации движения. В случае выполнения этих условий даются оценки точности работы системы управления.

Автор выражает благодарность И.В. Матросову за научное руководство в настоящем исследовании, а также благодарность компании «Джавад Джи Эн Эс Эс» за предоставление оборудования, использованного при проведении работы.

Список литературы

1. *Андрусевич П.А.* Идентификация модели вращательного движения винтокрылого БПЛА по данным измерений в процессе полета // Тр. ИПУ РАН. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 480–484.
2. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.2. М.: Изд-во Физматлит, 2004.

3. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

Numerical Study of the Possibility for UAV Control System without Inertial Sensors

P. A. Andrusevich

BMSTU, faculty «Automatic control systems», Moscow, Russia
89161544383@yandex.ru

This paper presents the numerical study of the control system for a quadcopter based on four-antenna GNSS receiver without use of inertial sensors. A position and attitude controller is proposed and its applicability is proven by the mathematical model of the UAV which includes a system of differential equations describing the movement of the quadcopter. This model is identified with the actual data from UAV sensors during the test flights.

Блочный подход к управлению двухроторной электромеханической системой

А. С. Антипов, С. А. Краснова

ИПУ РАН, Москва, Россия
scholess18@mail.ru, skrasnova@list.ru

Для двухроторной электромеханической системы рассматривается задача отслеживания обобщенными координатами заданных траекторий при параметрической неопределенности модели объекта управления и действии неконтролируемых возмущений. В рамках блочного подхода разработаны две процедуры синтеза разрывного управления с нелинейными и кусочно-линейными локальными связями, обеспечивающие инвариантность по отношению к возмущениям и выполнение ограничений на переменные состояния и управления.

Ключевые слова: двухроторная электромеханическая система, слежение, параметрическая неопределенность, внешние возмущения

В качестве объекта управления рассматривается двухроторная электромеханическая система, предназначенная для апробации алгоритмов управления вертолетом, с математической моделью [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \dot{q}_2 = F(q_1, q_2) + H(q_1)(\tau(t) + \eta(t)), \\ \dot{\tau} &= A\tau - Dq_2 + Bu, \end{aligned}$$

где первые два уравнения описывают механическую подсистему, третье — динамику исполнительных устройств (ИУ) — двигателей постоянного тока, $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}) \in \mathbb{R}^2$ — вектор обобщенных координат (углы рысканья и тангажа), $q_2 = \text{col}(q_{21}, q_{22}) \in \mathbb{R}^2$ — вектор обобщенных скоростей, $F(q_1, q_2) = \text{col}(f_1, f_2)$, $H(q_1) = \text{diag}(h_1, h_2)$ — нелинейные параметрически неопределенные матрицы, $\eta(t) = \text{col}(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ — неконтролируемые возмущения, включающие неучтенные в модели силы и моменты, $|\eta_i(t)| \leq N_i$, $i = 1, 2$; $\tau = \text{col}(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$ — обобщенные моменты, создаваемые ИУ; $A = \text{diag}(a_1, a_2)$, $B = \text{diag}(b_1, b_2)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ — параметры ИУ, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $d_i > 0$, $i = 1, 2$, $u = \text{col}(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ — разрывные управления (напряжения якорей электроприводов); $|q_{2i}(t)| \leq Q_{2i}$, $|\tau_i(t)| \leq T_i$, $|u_i(t)| \leq U_i$, $i = 1, 2$, $t \geq 0$ — проектные ограничения.

Ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей отслеживание обобщенными координатами q_1 заданных сигналов $g(t) =$

$= \text{col}(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\dot{g}_i(t)| \leq G_{1i} < Q_{2i}$, $i = 1, 2$ с точностью Δ_{1i} :

$$(2) \quad |e_{1i}(t)| \leq \Delta_{1i}, t > t_{1i}, e_{1i}(t) = q_{1i}(t) - g_i(t), i = 1, 2.$$

Для решения задачи (2) в рамках блочного подхода разработаны две процедуры синтеза управления с локальными связями различного типа. В 1-ой процедуре в качестве виртуальных управлений используются нелинейные, гладкие и ограниченные сигмоидальные функции $\sigma(k_{ji}e_{ji}) = \frac{2}{1+\exp(-k_{ji}e_{ji})} - 1$ [2]: $e_2 = q_2 + M_1\sigma(K_1e_1)$, $e_3 = \tau + M_2\sigma(K_2e_2)$, где здесь и далее $M_j = \text{diag}(m_{j1}, m_{j2})$, $K_j = \text{diag}(k_{j1}, k_{j2})$ — параметры в обратных связях, $m_{ji} > 0$, $k_{ji} > 0$, $\sigma(K_j e_j) = \text{col}(\sigma(k_{j1}e_{j1}), \sigma(k_{j2}e_{j2}))$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2$, что приводит к следующей системе относительно ошибок слежения:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= q_2 - \dot{g} = e_2 - M_1\sigma(K_1e_1) - \dot{g}(t), \\ \dot{e}_2 &= H(e_3 - M_2\sigma(K_2e_2) + \eta(t)) + \tilde{F}_1(q_1, q_2, e_1, \dot{e}_1), \\ \dot{e}_3 &= Ae_3 + \tilde{F}_2(e_2, \dot{e}_2) + Bu, \end{aligned}$$

где $\tilde{F}_j = \text{col}(\tilde{f}_{j1}, \tilde{f}_{j2})$, $\tilde{F}_1 = F + M_1 \frac{\partial \sigma(K_1 e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1$, $\tilde{F}_2 = -AM_2\sigma(K_2e_2) + M_2 \frac{\partial \sigma(K_2e_2)}{\partial e_2} \dot{e}_2 - Dq_2$, $\frac{\partial \sigma(K_j e_j)}{\partial e_j} = \text{diag}(\frac{\partial \sigma(k_{j1}e_{j1})}{\partial e_{j1}}, \frac{\partial \sigma(k_{j2}e_{j2})}{\partial e_{j2}})$, $|\tilde{f}_{2i}| \leq \tilde{F}_{2i} = a_i m_{2i} k_{2i} (Q_{3i} + \frac{1}{2} m_{1i} k_{1i} (Q_{2i} + G_{1i})) + d_i Q_{2i}$.

Во 2-ой процедуре принимаются виртуальные управления в виде кусочно-линейных, негладких и ограниченных, более простых в реализации функций $\text{sat}(k_{ji}e_{ji}) = \begin{cases} \text{sign}e_{ji}, & |e_{ji}| > 1/k_{ji} \\ k_{ji}e_{ji}, & |e_{ji}| \leq 1/k_{ji} \end{cases}$. Замена переменных $e_2 = q_2 + M_1\text{sat}(K_1e_1)$, $e_3 = \tau + M_2\text{sat}(K_2e_2)$, где $\text{sat}(K_j e_j) = \text{col}(\text{sat}(k_{j1}e_{j1}), \text{sat}(k_{j2}e_{j2}))$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2$, приводит (1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= q_2 - \dot{g} = e_2 - M_1\text{sat}(K_1e_1) - \dot{g}(t), \\ \dot{e}_2 &= H(e_3 - M_2\text{sat}(K_2e_2) + \eta(t)) + \tilde{F}_1(q_1, q_2, e_1, \dot{e}_1), \\ \dot{e}_3 &= Ae_3 + \tilde{F}_2(e_2, \dot{e}_2) + Bu, \end{aligned}$$

где $\tilde{F}_j = \text{col}(\tilde{f}_{j1}, \tilde{f}_{j2})$, $\tilde{F}_1 = F + M_1 \frac{\partial \text{sat}(K_1 e_1)}{\partial e_1} \dot{e}_1$, $\tilde{F}_2 = -AM_2\text{sat}(K_2e_2) + M_2 \frac{\partial \text{sat}(K_2e_2)}{\partial e_2} \dot{e}_2 - Dq_2$, $\frac{\partial \text{sat}(K_j e_j)}{\partial e_j} = \text{diag}(\frac{\partial \text{sat}(k_{j1}e_{j1})}{\partial e_{j1}}, \frac{\partial \text{sat}(k_{j2}e_{j2})}{\partial e_{j2}})$,

$$\text{sat}'(k_{ji}e_{ji}) = \begin{cases} 0, & |e_{ji}| > 1/k_{ji} \\ k_{ji}, & |e_{ji}| \leq 1/k_{ji} \end{cases}, |\tilde{f}_{1i}| \leq \tilde{F}_{1i} = F_i + m_{1i}k_{1i}(Q_{2i} + G_{1i}),$$

$$|\tilde{f}_{2i}| \leq \tilde{F}_{2i} = a_i m_{2i} + m_{2i} k_{2i} (Q_{3i} + m_{1i} k_{1i} (Q_{2i} + G_{1i})) + d_i Q_{2i}.$$

Для обеспечения сформированных локальных связей в обеих процедурах используется разрывное управление $u = -M_3 \text{sign} e_3$, где $M_3 = \text{diag}(m_{31}, m_{32})$, $m_{3i} > 0$, $i = 1, 2$.

С помощью второго метода Ляпунова показано, что при выборе параметров регулятора на основе нижних оценок, которые для первой процедуры (слева) и для второй процедуры (справа) имеют вид

$$\begin{aligned} k_{ji} &\geq 3/\Delta_{ji}, j = 1, 2, i = 1, 2; & k_{ji} &\geq 1/\Delta_{ji}, j = 1, 2, i = 1, 2; \\ 1, 1(3/k_{2i} + G_{1i}) &< m_{1i} \leq Q_{2i}, & 1/k_{2i} + G_{1i} &< m_{1i} \leq Q_{2i}, \\ 1, 1(N_i + \tilde{F}_{1i}/h_{i,\min}) &< m_{2i} \leq T_i, & N_i + \tilde{F}_{1i}/h_{i,\min} &< m_{2i} \leq T_i, \\ \tilde{F}_{2i}(m_{2i}, k_{2i})/b_i &< m_{3i} \leq U_i, & \tilde{F}_{1i} &= \tilde{F}_{1i}(m_{1i}, k_{1i}), \end{aligned}$$

заданная точность (2) достигается в замкнутых системах. При этом сначала выполняется $e_{3i} = 0$ за конечное время, а затем e_{ji} последовательно во времени сходятся в окрестности Δ_{ji} , $j = 2, 1$, $i = 1, 2$.

При одновременном соблюдении верхних оценок выполняются заданные проектные ограничения на обобщенную скорость, обобщенные моменты и управления. В противном случае уточняется достижимая точность слежения (2) при имеющихся ограничениях.

Существенно, что данные построения робастны к параметрическим неопределенностям и не требуют использования динамической модели внешних возмущений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-01-00846а, № 20-01-00363а).

Список литературы

1. *Butt S.S., Ashemann H.* Multi-variable integral sliding mode control of a two degrees of freedom helicopter // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, No. 1. P. 802–807.
2. *Antipov A.S., Krasnova S.A.* Decomposition synthesis of invariant systems with nonlinear local feedbacks // 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference) (STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408344>

Block Approach to Controlling a Twin Rotor Electromechanical System

A. S. Antipov, S. A. Krasnova

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
scholess18@mail.ru, skrasnova@list.ru

The tracking problem for the twin rotor MIMO electromechanical system is considered in the conditions of parametric uncertainties and action of uncontrolled external disturbances. According to the block approach, the two procedures with the different types of local feedbacks are developed for the solution of the problem: with the nonlinear and with the piecewise-linear functions in feedbacks. These functions provide invariance to disturbances and satisfaction of the restrictions on the state variables and control actions.

УДК 517.968

О возможности применения квадратичных функций Ляпунова, обладающих заданными свойствами, для исследования систем с запаздыванием

О. Г. Антоновская

ННГАСУ, Н. Новгород, Россия
olga.antonovsckaja@yandex.ru

Рассматривается вопрос о возможности применения квадратичных функций Ляпунова в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием. В качестве функций Ляпунова выбираются квадратичные функции Ляпунова, удовлетворяющие ограничениям на первую производную в силу системы без запаздывания. Обсуждается целесообразность применения таких функций Ляпунова в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Ключевые слова: функция Ляпунова, первая производная в силу системы, устойчивость по первому приближению, система с запаздыванием.

1. Введение

Наиболее общим методом исследования устойчивости является прямой метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) [1]. Следует отме-

туть, что в настоящее время сфера применения метода функций Ляпунова не ограничивается задачами классической теории устойчивости. Идеи метода функций Ляпунова успешно используются и при исследовании систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [1].

В задачах исследования устойчивости по первому приближению для обычных систем дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова широкое применение нашли функции Ляпунова в виде квадратичных форм. Столь же широкое применение квадратичные формы могут иметь и в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием [1, 2].

2. Постановка задачи.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$(1) \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, x_1(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau)),$$

где f_i — непрерывно дифференцируемые функции своих переменных, удовлетворяющие условию $f_i(0, \dots, 0) = 0$ ($i = 1, \dots, n$), τ — постоянная величина.

Для того, чтобы положительно определенная квадратичная форма

$$(2) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}),$$

удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина [1] об асимптотической устойчивости для системы (1), достаточно [1, 2], чтобы она удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина для системы первого приближения

$$(3) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j + b_{ij} x_j(t - \tau)),$$

где $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $b_{ij} = \partial f_i / \partial x_j(t - \tau)$ при $x_1 = \dots = x_n = x_1(t - \tau) = \dots = x_n(t - \tau) = 0$, то есть $\dot{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ в силу системы (3) при $V(x_1(t - \tau), x_2(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau)) \leq V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. (При этом будем предполагать, что матрица $B = (b_{ij})$ не является нулевой.) Таким образом, требуется найти условия выполнения неравенства

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} (a_{ik} x_k x_j + a_{jk} x_k x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} (b_{ik} x_k (t - \tau) x_j + b_{jk} x_k (t - \tau) x_i) < 0$$

при всех $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i (t - \tau) x_j (t - \tau) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j$.

3. Основной результат

Первая сумма в (4) есть первая производная функции (2) в силу системы без запаздывания вида

$$(5) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Будем предполагать, что (2) выбрана таким образом, что в силу системы (5) $\max_{V=V_0} (\dot{V}/V) = -\delta$ ($2 \max_i \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\} \leq -\delta < 0$), где $\lambda_i(A)$ ($i = 1, \dots, n$) — собственные значения матрицы $A = (a_{ij})$ такие, что $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$, т.е. состояние равновесия системы (5) асимптотически устойчиво. В [3] показано, что выбор коэффициентов квадратичной формы (2), обладающей таким свойством, можно осуществить с помощью простых аналитических соотношений. Кроме того, в докладе показано, что в точках поверхности уровня, где второе слагаемое (4) принимает наибольшее и наименьшее значения при указанных ограничениях,

$$(6) \quad \max \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} (b_{ik} x_j + b_{jk} x_i) x_k (t - \tau) \right| \leq \\ \leq \max \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} (b_{ik} x_j + b_{jk} x_i) x_k \right|,$$

то есть его величина может быть ограничена сверху наибольшим значением модуля квадратичной формы, стоящей в правой части. Согласно [4], это значение определяется максимумом модуля $\tilde{\delta}$ корней уравнения $\det(\sum_{i=1}^n (K_{ik} b_{im} + K_{im} b_{ik}) - \delta K_{km})_{k,m=1}^n = 0$. И в точках поверхности уровня для системы с запаздыванием $\dot{V} \leq (-\delta + \tilde{\delta}) V_0 < 0$, если $-\delta + \tilde{\delta} < 0$, и (2) можно использовать как функцию Ляпунова для системы с запаздыванием.

Список литературы

1. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эрeditaryных систем. М.: Наука, 1988.

2. Горбунов А.В., Каменецкий В.А. Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием // *АиТ*. 2005. № 10. С. 42–53.
3. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // *Дифференциальные уравнения*. 2016. № 3. Т. 52. С. 275–281.
4. Антоновская О.Г. О построении функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // *Изв. вузов. Математика*. 2004. № 2(501). С. 19–23.

On Possibility of Use of Quadratic Lyapunov Function with Definite Properties for Delay-Differential Systems Study

O. G. Antonovskaya

State University of Architecture and Civil Engineering of Nizhniy Novgorod,
Russia
olga.antonovskaja@yandex.ru

The problem of possibility of quadratic Lyapunov function use when studying the stability of delay-differential systems is examined. As Lyapunov functions the quadratic Luapunov functions are chosen to satisfy the limitation of the first derivative over some system without delay. The question of such function being useful for the problems of stability study of delay-differential systems.

Локальная разрешимость управляемых систем с неявной дифференциальной связью

А. В. Арутюнов, Э. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский

ИПУ РАН, Москва, Россия

arutyunov@cs.msu.ru, zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Исследуются управляемые системы с неявной дифференциальной связью и смешанными ограничениями. Для управляемых систем, порожденных гладкими отображениями, приводятся достаточные условия локальной разрешимости в терминах первых и вторых производных соответствующих отображений. Кроме того, для рассматриваемых систем получены достаточные условия локальной разрешимости без априорного предположения гладкости, сформулированные в терминах накрывающих отображений.

Ключевые слова: управляемая система, локальная разрешимость, 2-регулярность, накрывающие отображения.

Рассмотрим управляемую систему

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, \dot{x}, u) = 0, & x(t_0) = x_0, \\ g(x, u) = 0, & u(t) \in U \quad \forall t. \end{cases}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ — время, t_0 — заданный начальный момент времени, x_0 — заданная начальная точка, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $U \subset \mathbb{R}^m$ — заданное замкнутое множество, $u \in U$ — управляющий параметр, $f: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ и $g: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$ — заданные функции, а символ \forall означает для почти всех (п.в.). Система (1) называется локально разрешимой, если существуют число $\tau > 0$ и функция $u \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ такие, что $u(t) \in U$ при п.в. t , и задача Коши $f(x, \dot{x}, u(t)) = 0$, $x(t_0) = x_0$ имеет решение $x(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$, для которого выполняется равенство $g(x(t), u(t)) = 0$ при п.в. $t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

В докладе исследуется локальная разрешимость задачи (1). Сформулируем достаточные условия локальной разрешимости.

Напомним сначала понятие накрывающего отображения. Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) — метрические пространства, задано отображение $F: X \rightarrow Y$ и точка $x_0 \in X$. Отображение F называется α -накрывающим в окрестности точки x_0 , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$B_Y(F(x), \alpha r) \subset F(B_X(x, r)) \quad \forall x \in X, \quad \forall r \geq 0: \quad B_X(x, r) \subset B_X(x_0, \varepsilon).$$

Здесь $B_X(x_0, \varepsilon) = \{z \in X : \rho_X(x_0, z) \leq \varepsilon\}$ — замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $\varepsilon > 0$. В случае, когда X — линейное вещественное конечномерное пространство, индекс X в обозначении шара будем опускать.

Вернемся к задаче (1). Пусть заданы точки $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u_0 \in U$, для которых выполняются равенства

$$f(x_0, v_0, u_0) = 0, \quad g(x_0, u_0) = 0.$$

Предположим, что функции g и f непрерывны.

Теорема 1. Пусть

- существуют $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что отображение $f(x, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ является α -накрывающими в окрестности точки u_0 при всех $x \in B(x_0, \delta)$, $u \in B_U(u_0, \delta)$;
- существуют $\beta \geq 0$ и $\delta > 0$ такие, что отображение $f(\cdot, v, \cdot) : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^s$ является β -липшицевым в окрестности точки x_0 при всех $v \in B(v_0, \delta)$;
- существуют $\alpha > 0$, $\beta \in [0, \alpha)$ и $\delta > 0$ такие, что отображение $g(x, \cdot)$ является α -накрывающими в окрестности точки u_0 при всех $x \in B(x_0, \delta)$, а отображение $g(\cdot, u)$ является β -липшицевым в окрестности точки x_0 при всех $u \in B_U(u_0, \delta)$.

Тогда задача (1) локально разрешима.

Приведенное утверждение применимо к задаче (1) без априорных предположений гладкости функций f и g . В случае, когда функции f и g являются гладкими авторами получены достаточные условия локальной разрешимости задачи (1) в терминах первой и второй производных в точке отображений f и g . В случае, когда дифференциальная связь в задаче (1) является явной, результаты аналогичные приведенным были получены в [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 20-11-20131).

Список литературы

1. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.
2. Жуковский С.Е., Жуковская (Мингалеева) З.Т. Существование и непрерывность неявной функции в окрестности аномальной точки // Вестник МГУ. Сер. 15. 2012. Т. 2. С. 10–15.

Local Solvability of Control Systems with Implicit Dynamics

A. V. Arutyunov, Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy

ICS RAS, Moscow, Russia

arutyunov@yandex.ru, zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

We study control systems with implicit differential dynamics and mixed constraints. For control systems generated by smooth mappings, sufficient conditions for local solvability are found in terms of the first and second derivatives of the corresponding mappings. In addition, for the systems under consideration, sufficient conditions for local solvability without a priori smoothness assumption are found in terms of covering mappings.

УДК 517.977

Оптимальное управление нелинейным объектом в постановке задачи дифференциальной игры с функционалом обобщенной работы

В. Н. Афанасьев¹, Н. А. Фролова²

МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Россия¹

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия²

afanval@mail.ru, matveeva.nataljja@physics.msu.ru

В настоящей работе рассматривается задача синтеза оптимальных управлений для нелинейного объекта в постановке задачи дифференциальной игры с функционалом обобщенной работы (ФОР), доказана асимптотическая устойчивость системы с синтезированными управлениями. Использование ФОР позволяет применить стандартную методику синтеза оптимального управления для линейных систем с квадратическим функционалом качества и учесть ограничения на управляющие воздействия, найти условия существования седловой точки функционала.

Ключевые слова: функционал обобщенной работы, оптимальное управление

1. Введение

Трудности синтеза оптимальных управлений нелинейными динамическими объектами обусловили появление функционалов обобщенной

работы (ФОР) [2]. В ряде случаев такие функционалы являются плохоопределенными в том смысле, что они содержат неизвестное до выполнения синтеза положительно определенное слагаемое. В отличие от известных работ в настоящей работе рассматривается задача синтеза оптимальных управлений в постановке задачи дифференциальной игры.

2. Основной результат

Рассматривается детерминированная система следующего вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= [A(t)x(t) + \psi(x(t))v(t)] + B(t)u(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

где $x(\cdot) \in \Omega_x : C^1([t_0, t_f], R^n)$ — вектор состояния; $X_0 \in \Omega_x$ — множество начальных условий; $u(\cdot) \in C^1([t_0, t_f], R^r)$ — управляющее воздействие (в качестве первого игрока); $v(\cdot) \in C^1([t_0, t_f], R^k)$ — возмущение (в качестве второго игрока), $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times m}$, $\psi(\cdot) \in R^{n \times k}$ непрерывные матрицы-функции, причем $\psi(0) \neq 0$ и существует матрица $\frac{\partial \psi(x(t))}{\partial x}$.

На управляющие воздействия $u(t)$ и $v(t)$ наложены ограничения вида $p \int_{t_0}^{t_f} \|v(t)\|^2 dt \leq E_v, r \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|^2 dt \leq E_u$.

Рассматривая возмущение $v(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующее успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_v .

Введем функционал качества дифференциальной игры

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) &= \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) - pv^T(t)v(t) + ru^T(t)u(t) - \mu [\psi^T(x)S(t)x(t)]^2] dt, \end{aligned}$$

$$F = F^T, F \succcurlyeq 0, Q \succcurlyeq 0, r > 0, p > 0, \mu > 0, S(t) = S^T(t), S(t) \succ 0,$$

$S(t)$ — неизвестная.

Предположение 1. Пусть матрицы $A(t)$, $B(t)$, $\psi(x) = \psi(x(t))$, $t \in [t_0, t_f]$ такие, что функция $V(t, x) \triangleq \inf_u \sup_v J(x(t), u(t), w(t))$ дифференцируемая при любых допустимых управлениях $u(\cdot) \in L_2[t_0, t_f]$, $v(\cdot) \in L_2[t_0, t_f]$.

Предположение 2. Функция $V(t, x)$ локально липшицева в Ω_x .

Лемма 1. Если существуют оптимальные управления в задаче дифференциальной игры, то они единственны и определяются уравнениями

$$(2) \quad \begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{r}B^T(t) \left[\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right]^T, \\ v(t) &= \frac{1}{p}\psi^T(x(t)) \left[\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right]^T, \end{aligned}$$

где вектор $\left[\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right]^T$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Айзека [2, 3]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right] Ax + \frac{1}{2p} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right] \psi \psi^T \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T + \frac{1}{2}x^T Qx - \\ &- \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right] BB^T \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^T - \frac{\mu}{2}x^T S \psi \psi^T Sx = 0, \\ &V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f). \end{aligned}$$

Пусть $V(t, x(t)) = \frac{1}{2}x^T(t)S(t)x(t)$ с точностью до матрицы $S(t)$. Назначим $\mu = \frac{3}{p}$, тогда, проведя преобразования, получим управления в виде

$$(3) \quad u(t) = -\frac{1}{r}B^T(t)S(t)x(t), \quad v(t) = \frac{1}{p}\psi^T(x(t))S(t)x(t).$$

Теорема 1. Динамическая система (1) с управляющими воздействиями (3), где матрица $S(t)$ является симметрической положительно определенной и находится решением уравнения типа Риккати

$$\frac{d}{dt}S(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) - \frac{3}{r}S(t)B(t)B^T(t)S(t) + Q = 0$$

с краевым условием $S(t_f) = F$, локально асимптотически устойчива при выполнении условия: матрица $\frac{p}{2r}B(t)B^T(t) + \psi(x(t))\psi^T(x(t))$, $\forall x(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенной.

Теорема 2. Дифференциальная игра имеет цену, если соотношение ограничений, наложенных на действия игроков G_u, G_v , таково, что выполняется условие $E_u - 2E_v \geq 0$.

Список литературы

1. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
2. *Isaacs R.* Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.
3. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАНД, 2015.

Optimal Control Design for Differential Game with Functional of Generalized Work

*V. N. Afanas'ev*¹, *N. A. Frolova*²

МИЕМ HSE, Moscow, Russia¹

MSU²

afanval@mail.ru, matveeva.nataljja@physics.msu.ru

In this paper the optimal control design problem is considered for a nonlinear object as differential game with the functional of generalized work. The asymptotic stability of the system with proposed controls is proved. Using the functional of generalized work it is possible to apply the standard method of control design for linear objects with quadratic quality functional and to find the existence conditions of the saddle point of the functional.

Экспериментальное исследование статических характеристик микроструйного триггера

А. В. Балабанов, А. М. Касимов

ИПУ РАН, Москва, Россия
fca07@mail.ru, kasimov@ipu.ru

Проведены экспериментальные исследования основных статических характеристик микроструйного триггера с характеристическим размером 100 мкм. С целью исследования триггера, специально изготовлен его экспериментальный образец. В результате исследований получены передаточные и расходные характеристики триггера для двух схем включения: 1) релейной схемы с управлением по двум входам; 2) схемы компаратора с управлением по одному входу и с заданной величиной опорного сигнала на втором входе.

Ключевые слова: критический объект, резервная система управления, струйная техника, триггер

1. Введение

Высокая устойчивость устройств струйной техники ко многим дестабилизирующим факторам (в первую очередь, к электромагнитному и корпускулярному излучениям) является основной предпосылкой для построения резервных струйных систем управления [1, 2], особенно при управлении критическими объектами, отказы которых могут привести к катастрофическим последствиям. Для разработки высоконадежных резервных струйных систем управления требуется иметь полные и достоверные данные о рабочих характеристиках отдельных струйных элементов, особенно тех, которые составляют основу построения цифровых струйных схем. В этой связи, в статье представлены результаты экспериментальных исследований передаточных и расходных характеристик микроструйного триггера с шириной канала питания 100 мкм (см. рис. 1).

2. Результаты экспериментальных исследований

В качестве примера на рис. 2 представлены характеристики, соответствующие работе триггера в режиме компаратора при давлении питания 300 мм вод. ст. Однако результаты анализа экспериментальных данных, представленные в разделе 3, учитывают все полученные характеристики (режим реле и режим компаратора при $P_{п} = 300, 1500$

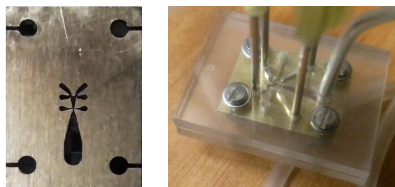


Рис. 1: Исследуемый триггер с шириной канала питания 100 мкм

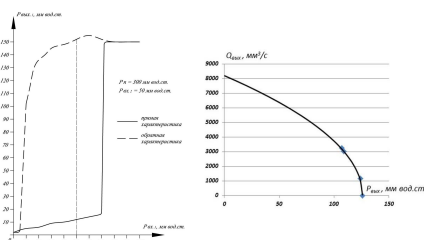


Рис. 2: Пример передаточной и расходной характеристик триггера

и 3000 мм вод. ст.). График передаточной характеристики (слева) отражает зависимость давления на измерительном выходе триггера ($P_{\text{вых}}$) от давления на управляющем входе триггера ($P_{\text{вх}}$). Сплошной линией на графике обозначена прямая передаточная характеристика, пунктирной линией – обратная характеристика. График расходной характеристики (справа) отражает зависимость расхода на выходе триггера ($Q_{\text{вых}}$) от давления выходного сигнала ($P_{\text{вых}}$). На графике обозначены четыре точки, полученные экспериментально при четырех различных значениях нагрузки. На основе четырех экспериментальных точек найдена аппроксимирующая функция, при помощи которой построена полная расходная характеристика.

3. Анализ экспериментальных данных

На основе экспериментального исследования расходных характеристик микроструйного триггера сделан вывод, что с увеличением давления питания крутизна расходной характеристики уменьшается. Таким образом, изменение нагрузки триггера в процессе его работы на малых давлениях будет вызывать более значительные относительные изменения расхода на выходе по сравнению с работой триггера на более высоких давлениях питания. Однако коэффициент полезного действия при

понижении давления питания увеличивается.

При исследовании передаточных характеристик установлено следующее. Понижение давления питания в режиме реле сдвигает петлю гистерезиса в отрицательную область входных давлений, что указывает на увеличение устойчивости микроструйного триггера. Повышение давления питания снижает устойчивость триггера. Увеличение нагрузки в режимах реле и компаратора расширяет петлю гистерезиса, но снижает уровень выходного давления; при этом, увеличение нагрузки в режиме компаратора ухудшает пороговую чувствительность. В режиме компаратора обеспечивается более высокий уровень выходного сигнала по сравнению с режимом реле при равных давлениях питания. Однако крутизна обратной характеристики триггера в режиме реле больше.

4. Заключение

В результате проведенных экспериментальных исследований получены и проанализированы передаточные и расходные характеристики микроструйного триггера в различных рабочих режимах, что обеспечивает возможность повышения качества разрабатываемых струйных схем для резервных систем управления критическими объектами.

Список литературы

1. *Касимов А.М., Мамедли Э.М., Мельников Л.И.* Вопросы разработки и реализации разнородной системы управления летательным аппаратом // Датчики и системы. 2012. № 5. С. 2-6.
2. *Касимов А.М., Попов А.И.* Перспективы применения струйной техники в повышении безопасности СУ критическими объектами / Труды 25-й Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем» (Москва, 2017). М.: РГГУ, 2017. С. 570-572.

Experimental Research of Static Characteristics of Microfluidic Trigger

A. V. Balabanov, A. M. Kasimov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia
fca07@mail.ru, kasimov@ipu.ru

Experimental research of the main static characteristics of a microfluidic trigger of the 100-micrometer feature size is carried out. In order to research the trigger, the experimental model has been especially made. As a result of the research, the transfer and flow-rate characteristics of the trigger are obtained in relation to the two connection schemes: 1) the

relay scheme with the two-input control, 2) the comparator scheme with the control at a first input and with a reference setpoint at a second input.

УДК 681.584.32

Разработка устройств струйной техники на основе многомерных сетей

А. В. Балабанов, А. М. Касимов

ИПУ РАН, Москва, Россия
fca07@mail.ru, kasimov@ipu.ru

Разработан метод анализа и синтеза конструкций устройств струйной техники на основе многомерных сетей. Метод обеспечивает возможность формирования множества возможных вариантов конструкции в виде многомерной сетевой модели и выбора лучшего варианта конструкции при помощи вычисления кратчайшего пути в сети.

Ключевые слова: струйная техника, анализ и синтез, многомерная сетевая модель.

1. Введение

На этапе создания конструкции струйного устройства целесообразно использовать, в числе других средств, формальные методы разработки, которые могут значительно расширить множество рассматриваемых вариантов конструкции и, одновременно с этим, обеспечить выбор лучшего варианта конструкции по заданным критериям на основе строго определенных правил. В этой связи, авторами разработан метод анализа и синтеза конструкций устройств струйной техники на основе многомерных сетей (метод МСМ).

2. Описание метода МСМ

На первом этапе разработки устройств струйной техники при помощи метода МСМ выполняется анализ и классификация требований к устройству по выделенным признакам, количество которых может быть любым. В качестве примера, в статье рассмотрены три типа признаков: геометрические, конструкционные и функциональные. В соответствии с группами признаков определяется состав структурных

классов (в данном случае, геометрические, конструкционные и функциональные классы). Для каждого структурного класса формируется множество объектов, представляющих собой возможные реализации этого класса в конструкции устройства. Например, в качестве одного из функциональных классов может быть задано гидравлическое сопротивление канала обратной связи, а объекты этого класса могут представлять собой возможные реализации канала с фиксированным гидравлическим сопротивлением при различных сочетаниях формы поперечного сечения и траектории.



Рис. 1: Пример различных исполнений микроструйного триггера

В качестве еще одного примера объектов структурного класса рассмотрим различные исполнения микроструйного триггера, представленные на рис. 1. Все исполнения отличаются геометрией рабочего профиля, но имеют одинаковое функциональное назначение (реле) и конструктивное исполнение (в виде пластин).

На втором этапе, множества объектов структурных классов необходимо систематизировать в виде многомерной сетевой модели (МСМ), количество измерений которой выбирается в соответствии с количеством структурных классов. При построении МСМ образуется множество возможных вариантов конструкции. Каждому варианту конструкции соответствует возможный путь от входа к выходу МСМ, при этом количество возможных вариантов конструкции ограничено правилами [1, 2 и др.] переходов между вершинами МСМ.

На рис. 2 приведен пример трехмерной МСМ микроструйного генератора. Количество измерений МСМ определяется составом структурных классов и может быть различным. Вершинами МСМ являются объекты структурных классов – элементы конструкции генератора. Эллипсоиды МСМ представляют собой сильно связанные графы операций преобразования объектов структурных классов, при которых каждая переменная компонента параметрического вектора [1] структурного класса пробегает множество своих значений. Петли МСМ соответствуют операциям построения объектов структурных классов – в данном случае, сборочным операциям для основных элементов (триг-

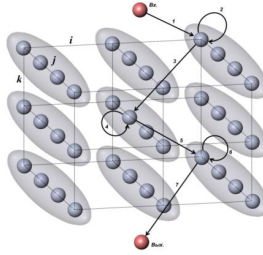


Рис. 2: Пример МСМ микроструйного генератора

геров). Остальные ребра (кроме входного и выходного) МСМ отражают операции переходов между объектами структурных классов (например, формирование связей между триггерами). При этом триггеры, соответствующие концевым вершинам каждого ребра операции перехода, должны быть согласованы по входным и выходным характеристикам (по расходу, по давлению и др.). Ребра по входу и выходу МСМ представляют собой комплексные сборочные операции установки внешних элементов конструкции (основания, крышки, элементов сопряжения с другими устройствами). В качестве примера, на рис. 2 показаны ребра, отражающие кратчайший путь в МСМ, который соответствует лучшему (по заданным критериям) варианту конструкции микроструйного генератора.

3. Заключение

Таким образом, разработанный метод обеспечивает формирование и компактное представление множества возможных вариантов конструкции струйного устройства при помощи построения МСМ, а также выбор лучшего варианта конструкции при помощи вычисления кратчайшего пути в сети. Количество возможных вариантов и лучший вариант конструкции в МСМ могут изменяться в зависимости от заданных критериев оценки качества разрабатываемого струйного устройства.

Список литературы

1. Балабанов А. В. Структурный синтез 3D-моделей с базовыми конструктивными элементами // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2017. № 2. С. 50–54.
2. Балабанов А. В. Структурный синтез динамических 3D-моделей пространственных механизмов // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2017. № 3. С. 44–46.

Design of Fluidics on Basis of Multidimensional Networks

A. V. Balabanov, A. M. Kasimov
fca07@mail.ru, kasimov@ipu.ru

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

The method of analyzing and synthesizing the fluidics designs on the basis of the multidimensional networks is devised. The method provides the possibility of forming a set of possible variants of the design in the form of multidimensional network models, and selecting the best design variant by means of calculating the shortest path within the network.

УДК 62-50

Множества достижимости в задаче управления сферическим роботом с маятниковым приводом

Д. В. Баландин¹, Р. С. Бирюков^{1,2}, М. М. Коган²

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия

ННГАСУ, Н. Новгород, Россия

dbalandin@yandex.ru, mkogan@nngasu.ru

В работе рассматривается математическая модель безотрывного движения сферического робота по горизонтальной плоскости. Предложен способ синтеза законов управления в форме линейной обратной связи по состоянию, обеспечивающих движение робота в заданной эллипсоидальной трубчатой окрестности желаемой траектории движения. Работоспособность построенных законов управления подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Ключевые слова: сферический робот, математическая модель, области достижимости, отслеживание траектории

1. Введение

В данном докладе рассматривается модель сферического робота, представляющего собой две тонкостенные концентрические сферические оболочки. Подвижным элементом такой конструкции, приводящим робот в движение, является внутренняя оболочка, вращающаяся относительно внешней сферической оболочки робота. Это вращение

может осуществляться, например, за счет электромагнитов, распределенных по сферической поверхности робота. Как показывает дальнейший анализ, управление таким роботом реализовать гораздо проще, чем роботом с маятником, подвешенным в центре сферической оболочки и приводимым в движение двигателем.

2. Уравнения движения сферического робота

Предположим, что робот движется по горизонтальной плоскости. В этом случае динамика такого робота описывается следующей безразмерной системой дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}_{\text{тр}}, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{Q} - \gamma [\mathbf{k} \times \mathbf{F}_{\text{тр}}], \quad \mathbf{F}_{\text{тр}} = -\kappa N \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|},$$

где $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z)$ и $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ — векторы положения центра масс робота и его угловой скорости, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ — сила трения между оболочкой и опорной плоскостью, $\mathbf{v}_c = \dot{\boldsymbol{\xi}} - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}]$ — мгновенная скорость точки контакта оболочки с опорной плоскостью, \mathbf{Q} — вектор управления, κ — коэффициент сухого трения, $\gamma \geq 3/2$ — параметр модели и $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор нормали к опорной плоскости.

Приведенное выражение справедливо, если $\mathbf{v}_c \neq 0$, в противном случае скольжение отсутствует и система (1) принимает вид:

$$(2) \quad \left((1 + \gamma)I - \gamma \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \right) \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{Q}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}],$$

здесь использовано предположение, что движение происходит без вращения, т. е. $\langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k} \rangle = 0$. Кроме того, в отсутствие скольжения должно выполняться условие $|\mathbf{F}_{\text{тр}}| < \kappa$.

3. Синтез законов управления

Построим вектор управления \mathbf{Q} , обеспечивающий приближение центра робота к заданной траектории $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\Xi}(t)$, здесь $\boldsymbol{\Xi}(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, следующим образом:

$$(3) \quad \mathbf{Q} = \left((1 + \gamma)I - \gamma \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \right) \dot{\boldsymbol{\Omega}}_0 + \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_0), \quad \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}^\top, \dot{\boldsymbol{\xi}}^\top)^\top,$$

где матрица коэффициентов обратной связи $\boldsymbol{\Theta}$, вообще говоря, может быть функцией времени. Заметим, что первое слагаемое в (3) представляет из себя программное управление в случае, когда справедливо условие $\boldsymbol{\Omega}(0) = [\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\Xi}}(0)]$.

Для определения параметров обратной связи $\boldsymbol{\Theta}$ предположим, что $\boldsymbol{\zeta}(0)$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{\zeta}_0 + \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{w} : |\mathbf{w}| \leq 1\}$,

$R = R^\top \geq 0$. В этом случае множество достижимости системы в произвольный момент времени t также является эллипсоидом с центром в точке $\Xi_0(t)$. Потребуем выполнение следующих условий:

$$(4) \quad \forall t \in [0, T] : \quad \zeta(t) \in \mathcal{E}(\rho^2 I), \quad (\zeta - \zeta_0)^\top \Theta^\top Q^{-1} \Theta (\zeta - \zeta_0) \leq 1,$$

где $Q = Q^\top > 0$. Первое условие обеспечивает нахождение состояния в шаре радиуса ρ в каждый момент времени, а второе — ограниченность вектора корректирующего управления. Таким образом, матрица регулятора Θ может быть найдена из решения задачи $\min \rho$ при ограничениях (4).

4. Результаты численного моделирования

При проведении числительных экспериментов примем следующие значения параметров $\kappa = 0,8$, $\gamma = 10,5$. Желаемая траектория движения есть окружность $x_0(t) = 2 \cos \alpha t$, $y_0(t) = 2 \sin \alpha t$, $z_0(t) = 2$, $\alpha = 0,5$. Начальное положение робота $\xi(0) = (r + 0, 2, 0, 1)$.

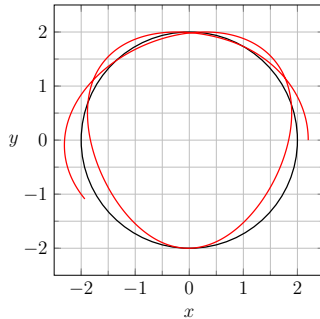


Рис. 1: Приближение сферического робота к заданной траектории

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования приближения сферического робота к движению вдоль окружности: линией черного цвета показана желаемая траектория, а красной линией — траектория движения центра сферического робота. Как можно видеть, построенное управление обеспечивает приемлемое решение поставленной задачи.

5. Заключение

В работе рассматривается математическая модель движения сферического робота по горизонтальной плоскости. Предложен способ син-

теза законов управления в форме линейной обратной связи по состоянию, обеспечивающих движение робота в заданной эллипсоидальной трубчатой окрестности желаемой траектории движения. Корректность работы синтезированных законов управления продемонстрирована численными экспериментами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проекты № 18-41-520002, № 19-01-00289).

Reachable Sets in the Control Problem of a Spherical Robot With Pendulum Driver

D. V. Balandin, R. S. Biryukov, M. M. Kogan

Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Russia
Architecture and Civil Engineering State University, Nizhny Novgorod, Russia
dbalandin@yandex.ru, mkogan@nngasu.ru

We consider the path tracking problem for a rolling spherical robot on a horizontal plane. It is proposed a method for synthesizing state feedback control laws that ensure the robot movement in a given ellipsoidal tubular neighborhood of the desired trajectory. The effectiveness of the proposed control laws is demonstrated by the results of computer simulation.

Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем

Д. В. Баландин, М. М. Коган

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
ННГАСУ, Н. Новгород, Россия
dbalandin@yandex.ru, mkogan@nngasu.ru

Рассматривается линейная нестационарная система при неточно известных начальном состоянии и действующем возмущении, удовлетворяющих единому ограничению. Ограничение представляет собой сумму квадратичной формы начального состояния и интеграла по времени от квадратичной формы возмущения, причем эти квадратичные формы могут быть вырожденными. Получено линейное матричное дифференциальное уравнение Ляпунова, описывающее эволюцию эллипсоидального множества достижимости. Приведены иллюстрирующие примеры для уравнения Матье, которое описывает параметрические колебания линейного осциллятора.

Ключевые слова: эллипсоидальные множества достижимости, дифференциальное матричное уравнение Ляпунова.

В задачах оценивания и управления в динамических системах при отсутствии полной информации о параметрах математической модели, начальных условиях, возмущениях и помехах в измерениях важную роль играет множество достижимости системы, понимаемое как множество всех состояний, в которых система может оказаться в данный момент времени при всевозможных допустимых значениях неопределенных факторов. Характеризация множеств достижимости позволяет проектировать робастные системы оценивания и управления, при которых множества достижимости синтезированной системы в данный момент времени или в течение некоторого интервала времени включены в желаемые целевые множества с оптимальными характеристиками.

Рассмотрим динамический объект, описываемый нестационарной системой линейных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние объекта, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ — возмущение, действующее на объект. Предположим, что начальное состояние $x(t_0)$ и возмущение $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$ принадлежат множеству допустимых пар началь-

ных состояний и возмущений $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, определяемому как

$$(2) \quad \mathcal{S}(t, \tau; R, G) = \{(x, v(\sigma)) : x = R^{1/2}w_1, v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma)w_2(\sigma), \\ |w_1|^2 + \int_{\tau}^t |w_2(\sigma)|^2 d\sigma \leq 1\}$$

для заданных матрицы $R^T = R \geq 0$ и матричной функции $G^T(\sigma) = G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [\tau, t]$. Если $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, $\sigma \in [\tau, t]$, то, выражая w_1 и $w_2(\sigma)$ из первых двух равенств в (2) и подставляя в третье неравенство, приходим к условию

$$(3) \quad x^T(\tau)R^{-1}x(\tau) + \int_{\tau}^t v^T(\sigma)G^{-1}(\sigma)v(\sigma) d\sigma \leq 1.$$

Таким образом, ограничение, определяемое в (2), «распространяет» ограничение (3) на случай вырожденных матриц R и/или $G(\sigma)$. Из (2) следует, что множество начальных состояний системы совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(R) = \{x = R^{1/2}w : |w| \leq 1\}$. Если $R > 0$, то приходим к стандартному представлению эллипсоида $\mathcal{E}(R) = \{x : x^T R^{-1} x \leq 1\}$. Если $R \geq 0$, то $\mathcal{E}(R)$ — вырожденный эллипсоид, аффинная размерность которого совпадает с рангом матрицы R . Обозначим через $\varphi(t; \tau, x, v)$ решение уравнения (1) с начальным условием $\varphi(\tau) = x$ при соответствующей функции $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$.

Определение. Множеством достижимости $\mathcal{D}(t, \tau, \mathcal{E}(R))$ системы (1) в момент времени $t \geq \tau$ называется совокупность концов траекторий $\varphi(t; \tau, x_\tau, v)$ при всех допустимых начальных состояниях $x_\tau \in \mathcal{E}(R)$ в момент времени τ и возмущениях $v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, \tau; R, G)$.

Теорема. Множеством достижимости системы (1) в момент времени $t \geq t_0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ с $R \geq 0$ и $G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, является эллипсоид

$$(4) \quad \mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(Y(t)),$$

матрица которого $Y(t) \geq 0$ — решение линейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова

$$(5) \quad \dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t), \quad Y(t_0) = R.$$

В качестве примера рассмотрим известное уравнение Матье, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \omega t)x_1 + v \\ x_1(0) &= x_{10}, & x_2(0) &= x_{20}, \end{aligned}$$

где ω_0 , ω и ε — заданные параметры, $v = v(t)$ — внешнее возмущение, действующее на осциллятор. При проведении вычислительных экспериментов полагается, что $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0,1$. Пусть $G(\sigma) \equiv 0$, а $R = \text{diag}(0, 1)$, т.е. в качестве допустимых начальных условий полагается $x_{10} = 0$, $x_{20} \in [-1, 1]$. На рис. 1 показана эволюция во времени величины L , определяющей длину половины отрезка — множества достижимости.

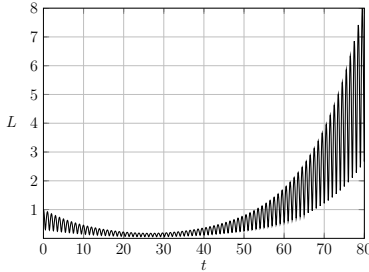


Рис. 1: Динамика «размера» множества достижимости уравнения Матье в вырожденном случае

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проекты 18-41-520002, 19-01-00289).

Ellipsoidal Reachable Sets for Linear Time-Varying Systems

D. V. Balandin, M. M. Kogan

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
 Architecture and Civil Engineering University, Nizhny Novgorod, Russia
 dbalandin@yandex.ru, mkogan@mngasu.ru

The paper is devoted to reachable sets of linear time-varying systems under uncertain initial states and disturbances with a bounded uncertainty measure. The uncertainty measure is the sum of a quadratic form of the initial state and the integral over the finite-time interval from a quadratic

form of the disturbance. It is shown that the reachable set of the system under this assumption is an evolving ellipsoid with a matrix being a solution to the linear matrix differential equation. Numerical modeling with the Mathieu equation for parametric vibrations of a linear oscillator illustrates the results.

УДК 519.71

Резонансные колебания связанной управляемой системы в окрестности равновесия

И. Н. Барабанов, В. Н. Тхай

ИПУ РАН, Москва, Россия
ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

Рассматривается нелинейная автономная связанная система общего вида в окрестности равновесия. Предполагается, что матрица линейного приближения имеет пару чисто мнимых собственных значений с частотой ω ; другие собственные значения не кратны указанному и отличны от нуля. Исследуются колебания при действии на систему периодического управления с частотой $2\pi/\omega$ и малым коэффициентом регулятора k . Устанавливается существование резонансного колебания управляемой системы, в терминах параметра k оцениваются амплитуды колебаний, анализируется устойчивость колебания. Ранее результат был известен для системы Ляпунова.

Ключевые слова: нелинейная автономная система, равновесие, резонанс, периодическое управление, колебание, устойчивость

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная автономная связанная система общего вида в окрестности равновесия. Предполагается, что матрица линейного приближения имеет пару чисто мнимых собственных значений с частотой ω ; другие собственные значения не кратны указанному и отличны от нуля. Ставится задача для системы общего вида найти периодическое управление с малым коэффициентом регулятора k , гарантирующее существование резонансного колебания управляемой системы в окрестности равновесия вне зависимости от наличия *внутреннего резонанса* в неуправляемой системе.

Ранее в рамках данной задачи исследовались системы Ляпунова [1,

гл.VIII], а также системы общего вида при отсутствии *внутреннего резонанса* до 4-го порядка включительно [2].

2. Основной результат

Рассматриваемая система описывается тремя группами переменных. Пара (x_1, y_1) отвечает частоте ω_1 , которая, без ограничения общности, равна натуральному числу p . Тогда действующее управление предполагается 2π -периодическим. Вторая группа переменных $(x_s, y_s, s = 2, \dots, n)$ отвечает чисто мнимым корням $\lambda_s = \pm i\omega_s$ характеристического уравнения. Предполагается, что выполняются условия $\omega_s \neq \pm mp, m \in \mathbb{N}$. Наконец, третья группа переменных w характеризует динамику в окрестности многообразия Υ . Переменные w отвечает корням с ненулевыми действительными частями: на Υ получается $w = 0$.

Используется нормальная форма до членов до 3-го порядка включительно. В результате получается

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= py_1 + f_1(x, y) + X_1(x, y, w) + kF_1(t), \\ \dot{y}_1 &= -px_1 + g_1(x, y) + Y_1(x, y, w) + kG_1(t), \\ \dot{x}_s &= \omega_s y_s + f_s(x, y) + X_s(x, y, w) + k\Xi_s(t), \\ \dot{y}_s &= -\omega_s x_s + g_s(x, y) + Y_s(x, y, w) + kH_s(t), \\ \dot{w} &= Pw + W^{(2)}(x, y, w) + W(x, y, w) + k\Phi(t), \\ x &= (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Здесь в уравнениях для переменных x и y выделяются слагаемые f_1, g_1, f_s, g_s , содержащие члены до 3-го порядка включительно по переменным: они состоят из членов тождественного и внутреннего резонансов. Согласно анализу резонансной нормальной формы функции $f_s, g_s, s = 2, \dots, n$, обращаются в нуль при $x_2 = y_2 = \dots = x_n = y_n = 0$, а в силу существования многообразия Υ квадратичные члены $W^{(2)}$ в уравнениях для w не содержат слагаемых свободных от w . Отсюда следует, что в укороченной системе, в которой

$$X_1 = Y_1 = 0, \quad X_s = Y_s = 0 \quad (s = 2, \dots, n), \quad W^{(2)} = 0, \quad \Phi = 0,$$

система (1) допускает единственное 2π -периодическое резонансное колебание, для которого

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= py_1 + f_1^*(x_1, y_1) + kF_1(t), \quad \dot{y}_1 = -px_1 + g_1^*(x_1, y_1) + kG_1(t), \\ x_2 &= y_2 = \dots = x_n = y_n = 0, \quad w = 0. \end{aligned}$$

Согласно нормальной форме функции f_1^* и g_1^* даются членами тождественного резонанса и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1^* &= f_1(x_1, y_1, 0, \dots, 0) = (a_{11}x_1 - b_{11}y_1)(x_1^2 + y_1^2), \\ g_1^* &= g_1(x_1, y_1, 0, \dots, 0) = (a_{11}y_1 + b_{11}x_1)(x_1^2 + y_1^2), \end{aligned}$$

где a_{11} и b_{11} — постоянные коэффициенты. Само решение укороченной системы описывается формулами

$$\begin{aligned} (3) \quad \xi &= k^{1/3}x_1^0 + k \int_0^t \left[f_{11}(x_1^0, y_1^0) + \tilde{F}_1(t) \right] dt, \\ \eta &= k^{1/3}y_1^0 + k \int_0^t \left[g_{11}(x_1^0, y_1^0) + \tilde{G}_1(t) \right] dt, \\ (x_1 + iy_1) &= (\xi + i\eta)\exp(ipt), \quad F_1 + iG_1 = (\tilde{F}_1 + i\tilde{G}_1)\exp(ipt). \end{aligned}$$

При этом начальная точка колебания принадлежит плоскости (x_1, y_1) , а координаты x_1^0 и y_1^0 даются равенствами

$$\begin{aligned} (4) \quad x_1^0 &= -\frac{I_{y1}b_{11} - I_{x1}a_{11}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}}, \\ y_1^0 &= -\frac{I_{x1}b_{11} + I_{y1}a_{11}}{\sqrt[3]{2\pi(a_{11}^2 + b_{11}^2)[(I_{x1}b_{11} - I_{y1}a_{11})^2 + (I_{y1}b_{11} + I_{x1}a_{11})^2]}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad I_{x1}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \tilde{F}_1(\tau) d\tau, \quad I_{y1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \tilde{G}_1(\tau) d\tau, \\ I_{x1} &= I_{x1}(2\pi), \quad I_{y1} = I_{y1}(2\pi). \end{aligned}$$

Оказывается, что решение укороченной системы приводит к резонансному колебанию связанной управляемой системы в окрестности равновесия. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в окрестности равновесия системы общего вида характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$; остальные корни не кратны $\pm i\omega$ и не равны нулю. Тогда при действии $2\pi/\omega$ -периодических управлений в системе реализуется единственное $2\pi/\omega$ -периодическое резонансное колебание.

Для системы, записанной в виде (1), решение принадлежит $O(k)$ -окрестности множества $\{x, y, w : x_2 = y_2 = \dots = x_n = y_n = 0, w = 0\}$, на котором переменные x_1 и y_1 с точностью до $o(k)$ задаются формулами (2)–(5).

Доказательство теоремы проводится на основе общего результата о существовании периодических решений, установленного в [3, Теорема 5], при этом используется метод масштабирования.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой, если частота ω неуправляемой системы $O(k)$ -близка к натуральному числу.

Замечание 2. Частные случаи теоремы 1 установлены для систем Ляпунова в [1], а также для систем общего вида и в [2] в случае отсутствия внутренних резонансов до 4-го порядка включительно.

Замечание 3. Теоремой 1 полностью решается задача нахождения периодического управления с малым коэффициентом регулятора с целью реализации резонансного колебания связанной управляемой системы в окрестности равновесия, и это решение не зависит от наличия внутренних резонансов в неуправляемой системе.

Вопрос устойчивости резонансного колебания решается путем составления системы уравнений в вариациях, которая с точностью до членов низшего порядка по k содержит постоянные коэффициенты. Тогда необходимые условия устойчивости состоят в нахождении собственных значений матрицы P в левой полуплоскости. Достаточные условия накладываются на корни характеристического уравнения для системы в вариациях. Здесь ситуация вполне аналогична описанной в [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00146).

Список литературы

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГТТЛ, 1956.
2. Барabanov И.Н., Тхай В.Н. Колебания связанной управляемой системы в окрестности равновесия // АиТ. 2019. № 12. С.47–58.
3. Тхай В.Н. О методе Ляпунова-Пуанкаре в теории периодических движений // Прикл. матем. и механ. 1998. Т.62. Вып.3. С.355–371.

Resonant Oscillations of the Coupled Controlled System near Equilibrium

I. N. Barabanov, V. N. Tkhai

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia
ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

A nonlinear autonomous coupled system of general form in the vicinity of equilibrium is considered. The linear approximation matrix is assumed to have a pair of purely imaginary eigenvalues with the frequency ω ; other eigenvalues are not multiples of the specified one and are nonzero. Oscillations occurred under the small gain $2\pi/\omega$ -periodic control are investigated. The existence of a resonant oscillation of the controlled system is established, the amplitudes of the oscillations are estimated in terms of the gain parameter k , and the stability of the oscillation is analyzed. Previously, the result was known for the Lyapunov system.

**Об условии вполне управляемости поэтапно меняющихся
линейных динамических
систем с изменяющейся размерностью
вектора управления**

В. Р. Барсегян

Институт механики НАН Армении,
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
barseghyan@sci.am

Рассмотрена задача управления поэтапно меняющихся линейных динамических систем с изменяющейся размерностью вектора управления. Получено необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных систем с изменяющейся размерностью вектора управления, при выполнении которого систему из заданного произвольно на первом этапе начального состояния можно перевести в любое заданное для последнего этапа конечное состояние с соответствующими управляющими воздействиями. Условие вполне управляемости для поэтапно меняющейся линейной стационарной системы выражено непосредственно через исходные параметры системы и сравнимо с известным условием Калмана для обычных систем. Выявлены качественные свойства управляемости таких систем.

Ключевые слова: поэтапно меняющейся система, изменяющейся размерностью вектора управления, управление, вполне управляемость

1. Введение

Исследование многих прикладных задач процессов управления сводится к динамическим системам, структурные параметры и вектор управления которых на разных этапах функционирования разные, в частности, к поэтапно меняющимся системам с изменяющейся размерностью вектора управления. Как в обычных задачах управления [1,2], так и в задачах управления систем поэтапно меняющихся с изменяющейся размерностью вектора управления принципиальными являются вопросы управляемости. Поэтому возникает необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления таких динамических систем, в которых эффектами многоэтапности и изменения размерности вектора управления пренебречь нельзя. Некоторые вопросы управляемости поэтапно меняющихся систем исследованы, в частности, в работах [3,4].

2. Об основных результатах

В работе рассматривается управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными нестационарными дифференциальными уравнениями

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u^{(1)}(t) & \text{при } t \in [t_0, t_1), \\ A_2(t)x + B_2(t)u^{(2)}(t) & \text{при } t \in [t_1, t_2), \\ \vdots & \\ A_m(t)x + B_m(t)u^{(m)}(t) & \text{при } t \in [t_{m-1}, T], \end{cases}$$

где $x(t) \in R^n$ — фазовый вектор системы, $A_k(t)$, $B_k(t)$ — матрицы параметров системы, $k = \overline{1, m}$, $u^{(k)}(t)$ — управляющее воздействие k -го этапа с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (n \times r_k)$, $u^{(k)}(t) - (r_k \times 1)$ соответственно. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц-функций $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u^{(k)}(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т. е. в моменты времени t_k имеем условия связи

$$(2) \quad x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \text{ при } k = \overline{1, m-1}.$$

Рассматриваемая задача заключается в том, чтобы найти условие, при котором система (1) с условиями связи (2) будет вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$.

Система (1) с промежуточными условиями связи (2) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0) = x_0$ и конечных $x(T) = x_T$ состояний можно найти набор управлений $u^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, m}$, такой, что решение $x(t)$, начиная из состояния $x(t_0)$ и удовлетворяя промежуточным условиям (2) в момент времени $t = T$, удовлетворяет условию $x(T) = x_T$.

Для поэтапно меняющейся линейной нестационарной динамической системы (1) с изменяющимися размерностями вектора управления и с промежуточными условиями (2) сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Это условие для стационарной системы выражено непосредственно через исходные параметры системы (через матрицы A_k и B_k , $k = \overline{1, m}$) и сравнимо с известным условием Калмана для обычных систем и является его обобщением. Выявлены качественные свойства управляемости таких

систем. Построен пример поэтапно меняющейся линейной стационарной системы с изменяющейся размерностью вектора управления, которая на отдельных интервалах времени функционирования не вполне управляема, а в целом на всем отрезке времени является вполне управляемой. Приведено решение задачи управления конкретной поэтапно меняющейся линейной системы с изменяющейся размерностью вектора управления.

Список литературы

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления. Труды I Конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
4. *Барсегян В.Р.* Об управляемости и наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XIV Межд. науч. конф. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 60–62.

On the Condition of Complete Controllability of Stage by Stage Changing Linear Dynamic Systems with Varying Dimension of the Control Vector

V. R. Barseghyan

Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan
State University, Yerevan, Armenia
barseghyan@sci.am

The control problem of stage by stage changing linear dynamic systems with varying dimension of the control vector is considered. A necessary and sufficient condition for complete controllability of the stage by stage changing linear non-stationary systems with varying dimension of the control vector is obtained; if the condition is satisfied the system can be transferred from any given initial state specified at the first stage to any final state specified for the last stage with the corresponding control actions. The condition of complete controllability for a stage by stage changing linear stationary system is expressed directly through the initial parameters of the system and is comparable with the well-known Kalman condition for the ordinary systems. The qualitative properties of controllability of such systems are revealed.

О задаче управления двухзвенного плоского манипулятора с заданными значениями разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени

В. Р. Барсегян^{1, 2}, Т. А. Симомян²

Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения¹
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения²
barseghyan@sci.am, simtom09@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления движением двухзвенного плоского манипулятора в предположении, что заданы начальное и конечное значения фазового вектора, некоторые значения разных частей координат фазового вектора в определенные фиксированные промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Критерий качества имеет смысл нормы некоторого нормированного пространства. Решение задачи приведено к проблеме моментов и построен явный вид оптимального управляющего воздействия и соответствующего движения.

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, оптимальное управление, части координат, фазовые ограничения, критерий качества.

1. Введение

Задачи управления и оптимального управления динамических систем с заданными ограничениями на значения разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени возникают в ряде важных для приложения задач. Исследования этих задач имеют важные значения как для теории, так и для приложения. Подобные задачи, в частности, встречаются в случае управления и оптимального управления манипуляционными роботами, летательными аппаратами, технологическими процессами, при энергосберегающем управлении тепловыми аппаратами и т.д. Некоторые вопросы управления и оптимального управления линейных динамических систем с заданными ограничениями на значения разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени исследованы, в частности, в работах [1-4].

2. Об основных результатах

В работе рассматривается математическая модель двухзвенного манипулятора на горизонтальной плоскости, состоящей из неподвижного основания, двух звеньев G_1 , G_2 и двух цилиндрических шарниров.

Каждое звено манипулятора представляет собой абсолютно жесткий однородный стержень длины L . Система совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости. Предполагается, что центр масс второго звена расположен на оси шарнира, соединяющего с первым звеном, которое соответствует статической уравновешенности второго звена манипулятора.

Составляя уравнение Лагранжа для движения рассматриваемого манипулятора и линеаризируя их, будем иметь уравнение движения манипулятора в виде:

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2,$$

где

$$x_1 = (I_1 + m_2 L^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_1, \quad x_2 = (I_1 + m_2 L^2)^{\frac{1}{2}} \dot{\varphi}_1, \quad x_3 = I_2^{\frac{1}{2}} \varphi_2, \quad x_4 = I_2^{\frac{1}{2}} \dot{\varphi}_2,$$

φ_1, φ_2 — углы между горизонтальной осью и первым и вторым звеньями соответственно, I_1, I_2 — моменты инерции тел G_1, G_2 , относительно соответствующих осей. Управляющими функциями u_1 и u_2 являются главные моменты относительно осей шарниров.

Пусть заданы начальное и конечное

$$(2) \quad x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

состояния системы (1), и в некоторые фиксированные промежуточные моменты времени $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$ заданы значения разных частей координат фазового вектора $x(t_k)$:

$$(3) \quad x_{i_1}(t_k), \dots, x_{i_k}(t_k), \quad (i_k \leq n, \quad k = 1, \dots, m, \quad n = 4),$$

а остальные (при $i_k < n$) $n - i_k$ фазовые координаты в промежуточные моменты времени могут принимать любые значения (т.е. свободны).

Пусть на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $J[u]$, который имеет смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(t_0)$ через промежуточные состояния (3) в конечное состояние $x(T)$ и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $J[u^0]$.

Получены условия, при которых существует программное управляющее воздействие и программное движение. В предположении,

что $m = 2$ (т.е. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), на основе метода проблем моментов [3,5] построено оптимальное управляющее воздействие, переводящее движение системы (1) из начального состояния $x(t_0)$ через промежуточные состояния с заданными значениями $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$ и $x_1(t_2)$, $x_3(t_2)$ разных частей координат фазового вектора в конечное состояние $x(T)$, при котором критерий качества достигает наименьшего возможного значения.

Список литературы

1. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
2. *Верещагин И.Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. 2. Механика программного движения аппарата. Пермь. 1972. 294 с.
3. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
4. *Барсегян В.Р.* Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени // Докл. НАН Армении. 2010. № 3. Т. 110. С. 251–260.
5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

On the Problem of Control of the Two-link Plane Manipulator with Given Values of Different Parts of the Coordinates of the Phase Vector at Intermediate Moments of Time

V. R. Barseghyan^{1 2}, T. A. Simonyan²

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia¹

Yerevan State University, Yerevan, Armenia².
barseghyan@sci.am, simtom09@gmail.com

The problem of optimal control of the movement of a two-link plane manipulator is considered under the assumption that the initial and final values of the phase vector, some values of different parts of the coordinates of the phase vector at definite fixed intermediate moments of time and with a quality criterion specified for the whole interval of time are given. The quality criterion has the meaning of the norm of some normalized space. The solution of the problem is reduced to the problem of moments and an explicit form of the optimal control and the appropriate movement are constructed.

К вопросу о вычислении σ -энтропийной нормы линейной стационарной системы с непрерывным временем

А. А. Белов, В. А. Бойченко

ИПУ РАН, Москва, Россия
a.a.belov@inbox.ru, victor@ipu.ru

В этой статье рассматривается спектральный метод анализа линейных стационарных систем управления с непрерывным временем. В рамках этого подхода получены формулы для вычисления σ -энтропийной нормы системы в пространстве состояний.

Ключевые слова: линейная стационарная система, σ -энтропийная норма

Рассмотрим объект, который описывается линейной стационарной системой с непрерывным временем и нулевыми начальными условиями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = 0, \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — асимптотически устойчивая матрица, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешний случайный сигнал, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ — наблюдаемый выход. Предполагается, что система является управляемой и наблюдаемой, а случайный сигнал $w(t)$ ограничен по L_2 норме $\|w(t)\|_2$:

$$(2) \quad \|w(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} [|w(t)|^2] dt} < \infty,$$

здесь $|w(t)|$ — евклидова норма вектора $w(t)$ в \mathbb{R}^m . Следуя работе [1], определим корреляционную свертку $K(\tau)$ входного сигнала

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} [w(t + \tau) w^T(t)] dt,$$

выполним преобразование Фурье корреляционной свертки

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

и выразим L_2 норму входного сигнала $w(t)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$\|w(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega.$$

Соответственно, L_2 норма выходного сигнала $z(t)$ будет равна

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S_z(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G(i\omega) S(\omega) G^*(i\omega)] d\omega,$$

где спектральная плотность $S_z(\omega)$ выходного сигнала $z(t)$ определяется через передаточную матрицу $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ системы (1) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала. Определим коэффициент усиления Θ системы (1) как отношение L_2 нормы выходного сигнала $z(t)$ к L_2 норме входного сигнала $w(t)$:

$$(3) \quad \Theta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G(i\omega) S(\omega) G^*(i\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [\Lambda(\omega) S(\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega},$$

здесь $\Lambda(\omega) = G^*(i\omega)G(i\omega)$. Аналогично [1] введем интегральную характеристику входного сигнала — σ -энтропию:

$$(4) \quad \mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \ln \det \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega') d\omega'} d\omega,$$

где функция $\varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2}$ обеспечивает интегрируемую асимптотику интеграла (4) при $\omega \rightarrow \infty$. Определим σ -энтропийную норму $\|F\|_s$ системы (1–2) как максимум коэффициента усиления (3) по всем входным сигналам, σ -энтропия (4) которых не превышает заданного значения s :

$$(5) \quad \|F\|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S) \leq s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S) \leq s} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [\Lambda(\omega) S(\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega}.$$

В работе [1] показано, что для любого $s \geq 0$ σ -энтропийная норма (5) системы (1), на вход которой поступает стохастический сигнал с конечной L_2 нормой (2), вычисляется по формуле

$$\|F\|_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \operatorname{tr} \left\{ \Lambda(\omega) [I - q\Lambda(\omega)]^{-1} \right\} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \operatorname{tr} [I - q\Lambda(\omega)]^{-1} d\omega},$$

где параметр $q \in [0, \max_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega))$ и является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \ln \det \frac{\varphi(\omega) [I - q\Lambda(\omega)]^{-1}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega') \operatorname{tr} [I - q\Lambda(\omega')]^{-1} d\omega'} d\omega = s.$$

Этот результат является выражением σ -энтропийной нормы в частотной области, а в пространстве состояний справедлива следующая

Теорема 1. В пространстве состояний σ -энтропийная норма $\|F\|_s$ системы (1), на вход которой поступает сигнал с конечной L_2 нормой (2), вычисляется по формуле

$$(6) \quad \|F\|_s^2 = \frac{\operatorname{tr}(\tilde{B}^T \tilde{Q} \tilde{B})}{\operatorname{tr}(I + B^T Q B)},$$

где матрицы $Q > 0$, $\tilde{Q} > 0$ и $R > 0$ являются единственным решением системы уравнений (7–10)

$$(7) \quad A^T R + RA + RBB^T R + qC^T C = 0$$

$$(8) \quad Q(A + BB^T R) + (A + BB^T R)^T Q + RBB^T R = 0$$

$$(9) \quad m \ln [8\pi \operatorname{tr}(I + B^T Q B)] = s_0$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} A^T & C^T B^T \\ 0 & A^T + RBB^T \end{bmatrix} \tilde{Q} + \tilde{Q} \begin{bmatrix} A & 0 \\ BC & A + BB^T R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T C & C^T B^T R \\ RBC & RBB^T R \end{bmatrix} = 0,$$

$q \in [0, \max_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega))$ и $\lambda_{\max}(\omega)$ – максимальное собственное число матрицы $\Lambda(\omega)$.

Список литературы

1. Kurdyukov A.P., Boichenko V.A. A spectral method of the analysis of linear control systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2019. V. 29. No. 4. P. 667-679.

On Calculation of σ -entropy Norm of Continuous Linear Time-Invariant Systems

A. A. Belov, V. A. Boichenko

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia
a.a.belov@inbox.ru, victor@ipu.ru

In this paper the spectral method of the analysis of continuous linear time-invariant systems is considered. Within the framework of this approach a novel result on σ -entropy norm computation in the state space is established.

УДК 681.514

Синтез анизотропийных оценителей для линейных дискретных нестационарных стохастических систем: разбор двух случаев

И. Р. Белов

ИПУ РАН, Москва, Россия
ivanb1993@mail.ru

В работе рассматривается задача анизотропийной фильтрации для линейных дискретных нестационарных стохастических систем, удовлетворяющих специальным условиям. Выбран определенный вид оценителя, для которого получены условия ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках на основе леммы об ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами. В результате исходная задача сведена к решению системы линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: дискретная система, система с мультипликативными шумами, анизотропийная норма, субоптимальный оценитель

1. Введение

При решении задач оценивания для систем со случайными матрицами существенную роль играет выбор модели оценителя. В рамках анизотропийной теории, если оценитель в терминах ошибок имеет вид системы с мультипликативными шумами, и выполняется ряд дополнительных условий, то возможно применение полученных ранее

теоретических результатов [1], позволяющих построить оценитель. В данной работе рассматриваются 2 частных случая модели оценителя, обеспечивающих выполнение условий ограниченности анизотропной нормы системы оценителя в терминах ошибок.

2. Постановка задачи

Задана линейная дискретная нестационарная стохастическая (матрицы — случайные) система на конечном горизонте $k = \overline{0, N}$

$$(1) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k). \end{cases}$$

Последовательность $\{w(k)\}$ является центрированным случайным процессом с ограниченной анизотропией фрагмента: $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$, $a \geq 0$. Также задана модель формирования измеряемого выхода:

$$(2) \quad y(k) = C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k).$$

Задача 1. Требуется определить матрицы $W(k)$, $H(k)$, $F(k)$, $G(k)$ оценителя

$$(3) \quad T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) + G(k)(y(k) - \hat{y}(k)), \end{cases}$$

где $\hat{y}(k) = \mathbf{E}[C_y(k)|\hat{x}(k)]$, $\hat{x}(0) = 0$, $k = \overline{0, N}$, обеспечивающие ограниченность анизотропной нормы $\|T_{\hat{z}w}\|_a = \sup_{\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a} \frac{\|\hat{Z}_{0:N}\|}{\|W_{0:N}\|}$ системы в ошибках сверху заданной константой $\gamma > 0$.

3. Основной результат

Основным допущением работы является требование, что матрицы оценителя в терминах ошибок оценивания

$$(4) \quad T_{\bar{z}w} \sim \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \mathcal{A}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \bar{z}(k) = \mathcal{C}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{D}(k)w(k), \\ \bar{x}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}, \end{cases}$$

где $\bar{x}(k) = [x^\top(k) \quad e^\top(k)]^\top$, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, имеют вид

$$X(k) = X_0(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{\xi_i}(k) X_i(k),$$

где X — одна из матриц \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , и $\xi = 1, 2, 3, 4$ соответственно. Случайные величины $\lambda_{j_i}(k)$, $j = \overline{1, 4}$, $i = \overline{1, M}$, $k = \overline{0, N}$ удовлетворяют требованиям $\mathbf{E}[\lambda_{ij}(k)] = 0$, $\mathbf{E}[\lambda_{ij}^2(k)] = 1$.

Теорема 1. Для системы $T_{\bar{z}w}$ с мультипликативными шумами вида (4) с оговоренными условиями на матрицы неравенство $\|T_{\bar{z}w}\|_a \leq \gamma$ выполняется для некоторых $a \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, если существует решение $\mathcal{P}(k) \succ 0, \bar{\Psi}(k), \eta(k)$ системы неравенств вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & 0 & \mathcal{A}_0^\top \mathcal{P}(k+1) & \bar{\mathcal{A}}(k)\mathcal{P}(k+1) & \mathcal{C}_0^\top(k) & \bar{\mathcal{C}}(k) \\ * & \eta I & \mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{P}(k+1) & 0 & \mathcal{D}_0^\top(k) & 0 \\ * & * & \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \text{blkdiag}_M(\mathcal{P}(k+1)) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & I & 0 \\ * & * & * & * & * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I - \bar{\Psi}(k) & \mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{P}(k+1) & \bar{\mathcal{B}}(k)\mathcal{P}(k+1) & \bar{\mathcal{D}}(k) \\ * & \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & \text{blkdiag}_M(\mathcal{P}(k+1)) & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & 0 & \mathcal{C}_0^\top(N) & \bar{\mathcal{C}}(N) \\ * & \eta I & \mathcal{D}_0^\top(N) & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \eta I - \bar{\Psi}(N) & \bar{\mathcal{D}}(N) \\ * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\prod_{k=0}^N \det \bar{\Psi}(k) \geq e^{2a}(\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)}.$$

где $\text{blkdiag}_N(X)$ — блочно-диагональная матрица из N блоков, состоящих из X , $\bar{\mathcal{A}}(k) = [\mathcal{A}_1^\top \dots \mathcal{A}_M^\top]$, $\bar{\mathcal{B}}(k) = [\mathcal{B}_1^\top \dots \mathcal{B}_M^\top]$, $\bar{\mathcal{C}}(k) = [\mathcal{C}_1^\top \dots \mathcal{C}_M^\top]$, $\bar{\mathcal{D}}(k) = [\mathcal{D}_1^\top \dots \mathcal{D}_M^\top]$.

Случай 1: $H(k) = 0$. Модель оценивания имеет вид статического оценщика по выходу $\hat{z}(k) = G(k)y(k)$. Система (4) имеет следующие матрицы: $\mathcal{A}(k) = A(k)$, $\mathcal{B}(k) = B(k)$, $\mathcal{C}(k) = C_z(k) - G(k)C_y(k)$, $\mathcal{D}(k) = D_z(k) - G(k)D_y(k)$.

Случай 2: $G(k) = 0$. Второе уравнение оценщика (3) приобретает вид $\hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k)$. Когда исходная система (1) является детерминированной, можно положить $F(k) = C_z(k)$. Система (4) имеет следующие матрицы:

$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) & 0 \\ A(k) - X(k) - H(k)C_y(k) & X(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(k) = [0 \quad C_z(k)], \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k),$$

$$X(k) = W(k) - H(k)\mathbf{E}[C_y(k)].$$

4. Заключение

Рассмотрена задача анизотропной фильтрации для линейных нестационарных дискретных стохастических систем специального вида. Были рассмотрены два частных случая модели оценителя и получены условия ограниченности анизотропной нормы системы оценителя в терминах ошибок для каждого из этого случаев.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-31-00067 и № 19-31-90060)

Список литературы

1. *Belov I. R., Yurchenkov A. V., Kustov A. Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case. 27th Mediterranean Conference on Control and Automation.

Anisotropic Estimator Design for Linear Discrete Time-Varying Stochastic System: Two Cases

I. R. Belov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
ivanb1993@mail.ru

In this paper, the anisotropic estimation problem for linear discrete time-varying stochastic special-case systems is considered. We choose the special form of estimator and obtain the anisotropy-based norm bound conditions for estimation error system on the base of anisotropy-based bounded real lemma for multiplicative noise systems.

Нейро-нечеткое управление агентом в динамической среде

Р. С. Бiryukov, В. А. Левин, С. М. Шульпин

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
 biryukovrs@gmail.com, vadimlevin1@gmail.com, steve13.12@yandex.ru

В работе рассматривается задача управления мобильным агентом в динамической среде при помощи нейро-нечеткого регулятора. Для настройки параметров регулятора и адаптации базы правил предлагается использовать модифицированный генетический алгоритм. Эффективность предложенного подхода подтверждается численными экспериментами.

Ключевые слова: планирование путей, генетический алгоритм, нейронная сеть, нечеткая логика

1. Введение

Решение задач, связанных с управлением мобильными агентами, функционирующими в динамической среде, все чаще основывается на применении технологий искусственного интеллекта, таких как нечеткая логика, нейронные сети и генетические алгоритмы. Эффективность использования подхода на основе нечеткой логики зависит от решения следующих плохо формализуемых задач: определение адекватного набора базовых правил и задание функций принадлежности входных и выходных переменных нечеткого регулятора. В [1, 2] было предложено применять генетический алгоритм для адаптации функций принадлежности. В настоящей работе предлагается модификация генетического алгоритма, позволяющая настраивать как параметры функций принадлежности лингвистических переменных, так и набор базовых правил.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель мобильного агента, представляющего собой платформу с двумя ведущими колесами, вращение которых обеспечивается двумя электродвигателями постоянного тока, и одним пассивным колесом для стабилизации движения. Также платформа имеет переднее рояльное колесо, влиянием инерции которого на динамику робота будем пренебрегать, считая, что в этой точке платформа имеет абсолютно гладкую опору. Ниже представлена описывающая данную модель динамическая система в безразмерных переменных [3]:

$$(1) \quad \dot{v} = \omega^2 - v + u_1, \quad \dot{\omega} = -\omega v - \kappa \omega + u_2,$$

где v и ω — линейная и угловая скорость центра масс платформы соответственно, $u = (u_1, u_2)^\top$ — управление, а κ — параметр модели. Координаты центра масс платформы x и y и угол поворота φ , отсчитываемый от оси x , связаны с v и ω следующим образом:

$$(2) \quad \dot{x} = v \cos \varphi, \quad \dot{y} = v \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \mu \omega,$$

здесь μ — заданный параметр.

Предположим, что платформа оборудована N датчиками для измерения расстояния до препятствий, расположенными равномерно в секторе $[-\alpha, \alpha]$. Обозначим расстояние, измеренное k -м датчиком, через ρ_k , $k = 1, \dots, N$. Поскольку агенту недоступна информация о законе движения препятствий, то требуется синтезировать нейро-нечеткий регулятор

$$(3) \quad u = \Theta(x, y, \varphi; \rho_1, \dots, \rho_N),$$

обеспечивающий движение агента в динамической среде с минимальным числом столкновений.

3. Модификация генетического алгоритма

В настоящей работе используется гибридная адаптивная нечеткая система вывода (ANFIS). Для настройки параметров регулятора и адаптации базы правил применяется расширение генетического алгоритма с помощью добавления в генотип нечетких генов $\gamma_{ij} = (\mu(\xi, \lambda), \lambda)$, кодирующих тип и параметры функций принадлежности $\mu(\xi, \lambda)$ каждого термина лингвистических переменных. Таким образом, структуру хромосомы можно описать как $\langle B, \Gamma, \Omega \rangle$, где B — матрица весовых коэффициентов ANFIS, Ω — веса базы продукционных правил и Γ — последовательность нечетких генов.

Для улучшения сходимости генетического алгоритма, использующего нечеткие гены, были разработаны два вида оператора мутации: мутация типа функции принадлежности и мутация ее параметров. Мутация типа функции принадлежности нечеткого термина позволяет менять вид функций внутри одного класса эквивалентности. Мутация такого рода является затухающей мутацией, т. е. вероятность ее применения уменьшается со временем работы генетического алгоритма и достижением приемлемых значений функции приспособленности популяции. Оператор мутации параметров функции принадлежности осуществляет их тонкую настройку и работает на всем протяжении времени работы генетического алгоритма.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача построения нейро-нечеткого регулятора в задаче управления мобильным агентом в динамической среде. Для настройки параметров регулятора и адаптации базы правил использовалась адаптивная нечеткая система вывода (ANFIS) и модифицированный генетический алгоритм. Эффективность предложенного подхода подтверждается численными экспериментами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 17-72-30003).

Список литературы

1. *Liu Q., Lu Y.-G., Xie C.-X.* Optimal genetic fuzzy obstacle avoidance controller of autonomous mobile robot based on ultrasonic sensors // IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. 2006. P. 125–1296.
2. *Hassanzadeh I., Sadigh S.M.* Path planning for a mobile robot using fuzzy logic controller tuned by GA // 6th International Symposium on Mechatronics and its Applications. 2009. P. 1–5.
3. *Мартыненко Ю.Г.* Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 8. С. 29–80.

Neuro-fuzzy Control of Mobile Agent in Dynamic Environment

R. S. Biryukov, V. A. Levin, S. M. Shulpin

Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Russia
biryukovrs@gmail.com, vadimlevin1@gmail.com, steve13.12@yandex.ru

This paper presents a neuro-fuzzy controller design for motion control of an autonomous mobile robot in a dynamic environment. A modified genetic algorithm is used to adjust the regulator parameters and adapt the rule base. Experiments demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Управление системой двух взаимодействующих тел на шероховатой наклонной плоскости

Н. Н. Болотник, Т. Ю. Фигурина

ИПМех РАН, Москва, Россия
bolotnik2004@mail.ru, t_figurina@mail.ru

Для системы двух тел на наклонной плоскости с кулоновым трением доказана принципиальная возможность перемещения системы в произвольное терминальное состояние покоя за счет управления силой взаимодействия между телами в случае, если в начальном состоянии тела не покоятся на общей прямой наибольшего наклона. Построен алгоритм управления, сочетающий квазистатические и быстрые движения.

Ключевые слова: локомotionные системы, взаимодействующие тела, наклонная плоскость, кулоново трение, управление движением

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух взаимодействующих тел (материальных точек) с массами m и M , $m < M$, на наклонной плоскости Π (рис. 1). Обозначим через k коэффициент кулонова трения между телами и плоскостью, γ — угол наклона плоскости, g — ускорение силы тяжести, и через \mathbf{F} — силу взаимодействия, приложенную телом M к телу m . Считаем, что из состояния покоя обоих тел на прямой максимального наклона тело m может быть сдвинуто вверх вдоль этой прямой при покоящемся теле M , то есть выполнено неравенство

$$(1) \quad kM \cos \gamma \geq (M + m) \sin \gamma + km \cos \gamma.$$

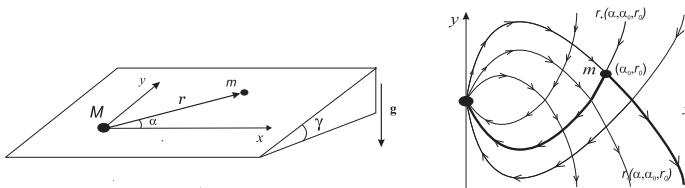


Рис. 1: а) Система двух тел на наклонной плоскости, б) Квазистатические траектории тела m

Пусть в начальный момент времени система покоится и тела не лежат на общей прямой максимального наклона. Вопрос заключается в

том, можно ли привести систему в произвольное терминальное состояние покоя на плоскости. Ограничений на величину управляющей силы не налагается, допускается мгновенное изменение расстояния между телами, и телам разрешается проходить сквозь друг друга.

2. Квазистатические движения

Рассмотрим квазистатические движения системы, то есть медленные движения, которые можно трактовать как непрерывную последовательность состояний равновесия. Из неравенства (1) вытекает, что при квазистатических движениях перемещаться может только тело m , а тело M покоится. Введем в плоскости Π систему координат Mxy (в случае квазистатических движений неподвижную), ось y которой направлена вверх вдоль прямой максимального наклона (рис. 1а). Обозначим через r и α полярные координаты тела m в плоскости Π , отнесенные к полюсу M и полярной оси Mx . Траектории квазистатического движения тела m при $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ задаются уравнением

$$(2) \quad \frac{dr}{d\alpha} = \pm \frac{r\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \alpha}}{a \cos \alpha}, \quad a = \frac{\text{tg } \gamma}{k}.$$

Знак минус в правой части уравнения (2) отвечает отталкивающему движению, при котором сила \mathbf{F} , приложенная к телу m , сонаправлена с вектором \overrightarrow{Mm} , а знак плюс соответствует притягивающему движению. Обозначим через $r_{\pm}(\alpha, \alpha_0, r_0)$ решение уравнения (2) с начальным условием $r(\alpha_0) = r_0$. Функция r_+ (r_-) монотонно возрастает (убывает) с увеличением α в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Функции r_+ и r_- обладают следующими свойствами: $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} r_-(\alpha) = 0$,

$\lim_{\alpha \rightarrow -\pi/2} r_-(\alpha) \cos \alpha = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} r_+(\alpha) \cos \alpha = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow -\pi/2} r_+(\alpha) = 0$, $r_-(\alpha, \alpha_0, r_0) = r_+(-\alpha, -\alpha_0, r_0)$. Траектории квазистатического движения тела m изображены на рис. 1б. Можно показать, что тело m может квазистатически двигаться из точки (α_0, r_0) вдоль кривой, сколь угодно близкой к дуге окружности $r = r_0$, $\alpha \in (-\pi/2, \alpha_0]$, по часовой стрелке. Такое движение будем называть квазистатическим движением по окружности.

При $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ отталкивающие и притягивающие траектории симметричны относительно оси My соответствующим траекториям для $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тело m может квазистатически двигаться по окружности против часовой стрелки при $\alpha \in [\alpha_0, 3\pi/2)$.

3. Быстрые движения. Алгоритм приведения системы в терминальное состояние

Под быстрыми движениями понимаются движения, переводящие систему между двумя состояниями покоя за бесконечно малое время. При таких движениях сила взаимодействия тел много больше силы трения и поэтому центр масс системы и прямая, соединяющая тела, остаются неподвижными. По предположению тела могут проходить сквозь друг друга, поэтому с помощью быстрого движения можно привести тело M в любое положение на исходной прямой Mt .

Тело t можно привести в любое положение на плоскости, при этом тело M останется сколь угодно близко к начальному положению. Докажем это для частного случая, в котором $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ для начального положения и $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ для терминального положения. Покажем сначала, что тело t может быть приведено на полуокружность малого радиуса, в любое положение (α^*, r^*) такое, что $r^* = \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, $\alpha^* \in (-\pi/2, \pi/2)$, при этом положение тела M изменится мало. Действительно, сначала квазистатически приблизим тело t к телу M на расстояние $r = \varepsilon$, потом квазистатически будем двигать тело t по окружности против часовой стрелки до значения угла α , близкого к $3\pi/2$, а затем осуществим быстрое движение, в результате которого тела t и M изменят свои положения на прямой Mt на положения, симметричные предыдущим относительно центра масс системы (перемещение тела M при этом меньше ε). На заключительном этапе тело t будем двигать квазистатически по часовой стрелке, пока угол α не станет равным α^* . Таким образом, возможность приведения тела t на полуокружность малого радиуса доказана. Поскольку отталкивающие и притягивающие траектории квазистатического движения тела t , исходящие из всех точек (α^*, r^*) , $\alpha^* \in (-\pi/2, \pi/2)$, $r^* = \varepsilon$, замечают правую полуплоскость целиком, то тело t может быть приведено в любое положение в правой полуплоскости. Упрощая, можно рассматривать описанный алгоритм (при $\varepsilon \rightarrow 0$) как совмещение тел t и M с последующим движением тела t по произвольной траектории квазистатического отталкивания, исходящей из начала координат.

Наконец, опишем алгоритм приведения системы в заданное терминальное состояние, в котором тела не находятся на общей прямой максимального наклона. Чередуя быстрые движения системы и квазистатических движений тела t по окружности приведем систему в положение, при котором прямая tM проходит через терминальное положение тела M . Затем переместим быстрым движением тело M

в терминальное положение. Наконец, используя алгоритм, описанный выше, приведем тело m в терминальное положение, при этом изменение положения тела M будет сколь угодно мало.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН № 7.

Control of a System of Two Interacting Bodies on a Rough Inclined Plane

N. N. Bolotnik, T. Yu. Figurina

IPMech RAS, Moscow, Russia
bolotnik2004@mail.ru, t_figurina@mail.ru

For a system of two bodies on an inclined plane with Coulomb's friction, the in-principle possibility for driving the system to an arbitrary terminal state of rest by means of control of the interaction force between the bodies is proved for the case where the bodies do not rest on the common line of maximum slope in the initial state. A control algorithm that combines quasistatic and fast motions is designed.

УДК 519.977

Принцип разделения в задачах управления пучками траекторий переключаемых систем

А. С. Бортаковский

Московский авиационный институт, Москва, Россия
asbortakov@mail.ru

Рассматриваются задачи оптимального в среднем и оптимального гарантирующего управления пучками траекторий детерминированных переключаемых систем. Количество переключений, а также их моменты заранее не заданы и определяются в результате оптимизации, при этом допускаются мгновенные многократные переключения. Для линейно-квадратичных задач управления переключаемыми системами доказывается так называемый условный принцип разделения. Приводятся академические примеры, в которых классический принцип разделения оказывается неверным, а условный принцип разделения выполняется.

Ключевые слова: оптимальное управление, пучок, переключение.

1. Постановка задачи

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_1, \dots, t_N , образующие неубывающую последовательность:

$$(1) \quad t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F.$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \mathcal{N},$$

а в моменты переключений — скачком:

$$(3) \quad x_i = \widehat{A}(t_i)x_{i-} + \widehat{B}(t_i)v_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

В уравнениях (2),(3): $x(\cdot), u(\cdot)$ — траектория и управление непрерывным движением системы, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^p$, $\mathcal{N} \triangleq \{i \mid t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых по длине промежутков T_i ; v_i — управление переключением в момент t_i , $v_i \in V \subset \mathbb{R}^q$; $x_i \triangleq x(t_i)$ — состояние системы сразу после переключения, а x_{i-} — состояние системы непосредственно перед переключением: $x_{i-} = x(t_i - 0)$, если $t_{i-1} < t_i$, либо $x_{i-} = x(t_{i-1})$, если $t_{i-1} = t_i$.

Множество $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ допустимых программных управлений составляют пары $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, включающие управление непрерывным движением — ограниченную измеримую функцию $u: T \rightarrow U$ и управление переключениями $v(\cdot) \triangleq \{(t_i, v_i) \mid t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F, v_i \in V, i = 1, \dots, N\}$. Допустимое управление определяет единственную траекторию системы (2),(3), удовлетворяющую начальному условию $x(t_0) = x_0$. Количество N переключений и моменты t_1, \dots, t_N не заданы и у разных допустимых управлений могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ задан квадратичный функционал качества управления одной траекторией

$$(4) \quad I(x_0, w) = \int_{t_0}^{t_F} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) C(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) D(t) u(t) \right\} dt + \\ + \sum_{i=1}^N \left\{ \lambda(t_i) + \frac{1}{2} x_i^T \widehat{C}(t_i) x_i + \frac{1}{2} v_i^T \widehat{D}(t_i) v_i \right\} + \frac{1}{2} x^T(t_F) F x(t_F).$$

Все матрицы симметрические неотрицательно определенные, причем D и \widehat{D} — положительно определенные, $\lambda(t) \geq 0$ при всех $t \in T$.

Линейно-квадратичная задача (ЛКЗ) управления одной траекторией переключаемой системы (ПС) состоит в нахождении оптимального управления $w^* \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$, минимизирующего функционал (4).

Предполагаем, что начальное состояние $x(t_0)$ точно неизвестно, но известно множество σ_0 возможных начальных состояний. Качество управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0 , оценивается либо наибольшим (гарантирующим) значением функционала (4), либо его средним значением

$$(5) \quad I^\Gamma(w) = \max_{x_0 \in \sigma_0} I(x_0, w), \quad I^c(w) = \int_{\sigma_0} \rho(x_0) I(x_0, w) dx_0,$$

при этом множество σ_0 считаем либо компактным, либо имеющим положительную меру соответственно. В (5) измеримую и неотрицательную весовую функцию $\rho(x)$, в частности, можно считать плотностью распределения начального состояния системы.

Требуется найти либо оптимальное гарантирующее (минимаксное) управление w^Γ , либо оптимальное в среднем управление w^c , минимизирующие функционалы (5) соответственно.

2. Теоремы разделения

Классическая теорема разделения [1] относится к ЛКЗ управления стохастическими системам. Она позволяет решать отдельно задачи управления и наблюдения. Для ЛКЗ управления пучками траекторий детерминированных непрерывных систем соответствующий результат [2] заключается в том, что оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с оптимальным управлением геометрическим центром тяжести множества возможных состояний. Для ЛКЗ управления пучками ПС этот результат оказывается неверным. Справедливы следующие утверждения [3].

Оптимальное гарантирующее управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из некоторой точки выпуклого замыкания множества худших (для этого управления) возможных начальных состояний системы.

Оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из центра тяжести множества возможных начальных состояний.

Под условным оптимальным управлением понимается оптимальное управление при заданных моментах переключений, выбранных при ми-

нимизации (5). Приводятся примеры, в которых оптимальное управление пучком не совпадает с оптимальным управлением одной траекторией, но совпадает с условным оптимальным управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00128).

Список литературы

1. *Wonham W.M.* On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1965. V. 6. P. 312–326.
2. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
3. *Бортаковский А.С.* Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 43–70.

Principle of Separation in Problems of Control of Clusters of Trajectories of Switching Systems

A. S. Bortakovskii

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
asbortakov@mail.ru

The problems of optimal average and optimal guaranteeing control of trajectory bundles of deterministic switched systems are considered. Moments of switching, as well as their number are not set in advance. For linear-quadratic control problems of switching systems, the so-called conditional separation principle is proved. Academic examples are given in which the classical principle of separation turns out to be incorrect, and the conditional principle of separation is fulfilled.

Многокритериальный обобщённый \mathcal{H}_2 -консенсус в сети линейных неидентичных агентов

Е. С. Бубнова

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
bes0406@mail.ru

Рассматривается многокритериальная задача достижения обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в сети линейных неидентичных агентов с непрерывным временем и постоянной топологией связей. Сформулированы достаточные условия существования субоптимального обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в терминах LMI.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, обобщённая \mathcal{H}_2 -норма

1. Введение

Исследование условий достижения консенсуса в многоагентных системах привлекает в последние десятилетия все большее число исследователей. Особый интерес представляет случай, когда агенты испытывают воздействие неопределённых внешних возмущений с ограниченной «энергией». Одним из подходов к изучению таких систем служит теория \mathcal{H}_∞ -управления [1]. В качестве альтернативного подхода в данной работе предлагается использование обобщённой \mathcal{H}_2 -нормы [2].

2. Обобщённый \mathcal{H}_2 -консенсус

Рассмотрим многоагентную систему, в которой динамика каждого агента описывается линейной системой дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_{1,i} u_i + B_{2,i} w_i, & i &= 1, \dots, N, \\ y_i &= C_{y,i} x_i, & z_i^j &= C_{z,i}^j x_i, & j &= 1, \dots, M, \end{aligned}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ — состояние i -го агента, $y_i \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z_i^j \in \mathbb{R}^{a_j}$ — целевые выходы, $u_i \in \mathbb{R}^{m_{1,i}}$ — управление, $w_i \in \mathbb{R}^{m_{2,i}}$ — внешнее возмущение, ограниченное по $L_2[0, +\infty)$ -норме. $A_i, B_{1,i}, B_{2,i}, C_{y,i}, C_{z,i}^j$ — стационарные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что пары $(A_i, B_{1,i})$ стабилизируемы, а матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Топология сети описывается связным неориентированным графом с матрицей Лапласа $L = [l_{ij}]$ и матрицей смежности $\mathcal{A} = [a_{ij}]$.

Скажем, что в системе (1) при заданных управлениях u_i достигается многокритериальный обобщённый \mathcal{H}_2 -консенсус, если выполняются следующие условия:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| z_i^j(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k^j(t) \right\| = 0, \quad \min_{u_i} \sup_{w \neq 0} \frac{\|z^j\|_\infty}{\|w\|_2}, \quad j = 1, \dots, M,$$

здесь минимум понимается в смысле Парето. Выберем управление u_i в виде динамического регулятора по усреднённым значениям выходов соседей:

$$(3) \quad \dot{v}_i = A_{c,i}v_i + B_{c,i}\bar{y}, \quad u_i = C_{c,i}v_i + D_{c,i}\bar{y}, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(y_i - y_j),$$

где $v_i \in \mathbb{R}^{m_{c,i}}$ — состояние i -го регулятора. Определим следующие матрицы: $A = \text{diag}(F_{0,i})$, $B_u = \text{diag}(E_i)$, $B_w = \text{diag}(B_{w,i})$, $C_y = \text{diag}(F_{y,i})$,

$$(4) \quad C_z^j = \left(\frac{1}{N} L \otimes I_{q_j} \right) \text{diag}(C_{z,i}^j), \quad F_{0,i} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,i} \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{w,i} = \begin{bmatrix} B_{2,i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{y,i} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_{y,i} & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{y,i} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_{y,i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{L} = \begin{bmatrix} I_{m_{c,1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{11}I_p & 0 & l_{12}I_p & \cdots & 0 & l_{1N}I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{m_{c,N}} & 0 \\ 0 & l_{N1}I_p & 0 & l_{N2}I_p & \cdots & 0 & l_{NN}I_p \end{bmatrix}.$$

Построим блочно-диагональную матрицу $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_N)$ в которой матрицы V_i , $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют условию

$$V_i E_i = \begin{bmatrix} I_{m_{1,i}+m_{c,i}} \\ 0_{(m_i-m_{1,i}) \times (m_{1,i}+m_{c,i})} \end{bmatrix}$$

и положим $\bar{A} = V A V^{-1}$, $\bar{B}_w = V B_w$, $\bar{C}_y = C_y V^{-1}$, $\bar{C}_z^j = C_z^j V^{-1}$.

Теорема 1. *Предположим, что матрицы $X = X^\top \succ 0$ и Q , удовлетворяющие условиям*

$$X = \text{diag}(X_i), \quad Q = \text{diag}(Q_i), \quad X_i = \begin{bmatrix} X_i^1 & 0 \\ 0 & X_i^2 \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_i^1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_i^1 \in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{c,i}) \times (m_{1,i}+m_{c,i})}, \quad X_i^2 \in \mathbb{R}^{(m_i-m_{1,i}) \times (m_i-m_{1,i})}, \\ Q_i^1 \in \mathbb{R}^{(m_i+m_{c,i}) \times (p+m_{c,i})}, \quad Q_i^1 \in \mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{c,i}) \times (p+m_{c,i})},$$

являются решениями задачи полуопределённого программирования

$$(5) \quad \inf \gamma^2 \left[\begin{array}{cc} X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y + (X\bar{A} + Q\tilde{L}\bar{C}_y)^\top & X\bar{B}_w \\ \bar{B}_w^\top & -I \end{array} \right] \prec 0, \quad \left[\begin{array}{cc} X & \bar{C}_z^{j\top} \\ \bar{C}_z^j & \gamma^2 \alpha_j^2 I \end{array} \right] \succcurlyeq 0,$$

где $0 \leq \alpha_j \leq 1$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_M = 1$. Тогда существует динамический протокол вида (3) с параметрами

$$(6) \quad \begin{bmatrix} A_{c,i} & B_{c,i} \\ C_{c,i} & D_{c,i} \end{bmatrix} = (X_i^1)^{-1} Q_i^1, \quad i = 1, \dots, N,$$

обеспечивающий в сети (1) субоптимальный в смысле Парето обобщённый \mathcal{H}_2 -консенсус.

3. Заключение

В работе сформулированы достаточные условия решения многокритериальной задачи достижения обобщённого \mathcal{H}_2 -консенсуса в сети неидентичных линейных агентов с постоянной топологией связей.

Список литературы

1. Gao L., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology // Arab. J. Sci. Eng. 2014. V. 39. P. 1477–1487.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H_2 -управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.

Multi-objective Generalized \mathcal{H}_2 Consensus for Linear Heterogeneous Multi-agent Systems

E. S. Bubnova

Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Russia
bes0406@mail.ru

We consider the multi-objective generalized \mathcal{H}_2 consensus problem for continuous-time linear heterogeneous multi-agent systems subjected to external disturbances. The interaction topology among the agents is assumed to be constant and undirected. A sufficient condition in terms of linear matrix inequalities is proposed to solve the considered consensus problem.

О некоторых методах конструирования мегастабильных систем

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

ТулГУ, Тула, Россия
i-burkin@yandex.ru

В последние годы усилия многих исследователей были направлены на создание так называемых мегастабильных систем, то есть систем, которые при постоянных значениях входящих в них параметров имеют счетное число сосуществующих аттракторов. Интерес к подобным системам обусловлен широким спектром их прикладного использования, например, для скрытия информации в системах коммуникаций и аудиосхемах шифрования. В докладе предлагаются методы синтеза мегастабильных систем с использованием систем в форме Лурье каскадного типа. Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку скрытых хаотических аттракторов, удается получить, заменяя нелинейность в исходной системе на периодическую функцию. Путем замены на периодические функции некоторых переменных в исходной системе удается построить мегастабильную систему, содержащую 2-D решетку хаотических аттракторов. Вычисляются показатели Ляпунова и размерность Каплана–Йорке аттракторов, принадлежащих решеткам.

Ключевые слова: мегастабильная система, скрытые аттракторы, показатели Ляпунова, размерность Каплана–Йорке

1. Введение

В последнее время усилились попытки создания новых так называемых мегастабильных систем, то есть систем, которые при постоянных значениях входящих в них параметров могут демонстрировать счетное число сосуществующих аттракторов [1-5]. Дело в том, что мультистабильные системы могут быть использованы, например, для скрытия информации в системах коммуникаций [6] и аудиосхемах шифрования для повышения производительности защищенной связи [7], поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль «секретного ключа». В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются также в шифровании изображений [8].

В данной работе рассмотрена трехмерная система в форме Лурье, нелинейность в которой выбрана таким образом, чтобы система имела пару хаотических скрытых аттракторов-близнецов. Продемонстриро-

вано два способа генерирования на основе рассматриваемой системы megастабильной системы со счетным числом сосуществующих скрытых хаотических аттракторов: замена нелинейности в системе на периодическую функцию и замена переменных системы на периодические функции при сохранении неизменной исходной нелинейности.

2. Основной результат

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -1.6x - 1.7y - z + f(x), \quad f(x) = -0.2x^3 + 0.012x^5. \end{aligned}$$

Система (1) имеет следующие состояния равновесия: $O_1(0, 0, 0)$, $O_{2,3}(\pm x_0, 0, 0)$, где x_0 — положительный корень уравнения $f(x) = 1.6x$. Состояние равновесия O_1 устойчивое в малом, а состояния $O_{2,3}$ — седло-фокусы с собственными значениями матрицы линеаризации $(2.002, -1.501 \pm 2.336i)$. Параметры системы выбраны таким образом, что она имеет пару скрытых аттракторов-близнецов, которые удаётся обнаружить с использованием метода продолжения по параметру, предложенного в работе [9]. Эти аттракторы могут быть визуализированы путем численного интегрирования системы (1) с начальными условиями $(\pm 2.5, \pm 5.2, \mp 4.0)$ и представлены на рисунке 1 (проекция на плоскость (x, y)). Для указанных аттракторов справедлива оценка $|x(t)| < x_0$, поэтому их можно “клонировать“, заменив в последнем уравнении системы (1) функцию $g(x) = f(x) - 1.6x$ на $2x_0$ -периодическую функцию, совпадающую с $g(x)$ на $[-x_0, x_0]$. Проекция на плоскость (x, y) фрагмента 1-D решетки скрытых аттракторов новой системы представлена на рисунке 2. Все аттракторы на рисунке 2 имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.103, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -1.102$ и размерность Каплана–Йорке 2.093. Для генерирования системы, содержащей 2-D решетку идентичных аттракторов можно попытаться заменить в системе (1) каскадного типа переменные y и z на периодические функции. Если при этом новая система имеет нетривиальный аттрактор, то она имеет 2-D решетку идентичных аттракторов. Произведем в системе (1) замену $y \rightarrow 3tg(\frac{y}{3}), z \rightarrow 3.06tg(\frac{z}{6})$. Новая система имеет счетное число седловых состояний равновесия $O_{1,k,m}(0, 3\pi k, 6\pi m)$ и $O_{2,3,k,m}(\pm x_0, 3\pi k, 6\pi m), k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ с собственными значениями матриц линеаризации, соответственно,

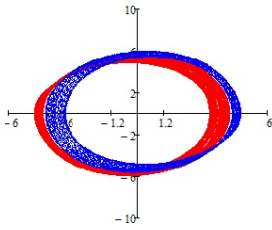


Рис. 1. Проекция на плоскость (x, y)

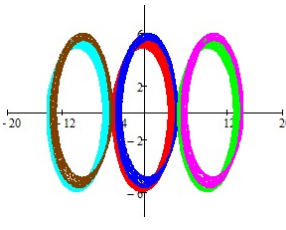


Рис. 2. 1-D решетка скрытых аттракторов

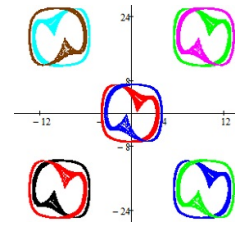


Рис. 3. 2-D решетка скрытых аттракторов

$(0.128 \pm 1.023i, -0.767)$ и $(1.701, -1.105 \pm 1.845i)$. При этом из окрестностей состояний $O_{1,k,m}$ возбуждаются пары хаотических аттракторов, которые могут быть визуализированы численным интегрированием с начальными условиями $(\pm 0.1, 3\pi k, 6\pi m)$. Все эти аттракторы имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.054, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -1.345$ и размерность Каплана–Йорке 2.037. На рисунке 3 представлен фрагмент 2-D решетки хаотических аттракторов преобразованной системы (проекция на плоскость (y, z)).

Предложенный в докладе подход может быть использован для генерирования мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье произвольной размерности, содержащих хаотические аттракторы.

Список литературы

1. *Li C., Thio W.J.-C., Sprott J.C., Iu H.H.C., Xu Y.* Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit // IEEE Access. 2018. V. 6. P. 29003–29012.
2. *Lai Q., Chen S.* Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // Int. J. Bifurcation Chaos. 2016. V. 2. No. 11: 1650177.
3. *Zhang X., Chen G.* Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors // Chaos. 2017. V. 27. No. 7. Art. no. 071101.
4. *Буркин И.М., Кузнецова О.И.* Конструирование динамических систем с бесконечным числом хаотических аттракторов // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 2. С. 39–43.
5. *Буркин И.М., Кузнецова О.И.* Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 555–563.
6. *Cicek S., Ferikoglu A., Pehlivan I.* A new 3D chaotic system: dynamical analysis, electronic circuit design, active control synchronization and chaotic masking communication application // Optik. 2016. V. 127. P. 4024–4030.

7. *Liu H., Kadir A., Li Y.* Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys // *Optik*. 2016. V. 127. P. 7431–7438.
8. *Guan Z.H., Huang F., Guan W.* Chaos-based image encryption algorithm // *Phys. Lett. A*. 2005. V. 346. No. 1-3. P. 153–157.
9. *Burkin I.M., Nguen N.K.* Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems // *Diff. Equation*. 2014. V. 50. No 13. P. 1695–1717.

About Some Methods of Designing Megastable Systems

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Tula State University, Tula, Russia
i-burkin@yandex.ru

In recent years, the efforts of many researchers have been directed to the creation of so-called megastable systems, that is, systems that at constant values of their parameters have a countable number of coexisting attractors. Interest in such systems is due to the wide range of their applications, for example, to hide information in communication systems and audio encryption schemes. The report suggests methods of synthesizing megastable systems using systems in Lurie form of cascade type. Megastable systems containing a 1-D lattice of hidden chaotic attractors can be obtained by replacing the nonlinearity in the original system with a periodic function. By replacing some variables in the original system with periodic functions, it is possible to construct a megastable system containing a 2-D lattice of chaotic attractors. The Lyapunov exponents and the Kaplan–Yorke dimension of the attractors belonging to the lattices are calculated.

Нелинейная модель управляемого теплообмена между термоэлектрическим преобразователем и цилиндрическими телами

А. А. Гавриков, Г. В. Костин

ИПМех РАН, Москва, Россия
gavrikov@ipmnet.ru, kostin@ipmnet.ru

Рассматривается задача граничного управления процессами теплообмена в твердых телах. Управление осуществляется с помощью подачи напряжения на термоэлектрический преобразователь — элемент Пельтье. Предлагается нелинейная модель, описывающая процессы в элементе Пельтье и нагреваемом/охлаждаемом теле. Модель учитывает возникающую вследствие эффекта Зеебека рекуперацию тепловой энергии в электрическую и выделение джоулева тепла. Предполагается также, что происходит обмен теплом с окружающей управляемое тело средой. В качестве модельной рассматривается структура, состоящая из двух соосных цилиндров, между которыми размещен тонкий элемент Пельтье, соприкасающийся с торцами цилиндров. Применяя линеаризацию по температуре, аналитически строятся собственные функции и вычисляются собственные значения для возникающей нелинейной по управлению задачи. На основании линеаризации по обратной связи предлагаются алгоритмы построения программного управления и компенсации влияния изменения температуры окружающей среды.

Ключевые слова: граничное управление, теплообмен, элемент Пельтье

1. Введение

Широкое распространение термоэлектрических конвертеров для управления процессами теплообмена делает актуальными задачи граничного управления для твердых тел. Представляется перспективным использование элементов Пельтье, позволяющих оперативно изменять режим нагревания/охлаждения, добываясь необходимого распределения температуры. Однако, необходимо предложить адекватную модель управляемого процесса, учитывающую основные физические характеристики конвертера, и позволяющую поставить краевую задачу на макроуровне, не сосредотачиваясь на особенностях внутренней структуры элемента Пельтье.

2. Модель управляемого теплообмена

Рассматривается конструкция, состоящая из двух соосных цилиндров, между которыми размещен тонкий дисковый элемент Пельтье, соприкасающийся с торцами цилиндров, см. рис. 1. На основании эф-

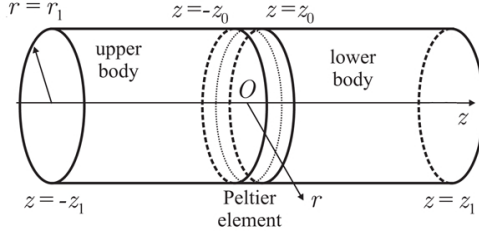


Рис. 1: Термоэлектрическая цилиндрическая структура

фектов Пельтье, Зеебека и Томсона с учетом внутренней структуры элемента Пельтье, предлагается следующая модель управляемого теплообмена

$$\begin{aligned}
 c_p \rho_p \dot{\theta} &= \lambda_p \theta''_{zz} + \frac{R J^2(U, \theta)}{|V_p|}, \quad \mathbf{x} \in V_p, \\
 c_a \rho_a \dot{\theta} &= \lambda_a \Delta \theta, \quad \mathbf{x} \in V_{\pm}, \\
 \alpha \theta + \lambda_a \theta'_r|_{r=r_1, |z| > z_0} &= \alpha \theta_A, \quad \theta'_z|_{|z|=z_1} = 0, \\
 \theta|_{|z|=\pm z_0 \pm 0} &= \theta|_{|z|=\pm z_0 \mp 0}, \\
 -\lambda_a \theta'_z|_{|z|=z_0+0} &= \left[(\theta + \theta_0) \frac{S J(U, \theta)}{\pi r_1^2} - \lambda_p \theta'_z \right]_{|z|=z_0-0}, \\
 \theta(0, \mathbf{x}) &= \Theta(\mathbf{x}).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $\theta(\mathbf{x})$ — приведенное распределение температуры, $\mathbf{x} = (r, \phi, z)$, $V_p = I_p \times D$, $D = [0, 2\pi) \times [0, r_1)$, $V_{\pm} = I_{\pm} \times D$, $I_p = (-z_0, z_0)$, $I_{\pm} = (z_0, z_1)$, c_a, λ_a, ρ_a — удельная теплоемкость, теплопроводность и плотность материала цилиндров, c_p, λ_p, ρ_p — соответствующие усредненные характеристики элемента Пельтье, S — коэффициент Зеебека, R — омическое сопротивление элемента Пельтье, α — коэффициент теплообмена с окружающей средой имеющей температуру θ_A , θ_0 — отсчетная абсолютная температура, $\Theta(\mathbf{x})$ — начальное распределение температуры. Модель описывает как передачу тепла от конвертера к нагреваемым

телам и рекуперацию в электрическую энергию за счет вектора теплового потока $q = (0, 0, (\theta_0 + \theta) \frac{S J}{\pi r_1^2} - \lambda_p \theta'_z)^T$, так и нагрев самого конвертера (первое уравнение в (1)).

Управляющее напряжение $U(t)$, ток $J(t)$ и средняя по сечению температура в элементе Пельтье $\tilde{\theta}$ связаны соотношением, отражающим наличие пороговых напряжений U_{\pm} :

$$(2) \quad RJ = \begin{cases} \mathcal{E} - U_-, & \mathcal{E} < U_-, \\ 0, & U_- \leq \mathcal{E} \leq U_+, \\ \mathcal{E} - U_+, & \mathcal{E} > U_+, \end{cases}$$

где $\mathcal{E} = U - S[\tilde{\theta}]$ — ЭДС цепи, а $[\tilde{\theta}]$ — перепад средней по сечению температуры на торцах элемента Пельтье.

Предлагаемая модель может быть использована для идентификации неизвестных параметров S и R , посредством линеаризации краевой задачи (1) по температуре и разложения по соответствующим неортogonalным собственным функциям результирующей квадратичной по управлению задачи [1]. Собственные функции строятся аналитически как комбинации функций Бесселя первого рода, тригонометрических и экспоненциальных функций.

3. Задача управления

Рассматривается задача приведения температуры в окрестность стационарного распределения θ_{st} в одном из цилиндров V_k при условии достижения заданной средней температуры на конечном интервале времени. Предлагается за счет введения линеаризующей обратной связи $u_{fb} = S[\tilde{\theta}]$ привести систему (1) к линейной по температуре и квадратичной по управлению $v = U - u_{fb}$. Далее, используя разложение по ортогональным собственным функциям, численно строится оптимальное в смысле минимизации квадратичного функционала $J = \int_0^T v^2 dt + \|\theta(T) - \theta_{st}\|_{L_2(V_k)}^2$ управление на заданном интервале времени $[0, T]$. Проводя дополнительную линеаризацию в окрестности программной траектории v_{ff}, θ_{ff} , предлагается введение дополнительной обратной связи v_{fb} , частично компенсирующей влияние внешних возмущений (в частности, изменение внешней температуры). Результирующее управление $U = u_{fb} + v_{ff} + v_{fb}$ позволяет привести температуру в одном из цилиндров в окрестность заданного распределения при условии сохранения заданной средней температуры.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310387-0) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00173).

Список литературы

1. *Gavrikov A., Kostin G., Knyazkov D., Rauh A., Aschemann H.* Experimental validation of a nonlinear model for controlled thermoelectric processes in cylindrical bodies // Proc. of the 24th Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2019. IEEE, 2019. P. 558–563.

A Nonlinear Model of Heat Transfer for Cylindrical Bodies Controlled by a Thermoelectric Converter

A. A. Gavrikov, G. V. Kostin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Russia
gavrikov@ipmnet.ru, kostin@ipmnet.ru

A boundary control problem for heat transfer processes in solid bodies is considered. The bodies are actuated by applying a voltage to a thermoelectric converter — the Peltier element. A nonlinear model describing the processes in the Peltier element and the heated or cooled bodies is proposed. The model takes into account the recuperation of the heat energy into electric one due to the Seebeck effect and the Joule heating. It is also assumed that there is an exchange of heat with the surrounding medium. As an example, we consider a structure consisting of two coaxial cylinders. A thin Peltier element is placed between them in contact with the ends of the cylinders. Using linearization with respect to the temperature, eigenfunctions are analytically constructed and eigenvalues are calculated for the resulting nonlinear control problem. Based on the feedback linearization, a feedforward control strategy and feedback compensation of the external disturbances are proposed.

О задаче синхронизации системы слабо-связанных идентичных осцилляторов

А. А. Галяев, П. В. Лысенко

ИПУ РАН, Москва, Россия
galaev@ipu.ru, pashlys@yandex.ru

Работа посвящена изучению явления синхронизации большого количества слабо-связанных осцилляторов при наличии диссипативных связей. Эти связи учитываются в уравнениях динамики системы в форме диффузионных матриц и обеспечивают асимптотически устойчивые колебания ансамбля как единого целого. В качестве примеров рассмотрены три типа взаимодействия осцилляторов: «каждый с каждым», «с ближайшими соседями» и «кольцевое с ближайшими соседями». Найдена скорость установления консенсуса системы и величина изменения этой скорости при увеличении размерности системы для рассмотренных видов взаимодействия.

Ключевые слова: мультиагентные системы, синхронизация, матрица смежности.

1. Слабое вязко-упругое взаимодействие осцилляторов друг с другом

Рассматривается система синхронных осцилляторов, состоящая из N осцилляторов одной основной частоты 1, связанных между собой слабыми вязко-упругими связями. Осцилляторы пронумерованы по порядковому номеру i , так что $i = 1, \dots, N$. Движение группы осцилляторов описывается системой ЛДУ следующего вида

$$(1) \quad \ddot{x}_i = -x_i - \sum_{j=1}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты k и α отвечают за упругую и вязкую составляющие связи между осцилляторами. Слабость связи определяется условиями $\sum_{j=1}^N k_{ij} \ll 1$, $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \ll 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, взаимность связи — условиями $k_{ij} = k_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $i, j = 1, \dots, N$.

В тензорных обозначениях, где ведется суммирование по повторяющимся индексам, система уравнений движения принимает вид

$$(2) \quad \ddot{x}_i(t) = -E_{ij}x_j(t) - K_{ij}x_j(t) - 2\Phi_{ij}\dot{x}_j(t),$$

где E — единичная матрица. Матрицы K , Φ являются симметрическими, причем $\Phi_{ij} = \alpha_{ij}$, $K_{ij} = k_{ij}$ при $i \neq j$ и $\Phi_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_{ij}$,

$$K_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N k_{ij}.$$

Исследуется случай, когда $\Phi = \alpha A$, $K = \beta A$, где α, β — константы, матрица A является матрицей смежности системы. Тогда уравнение (2) примет вид

$$(3) \quad \ddot{x}_i(t) = -E_{ij}x_j(t) - \beta A_{ij}x_j(t) - 2\alpha A_{ij}\dot{x}_j(t).$$

2. Идентичное взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Пусть матрица A имеет вид

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместо матрицы A подвергнем исследованию матрицу $B = 2E - A$. Собственные значения матрицы B находятся по свойству собственных значений матриц, приведенному в доказательстве леммы 1, а именно $\lambda_i^B = 2 - \lambda_i$. Пусть N — размерность матрицы B . Обозначим через

$$G_N(\lambda) = \det(B - \lambda E)$$

характеристические полиномы матрицы B .

Теорема 1. *Функции $G_N(\lambda)$ при различных фиксированных $N \geq 3$ удовлетворяют рекуррентной формуле*

$$(5) \quad \begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -\lambda G_N(\lambda) - G_{N-1}(\lambda), \\ G_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda), \\ G_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 2). \end{cases}$$

Лемма 1. *Члены последовательности (5) имеют формулу общего члена следующего вида:*

$$(6) \quad G_N(\lambda) = \frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N - \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N \right).$$

Лемма 2. Пусть матрицы A и B имеют размерность $N \times N$, где $N = 2^n$, $n \geq 2$ и $G_{2^n}(\lambda) = \det(B - \lambda E)$. Тогда

$$(7) \quad G_{2^n}(\lambda) = G_{2^{n-1}}(\lambda) \cdot \left(\frac{G_{2^{n-1}}^2(\lambda)}{G_{2^{n-2}}^2(\lambda)} - 2 \right),$$

где $G_{2^1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, $G_{2^0}(\lambda) \triangleq \lambda$, или, что то же самое,

$$G_{2^n}(\lambda) = G_{2^1}(\lambda) \cdot \prod_{k=2}^n \left(\frac{G_{2^{k-1}}^2(\lambda)}{G_{2^{k-2}}^2(\lambda)} - 2 \right),$$

при этом вычисленное по матрице $B - \lambda E$ значение $G_{2^0}(\lambda) = 1 - \lambda$ и отличается от допущения в формуле (7).

Лемма 3. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размерности 2^{n-1} , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размерности 2^n .

Следствие 1. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размерности N , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размерности $2N$.

Рассмотрим свойства собственных чисел матрицы B размерности 2^n .

Утверждение 1. Числа 0, 2 являются собственными числами матрицы B размерности 2^n для всех $n \geq 1$.

Утверждение 2. $|\lambda_k^B| \leq 2$ для всех $n \geq 1$ и $k = 1, \dots, 2^n$.

Утверждение 3. Среди λ_k^B присутствует собственное значение

$$(8) \quad \lambda^B = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Следствие 2. Для $\lambda^A(n)$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^A(n)}{\lambda^A(n+1)} = 4.$$

Следствие 2 означает, что для больших n скорость затухания осциллирующей моды колебаний или скорость установления консенсуса, наиболее близкой к основной частоте равной 1, при увеличении размерности системы в 2 раза уменьшается в 4 раза.

3. Идентичное кольцевое взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Матрица A имеет вид

$$(9) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Функции $G_N(\lambda)$ при различных, фиксированных $N \geq 5$ удовлетворяют рекуррентной формуле*

$$(10) \quad \begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -(1+\lambda)G_N(\lambda) - (1+\lambda)G_{N-1}(\lambda) - G_{N-2}(\lambda), \\ G_5(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2, \\ G_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ G_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{cases}$$

Лемма 4. *Члены последовательности (10) имеют формулу общего члена следующего вида:*

$$(11) \quad G_N(\lambda) = \left(\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + 2 \cdot (-1)^{N+1} \right).$$

Лемма 5. *Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размерности 2^{n-1} , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размерности 2^n .*

Следствие 3. *Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размерности N , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размерности $2N$.*

Список литературы

1. Галяев А.А. О математической модели одномерного удара цепочки тел, обладающей вязкоупругими свойствами // *АиТ*. 2015. № 10. С. 40–49.
2. *F. Bullo Lectures on Network Systems*, ed. 1.3. Kindle Direct Publishing, 2019.
3. *Ren Wei Wu, Yongcan Cao. Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*. Springer, 2010.

4. *Bernstein Dennis S.* Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas. Second Edition. Princeton University Press, 2011.
5. *Соболев О.* Однотипные связанные системы регулирования. М.: Энергия, 1973.

About Synchronization of System of Weakly Coupled Identical Oscillators

A. A. Galyaev, P. V. Lysenko

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia
galyaev@ipu.ru, pashlys@yandex.ru

The work is devoted to the study of the phenomenon of synchronization of a large number of weakly coupled oscillators in the presence of dissipative bonds. These bonds are included in the system dynamics equations in the form of diffusion matrices, providing asymptotically stable oscillation of the oscillator ensemble as a whole. Three types of interaction known as “identical all-to-all”, “nearest neighbors” and “nearest neighbors in a circle” are considered as examples.

УДК 531.36

Анализ вертикальных колебаний пары ведущих колес транспортного средства в противофазе

Т. В. Глазков, С. А. Решмин

ИШМех РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
t.glazkov@bk.ru, reshmin@ipmnet.ru

Исследуются плоские вертикальные колебания ведущих колес транспортного средства в противофазе с отрывом от поверхности дороги. Для этих колебаний определяется степень перекрытия оснований пиков графиков сил нормальной реакции в зависимости от механических параметров системы. Оценивается влияние основных параметров системы на максимальную среднюю по времени силу тяги.

Ключевые слова: транспортное средство, межколесный дифференциал, вертикальные колебания колес, сухое трение, проскальзывание

1. Введение

Во время интенсивного старта транспортного средства с межколесным дифференциалом частичная или даже почти полная потеря тяги может произойти в результате развития плоских вертикальных колебаний колес в противофазе и с их отрывом от дороги [1, 2]. Накачку энергии в колебательные степени свободы можно объяснить нелинейными эффектами при деформации шин [3, 4] и другими причинами. Требуется определить, в каких случаях возникает частичная потеря тяги, а в каких — полная.

2. Основной результат

Рассматривается система многих тел, состоящая из корпуса и двух колес вместе с соответствующими элементами подвески — двумя вертикальными пружинами и двумя амортизаторами. Каждое колесо состоит из диска и шины. Колеса могут колебаться относительно корпуса только вдоль вертикали.

В данном докладе ради простоты рассмотрены только свободные затухающие колебания двух колес в противофазе, на которые не подается управляющий крутящий момент с дифференциала. Динамика каждого колеса по отдельности описывается двухмассовой моделью передней стойки [5]. Для указанных колебаний изучены условия, при

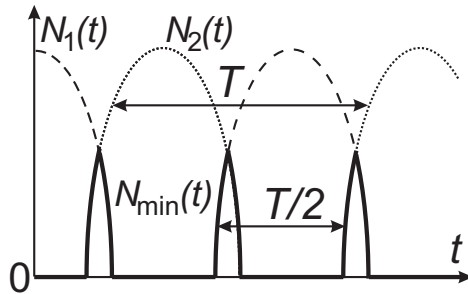


Рис. 1: Нормальные реакции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ при колебаниях колес в противофазе. Частичное перекрытие графиков происходит при $N_{\min} > 0$

которых ширина участков графиков с ненулевой силой нормальной реакции достаточно мала, из-за чего они не перекрываются. В результате получено дополнительное необходимое условие почти полной потери тяги в случае отрыва колес от дороги при предположении о том, что влияние крутящего момента на взаимное расположение указанных

участков графиков мало. На рис. 1 приведен пример с частичным перекрытием графиков сил нормальной реакции.

3. Заключение

Определена степень перекрытия оснований пиков графиков сил нормальной реакции в зависимости от механических параметров транспортного средства при колебаниях пары его ведущих колес в противофазе. Проведен анализ чувствительности максимальной силы тяги к основным параметрам системы, например, степени подкачки шин и др.

Работа выполнена в ИПМех РАН при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-11-00307).

Список литературы

1. *Решмин С.А.* Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // ДАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293.
2. *Решмин С.А.* Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 24–33.
3. *Glazkov T. V., Reshmin S. A.* A nonlinear tire model to describe an unwanted flat vibrations of the wheels // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 16. P. 268–273.
4. *Решмин С.А., Глазков Т.В.* Нелинейная модель с переменной структурой для моделирования плоских колебаний ведущих колес транспортного средства // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды XXI международной конференции. Самара: Офорт, 2019. Т. 1. С. 447–452.
5. *Hao D., Zhao C., Huang Y.* A reduced-order model for active suppression control of vehicle longitudinal low-frequency vibration // Shock and Vibration, Hindawi Publ. Corp. 2018. Article ID 5731347. P. 1–22.

Analysis of Vertical Oscillations of a Pair of Driving Wheels of a Vehicle in Antiphase

T. V. Glazkov, S. A. Reshmin

IPMech RAS, Bauman MSTU, Moscow, Russia
t.glazkov@bk.ru, reshmin@ipmnet.ru

The plane vertical vibrations of the driving wheels of a vehicle in antiphase with separation from the road surface are investigated. For these oscillations, the degree of overlap of the bases of the peaks of the graphs of the normal reaction forces is determined depending on the mechanical

parameters of the system. The influence of the main system parameters on the maximum time-average traction force is estimated.

УДК 004.896.0

Адаптивное управление с эталонной моделью свободно летающим космическим манипуляционным роботом

В. М. Глумов, В. Ю. Рутковский

ИПУ РАН, Москва, Россия
vglum@ipu.ru, rutkov@ipu.ru

Излагаются результаты использования теории адаптивного управления с эталонной моделью динамическими объектами при решении задач угловой ориентации и стабилизации механической структуры свободно летающего космического манипуляционного робота с трехзвенным манипулятором. Рассматриваются эффективность адаптивного управления такого робота при сборке космических конструкций на орбите.

Ключевые слова: космический робот, демпфирование колебаний, адаптивное управление, эталонная модель

1. Введение

Рассматривается управление угловым движением свободно летающего космического манипуляционного робота (СКМР) с жестким грузом при выполнении сборочных операций. При отсутствии или неполной информации о характеристиках транспортируемого груза, а также при вариациях координаты точки захвата, параметры механической системы СКМР с грузом становятся неопределенными. Система управления роботом дополняется подсистемой активного подавления упругих колебаний, которая синтезируется на основе теории адаптивного управления с эталонной моделью [1].

2. Математическая модель СКМР

Упругость транспортируемого груза учитывается введением дополнительных степеней свободы, описывающих упругие колебания груза. Плоское движение СКМР с грузом описана уравнениями Лагранжа

второго рода в виде

$$(1) \quad A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Bq = Q,$$

где $A(q)$ — матрица инерций системы; $C(q, \dot{q})\dot{q}$ — нелинейная вектор-функция Кориолисовых и центробежных сил; B — матрица жесткостей; Q — вектор обобщенных сил; $q = (q_0, q_\alpha, q_v)^T$ — вектор обобщенных координат, $q_0(X_0, Y_0, \vartheta)^T$ — вектор координат корпуса; $q_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ — вектор шарнирных углов поворота звеньев манипулятора; q_v — вектор упругих деформаций груза.

Пусть при транспортировке груза звенья манипулятора фиксированы относительно корпуса СКМР, вариации q_0 и q_v ограничены и малы. Связка объектов СКМР с нежестким грузом представляют собой колебательную многочастотную механическую систему, уравнения (1) которой преобразованы в модально-физическую форму [2]

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \bar{\vartheta}(t) &= m_\vartheta u_\vartheta(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} \vartheta_v(t) + \omega_v^2 \vartheta_v(t) &= K_v m_\vartheta u_\vartheta(t), \quad \vartheta_v = (\vartheta_{v1}, \vartheta_{v2}, \dots, \vartheta_{vn})^T, \\ \vartheta &= \bar{\vartheta} + \vartheta_{v\Sigma}, \quad \vartheta_{v\Sigma} = \sum_{i=1}^n \vartheta_{vi}. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\vartheta}$ — координата углового движения системы как жесткого объекта; $\vartheta_{v\Sigma}$ — дополнительные изменения координаты ϑ , вызванные колебаниями упругого груза; K_v — матрица коэффициентов возбудимости упругих мод; m_ϑ — эффективность управления.

3. Основной результат

При формировании устойчивого и надежного функционирования системы управления СКМР при транспортировке нежесткого груза используются релейно-логические алгоритм $u(\vartheta, t, \lambda)$, где λ — вектор параметров. При этом формой движения системы является предельный цикл. Характеристики цикла удовлетворяют требуемым показателям качества управления для жесткого объекта. Алгоритм не предусматривает гашение упругих колебаний $\vartheta_{v\Sigma}$. Поэтому управление в правых частях уравнений (2) является возмущающим воздействием с неизвестными параметрами.

Для демпфирования возбуждаемых колебаний используется дополнительное управление $M(u_\varepsilon)$ с применением алгоритма адаптации с

эталонной моделью [3]. При этом предполагается, что гашение колебаний с помощью $M(u_\varepsilon)$ осуществляется только внутри зоны нечувствительности основного алгоритма \bar{u}_ϑ . Управляющее напряжение u на входе двигателя-маховика формируется с помощью двух последовательно сменяющих друг друга алгоритмов $\bar{u}(\vartheta, t)$ и u_ε . Дискретный вариант сигнала $u_\varepsilon(t)$ имеет вид $u_{\varepsilon n} = k_0 S_n$, где S_n — сигнал подсистемы стабилизации упругих колебаний.

Эталонная модель получена из (2) при $\vartheta_{v\Sigma} \equiv 0$ в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \vartheta_m + k_{\omega m} \frac{d}{dt} \vartheta_m = k_u u.$$

Структура сигнала, используемого для стабилизации упругих колебаний механической системы СКМР с грузом

$$(3) \quad \begin{aligned} S_n = & S_{n-1} - T_0 \chi(p_{21} e_n + p_{22} \Delta e_n) - \\ & - T_0 K \text{sign}(c_1 e_n + c_2 \Delta e_n + \Delta^2 e_n), \end{aligned}$$

где $e_n = \vartheta_n - \vartheta_{m,n}$, T_0 — период дискретности.

4. Заключение

Введение дополнительного контура адаптивной стабилизации упругих колебаний с эталонной моделью позволяет решать задачу в случае переменных или неизвестных значений параметров колебаний. Алгоритм адаптации (3) является упрощенным вариантом математически строгого исходного алгоритма, предложенного в [3], поэтому должен рассматриваться в качестве эвристического алгоритма. Проведенное компьютерное исследование показало эффективность алгоритма при стабилизации многочастотных с плохо определенными параметрами колебаний механической системы СКМР с грузом

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-08-00073).

Список литературы

1. Теория управления(дополнительные главы): Учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. Крутова И.Н., Суханов В.М. Синтез модифицированного PD-алгоритма управления угловым движением большой космической конструкции // АиТ. 2009. № 1. С. 39–50.
3. Рутковский В.Ю., Глумов В.М., Суханов В.М. Физически реализуемый алгоритм адаптивного управления с эталонной моделью // АиТ. 2011. № 8. С. 96–108.

Adaptive Control with a Reference Model of a Free Flying Space Manipulation Robot

V. M. Glumov, V. Yu. Rutkovskii

Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
vglum@ipu.ru, rutkov@ipu.ru

The results of using the theory of adaptive control with a reference model of dynamic objects to solve the problems of angular orientation and stabilization of the mechanical structure of a free flying space manipulation robot with a three-link manipulator are presented. The effectiveness of adaptive control of such a robot when assembling space structures in orbit are considered.

УДК 681.5.037

Оценка устойчивости схемы прямого нейруправления с эталонной моделью

А. И. Глушченко, В. А. Петров, К. А. Ласточкин

СТИ НИТУ «МИСиС», г. Старый Оскол, Россия
a.glushchenko@sf-misis.ru

В работе с помощью теорем второго метода Ляпунова произведен анализ устойчивости схемы прямого нейруправления с эталонной моделью на базе нейрорегулятора, обучаемого оперативно методом backpropagation. Показано, что ограниченность всех сигналов замкнутой системы нейруправления (т.е. ее устойчивость) не достигается.

Ключевые слова: нейруправление, backpropagation, устойчивость замкнутой системы, ограниченность сигналов

1. Введение

Различные схемы нейросетевого управления, разработанные на основе схем беспоискового адаптивного управления [1], не нашли широкого применения в промышленности. Это объясняется во многом тем, что нейронные сети приходится обучать оперативно (методом обратного распространения ошибки), поскольку собрать автономную обучающую выборку в условиях производства достаточно сложно. Прак-

тическая реализация таких схем возможна в случае доказательства их устойчивости. Поэтому в работе производится анализ устойчивости замкнутой системы нейрорегулирования с эталонной моделью (ЭМ).

2. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза систем нейрорегулирования однональными ($m = 1$) линейными объектами управления. Цель управления заключается в обеспечении заданного ЭМ качества управления, то есть сведении ошибки e_d (разницы между траекторией движения объекта x и траекторией движения ЭМ x_d) к нулю. Описание модели объекта и ЭМ имеет вид (1).

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ \dot{x}_d &= A_d x_d + B_d r. \end{aligned}$$

Здесь $x \in R^n$ и $u \in R^m$ — пространства состояний и управлений, A и B — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$, $r \in R^n$ — вектор заданий, а $A_d \in R^{n \times n}$ и $B_d \in R^{n \times n}$. Уравнения в отклонениях между объектом и его ЭМ записывается в виде (2)

$$(2) \quad \dot{e}_d = A_d e_d + B(-B^\dagger(A_d - A)x - B^\dagger B_d r + u) = A_d e_d + B(\tilde{u}).$$

Здесь $\tilde{u} = u - u^* = \mu$ — разница между реальным и идеальным управлением нейрорегулятора, u вычисляется нейронной сетью (3) [1]

$$(3) \quad u = W_k \sigma(W_j e_d + B_j) + B_k.$$

Здесь, W_k и W_j — матрицы весов выходного и скрытого слоев, B_j и σ — вектор смещений и функция активации скрытого слоя. B_k — смещения выходного слоя. Целевой критерий, минимизируемый при оперативном обучении нейрорегулятора, является квадратом евклидовой нормы вектора e_d , умноженным на 0,5.

Формулы оперативного обучения нейрорегулятора имеют вид (4)

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{W}_k &= G^{(2)} \|e_d\| O^{(1)}; \dot{B}_k = G^{(2)} \|e_d\|; \\ \dot{W}_j &= G^{(1)} W_k \|e_d\| \left(O^{(1)}\right)' \left(O^{(0)}\right); \dot{B}_j = G^{(1)} W_k \|e_d\| \left(O^{(1)}\right)' \end{aligned}$$

Здесь $G^{(1)}$ — вектор скоростей скрытого слоя и $G^{(2)}$ — диагональная матрица скоростей выходного слоя, $O^{(0)}$ — вектор входов нейрорегулятора, $O^{(1)}$ — вектор выходов скрытого слоя.

Необходимо оценить устойчивость системы (2) для закона управления (3) с оперативной настройкой его параметров согласно (4).

3. Оценка устойчивости

Кандидат в функции Ляпунова имеет вид (5). $\tilde{W}_j, \tilde{W}_k, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j$ есть разница между реальными и идеальными параметрами регулятора.

$$(5) \quad \begin{aligned} V(e_d, \tilde{W}_k, \tilde{W}_j, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j) = & e_d^T P e_d + \tilde{W}_k^T (G^{(2)})^{-1} \tilde{W}_k + \\ & + \tilde{W}_j^T (G^{(1)})^{-1} \tilde{W}_j + \tilde{B}_k^T (G^{(2)})^{-1} \tilde{B}_k + \tilde{B}_j^T (G^{(1)})^{-1} \tilde{B}_j \end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова (6) согласно уравнения (2) и законов настройки параметров нейросети (4)

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -e_d^T Q e_d + 2e_d^T P B \mu + 2\tilde{W}_k^T \|e_d\| O^{(1)} + \\ & + 2\tilde{W}_j^T W_k \|e_d\| (O^{(1)})' O^{(0)} + 2 \left(\tilde{B}_k^T \|e_d\| + B_j^T W_k \|e_d\| (O^{(1)})' \right). \end{aligned}$$

Правая граница (6) есть (7). $\lambda_{\min}(Q)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — минимальное и максимальное собственные числа матриц Q и P соответственно

$$(7) \quad \dot{V} \leq -\|e_d\| \left[\begin{array}{l} \lambda_{\min}(Q)\|e_d\| - \lambda_{\max}(P)\|B\|\mu - 2\|\tilde{W}_k^T\| \cdot \|O^{(1)}\| - \\ - 2 \cdot \|\tilde{W}_j^T\| \cdot \|W_k\| \cdot \|(O^{(1)})'\| \cdot \|O^{(0)}\| - \\ - 2\|\tilde{B}_k^T\| - 2\|\tilde{B}_j^T\| \cdot \|W_k\| \cdot \|(O^{(1)})'\| \end{array} \right].$$

Из анализа правой границы (7) видно, что производная функции Ляпунова отрицательна вне подпространства γ ,

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} (e_d, \tilde{W}_k, \tilde{W}_j, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j) : \|e_d\| \leq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)} \times (\lambda_{\max}(P)\mu + \\ \|\tilde{W}_k\| \cdot \|O^{(1)}\| + \|\tilde{W}_j^T\| \cdot \|W_k\| \cdot \|(O^{(1)})'\| \cdot \|O^{(0)}\| + \\ + \|\tilde{B}_k^T\| + \|\tilde{B}_j^T\| \cdot \|W_k\| \cdot \|(O^{(1)})'\|) \end{array} \right\}$$

Траектории замкнутой системы за конечное время входят в γ , так как вне γ производная \dot{V} отрицательна, а внутри — неотрицательна.

4. Заключение

Подпространство γ не является компактным и ограниченным в пространстве $(e_d, \tilde{W}_k, \tilde{W}_j, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j)$ из-за отсутствия конечных границ по $\tilde{W}_k, \tilde{W}_j, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j$. Поэтому внутри подпространства γ ошибки $\tilde{W}_k, \tilde{W}_j, \tilde{B}_k, \tilde{B}_j$ могут принимать неограниченные значения. Их неограниченный рост приводит к пропорциональному неограниченному росту и ошибки e_d , так как граница e_d из определения γ перестает быть конечной. Согласно теоремам концепции равномерной непрерывной ограниченности (UUB) отсутствие конечных границ на все сигналы системы означает её неустойчивость по Ляпунову [2].

В дальнейшем авторы предполагают получить метод оперативного обучения нейрорегуляторов, который изначально обеспечит ограниченность всех сигналов и устойчивость системы нейроуправления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 18-47-310003).

Список литературы

1. *Омату С., Халид М., Юсоф Р.* Нейроуправление и его приложения. М.: ИПРЖР, 2000, 275 с.
2. *Lavretsky E., Wise K. A.* Lyapunov Stability of Motion. In: Robust and Adaptive Control. London: Springer, 2013. P. 225–261.

Stability Estimation of Direct Neural Control Scheme with Reference Model

A. I. Glushchenko, V. A. Petrov, K. A. Lastochkin

STI NUST "MISIS" of Stary Oskol, Russia
a.glushchenko@sf-misis.ru

Analysis of neurocontroller stability in the course of its online training with the help of backpropagation method is made for a direct neurocontrol with a reference model using theorems of the second Lyapunov method. It is shown that the limitation of all signals of a closed-loop neurocontrol system (i.e. its stability) is not guaranteed.

Колебательные режимы двухзвенного аэродинамического маятника

А. П. Голуб¹, Ю. Д. Селюцкий¹, S. S. Hwang²

НИИ механики МГУ, Москва, Россия¹

Chien Hsin University of Science and Technology, Taoyuan, Taiwan²
holub.imech@gmail.com, seliutski@imec.msu.ru

Рассматривается механическая система, представляющая собой упруго закрепленный двухзвенный аэродинамический маятник. Получены условия, при которых тривиальное положение равновесия, в котором оба звена маятника ориентированы вдоль набегающего потока, неустойчиво. При этом маятник может совершать колебания, энергия которых может преобразовываться, например, в электроэнергию. Исследуется зависимость характеристик колебательных режимов, возникающих в данной системе, от внешней нагрузки, которая моделируется путем введения демпфирования в первом шарнире маятника.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, динамика, ветроэнергетика

1. Введение

В настоящее время активно исследуются возможности преобразования энергии колебаний, возникающих при взаимодействии потока среды (например, ветра) с конструкциями, закрепленными в нем, в полезные формы энергии, в частности, для выработки электричества (см., например, [1]). В данной работе рассматривается механическая система, которая может служить рабочим элементом для ветроэнергетической установки колебательного типа.

2. Основной результат

Рассматривается двухзвенный аэродинамический маятник. Оси обоих звеньев маятника вертикальны. На втором звене закреплено крыло с симметричным профилем таким образом, что его хорда расположена вдоль звена. Вся система упруго закреплена в потоке среды с помощью спиральной пружины, установленной на первом шарнире маятника.

В работе [2] было показано, что в такой системе при определенных значениях параметров тривиальное равновесие (оба звена вытянуты по потоку) неустойчиво, и возникают автоколебания, что позволяет использовать ее для преобразования энергии потока в полезные формы

(например, в электричество). В [3] исследовалось поведение двойного аэродинамического маятника, соединенного с пьезоэлементом. Здесь мы будем моделировать полезную нагрузку на маятник с помощью демпфирования в первом шарнире.

Будем считать, что аэродинамическое воздействие на крыло сводится к подъемной силе F_l и силе лобового сопротивления F_d , приложенным в середине C хорды крыла, и аэродинамическому моменту M_z относительно этой точки.

Тогда уравнения движения системы могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (J_1 + ml_1^2) \ddot{\varphi} + ml_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} - ml_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 = \\
 = -u_c l_1 C_d(\alpha) \left(u \sin \varphi + l_1 \dot{\varphi} + r \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta} \right) + \\
 + u_c l_1 C_l(\alpha) \left(-u \cos \varphi + r \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta} \right) - k\varphi - d\dot{\varphi}, \\
 (J_2 + ml_2^2) \ddot{\theta} + ml_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + ml_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 = \\
 = -u_c r C_d(\alpha) \left(u \sin \theta + r \dot{\theta} + l_1 \cos(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \right) + \\
 + u_c r C_l(\alpha) \left(-u \cos \theta + l_1 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \right) + u_c^2 C_m(\alpha).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь функция J_1 — момент инерции первого звена, J_2 — центральный момент инерции второго звена, m — масса второго звена, l_1 — длина первого звена, l_2 — расстояние от шарнира между звеньями до центра масс второго звена, r — расстояние от указанного шарнира до середины хорды крыла, ρ — плотность среды, S — характерная площадь крыла, C_l , C_d , C_m — безразмерные коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и момента, соответственно, u_c — воздушная скорость точки C , а α — мгновенный угол атаки.

На рисунке представлены зависимости амплитуд колебаний звеньев и частоты колебаний от нормированной величины демпфирования в первом шарнире при фиксированных значениях остальных параметров (таких, что равновесие неустойчиво). Видно, что амплитуды колебаний остаются достаточно значительными в широком диапазоне значений d . При этом амплитуда колебаний второго звена существенно превышает амплитуду колебаний первого.

3. Заключение

Результаты проведенного численного моделирования динамики двухзвенного аэродинамического маятника показывают, что это

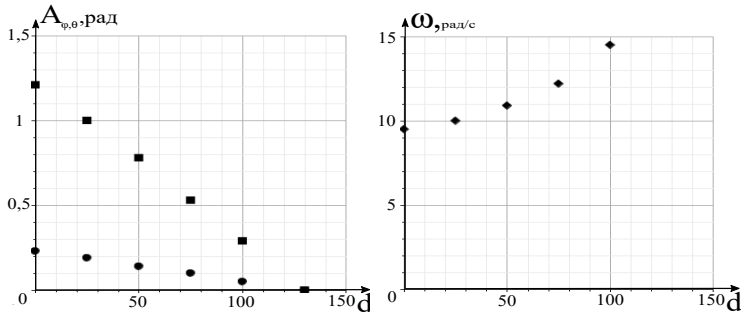


Рис. 1: Кружками обозначены амплитуды колебаний первого звена, квадратами — амплитуды колебаний первого звена, ромбами — частота.

устройство может использоваться в качестве системы преобразования энергии потока в полезные формы энергии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00538).

Список литературы

1. *McCarthy J.M., Watkins S., Deivasigamani A., John S.J.* Fluttering energy harvesters in the wind: A review // *J. Sound and Vibration*. 2016. V. 361. P. 355–377.
2. *Selyutskiy Yury D., Holub Andrei P., Dosaev Marat Z.* Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // *Int. J. of Structural Stability and Dynamics*. 2019. V. 19. No. 5. P. 1941007-1–1941007-13.
3. *Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д., Garziera R.* Циклы в динамике двухзвенного аэродинамического маятника с пьезоэлементом // *Материалы XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2019)*. Москва: ИПУ РАН. С. 167-171.

Oscillatory Regimes of Double Aerodynamic Pendulum

A. P. Holub¹, Yu. D. Selyutskiy¹, S. S. Hwang²

Institute of Mechanics of LMSU, Moscow, Russia¹

Chien Hsin University of Science and Technology, Taoyuan, Taiwan²

seliutski@imec.msu.ru, holub.imech@gmail.com

A mechanical system is considered that represents an elastically mounted double aerodynamic pendulum. Conditions of instability of the

trivial equilibrium of the pendulum (where both links are oriented along the flow) are obtained. When these conditions are met, the pendulum can perform oscillations, energy of which can be converted, e.g., into electric power. Dependence of characteristics of oscillatory regimes upon the external load is studied, The load is described by introducing damping into the first joint of the pendulum.

УДК 519.71

Синтез программных движений аффинных систем с учетом ограничений при помощи многочленов

А. Е. Голубев, Н. В. Уткина

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
v-algolu@hotmail.com, utkina-nv@yandex.ru

В настоящей работе исследуется аналитическое построение программных движений аффинных динамических систем с управлением на основе использования полиномов от независимой переменной. За счет выбора времени движения решается задача учета ограничений на переменные состояния и управления.

Ключевые слова: терминальное управление, управление с учетом ограничений

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача построения программных движений для аффинных динамических систем, представляющих собой m взаимосвязанных подсистем вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} &= f_i(t, x_i) + g_i(t, x_i)u_i, \end{aligned}$$

где $x_i = (x_{1i}, x_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1^T, \dots, x_m^T)^T \in \mathbb{R}^{2m}$ — вектор состояния системы, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих воздействий, функции $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_i)$ кусочно непрерывны по t и локально липшицевы по x_i , причем $g_i(t, x_i) \neq 0$ при всех $x_i \in \mathbb{R}^2$ и $t \geq 0$. Здесь зависимость функций $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_i)$ от t неявная и связана с возможной зависимостью этих функций от переменных x_k , $k = \overline{1, m}$, $k \neq i$.

Фиксируем произвольные начальные $x_{1i}(0) = x_{0i}$, $x_{2i}(0) = \dot{x}_{0i}$ и желаемые конечные $x_{1i}(T) = x_{*i}$, $x_{2i}(T) = \dot{x}_{*i}$ значения соответственно переменных x_{1i} и x_{2i} , $i \in \overline{1, m}$. Здесь T — время движения в фазовом пространстве системы из начальной точки с координатами $(x_{01}, \dot{x}_{01}, \dots, x_{0m}, \dot{x}_{0m})$ в конечную точку $(x_{*1}, \dot{x}_{*1}, \dots, x_{*m}, \dot{x}_{*m})$. В работе решается задача аналитического построения программных движений $x = x_r(t)$, $u = u_r(t)$, удовлетворяющих начальным и конечным условиям на переменные состояния системы, а также ограничениям

$$|x_{1i}(t)| \leq B_i, \quad |x_{2i}(t)| \leq N_i, \quad |\dot{x}_{2i}(t)| \leq Q_i$$

при всех $t \in [0, T]$, где B_i , N_i и Q_i — некоторые заданные положительные числа, $i = \overline{1, m}$. Предполагается, что при синтезе программных движений есть свобода выбора времени движения T .

2. Основной результат

Параметризованную временем кривую $x_{1i} = p_i(t)$, $x_{2i} = \dot{p}_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = \overline{1, m}$, в фазовом пространстве системы, соединяющую начальную точку $(x_{01}, \dot{x}_{01}, \dots, x_{0m}, \dot{x}_{0m})$ и конечную точку с координатами $(x_{*1}, \dot{x}_{*1}, \dots, x_{*m}, \dot{x}_{*m})$, зададим при помощи многочленов [1, 2]

$$(2) \quad p_i(t) = x_{0i} + \dot{x}_{0i}t + c_{1i}t^2 + c_{2i}t^3, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, m},$$

где коэффициенты c_{1i} , c_{2i} , $i = \overline{1, m}$, находятся из условий $p_i(T) = x_{*i}$, $\dot{p}_i(T) = \dot{x}_{*i}$, $i = \overline{1, m}$, и имеют вид

$$(3) \quad \begin{aligned} c_{1i} &= -((2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})T + 3(x_{0i} - x_{*i}))/T^2, \\ c_{2i} &= ((\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})T + 2(x_{0i} - x_{*i}))/T^3. \end{aligned}$$

Будем полагать, что начальные и конечные значения переменных x_{1i} , x_{2i} , $i = \overline{1, m}$, для искомой программной траектории удовлетворяют условиям

$$(4) \quad \max\{|x_{0i}|, |x_{*i}|\} \leq B_i, \quad \max\{|\dot{x}_{0i}|, |\dot{x}_{*i}|\} \leq N_i,$$

$$(5) \quad \dot{x}_{0i}\dot{x}_{*i} \geq 0, \quad \dot{x}_{0i}^2 + \dot{x}_{*i}^2 \neq 0, \quad (\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})(x_{*i} - x_{0i}) > 0,$$

$$(6) \quad \max \left\{ \left| \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(\dot{x}_{0i} + 2\dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})} \right|, \left| \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})} \right| \right\} \leq Q_i,$$

где $i = \overline{1, m}$. Используем далее обозначения

$$T_{1i} = \frac{2(x_{*i} - x_{0i})}{\dot{x}_{*i} + \dot{x}_{0i}}, \quad T_{2i} = \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i}}, \quad T_{3i} = \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{\dot{x}_{0i} + 2\dot{x}_{*i}}$$

и

$$I_{Ti} = [\min\{T_{2i}, T_{3i}\}, \max\{T_{2i}, T_{3i}\}],$$

где $i = \overline{1, m}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , $i \in \overline{1, m}$, такие, что справедливы соответствующие неравенства (4), (5), (6) и множество $I_T = I_{T1} \cap \dots \cap I_{Tm}$ не пустое. Тогда для любого $T \in I_T$ при всех $i \in \overline{1, m}$ многочлены (2) с коэффициентами (3) и их первые и вторые производные по времени удовлетворяют на отрезке $t \in [0, T]$ ограничениям $|p_i(t)| \leq B_i$, $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$ и $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$, $i \in \overline{1, m}$, соответственно.

Отметим, что программное управление $u = u_r(t)$, реализующее программную траекторию $x_{1i} = p_i(t)$, $x_{2i} = \dot{p}_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i \in \overline{1, m}$, согласно концепции обратных задач динамики [3] покомпонентно имеет вид

$$u_i = u_{ir}(t) = \frac{1}{g_i(t, \bar{p}_i(t))} (-f(t, \bar{p}_i(t)) + \ddot{p}_i(t)), \quad t \in [0, T], \quad i \in \overline{1, m},$$

где $\bar{p}_i(t) = (p_i(t), \dot{p}_i(t))$. Тогда при всех $i \in \overline{1, m}$ в силу непрерывности функций $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_i)$ в правых частях систем (1) для любых положительных констант $L_i > 0$ можно подобрать такие значения постоянных B_i , N_i и Q_i , что при всех $t \in [0, T]$ имеют место неравенства $|u_{ir}(t)| \leq L_i$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проекты №19-07-00817, №20-07-00279).

Список литературы

1. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 805–809.
2. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988.

Polynomial-Based Trajectory Planning for Affine Dynamical Systems under State Constraints

A. E. Golubev, N. V. Utkina

Bauman Moscow State Technical University, Russia
v-algolu@hotmail.com, utkina-nv@yandex.ru

In this paper we deal with analytical trajectory planning considerations for differentially flat affine dynamical systems based on third order time polynomials. It is shown that the state and input constraints can be readily accounted for by proper choice of time of motion.

УДК 519.71

Стабилизация пассивных динамических систем при наличии возмущений

A. E. Голубев, Н. В. Уткина

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
v-algolu@hotmail.com, utkina-nv@yandex.ru

Рассмотрена задача стабилизации пассивных динамических систем при наличии возмущений на входе и на выходе системы. Получены новые достаточные условия стабилизируемости систем статической обратной связью по выходу в присутствии возмущений. В качестве примера рассмотрена задача робастного синтеза нелинейного наблюдателя состояния.

Ключевые слова: пассивность, стабилизация, обратная связь по выходу, возмущения

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия нелинейной динамической системы

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u + d_1), \\ \tilde{y} &= h(x) + d_2, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y = h(x) \in \mathbb{R}^m$ — измеряемый выход системы; $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ локально липшицевы, $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$; $d_1 = d_1(t)$, $d_2 = d_2(t)$ — некоторые неизвестные кусочно непрерывные и ограниченные на $[0, +\infty)$ функции, соответствующие действующим на систему возмущениям.

Предполагается, что невозмущенная система (1), имеющая вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned}$$

обладает свойством пассивности [1, 2], т.е. существует непрерывно дифференцируемая неотрицательно определенная функция $V(x)$, называемая функцией запаса, такая, что при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство (диссипации):

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq y^T u.$$

Дополнительно потребуем, чтобы система (2) была детектируема в нулевом состоянии [1], т.е. для любого решения $x = x(t)$ системы (2) при $u = u(t) \equiv 0$, удовлетворяющего условию $y(t) = h(x(t)) \equiv 0$, было выполнено $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

2. Основной результат

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть 1) система (2) пассивна с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \rightarrow \infty$ функцией запаса $V(x)$ и детектируема в нулевом состоянии; 2) $k(y)$ — произвольная локально липшицевая функция такая, что $k(0) = 0$ и для некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$ справедливы оценки

$$(3) \quad y^T k(y) \geq c_1 \|y\|^{2l}, \quad \|k(y)\| \leq c_2 \|y\|^{2l-1}.$$

Тогда при управлении $u = -k(\tilde{y}) = -k(y + d_2)$ система (1) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям d_1, d_2 .

3. Пример стабилизации статической обратной связью по выходу

Рассмотрим задачу оценки состояния динамической системы

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \varrho(y, u), \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, пара (A, C) детектируема, отображение $\varrho : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ локально липшицево, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — произвольная известная кусочно непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty)$ функция на входе системы. Предполагается, что непосредственным измерениям доступен только выход $y \in \mathbb{R}^p$ системы.

Наблюдатель системы (4) строится в виде

$$(5) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varrho(\tilde{y}, u) + k(C\hat{x} - \tilde{y}),$$

где $\tilde{y} = y + d$ измеряемые значения выхода, $d = d(t)$ — некоторая неизвестная кусочно непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty)$ функция, соответствующая возмущениям в канале измерения выхода, $k(\cdot)$ — локально липшицевая функция, подлежащая определению, $k(0) = 0$.

Система, описывающая динамику ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (4) наблюдателем (5), имеет вид

$$(6) \quad \dot{e} = Ae + [\varrho(y + d, u) - \varrho(y, u)] + k(Ce - d).$$

Можно показать что в случае $d = d(t) \equiv 0$ система (6) с выходом $y_1 = Ce$ и новым входом $\tilde{v} \in \mathbb{R}^p$ при использовании статической обратной связи по выходу y_1 , имеющей вид

$$k(y_1) = Ly_1 + \frac{1}{2}L_1\tilde{v}, \quad L_1 = P^{-1}C^T,$$

является пассивной. Здесь матрица $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ такая, что $A + LC$ гурвицева, $P = P^T > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова $(A + LC)^T P + P(A + LC) = -Q$, $Q = Q^T > 0$.

Далее, статическая обратная связь $\tilde{v} = -\tilde{k}(y_1)$ по выходу y_1 , где функция $\tilde{k}(\cdot)$ удовлетворяет соответствующим неравенствам (3), дает возможность обеспечить (интегральное) свойство устойчивости по отношению к возмущениям d [3] системы, описывающей динамику ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния, которая примет вид

$$(7) \quad \dot{e} = (A + LC)e + [\varrho(y + d, u) - \varrho(y, u)] - Ld + \frac{1}{2}L_1\tilde{k}(Ce - d).$$

В частности, если функция $\varrho(y, u)$ глобально Липшицева по y равномерно по u , то согласно [2] система (7) при $\tilde{k}(\cdot) \equiv 0$ обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям d .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проекты № 19-07-00817 и № 20-07-00279).

Список литературы

1. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. on Autom. Control. 1991. V. 36. No 11. P. 1228–1240.
2. *Khalil H.K.* Nonlinear systems. 3d edition. New York: Prentice Hall, 2002.
3. *Sontag E.D.* Comments on integral variants of ISS // Systems and Control Letters. 1998. V. 34. P. 93–100.

Stabilization of Passive Dynamical Systems under Disturbances

A. E. Golubev, N. V. Utkina

Bauman Moscow State Technical University, Russia
v-algolu@hotmail.com, utkina-nv@yandex.ru

We analyze stabilizability of passive dynamical systems subject to actuator and sensor disturbances. New sufficient conditions are given for the conventional static output feedback, which is used to stabilize passive systems, to guarantee the (integral) input-to-state stability property with respect to the disturbances. As an illustrative example application of the obtained results to robust state observer redesign is considered.

УДК 531.38

Спасение робота из аварийного положения на спине

Ю. Ф. Голубев^{1,2}, В. В. Корянов¹, Е. В. Мелкумова²

ИПМ имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия¹

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия²

golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

Если корпус имеет верхнюю оболочку в виде усеченного цилиндра, то автономное спасение шестиногой машины из аварийного положения «вверх ногами» возможно при помощи циклического движения ног. Предложен метод раскачивания робота, обеспечивающий переворот корпуса и возвращение робота в рабочее положение. Выполнено исследование полной динамики робота.

Ключевые слова: шестиногий робот, аварийная ситуация, переворот корпуса, раскачивание

1. Введение

При движении робота по бездорожью [1] могут возникать разные аварийные ситуации. При отсутствии поломок наиболее катастрофичным представляется случай, когда из-за падения робот оказывается в перевернутой позиции с ногами, ориентированными вверх, и корпусом, лежащим на опорной плоскости. Для многоногого робота с корпусом в виде прямоугольного параллелепипеда [2] обратный переворот корпуса трудновыполним. Возможен спасительный вариант, когда за счет специальной конструкции ног робот может двигаться как в стандартном, так и в перевернутом положении корпуса [3].

Вместе с тем при наличии на борту измерительных устройств, например, датчиков, позволяющих осуществлять привязку к местности и к направлению силы тяжести, перевернутое положение корпуса может привести к потере способности робота ориентироваться в пространстве. Чтобы не оказаться беспомощным в аварийной ситуации, робот должен быть снабжен методом, позволяющим вернуть правильную позицию корпуса для возможности его дальнейшего функционирования.

Для облегчения задачи переворота корпуса можно воспользоваться резонансными эффектами, которые возникают при определенной форме корпуса за счет специальных движений ног. Выполнено аналитическое исследование и компьютерное моделирование полной динамики робота, подтвердившие эффективность разработанной методики для восстановления функциональной состоятельности робота. Приводятся результаты численных экспериментов.

2. Равновесие корпуса в перевернутом положении.

Для облегчения процесса переворота корпус шагающего робота в рабочем положении может иметь форму выпуклой вверх части цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси цилиндра. Рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что на горизонтальной опорной прямой лежит однородный сегмент круга, имеющий массу M . Сегмент ограничен дугой окружности радиуса R и хордой, отстоящей от центра окружности на расстоянии h . Дуга окружности сегмента касается опорной прямой в точке A . Сегмент может перекатываться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь вокруг центра упомянутой окружности на угол φ , отсчитываемый от вертикального радиуса, направленного в точку A касания сегмента с прямой. Если $\varphi = 0$, то сегмент лежит так, что его хорда параллельна опорной прямой (рис. 1).

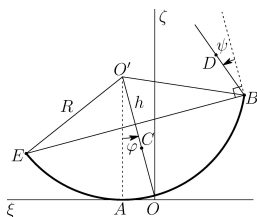


Рис. 1: Аварийное положение робота

3. Действия робота в аварийной ситуации.

Решаемая задача формулируется следующим образом. Пусть в результате несчастного случая робот перевернулся и оказался в позиции, когда он лежит спиной на ровной горизонтальной опорной плоскости ногами вверх [4]. Ему необходимо выбрать боковой край корпуса, через который будет выполняться переворот так, чтобы спина оказалась наверху. Спасательные мероприятия происходят в соответствии с этапами перечисленными в [5].

4. Заключение

Представлено решение новой задачи о спасении автономного инсектоморфного робота, аварийно лежащего на горизонтальной опорной плоскости на спине в положении «вверх ногами». Для возможности спасения робота предложена специальная форма корпуса в виде сложенных по плоскому сечению двух усеченных прямых круговых цилиндров. Разработан и аналитически обоснован метод амплитудного раскачивания системы в окрестности положения аварийного равновесия, позволяющий использовать кинематические и динамические возможности шагающего робота для самостоятельного спасения. Синтезировано устойчивое резонансное движение системы, обеспечивающее переворот корпуса робота и приведение робота в нормальное рабочее положение.

Предложенные алгоритмы формирования движения робота при спасении из аварийной ситуации были отработаны средствами компьютерного моделирования в программной среде, реализующей расчет взаимодействия трехмерной полной динамической модели механической системы, состоящей из робота, взаимодействующего с горизонтальной опорной плоскостью. В результате аналитического исследования адекватной упрощенной динамической модели системы установлены ограничения на возможность применения разработанного метода, связан-

ные с геометрическими и массовыми характеристиками конструкции робота.

Стабилизация движения робота в окрестности программного движения построена по принципу кусочно-формируемой с дискретностью шага интегрирования обратной связи. Обратная связь рассчитывается по расщеласованиям реальных и программных шарнирных углов с требованием минимальных значений угловых скоростей. Возникающие в шарнирных углах переходные процессы не разрушают требуемое программное движение корпуса робота на всех этапах движения системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00123-а).

Список литературы

1. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018.
2. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984.
3. Robot Kingdom: URL: https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47_xJk.
4. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.* Переворачивание шагающего робота в рабочее состояние из аварийного положения вверх ногами // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 48.
5. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами» // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 6. С. 163–176.

Robot Rescue from an Emergency on the Back

Yu. F. Golubev^{1,2}, V. V. Koryanov¹, E. V. Melkumova²

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, of Moscow, Russia¹

M. V. Lomonosov State University of Moscow, Russia²

golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

It is shown that the Autonomous rescue of a six-legged machine from an emergency position “upside down” is possible with the help of cyclic movement of the legs, if the body has an upper shell in the form of a truncated cylinder. A method is proposed of rocking the body, which provides a flipping of the body and the return of the robot to the operating position. The study of the full dynamics of the robot was fulfilled.

**Перенос хрупкого цилиндра
манипулятором с четырехпальцевым схватом**

Ю. Ф. Голубев¹, Е. В. Мелкумова²

ИПМ имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия¹

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия²

golubev@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

Исследуется задача об удержании хрупкого цилиндра четырьмя пальцами рук робота манипулятора. Аналогией задачи служат колебания цилиндра на цилиндре в окрестности устойчивого положения равновесия. Цилиндр лежит на одном пальце руки человекоподобного робота перпендикулярно ему, концами других трех пальцев придерживается. Аналогично держится стакан.

Ключевые слова: четырехпальцевый схват, трение Амонтона–Кулона, четырехногий робот.

1. Введение

Исследуется задача о шагающем роботе, состоящем из корпуса, l рук с m пальцами и n ног, опирающихся о прямой круговой шероховатый цилиндр, радиуса ρ , в $n + m$ точках опоры. Предполагается, что руки, пальцы и ноги робота совершают заданное движение относительно корпуса робота. Каждый из пальцев имеет одну точку в контакте с цилиндром с трением Амонтона–Кулона и для двух точек опоры, с трением верчения. Численно и аналитически получены возможные области расположения точек контакта на цилиндре, для которых существует решение задачи кинестатики при переносе цилиндра четырьмя пальцами. Робот может удерживать цилиндр двумя пальцами, расположенными на одном диаметре в основании цилиндра. И за счет сухого трения четырьмя пальцами расположенными по разные стороны от центра масс цилиндра или вводимой в динамику точке C .

2. Основной результат

Рассматривается кинетический момент робота относительно точки O . Для того, чтобы заданное движение могло быть реализовано, реакции $\tilde{\mathbf{R}}_i$ в $n + m$ точках опоры должны удовлетворять следующим

уравнениям [4] кинестатики:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n+m} \tilde{\mathbf{R}}_i = -\tilde{\mathbf{\Phi}}, \quad \sum_{i=1}^{n+m} \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{R}}_i = -\tilde{\mathbf{M}},$$

где $\tilde{\mathbf{R}}_i$ — компоненты реакций, $\tilde{\mathbf{r}}_i$ — радиус-векторы точек опоры, $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ — сумма даламберовых сил инерции и внешних активных сил, $\tilde{\mathbf{M}}$ — сумма моментов даламберовых сил инерции и моментов внешних активных сил относительно неподвижной точки O .

Ограничимся случаем, когда $\tilde{\mathbf{\Phi}} \neq 0$ и перпендикулярно $\tilde{\mathbf{M}}$. Приведем систему $\{\tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{M}}\}$ к равнодействующей в точке C [2]. Точка C будет также точкой приложения равнодействующей реакций. Например, точка C может быть центром масс переносимого объекта.

Далее рассматривается задача о распределении реакций $\tilde{\mathbf{R}}_i$ по точкам опоры в некоторый фиксированный момент времени в предположении, что сила $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ приложена в точке C .

Пусть точки опоры робота расположены на поверхности шероховатого прямого кругового цилиндра с коэффициентом k сухого трения, и ось цилиндра составляет угол α с вектором $\tilde{\mathbf{\Phi}}$. Уравнения кинестатики [3] дополняются квадратичными неравенствами, отвечающими за попадание реакций в соответствующие конусы трения. Хрупкость цилиндра означает ограничение на модуль нормальных составляющих реакций [4]: $\tilde{N}_i \leq a$.



Рис. 1: Разделение опорного множества на два подмножества.

На рис. 1 показан случай четырех точек в опоре и справа одна из возможных опорных троек. Большой палец руки оказывается на одном конце диаметра цилиндрического панциря черепахи. Остальные пальцы находятся в окрестности решения, когда две точки опоры расположены на одной прямой ортогональной оси цилиндра [5]. В соав-

торстве в В. В. Коряновым нами рассмотрено переворачивание шагающего робота в рабочее состояние из аварийного положения. Черепаха, например, переворачивается путем отжимания от поверхности. Альтернативным методом может быть помощь другого шагающего робота с четырехпальцевым манипулятором. Если, конечно, робот не в силах выполнить трюк волчка тип-топ.

3. Заключение

Если цилиндр хрупкий, то трех пальцев может оказаться недостаточно. Робот может удерживать хрупкий цилиндр четырьмя или тремя пальцами, расположенными на внешней поверхности нижнего или верхнего полуцилиндра. При этом нагрузка на четыре пальца распределяется более равномерно, так что величины нормальных реакций не превышают заданной величины a . Например, пусть одна из точек опоры и центр масс цилиндра расположены в вертикальной плоскости содержащей ось цилиндра, а две другие точки опоры в плоскости ортогональной оси цилиндра при этом центр масс цилиндра расположен внутри опорного треугольника. Аналогично, если хват держит цилиндр на его внутренней поверхности, то три точки опоры должны быть расположены на верхнем полуцилиндре. Четыре точки опоры хвата могут быть расположены в вертикальной плоскости, содержащей ось цилиндра. Также они могут быть расположены симметрично в окрестности сечения цилиндра проходящего через точку C .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 16-01-00131-а).

Список литературы

1. *Golubev Yu.F., Melkumova E.V.* Walking Robot Dynamics on a Rough Inclined Cylinder. // ESMC-2012 - 8th European Solid Mechanics Conference. Graz, Austria, July 9-13, 2012. Book of Abstracts. Ed. Gerhard A. Holzapfel and Ray W. Ogden.
2. *Golubev Yu.F., Melkumova E.V.* Golubev Yu.F., Melkumova E.V. Prescribed Motion of a Two-legged Walking Robot on a Rough Cylinder // 2016 13th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference)(STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7541184>
3. *Golubev Yu.F., Melkumova E.V.* Two-legged walking robot prescribed motion on a rough cylinder // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1959. No. 030009. P. 030009–1–030009–8. DOI: 10.1063/1.5034589.
4. *Ленский А.В., Лизунов А.В., Можжевелов С.Б. и др.* Управление движением манипулятора вдоль связи // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 5. С. 41–49.

5. *Голубев Ю.Ф., Мелкумова Е.В.* Перенос хрупкого цилиндра трехпальцевым манипулятором // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 543–545.

Carrying a Fragile Cylinder with a Four-finger Gripper

Yu. F. Golubev¹, E. V. Melkumova²

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, of Moscow, Russia¹

M. V. Lomonosov State University of Moscow, Russia²

golubev@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

The problem of holding a fragile cylinder with four fingers of the robot arm is investigated. An analogy of the problem is the oscillations of the cylinder on the cylinder in the vicinity of a stable equilibrium position. The cylinder lies on one finger of the hand of a humanoid robot perpendicular to it, adheres to the ends of the other three fingers. Similarly holds a glass.

УДК 62-501.2

Задача слежения с учетом физических ограничений на фазовые переменные и управления

С. И. Гулюкина, В. А. Уткин

ИПУ РАН, Москва, Россия

litun.svetlana@mail.ru, vicutkin@ipu.ru

В работе предложено решение задачи слежения с учетом ограничений на фазовые переменные и управления на основе нелинейного преобразования координатного базиса в виде линейных функций с насыщением и блочного подхода в управлении. В качестве приложения рассмотрена задача управления теплоэнергетическим объектом.

Ключевые слова: нелинейная задача слежения, фазовые ограничения, блочный подход, глубокие обратные связи

1. Обсуждение проблемы. Постановка задачи.

На практике широко распространены физические системы, в которых на фазовые переменные и элементы управления наложены ограничения. Примером таких систем могут служить паротурбинные установки, в которых посредством управления необходимо поддерживать давление в трубе на уровне заданного значения.

Рассматривается система вида:

$$(1) \quad \dot{x}_i = x_{i+1} + \eta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{x}_n = u + \eta_n,$$

где $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, и на компоненты вектора состояния и управления наложены ограничения

$$(2) \quad |x_i| \leq X_i, \quad |u| \leq U, \quad |\eta_i| \leq N_i, \quad X_i, N_i, U = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Элементы η_i отражают нелинейные составляющие модели объекта управления и влияние внешних возмущений.

Ставится задача синтеза статистической обратной связи, обеспечивающей инвариантность выходной переменной по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью

$$(3) \quad |x_1| \leq \Delta_1 \quad \forall t > T_1 > 0$$

с выполнением условий (2).

2. Основной результат

Представим процедуру решения поставленной задачи в рамках блочного подхода [1]. Введем невырожденную замену переменных

$$(4) \quad \bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_{i+1} = x_{i+1} + M_i \text{sat}(s_i), \quad s_i = k_i \bar{x}_i, \quad k > 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где $M_i \text{sat}(s_i) = \min(M_i, |s_i|) \text{sign}(s_i)$ и сформируем управление в виде

$$(5) \quad u = -M_n \text{sat}(k_n \bar{x}_n), \quad s_n = k_n \bar{x}_n.$$

Система (1) с учетом (4) и (5) примет вид в переменных s_i

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\dot{s}_1}{k_1} = -M_1 \text{sat}(s_1) + \frac{s_2}{k_2} + \eta_1, \dots, \\ \frac{\dot{s}_i}{k_i} = -M_i \text{sat}(s_i) + \frac{s_{i+1}}{k_{i+1}} + \eta_i + \frac{d}{dt} M_{i-1} \text{sat}(s_{i-1}), \quad i = \overline{2, n}, \dots, \\ \frac{\dot{s}_n}{k_n} = -M_n \text{sat}(s_n) + \eta_n + \frac{d}{dt} M_{n-1} \text{sat}(s_{n-1}). \end{cases}$$

Переменные системы (6) попадут в линейную зону при выполнении условий

$$(7) \quad \begin{aligned} M_1 &> \frac{s_2}{k_2} + N_1, M_i > \frac{s_{i+1}}{k_{i+1}} + \eta_i + |\dot{s}_{i-1}|, \\ i &= \overline{2, n-1}, M_n > \eta_n + |\dot{s}_{n-1}|. \end{aligned}$$

Как видим, амплитуда функций с насыщением возрастает с ростом коэффициентов, выбранных на предыдущих шагах. В свою очередь система (6) в линейной зоне будет описываться уравнениями

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\dot{s}_1}{k_1} = -s_1 + \frac{s_2}{k_2} + \eta_1, \dots, \\ \frac{\dot{s}_i}{k_i} = -s_i + \frac{s_{i+1}}{k_{i+1}} + \eta_i + \dot{s}_{i-1}, \quad i = \overline{2, n-1}, \dots, \\ \frac{\dot{s}_n}{k_n} = -s_n + \eta_n + \dot{s}_{n-1}. \end{cases}$$

Из системы (8) с учетом оценок на производные функций с насыщением $\frac{d}{dt}M_i \text{sat}(s_i) \leq |\dot{s}_i| \leq k_i \left(M_i + \frac{s_{i+1}}{k_{i+1}} + N_i + k_{i-1} |\dot{s}_{i-1}| \right)$ сразу следуют соотношения, позволяющие обеспечить заданную точность стабилизации выходной переменной (3):

$$(9) \quad \begin{cases} |s_1| \leq \frac{|s_2|}{k_2} + N_1 \Rightarrow |x_1| \leq \frac{1}{k_1} \left(\frac{s_2}{k_2} + N_1 \right) = \Delta_1, \dots, \\ |s_i| \leq \frac{s_{i+1}}{k_{i+1}} + N_i + |\dot{s}_{i-1}| \Rightarrow |\bar{x}_i| \leq \frac{1}{k_i} \left(\frac{|s_{i+1}|}{k_{i+1}} + N_i + |\dot{s}_{i-1}| \right) \\ |s_n| \leq N_n + |\dot{s}_{n-1}| \Rightarrow |\bar{x}_n| \leq \frac{1}{k_n} (N_n + |\dot{s}_{n-1}|). \end{cases}$$

Как следует из (9), с увеличением коэффициентов, увеличивается точность решения поставленной задачи. Увеличивается и амплитуда функций с насыщением, что может выходить за допустимые границы в реальных задачах. Чем коэффициенты усиления меньше, тем меньше амплитуды функций с насыщением, но тем и точность меньше. Возникает задача выбора коэффициентов усиления таким образом, чтобы обеспечить заданную точность, но при этом не выйти за ограничения.

В данной работе разработана процедура выбора амплитуд и коэффициентов усиления таким образом, чтобы удовлетворить (2) и решить задачу с заданной точностью (3) в задаче синтеза. В задаче анализа

при заданных ограничениях (2) предложена процедура выбора коэффициентов усиления и амплитуд, удовлетворяющих (2) и позволяющих обеспечить максимально возможную точность.

Представленные результаты применены к синтезу системы управления парогенератором, модель которого описывается нелинейной системой третьего порядка [3].

3. Заключение

В работе с использованием блочного подхода и перехода к новому координатному базису в виде линейных функций с насыщением, предложен оригинальный подход к решению задачи слежения с учетом ограничений на фазовые переменные и управления применительно к широкому классу нелинейных систем. Применение данного подхода к синтезу системы управления парогенератором и результаты моделирования показали эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00846а).

Список литературы

1. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // *АиТ.* 2017. № 13. С. 26–53.
2. *Utkin V.A., Krasnova S.A., Kochetkov S.A. and Utkin A.V.* Ensuring of Invariance of the Output Variables of Linear Systems to External Unmatched Disturbances under Restrictions on the State Variables and Controls // *Proceedings of the International Workshop on Recent Advances in Sliding Modes (RASM 2015)*, 9-11 April 2015, Istanbul, Turkey. ID-0000825, 6 p.
3. *S.Y. Li, H.B. Liu* A new coordinated control strategy for boiler-turbine system of coal-fired power plant // *IEEE Trans. on Control System Technology.* 2005. V. 13. No. 6. P. 943–954.

The Task of Tracking with Regard to Physical Limitations on Phase Variables and Control

S. I. Gulyukina, V. A. Utkin
litun.svetlana@mail.ru, vicutkin@ipu.ru

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Russia

The paper proposes a solution to the problem of tracking taking into account the limitations on phase variables and control on the basis of nonlinear transformation of the coordinate basis in the form of linear functions

with saturation and a block approach to control. As an application, the task of controlling the heat power object is considered.

УДК 517.977.1

О применимости метода линеаризации при вычислении множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых интервалах времени

М. И. Гусев

Ин-т математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
gmi@imm.uran.ru

В докладе исследуется асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени. Предполагается, что ограничения на управление и траекторию заданы интегральным неравенством, в котором подынтегральная функция представляет собой сумму дифференцируемой функции от состояния системы и квадратичной выпуклой функции управляющих параметров. Получены достаточные условия, при выполнении которых при достаточно малой длине промежутка времени множество достижимости нелинейной системы является выпуклым и асимптотически близким к множеству достижимости системы, линеаризованной вдоль траектории, отвечающей нулевому управлению. Теоретические выводы доклада проиллюстрированы результатами численного моделирования.

Ключевые слова: нелинейная система, линеаризация, множество достижимости, интегральные ограничения

1. Введение

В докладе исследуются свойства множеств достижимости аффинных по управлению нелинейных управляемых систем с интегральными ограничениями на малых промежутках времени. Когда какие-то из параметров управляемой системы малы (начальные отклонения от положения равновесия, возмущения на входе системы и т.д.) о ее поведении часто можно судить по поведению ее линейного приближения. Здесь мы выясняем при каких условиях данный подход применим при построении множеств достижимости на малых промежутках

времени — будут ли эти множества близки к множествам достижимости линеаризованной системы? Это зависит от поведения грамиана управляемости линеаризованной системы, минимальное собственное число грамиана не должно стремиться к нулю слишком быстро при стремлении к нулю длины промежутка времени. Понятие асимптотической близости множеств определяется через расстояние Банаха–Мазура. Пусть выпуклые компактные множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из них. Расстоянием Банаха–Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y называется величина $\rho(X, Y) := \log(r(X, Y) \cdot r(Y, X))$ где $r(X, Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}$.

Предположим, что $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ — выпуклые компактные множества, зависящие от параметра ε , и нулевой вектор является внутренней точкой каждого из этих множеств при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными [1], если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Асимптотика множеств достижимости

В данной работе исследуются множества достижимости для аффинных по управлению систем

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x^0,$$

на промежутке $[0, \varepsilon]$ с интегральным ограничением на управление

$$J_\varepsilon(u(\cdot)) := \int_0^\varepsilon (Q(x(t)) + u^\top(t)u(t))dt \leq \mu^2,$$

где $Q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ — малый параметр. Считаем далее, что для любого $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[0, \bar{\varepsilon}]$, $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \leq \mu$ существует и единственно решение $x(t, u(\cdot))$ системы (1), это решение определено на промежутке $[0, \bar{\varepsilon}]$ и принадлежит компакт $D \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $Q(x)$ дифференцируемы и их производные удовлетворяют условиям Липшица на D . Линеаризованную вдоль траектории $x(t, 0)$ систему (1) после замены времени $t = \varepsilon\tau$ представим в виде

$$(2) \quad \dot{y}(\tau) = \varepsilon A(\tau)y(\tau) + B(\tau)v(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad y(0) = 0,$$

где $A(\tau) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x(\varepsilon\tau, 0))$, $B(\tau) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x(\varepsilon\tau, 0))$. Обозначим через $G(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot), J_\varepsilon(u(\cdot)) \leq \mu^2, x = x(\varepsilon, u(\cdot))\}$ множество достижимости системы (1) в момент времени ε . Через $\hat{G}(\varepsilon)$ будем обозначать множество достижимости системы (2) в момент времени $\tau = 1$ при

ограничении $\|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \mu\varepsilon^{1/2}$ на управление. Множество $\hat{G}(\varepsilon)$ — эллипсоид в \mathbb{R}^n , невырожденный, если линейризованная система вполне управляема на отрезке $[0, 1]$.

Определим отображение $\Psi_\varepsilon(v(\cdot)) : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $\Psi_\varepsilon(v(\cdot)) = y(1, v(\cdot))$, где y — решение системы (2). Отображение Ψ_ε удовлетворяет условию Липшица с константой, которую обозначим через $L(\varepsilon)$. Положим $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$ ($\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^2$, если $Q(x(t, 0)) \equiv 0$). Обозначим через W_ε грамиан управляемости линейризованной системы (2) (см. [2]), пусть $\nu(\varepsilon)$ — минимальное собственное число грамиана.

Теорема 1. Пусть линейризованная система (2) вполне управляема на $[0, 1]$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и выполнены условия: $\varepsilon L^2(\varepsilon)/\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\alpha(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon\nu(\varepsilon)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

Тогда при достаточно малых ε множество $G(\varepsilon) - x(\varepsilon, 0)$ выпукло и асимптотически эквивалентно множеству $\hat{G}(\varepsilon)$, то есть $\rho(G(\varepsilon) - x(\varepsilon, 0), \hat{G}(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

Используя асимптотику минимального собственного числа грамиана управляемости для линейных стационарных систем с малым параметром [2], получим

Следствие 1. Пусть управляемая система 2-го порядка имеет вид $\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2u(t)$, $x(0) = x^0$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \leq 2$, f_2 — постоянная матрица размеров $2 \times r$. Пусть $f_1(x^0) = 0$ и пара $A := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^0)$, f_2 вполне управляема, $Q(x^0) = 0$.

Тогда множество $G(\varepsilon) - x^0$ выпукло при достаточно малых ε и асимптотически эквивалентно $\hat{G}(\varepsilon)$.

Список литературы

1. *Goncharova E., Ovseevich A.* Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. V. 168 (2). P. 615–624.
2. *Gusev M.I.* Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11548. P. 461–473.

On the Applicability of the Linearization Method in Calculating Reachable Sets of Nonlinear Control Systems at Small Time Intervals

M. I. Gusev

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia
gmi@imm.uran.ru

This paper investigates the asymptotic behavior of reachable sets of nonlinear control systems with integral constraints at small time intervals. Sufficient conditions are obtained under which, for a sufficiently small length of a time interval, the reachable set of a nonlinear system is convex and asymptotically equal to the reachable set of a linearized system.

УДК 517.97.7

Оптимальная импульсная стабилизация автономных систем дифференциальных уравнений с последствием

Ю. Ф. Долгий, А. Н. Сесекин

УрФУ, ИММ УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
yurii.dolgi@imm.uran.ru, n.a.sesekin@urfu.ru

Рассматривается задача оптимальной импульсной стабилизации для линейной автономной системы с последствием и квадратичным показателем качества переходных процессов. В принципе динамического программирования Беллмана используется постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональных пространствах состояний и управлений. Получена система определяющих уравнений для коэффициентов квадратичного функционала Беллмана. Найдено матричное функционально-разностное уравнение, которое неявно определяет оптимальное позиционное стабилизирующее управление. Получена краевая задача для нахождения коэффициентов функционально-разностного уравнения.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, импульсные управления, дифференциальные уравнения с последствием

1. Введение

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с последствием запаздывающего ти-

па

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta)x(t + \vartheta) + Bv.$$

Здесь $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$; матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-\tau, 0]$, $\eta(0) = 0$; $v \in \mathbb{R}^r$ — импульсное управление, B — постоянная матрица. Требуется найти импульсное управление, формируемое по принципу неявной обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$(2) \quad J[v(\cdot)] = \int_0^{+\infty} (x^\top(t)C_x x(t) + v^\top(t)C_v v(t)) dt,$$

где C_x, C_v — положительно определенные матрицы. Допустимым позиционным управлениям отвечают обобщенные решения управляемой системы [1, 2]. Соответствующие программные управления являются функциями с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке.

В настоящей работе продолжены исследования [3] для управляемой автономной системы дифференциальных уравнений общего вида.

2. Основной результат

Используя замену $x(t) = y(t) + v(t)$, $t \geq -\tau$, задачу оптимальной стабилизации (1), (2) преобразуем к виду

$$(3) \quad \frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta)y(t + \vartheta) + B \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta)v(t + \vartheta),$$

$$(4) \quad \hat{J}[v(\cdot)] = \int_0^{+\infty} (y^\top(t)C_{yy}y(t) + y^\top(t)C_{yv}v(t) + v^\top(t)C_{vv}v(t)) dt.$$

При решении задачи (3), (4) используется принцип динамического программирования Беллмана в гильбертовых функциональных пространствах состояний и управлений. Квадратичный функционал Беллмана выбирается в специальной форме

$$V(\mathbf{y}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)) = \langle U_{11}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_H + 2\langle U_{12}\mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle_H + \langle U_{22}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_2,$$

где $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$; оператор $U_{11} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ имеет представление $(U_{11}\mathbf{y})(\vartheta) = K_{11}(\vartheta, 0)\mathbf{y}(0) + \int_{-\tau}^0 K_{11}(\vartheta, s)\mathbf{y}(s)ds$, $K_{11}^\top(\vartheta, s) = K_{11}(s, \vartheta)$, $\vartheta, s \in [-\tau, 0]$; оператор $U_{12} : \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r) \rightarrow \mathbb{H}$ имеет представление $(U_{12}\mathbf{v})(\vartheta) = \int_{-\tau}^0 K_{12}(\vartheta, s)\mathbf{v}(s)ds$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$; оператор $U_{22} : \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r) \rightarrow \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^r)$ имеет представление $(U_{22}\mathbf{v})(\vartheta) = \int_{-\tau}^0 K_{22}(\vartheta, s)\mathbf{v}(s)ds$, $K_{22}^\top(\vartheta, s) = K_{22}(s, \vartheta)$, $\vartheta, s \in [-\tau, 0]$.

Теорема 1. *Если система (3) стабилизируема, то оптимальное позиционное стабилизирующее управление определяется матричным функционально-разностным уравнением*

$$C_{vv}v(t) + \left(C_{yv}^\top + \hat{K}_{12}^\top(0, -0)B \right) y(t) + \int_{-\tau}^0 \left(\hat{K}_{12}^\top(\vartheta, -0)y(t + \vartheta) + \hat{K}_{22}^\top(\vartheta, -0)v(t + \vartheta) \right) d\vartheta = 0, t \in \mathbb{R}^+,$$

где $\hat{K}_{i2}(\vartheta, s) = K_{i2}(\vartheta, s) - K_{1i}(\vartheta, 0)\eta(s)B$, $i = 1, 2$, $\vartheta, s \in [-\tau, 0]$.

3. Заключение

При нахождении оптимального позиционного стабилизирующего управления его коэффициенты непосредственно определяются полученной в работе гибридной системой нелинейных матричных алгебраических и интегральных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00371).

Список литературы

1. *Zavalishchin S.T., Seseikin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
2. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. P. 1969–2006.
3. *Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.* Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последствием // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 39–48.

Optimal Pulse Stabilization Autonomous Linear Systems of Differential Equations with Aftereffect

Yu. F. Dolgii, A. N. Seseikin

Ural Federal University, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia
yurii.dolgii@imm.uran.ru, n.a.seseikin@urfu.ru

The problem of optimal impulse stabilization for a linear autonomous system with aftereffect and quadratic quality index of transients is considered. The Bellman dynamic programming principle uses the formulation of the optimal stabilization problem in the functional spaces of states and controls. A system of defining equations for the coefficients of the quadratic Bellman functional is obtained. A matrix functional-difference equation is found that implicitly determines the optimal positional stabilizing control. The boundary value problem for finding the coefficients of the functional-difference equation is obtained.

УДК 531.36

Двухчастотное усреднение в задаче о динамике двухроторной ветроэнергетической установки

*М. З. Досаев¹, Л. А. Климина¹, Б. Я. Локшин¹, Е. С. Шалимова¹,
Ch.-H. Lin²*

¹ НИИ механики МГУ, Москва, Россия

² Chien-Hsin University of Science and Technology, Taoyuan City, Taiwan
dosayev@imec.msu.ru, klimina@imec.msu.ru, blokshin@imec.msu.ru,
ekateryna-shalimova@yandex.ru, chlin@gapps.uch.edu.tw

Рассматривается математическая модель двухроторной вертикально-осевой ветротурбины. Учитываются аэродинамические и электромеханические силы. При определенных предположениях о начальных условиях и о параметрах модели проведено усреднение уравнений движения по углам поворота роторов. Неподвижные точки усредненной системы рассматриваются как первое приближение для описания рабочих режимов ветротурбины.

Ключевые слова: двухчастотное усреднение, установившееся движение, устойчивость.

1. Введение

Рассматривается механическая система с двумя «быстрыми» угловыми координатами. Две соответствующие угловые скорости являются «медленными» переменными. Во многих прикладных задачах для приближенного описания поведения таких систем применяется двухчастотное усреднение (например, [1]). Весьма актуален вопрос о том, при каких условиях поведение системы достаточно хорошо описывается уравнениями, усредненными по двум углам (например, [2]). Отметим, что эта проблема может быть коррелирована с описанием динамики связанных осцилляторов [3].

В настоящей работе рассматривается система, состоящая из двух тел, каждое из которых может совершать авторотацию. Специфика задачи состоит в том, что силы, описывающие взаимодействие между элементами системы, зависят только от угловых скоростей (не зависят от углов). При этом условии усреднение по двум углам приводит к одним и тем же приближенным уравнениям независимо от того, близко ли отношение угловых скоростей к резонансному случаю. Данный факт используется, чтобы построить первое приближение для установившихся движений, отвечающих авторотации обоих элементов системы. В качестве примера рассматривается задача о поведении двухроторной ветроэнергетической установки.

2. Основной результат

Рассматривается механическая система, описываемая безразмерными уравнениями следующего вида (точкой обозначена производная по безразмерному времени)

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i, \\ \dot{\omega}_i &= \varepsilon(f(\varphi_i, \omega_i) - c(\omega_1 + \omega_2)), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь функции, стоящие в правой части, вещественные, непрерывно дифференцируемая по аргументам, и 2π -периодически зависят от угловых переменных φ_i . Параметр ε предполагается малым параметром задачи.

Уравнения такого вида возникают, в частности, в модели двухроторной вертикально-осевой ветроэнергетической установки типа Дарье с противовращающимися роторами (схема ветроустановки и детальное описание приведены в работе [4]). Тогда углы φ_i характеризуют поворот каждого из роторов относительно направления ветра и отсчитываются в противоположных направлениях. Безразмерное время t

вводится как $\tau = r^{-1}Vt$, где r — радиус каждого ротора, V — скорость ветра. Параметр ε определяется формулой $\varepsilon = 0,5J^{-1}\rho Sr^3$, где J — момент инерции каждого из роторов относительно оси вращения, S — характерная площадь лопасти ротора (каждый ротор имеет три лопасти), ρ — плотность воздуха. Параметр c характеризует взаимодействие между роторами: предполагается, что валы роторов соосны, один вложен в другой, и коэффициент c характеризует вязкое трение между валами, либо электромеханическое взаимодействие — в случае, если на одном валу установлен ротор электрогенератора, а на другом валу — статор того же генератора.

Функция f описывает аэродинамическое воздействие на ротор и вычисляется на основе квазистатической модели ([5]) по следующей формуле (где C_l, C_d — коэффициенты аэродинамических сил, которые берутся из стационарных экспериментов)

$$f(\varphi_i, \omega_i) = \sum_{k=1}^3 \sqrt{u_k^2 + w_k^2} (C_l(\alpha_k)u_k - C_d(\alpha_k)w_k),$$

$$\alpha_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{u_k(\varphi)}{w_k(\varphi_i, \omega_i)}\right), & w_k(\varphi_i, \omega_i) \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{u_k(\varphi)}{w_k(\varphi_i, \omega_i)}\right) + \pi, & w_k(\varphi_i, \omega_i) < 0, \end{cases}$$

$$u_k = \cos(\varphi_i + \frac{2\pi}{3}k), \quad w_k = (\omega_i + \sin(\varphi_i + \frac{2\pi}{3}k)).$$

В области, где значения ω_i отделены от нуля, в качестве первого приближения для описания динамики медленных переменных системы (1) рассматривается система, усредненная по двум углам. Усреднение в окрестности резонансного соотношения частот выполнено в соответствии с методикой [2]. Поскольку в исходной задаче взаимодействие между элементами определяется только значениями угловых скоростей (не зависит от углов), то и вдали от резонансов, и при отношениях частот, близких к резонансам, усредненная по двум углам система имеет один и тот же вид

$$(2) \quad \dot{\Omega}_i = \varepsilon(F(\Omega_i) - c(\Omega_1 + \Omega_2)), \quad F(\Omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \Omega_i) d\varphi.$$

Здесь Ω_i отвечают усредненным угловым скоростям.

Соответствие между траекториями системы (2) и поведением медленных переменных системы (1) на конечном интервале времени порядка ε^{-1} устанавливается на основе теорем [2].

Для приближенного описания притягивающих установившихся движений системы (1), отвечающих авторотациям обоих элементов, делается дополнительное предположение о том, что можно рассмотреть устойчивую неподвижную точку системы (2) в качестве первого приближения для аттрактора системы (1). В примере с ветроустановкой такой аттрактор соответствует рабочему режиму системы (оба элемента авторотируют в потоке).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-31-20029).

Список литературы

1. *Helm L.* Relaxivity in paramagnetic systems: Theory and mechanisms // Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy. 2006. No. 1. V. 49. P. 45–64.
2. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Московского университета, 1971.
3. *Барабанов И.Н., Тхай В.Н.* Семейство колебаний в слабо связанных идентичных системах // АиТ. 2016. № 4. С. 14–23.
4. *Klimina L., Shalimova E., Dosaev M., Lokshin B., Samsonov V.* Two-Frequency Averaging in the Problem of Motion of a Counter-Rotating Vertical Axis Wind Turbine // Dynamical Systems Theory and Applications. Springer, Cham, 2017. P. 183–192.
5. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Вен-Лон Лю, Чин-Хуэй Линь* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 59–66.

Double-frequency Averaging in the Problem of Dynamics of a Double-rotor wind Turbine

*M. Z. Dosaev¹, L. A. Klimina¹, B. Ya. Lokshin¹, E. S. Shalimova¹,
Ch.-H. Lin²*

¹ Institute of Mechcnics of Lomonosov Moscow State University, Russia

² Chien-Hsin University of Science and Technology, Taoyuan City, Taiwan
dosayev@imec.msu.ru, klimina@imec.msu.ru, blokshin@imec.msu.ru,
ekateryna-shalimova@yandex.ru, chlin@gapps.uch.edu.tw

The mathematical model of a double-rotor vertical axis wind turbine is studied. Aerodynamic action and electromechnical interaction are taken into account. The averaging over angles of two rotors is performed under a certain assumptions about intial conditions and parameters of the model. Fixed points of the averaged system are used as the first approximation for operation modes of the wind turbine.

Равновесие в непрерывных динамических моделях рынка

С. Е. Жуковский, З. Т. Жуковская, Н. Г. Павлова

ИПУ РАН, Москва, Россия

s-e-zhuk@yandex.ru, zyxra2@yandex.ru, natasharussia@mail.ru

Исследуется вопрос существования положения равновесия в непрерывных динамических моделях рынка. Получены достаточные условия существования функции равновесных цен в этих моделях как следствия теорем о существовании точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений, действующих в метрических пространствах.

Ключевые слова: динамические системы, точки совпадения, накрывающие отображения, экономическое равновесие

1. Введение

Одним из важнейших вопросов современной экономики является исследование динамических моделей «спрос-предложение», которые более адекватно описывают функционирование современного рынка, нежели статические. В таких моделях спрос и предложение зависят не только от текущих цен на товары, но и от скоростей изменения цен. Важной является задача получения условий существования положения равновесия в этих моделях. Достаточные условия существования равновесия в различных динамических моделях рынка можно получить как следствия теорем теории накрывающих отображений, если вектор-функцию равновесных цен рассматривать как точку совпадения отображений спроса и предложения. Данный подход (для статических моделей) был применен авторами в работах [1–3].

2. Основной результат

Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i -ый товар в момент времени $t \in [t_1; t_2]$, $t_1 \geq 0$ для потребителя имеет цену $p_i = p_i(t) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Предположим также, что $\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \dots, \dot{p}_n(t)) \in \Omega$ для п.в. t , где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — заданное замкнутое множество.

Спрос совокупного потребителя описывается отображением

$$D : \Omega \times \mathbb{R}^n \times [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D = D(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $D_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1, n}$, — объем приобретаемого в момент времени t i -го товара. Предложение совокупного производителя описывается отображением

$$S : \Omega \times \mathbb{R}^n \times [t_1; t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad S = S(\dot{p}(t), p(t), t),$$

где $S_i(\dot{p}(t), p(t), t)$, $i = \overline{1, n}$, — объем произведенного и предлагаемого в момент времени t на рынке i -го товара.

Отображения предложения S и спроса D предполагаются непрерывными по t , кроме того, отображение предложения предполагается накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму, отображение спроса — липшицевым по первому и второму аргументу.

Рассмотрим динамическую модель «спрос-предложение» с непрерывным временем

$$(1) \quad \sigma(D(\dot{p}(t), p(t), t), S(\dot{p}(t), p(t), t)).$$

Определение 1. Пусть $\delta \in (0; t_2 - t_1)$. Положением равновесия в модели (1) называется абсолютно непрерывная функция $p^\delta : [t_1; t_1 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, производная которой существенно ограничена, для которой выполняются условия

$$p(t_1) = \bar{p} := (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n),$$

$$D(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t), \quad \dot{p} \in \Omega \quad \forall t \in [t_1; t_1 + \delta].$$

Для различных динамических моделей рынка (различных типов отображений спроса и предложения) получены достаточные условия существования положения равновесия как следствия теорем о существовании точек совпадения, полученных в [4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-01-00106, 19-01-00080, 20-01-00610).

Список литературы

1. Arutyunov A.V., Zhukovskij S.E., Pavlova N.G. Equilibrium price as a coincidence point of two mappings // Comput. Math. Math. Phys. 2013. V. 53. No. 2. P. 158–169.
2. Arutyunov A.V., Pavlova N.G., Shananin A.E. New conditions for the existence of equilibrium prices // Yugosl. J. Oper. Res. 2018. V. 28. No. 1. P. 59–77.

3. *Pavlova N.G* Study of the Continuous-Time Open Dynamic Leontief Model as a Linear Dynamical Control System // Differ. Equ. 2019. V. 55. No. 1. P. 113–119.
4. *Arutyunov A.V.* Coincidence Points of Two Maps // Funct. Anal. Appl. 2014. V. 48. No. 1. P. 72–75.
5. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. No. 1. P. 5–16.

Equilibrium in Continuous Dynamical Models of the Market

S. E. Zhukovskiy, Z. T. Zhukovskaya, N. G. Pavlova

ICS RAS, Moscow, Russia

s-e-zhuk@yandex.ru, zyxra2@yandex.ru, natasharussia@mail.ru

The existence of equilibrium points in continuous dynamical models of the market is studied. The sufficient conditions for the existence of the equilibrium prices function in such models are obtained as corollaries of the existence theorems for coincidence points of covering and Lipschitz continuous mappings acting in metric spaces.

**Об одном случае стабилизации стационарных движений
мехатронных систем с голономными связями при наличии
циклических координат**

А. Н. Ильина

МАИ, Москва, Россия
happyday@list.ru

Рассматриваются мехатронные системы, в составе которых имеется механическая компонента с нелинейными геометрическими связями при наличии циклических координат и один или несколько электроприводов с двигателями постоянного тока. Предполагается, что управление осуществляется за счёт изменения напряжения на якорных обмотках двигателей. Исследуется условие разрешимости нелинейной задачи стабилизации возможных стационарных движений и способ определения управляющих воздействий. Построена математическая модель динамики системы с учётом нелинейности связей в переменных Лагранжа с явным включением уравнений динамики исполнительных приводов. Показано, что устойчивость стационарных движений таких систем в силу наличия нелинейных геометрических связей возможна только в критических случаях, причём число нулевых корней характеристического уравнения не менее чем число связей. Для описания динамики механической компоненты используются уравнения Шульгина с избыточными координатами. Найдены параметры возможных стационарных движений. На основе анализа структуры полученных уравнений, записанных в векторно-матричном виде, с применением результатов теории критических случаев формулируется достаточное условие разрешимости задачи стабилизации стационарных движений. Указывается способ численного нахождения коэффициентов стабилизирующих воздействий по методу Н. Н. Красовского посредством решения линейно-квадратичной задачи стабилизации для управляемой подсистемы меньшей размерности.

Ключевые слова: геометрические связи, мехатронные системы, стабилизация, стационарные движения, циклические координаты

В работе рассматриваются мехатронные системы, в составе которых имеются механическая часть с нелинейными геометрическими связями и циклическими координатами и блок электроприводов с двигателями постоянного тока, реализующих управление системой. Управ-

ляющими воздействиями считаются дополнительные напряжения на якорных обмотках двигателей. Обозначим векторы:

$$q' = (\alpha', \beta', I', s'), \quad r' = (\alpha', s'),$$

где α — позиционные, β — циклические, s — избыточные координаты, I — вектор токов в якорных обмотках электродвигателей. Штрих означает транспонирование. Уравнения связей в общем виде можно представить как вектор-функцию

$$(1) \quad F'(r) = (F_1(r), \dots, F_m(r)) = 0, \quad \text{rank} \frac{\partial F}{\partial r} = m.$$

Пусть по координатам α, β и s на систему могут действовать непотенциальные силы Q_α, Q_β, Q_s общего вида. Продифференцировав уравнения связей (1) по времени, в предположении, что $\det \frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$, выразим скорости избыточных координат:

$$(2) \quad \dot{s} = B(r)\dot{\alpha}, \quad B(r) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right).$$

Тогда математическая модель динамики всей системы с использованием уравнений Шульгина для механической части и линейного приближения второго закона Кирхгофа, которое использовано в качестве математической модели двигателей, может быть записана в виде

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha'} = Q_\alpha^* + B'(r) \cdot \left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q_s^* \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\beta}'} = Q_\beta^*, \quad L_a \frac{dI}{dt} + R_a I + K_1 \omega_I^* = K_2 e_\nu, \end{cases}$$

где L — функция Лагранжа, L_a — матрица индуктивностей, R_a — матрица сопротивлений, K_1 — матрица электромагнитных коэффициентов, K_2 — матрица коэффициентов преобразователей питания. Все они постоянны и диагональные. $\omega_I^* = \omega_I^*(r, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ — вектор угловых скоростей вращения валов электродвигателей. Звёздочкой обозначено, что зависимые скорости исключены с помощью (2). Вместе с системой (3) необходимо учитывать уравнения связей (2).

Для определения параметров стационарного движения и программных управлений в систему (3) подставим постоянные значения

$$(4) \quad \alpha = \alpha_0, \quad s = s_0, \quad I = I_0, \quad \dot{\beta} = c_\beta, \quad e_\nu = e_{\nu_0}.$$

Введём возмущения в окрестности стационарного движения (4):

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + x_1, \quad \dot{\alpha} = \dot{x}_2, \quad \dot{\beta} = c_\beta + x_3, \\ I &= I_0 + x_4, \quad s = s_0 + y, \quad e_\nu = e_{\nu_0} + u,\end{aligned}$$

где u — управляющие воздействия. Затем выделим в окрестности (4) первое приближение и произведём линейную замену

$$z = y - B(\alpha_0, s_0) \cdot x_1,$$

после которой система может быть приведена к специальному виду теории критических случаев:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + Vu + Sz + \Xi^{(2)}, & \xi' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z)x_2, & B^{(1)}(x_1, z) = B(x_1, z) - B(\alpha_0, s_0), \end{cases}$$

где N, V, S — постоянные матрицы, а вектор-функция $\Xi^{(2)}$ содержит члены высшего порядка относительно возмущений фазовых переменных. Характеристическое уравнение системы первого приближения, как видно из (5), будет содержать не менее t нулевых корней.

Теорема 1. *Если пара (N, V) управляема, то существует линейное управление вида $u = -K\xi$, стабилизирующее стационарное движение (4) до асимптотической устойчивости по всем переменным.*

Матрица K может быть найдена по методу Н.Н. Красовского посредством решения линейно-квадратичных задач стабилизации для линейной управляемой подсистемы $\dot{\xi} = N\xi + Vu$, не содержащей критических переменных.

Список литературы

1. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. № 3. DOI: 10.7463/0313.0541146.
2. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий // Теоретическая механика. Сб. научно-метод. статей. М.: Изд-во МГУ, 2015. № 29. С. 54–65.
3. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Изд-во САГУ, 1958.
4. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами // Материалы XII Всерос. совещания по проблемам управления М.: ИПУ РАН, 2014. С. 1766–1778.

5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения М.: Наука, 1966.

About One Case of Mechatronic Systems with Geometric Constraints Stationary Motions Stabilization in the Presence of Cyclic Coordinates

A. N. Pyina

MAI, Moscow, Russia
happyday@list.ru

The work is concerned with mechatronic systems with non-linear geometric constraints in the presence of cyclic coordinates and one or more electric drives with DC motors. It is assumed that control is carried out by changing the voltage on the anchor windings of the motors. A mathematical model is constructed taking into account nonlinearity of constraints and dynamics of the actuators. A sufficient condition is formulated for the solvability of the problem of stationary motions stabilization. The coefficients of stabilizing linear control law can be calculated using the method of N. N. Krasovsky by solving the linear-quadratic stabilization problem for the controlled subsystem of smaller dimension.

УДК 517.935.4

Условия устойчивости систем с переключениями между четырьмя линейными дискретными подсистемами

В. А. Каменецкий

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Москва, Россия
vlakam@ipu.ru

Рассматриваются системы с переключениями между четырьмя линейными автономными дискретными подсистемами. Получены два новых достаточных условия устойчивости таких систем. Приводится пример, на котором полученные условия сравниваются с известными ранее. Полученные условия обобщаются на случай систем с переключениями между большим числом линейных подсистем.

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства

1. Введение

Проблема устойчивости систем с дискретным временем остается предметом активного исследования [1–3]. В [3] получен частотный критерий существования квадратичной функции Ляпунова для связанных дискретных систем с переключениями. Этот критерий содержит большое количество дополнительных параметров. Для упрощения ситуации в непрерывном случае вводится понятие попарно связанных систем с переключениями [4]. Здесь это понятие переносится на дискретные системы. Для попарно связанных дискретных систем с переключениями получено достаточное частотное условие существования квадратичной функции Ляпунова, содержащее существенно меньшее число параметров. Показывается, что динамика таких систем может быть представлена динамикой систем Лурье специального вида. Другое достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова получается путем введения дополнительных связей между параметрами в критерии из [3]. Предлагаемые условия для систем с переключениями между четырьмя линейными подсистемами сравниваются на примере системы третьего порядка.

2. Попарно связанные дискретные системы с переключениями

Стандартная форма записи линейной дискретной системы с переключениями имеет вид

$$(1) \quad x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \bar{A} = \{A_1, \dots, A_N\},$$

где $A_s \in R^{n \times n}$ и $A(t) : Z_+ \rightarrow \bar{A}$ — отображение из множества Z_+ неотрицательных целых чисел в \bar{A} . Матрицы A_s предполагаются устойчивыми, т.е. $r(A_s) = \max_{\nu} |\lambda_{\nu}(A_s)| < 1$ при $s = \overline{1, N}$.

Понятие связанной системы с переключениями опирается на следующую конструкцию [3]. Каждой матрице A_s из системы (1) ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединяются ребром, если разность матриц, которым соответствуют эти вершины, имеет вид bc^{\top} , т.е. ранг матрицы разности равен 1. Система (1) называется попарно связанной, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. В этом случае множество $\bar{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ также будем называть попарно связным.

Попарно связанное множество матриц $\bar{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ допускает одно из двух представлений [4]:

$$A_1 = A, \quad A_s = A + bc_s^{\top}, \quad b, c_s \in R^n, \quad s = \overline{2, N},$$

Список литературы

1. Александров А.Ю., Платонов А.В. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // *АиТ*. 2016. № 5. С. 37–49.
2. Проскурников А.В., Матвеев А.С. Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // *АиТ*. 2018. № 6. С. 119–139.
3. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // *АиТ*. 2018. № 8. С. 3–26.
4. Каменецкий В.А. Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // *АиТ*. № 8. 2019. С. 9–28.

Stability Conditions for Systems with Switching Between Four Linear Discrete Subsystems

V. A. Kamenetskiy

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia
vlakam@ipu.ru

Systems with switching between four linear autonomous discrete subsystems are considered. Two new sufficient conditions for the stability of such systems are obtained. An example is given on which the conditions obtained are compared with previously known ones. The obtained conditions are generalized to the case of systems with switching between a larger number of linear subsystems.

Наблюдатель для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля

А. Н. Канатников, О. С. Ткачева

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
mathmod@bmstu.ru

Сердечная система может быть представлена как совокупность трех колебательных контуров: сино-атриального узла (кардиостимулятора), атрио-вентрикулярного узла, и вентрикулярной проводящей системы. Эти контуры естественно моделировать с помощью уравнения Ван дер Поля. На практике все параметры кардиосистемы не могут быть измерены. Работа посвящена построению наблюдателя для динамической системы, базирующей на одном или нескольких уравнений Ван дер Поля, в которой измерению доступны только значения потенциалов узлов, но не скорости их изменения. В работе также рассматривается общая задача построения нелинейного наблюдателя с линейной динамикой для систем 2-го порядка.

Ключевые слова: наблюдатель состояния, канонический наблюдаемый вид, уравнение Ван дер Поля, кардиостимулятор

Проводящую сердечную систему можно рассматривать как сеть из трех компонентов: сино-атриального узла (СА-узел — основной кардиостимулятор); атрио-вентрикулярного узла (АВ-узла); вентрикулярной проводящей системы (пучок Гиса — Пуркинье) [1].

Каждый из элементов проводящей системы можно моделировать как нелинейный колебательный контур и одной из таких моделей является уравнение Ван дер Поля. Возникает шестимерная модель, в которой состояние системы описывается потенциалами трех узлов и скоростями изменения этих потенциалов. На практике потенциалы узлов могут быть измерены, а скорости потенциалов для прямого измерения недоступны. Необходимы численные методы по восстановлению этих скоростей и один из подходов к решению задачи — построение наблюдателя состояния.

В данной работе рассмотрено моделирование работы только одного элемента проводящей сердечной системы — СА-узла. Используются две модели работы СА-узла на основе уравнения Ван дер Поля. Первая модель основана на модифицированном уравнении Ван дер Поля, в котором третье линейное слагаемое заменено кубическим многочле-

НОМ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - \mu)\frac{dx}{dt} + \frac{x(x+d)(x+e)}{de} = 0,$$

где все параметры α , μ , d , e положительны и, кроме того, $\mu < d$. переменная x описывает трансмембранный потенциал СА-узла.

Вторая модель получается в результате дополнительного уточнения второго слагаемого:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x - v_1)(x - v_2)\frac{dx}{dt} + \frac{x(x+d)(x+e)}{de} = 0,$$

где $v_1 > 0$ и $v_2 < 0$ (противоположные знаки обеспечивают сохранение автоколебательных свойств системы).

Рассматривая переменную x как выход системы, рассмотрим задачу построения наблюдателя с линейной динамикой ошибки. Для синтеза такого наблюдателя, исходную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^1,$$

необходимо привести к специальному каноническому наблюдаемому виду:

$$(1) \quad \dot{\xi} = D\xi + \Psi(y), \quad y = H(\xi_n),$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(y) = \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \\ \vdots \\ \psi_n(y) \end{pmatrix}.$$

В этом случае наблюдатель с линейной динамикой ошибки имеет следующий вид:

$$\dot{\eta} = D\eta + G(\eta_n - H^{-1}(y)) + \Psi(y),$$

где G — специально подобранный вектор-столбец.

Достаточное условие приводимости к указанному виду и алгоритм такого приведения можно получить с помощью теории $k(x)$ -двойственности [2].

Чтобы построить наблюдатель в двух моделях кардиостимулятора, рассмотрим общую задачу построения наблюдателя для системы вида

$$(2) \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = F(z_1, z_2), \quad y = z_1.$$

Такая система приводится к каноническому виду (1) в том и только в том случае, когда функция $F(z_1, z_2)$ имеет специальный вид:

$$F(z_1, z_2) = C_0(z_1)z_2^2 + C_1(z_1)z_2 + C_2(z_1).$$

Соответствующую замену переменных, т.е. переход от переменных $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ к переменным $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, можно получить, решив систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = U(\mathbf{z}),$$

где $U(\mathbf{z})$ — матрица наблюдаемости системы (2).

Изложенный подход позволяет построить наблюдатель состояния с линейной динамикой ошибки для двух моделей работы кардиостимулятора. Проведенное моделирование показывает работоспособность построенного наблюдателя

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-07-00269а и № 19-07-00817а).

Список литературы

1. *Gois S.R., Savi M.A.* An analysis of heart rhythm dynamics using a threecoupled oscillator model // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009. V. 41. No. 5. P. 2553–2565.
2. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.

Observer for a Pacemaker Model Based on the Van der Pol Equation

A. N. Kanatnikov, O. S. Tkacheva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
mathmod@bmstu.ru

The cardiac system can be represented as a combination of three oscillatory circuits: the sino-atrial node (pacemaker), the atrio-ventricular node, and the ventricular conducting system. It is natural to simulate these contours using the van der Pol equation. In practice, all parameters of the cardiac system cannot be measured. The work is devoted to the construction of an observer for a dynamic system based on one or more Van der Pol equations, in which only the values of the potentials of the

nodes are available for measurement, but not the rate of change. The paper also considers the general problem of constructing a nonlinear observer with linear dynamics for second-order systems.

УДК 531.36:62-50

Оптимальное по быстродействию перемещение эллиптического маятника

О. Р. Каюмов

Филиал ОмГПУ, г. Тара, Россия
Oleg_Kayumov@mail.ru

Решается задача оптимального по быстродействию горизонтального перемещения маятника на тележке (на требуемое расстояние из нижнего состояния равновесия в аналогичное) при действии одной ограниченной управляющей силы, приложенной к тележке. Для разных отношений масс численно построены траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное быстродействие, эллиптический маятник.

1. Введение

Рассматривается задача оптимально управления, поставленная в [1, с. 265]. На тележке массы M , движущейся вдоль горизонтальной оси Ox , расположена точка подвеса математического маятника длины l и массы m . Угол отклонения маятника от вертикали — ϕ_1 , трение отсутствует. Действующая на тележку горизонтальная управляющая сила F ограничена по модулю: $|F(t)| \leq F_0$. Такая модель (эллиптический маятник) приближенно описывает управление мостовым краном, который нужно перемещать на заданное расстояние с гашением колебаний груза на тресе.

Интеграл по времени от количества движения системы в проекции на ось Ox имеет вид $z = (M+m)x + ml \sin \phi_1$. Если ввести безразмерные константы $\varepsilon = m/M$, $a = F_0/(Mg)$, переменные $z_1 = z/(Ml)$, $u = F/(Mg)$ и время $t' = t\sqrt{g/l}$, то в новом времени получим уравнения

движения

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_2 &= u, & \dot{\phi}_1 &= \phi_2, & |u| &\leq a, \\ \dot{\phi}_2 &= [u \cos \phi_1 - \varepsilon \phi_2^2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 - (1 + \varepsilon) \sin \phi_1] / (1 + \varepsilon \sin^2 \phi_1). \end{aligned}$$

Начало отсчета координаты x назовем в середине отрезка (длины L), соединяющего начальное и требуемое конечное положения тележки. Обозначая $2b = (1 + \varepsilon)L/l$, получим $z_1(0) = -b$. Удобно использовать «удвоенную» запись $2T$ и для безразмерного времени движения системы, подлежащего минимизации.

Рассматривается задача оптимального быстродействия: найти такое управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, которое переводит систему (1) из состояния $z_1(0) = -b$, $z_2(0) = \phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ в состояние $z_1(2T) = b$, $z_2(2T) = \phi_1(2T) = \phi_2(2T) = 0$ за минимальное время $2T$. Для случая малых перемещений (в линейном приближении) такая задача решена в [1]. В работе [2] при $\varepsilon = 0$ решена нелинейная задача оптимального синтеза для фазового цилиндра $\phi_1 \times \phi_2$ (без требований к движению тележки).

2. Основной результат

Из принципа максимума Понтрягина [3] оптимальное управление задается соотношениями

$$(2) \quad u = a \operatorname{sign}[\partial H / \partial u], \quad \partial H / \partial u = \lambda_2 + \lambda_4 \cos \phi_1 / (1 + \varepsilon \sin^2 \phi_1),$$

где $\dot{\lambda} = -\partial H / \partial q$, $H = \lambda^T \dot{q}$, $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $q = (z_1, z_2, \phi_1, \phi_2)^T$.

Записанные в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ оптимальные решения $\lambda_2(\tilde{t})$, $\lambda_4(\tilde{t})$, $z_1(\tilde{t})$, $\phi_1(\tilde{t})$, $u(\tilde{t})$ существуют и имеют вид нечетных функций, а $\lambda_1(\tilde{t})$, $\lambda_3(\tilde{t})$, $z_2(\tilde{t})$, $\phi_2(\tilde{t})$ — четных функций. Поэтому в случаях, где оптимальное управление (2) окажется кусочно-постоянным, число его переключений будет нечетным. Опираясь на эти симметрии, удастся численно построить оптимальные полутраектории (на рис. 1 они показаны в проекции на плоскость (ϕ_1, ϕ_2) для конкретного случая $\varepsilon = 0, 3$, $a = \sqrt{3}$). Оказывается, что для оптимальных по быстродействию траекторий встречаются как кусочно-постоянные управления (с 1, 3 и 7 моментами переключения), так и «смешанные», т.е. содержащие вставки с особыми управлениями, для которых $\partial H / \partial u \equiv 0$. На рис. 1 область особых управлений — «светло-серая»; в «белой» области $u = -a$, в «темно-серой» и на линии δ значение $u = a$.

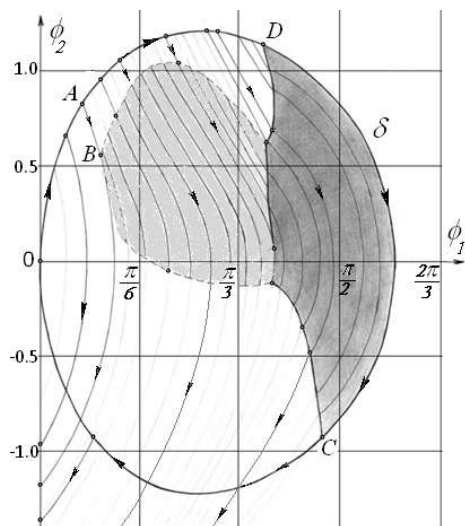


Рис. 1: Оптимальные полутраектории на плоскости (ϕ_1, ϕ_2)

3. Заключение

Численный анализ показал, что с увеличением параметра ε (от 0 до 1) область особых управлений расширяется вправо-вверх (рис. 1), сначала подходу вплотную к линии δ и оттесняя «белый» треугольник с вершиной D , а затем и заполняя его. Остальные фрагменты внутри линии δ качественно не меняются. Таким образом, начиная с некоторого значения $\varepsilon < 1$, оптимальные управления либо «смешанные», либо кусочно-постоянные с 1 или 3 переключениями, но с 7 переключениями уже не встречаются.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Каюмов О.Р. Оптимальное управление эллиптическим маятником // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 38–44.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

Time-optimal Movement of Elliptical Pendulum

О. Р. Каутов

Branch of OmSPU, Tara, Russia

The problem of the time-optimal movement of the pendulum on the trolley (at the required distance from the lower state of equilibrium to a similar one) under the action of one limited control force applied to the trolley is solved. For different mass ratios, trajectories that satisfy the necessary optimality conditions, are constructed numerically.

УДК 531.36

Периодические режимы движения цепочки взаимодействующих тел в среде с сопротивлением

Д. Ю. Князьков, Т. Ю. Фигурина

ИПМех РАН, Москва, Россия
knyaz@ipmnet.ru, t_figurina@mail.ru

Рассматривается система тел, движущихся вдоль прямой в сопротивляющейся среде. Расстояния между телами изменяются периодически. Изучаются периодические режимы движения системы, при которых скорости всех тел также периодические. Показано, что для широкого класса законов сопротивления среды периодический режим движения существует, единственен, и экспоненциально устойчив.

Ключевые слова: локомotionные системы, устойчивость, сопротивляющиеся среды, периодическое движение

1. Введение

В работе рассматривается система $n + 1$ взаимодействующих тел, движущихся вдоль горизонтальной прямой в сопротивляющейся среде (рис. 1). Пусть x_i , $v_i(t) = \dot{x}$ и m_i – координата, скорость и масса тела i , а $R_i(v_i)$ – сила сопротивления движению тела со стороны окружающей среды, $i = 0, \dots, n$. Предполагается, что законы изменения расстояний

$l_i = x_i - x_0$ между телом с номером 0 и телами с номером i заданы и периодически зависят от времени; исследуются периодические режимы движения системы, при которых скорости всех тел также периодичны с периодом T :

$$(1) \quad l_i(t + T) = l_i(t), \quad v_j(t + T) = v_j(t).$$

Периодические режимы движения изучались в множестве задач управления локомобильными системами с периодически изменяющейся конфигурацией [1–3]. Однако вопросы существования, единственности и устойчивости таких режимов не исследовались, за исключением небольшого количества работ [4, 5]. Настоящая работа посвящена этим вопросам.

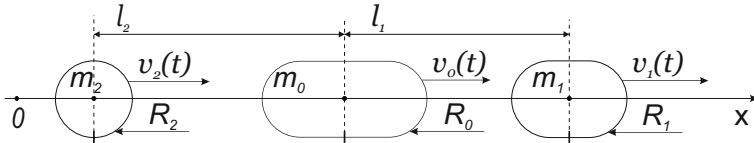


Рис. 1: Цепочка взаимодействующих тел (случай 3 тел, $n = 2$)

Ранее авторами был исследован случай системы двух тел ($n = 1$), когда одно из тел не испытывает сопротивления ($R_1 = 0$), см. [6, 7]. Предложенная в этих статьях техника доказательств обобщается в настоящей работе на систему произвольного количества ($n \geq 1$) тел, когда любое из тел может испытывать сопротивление среды, а законы, определяющие эти сопротивления, вообще говоря, различны.

2. Основной результат

Из условия (1) периодичности $l_i(t)$ следует, что относительные скорости и нормированные относительные ускорения тел, определенные равенствами

$$w_i = \dot{l}_i, \quad u_i = -m_i \ddot{l}_i / \sum_{k=0}^n m_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

периодичны и имеют нулевое среднее за период. Будем предполагать, что u_i кусочно-непрерывны, откуда, с учетом периодичности, u_i и w_i

ограничены. Выполнены соотношения

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_0^T u_i(t) dt &= 0, \\ \sup_{t \in [0, +\infty]} |u_i(t)| &= A_i, \\ \sup_{t \in [0, +\infty]} |w_i(t)| &= B_i, \end{aligned}$$

где $A_i, B_i < \infty, i = 1, \dots, n$. Запишем уравнение движения системы:

$$(3) \quad \dot{v}_0 = \sum_{i=1}^n u_i + r_0(v_0) + \sum_{i=1}^n r_i(v_0 + w_i).$$

Здесь $r_i = R_i / \sum_{k=0}^n m_k$ — нормированное сопротивление среды, удовлетворяющее условию монотонности

$$(4) \quad r_i(v) < r_i(\tilde{v}), \quad v > \tilde{v}, \quad r_i(0) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Будем считать, что правая часть (3) такова, что на отрезках непрерывности $u_i(t)$ для соответствующих задач Коши для уравнения (3) выполнены условия существования и единственности решения. Для задачи (2)-(4) доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если закон сопротивления среды r_0 таков, что*

$$(5) \quad \lim_{v \rightarrow \pm\infty} r_0(v) > \sum_{i=1}^n A_i,$$

то периодическое решение $v_0^(t)$ задачи (2)-(4) существует, единственно и экспоненциально устойчиво, причем для всех $t \geq 0$ выполнено*

$$\min \left\{ r_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right), -B \right\} \leq v_0^*(t) \leq \max \left\{ r_0^{-1} \left(- \sum_{i=1}^n A_i \right), B \right\},$$

где $B = \max\{B_1, \dots, B_n\}$, а r_0^{-1} — функция, обратная к r_0 .

Таким образом, получено, что для широкого класса законов сопротивления среды (например, монотонного и неограниченно растущего

сопротивления) и законов относительного движения тел, периодический по скорости режим движения системы существует, единственен, и экспоненциально устойчив.

Заметим, что любое из тел может быть выбрано в качестве 0-го, поэтому достаточно выполнения условия (5) для любого из сопротивлений r_i .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 18-11-00307).

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двух-массовой системы // ПММ. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 707–717.
2. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 3–22.
3. Nunuparov A., Becker F., Bolotnik N., Zeidis I., Zimmermann K. Vibration-Driven Capsbot with an Opposing Spring: An Experimental Study // Proc. of the Conference Robot Design, Dynamics and Control (ROMANSY 22), Rennes, France, Springer Int. Publ. 2019. P. 126–133.
4. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // Изв. РАН. ТИСУ. 2007. № 2. С. 65–71.
5. Bardin B., Panev A. On Dynamics of a Rigid Body Moving on a Horizontal Plane by Means of Motion of an Internal Particle // Vibroengineering PROCEDIA, JVE Int. 2016. V. 8. P. 135–141.
6. Knyazkov D., Figurina T. Periodic regimes of motion of a body with a moving internal mass // Proc. of the 24th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR), Miedzyzdroje, Poland. 2019. P. 331–336.
7. Князьков Д.Ю., Фигурина Т.Ю. О существовании, единственности и устойчивости периодических режимов движения локомотионной системы с подвижной внутренней массой // Изв. РАН. ТИСУ. 2020. № 1. С. 168–176.

Periodic Regimes of Motion of a Chain of Interacting Bodies in a Medium with Resistance

D. Knyazkov, T. Figurina

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
knyaz@ipmnet.ru, t_figurina@mail.ru

A system of bodies moving along a straight line in a resistive medium is considered. Distances between the bodies change periodically. Periodic regimes of motion of the system in which the velocities of all bodies are also periodic are studied. It is shown that for a wide class of laws of

resistance of a medium, the periodic regime of motion exists, is unique, and is exponentially stable.

УДК 62.501.2

Синтез обратной связи для БПЛА на основе метода иерархии управлений

Ю. Г. Кожунько¹, С. А. Краснова¹, С. В. Пивнева²

ИПУ РАН, Москва, Россия¹

РГСУ, Москва, Россия²

juliakokunko@gmail.com, skrasnova@list.ru, tlt-swetlana@yandex.ru

Для БПЛА решается задача синтеза закона управления в форме динамической обратной связи, обеспечивающего отслеживание центром масс заданных сигналов инвариантно по отношению к внешним возмущениям. В рамках блочного подхода с использованием сигмоидальных обратных связей разработана иерархическая процедура синтез, не требующая компенсации перекрестных связей. Для реализации данного алгоритма построен наблюдатель пониженного порядка для оценивания вектора производных ошибок слежения по измерению вектора ошибок слежения.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат (БПЛА), слежение, инвариантность, сигма-функция, наблюдатель состояния

Рассматривается математическая модель пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат, представленная в каноническом виде [1, 2]

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a g + B(\vartheta, \psi) (u + \eta),$$

где $x_1 \in \mathcal{R}^3$ — вектор пространственных координат центра масс с элементами $x_{11} := L$ — продольная дальность, $x_{12} := H$ — высота, $x_{13} := Z$ — боковое смещение (выходные, измеряемые и регулируемые переменные); $x_2 \in \mathcal{R}^3$ — вектор скорости с элементами

$$(2) \quad x_{21} := V \cos \vartheta \cos \psi, \quad x_{22} := V \sin \vartheta, \quad x_{23} := -V \cos \vartheta \sin \psi,$$

где V — путевая скорость, ϑ — угол наклона траектории, ψ — угол курса; g — ускорение свободного падения, $a = (0, -1, 0)$; $u \in \mathcal{R}^3$ — век-

тор управления, $u_1 = gn_x$, $u_2 = gn_y \cos \gamma$, $u_3 = gn_y \sin \gamma$, n_x и n_y — продольная и поперечная перегрузки соответственно, а γ — угол крена вектора перегрузки, $|\gamma| < \pi$; $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — вектор внешних детерминированных возмущений;

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = B^T.$$

Для системы (1) рассматривается проблема отслеживания выходными переменными $x_{1i}(t)$ заданных сигналов $\chi(t) = \text{col}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ в предположениях, что прямым измерениям доступны только траекторные координаты $x_1(t)$, шумы в измерениях отсутствуют, аналитический вид задающих воздействий $\chi(t)$ не известен, а модель внешних воздействий в построения не вводится, сигналы $\eta_i(t)$, $\dot{\eta}_i(t)$, $\dot{\chi}_i(t)$, $\ddot{\chi}_i(t)$, $\ddot{\chi}_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными известными константами.

В данных предположениях ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_{1i}(t)$, $i = \overline{1, 3}$ с заданной точностью

$$(4) \quad |e_{1i}(t)| \leq \delta_{1i}, \quad t > t_1 > 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

что обеспечивает вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию за конечное время и его дальнейшее движение в малой окрестности данной кривой.

В рамках блочного подхода рассмотрим синтез динамической обратной связи с нелинейным сигма-управлением [3] на основе математической модели (1).

Записав первое уравнение системы (1) относительно ошибок слежения, а именно $\dot{e}_1 = x_2 - \chi_2$, выберем комбинированное фиктивное управление x_2 с сигмоидальным слагаемым $x_2 = \dot{\chi} - M_1 \sigma(K_1 e_1)$. Сигма-функция $\sigma(k_{1i} e_{1i}) = 2/(1 + \exp(-k_{1i} e_{1i})) - 1$ имеет S-образную форму и является гладкой допредельной реализацией разрывного управления. Введя невязку между реальным и желаемым фиктивным управлением $e_2 = x_2 - \dot{\chi} + M_1 \sigma(K_1 e_1)$, получим систему с замкнутыми локальными связями

$$(5) \quad \dot{e}_1 = -M_1 \sigma(K_1 e_1) + e_2, \quad \dot{e}_2 = B(u + \eta) + \varphi,$$

где элементы векторов η и $\varphi = ag + \ddot{\chi} + 0.5M_1 K_1 \Lambda_1 (x_2 - \dot{\chi})$ трактуются как внешние, ограниченные возмущения, $\Lambda_1 = \text{diag}\{1 - \sigma^2(k_{1i} e_{1i})\}$, $M_1 = \text{diag}\{m_{1i}\}$, $K_1 = \text{diag}\{k_{1i}\}$, $m_{1i}, k_{1i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 3}$.

Регуляризация процедуры настройки закона сигмоидального управления, представленного в виде

$$(6) \quad u = -M_2\sigma(K_2e_2),$$

$M_2 = \text{diag}\{m_{2i}\}$, $K_2 = \text{diag}\{k_{2i}\}$, $m_{2i}, k_{2i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 3}$, осуществляется путем установления иерархии сходимости переменных, которая совпадает с их порядковыми номерами. После умножения обеих частей второго уравнения (5) на преобразующую матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 \\ q_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, q_2 = -\tan \vartheta / \cos \psi, q_3 = \tan \psi,$$

матрица B принимает верхнетреугольный вид, что является основой для назначения снизу вверх амплитуд m_{23}, m_{22}, m_{21} , обеспечивающих (4) инвариантно по отношению к внешним возмущениям.

Для реализации закона управления (6) требуется смешанная переменная $e_2(t)$, оценку которой получим с помощью редуцированного наблюдателя $\dot{z} = \nu(\varepsilon)$, где $z \in R^3$ — вектор состояния, $\nu = \text{col}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор корректирующих воздействий наблюдателя, $\varepsilon = x_1 - z \in R^3$ — вектор ошибок наблюдения, построенного на основе первого уравнения преобразованной системы (5) в виде $\dot{z} = -M_1\sigma(K_1e_1) + \nu(\varepsilon)$, что приведет к системе $\dot{\varepsilon} = e_2 - \nu(\varepsilon)$.

Для стабилизации ошибок наблюдения и их производных используем кусочно-линейные корректирующие воздействия вида

$$\nu_i = p \text{sat}(l\varepsilon_i) = \begin{cases} p \text{sign}\varepsilon_i, & |\varepsilon_i| > 1/l; \\ pl\varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l \end{cases}, \quad p, l > 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

что при $t > t_0$ обеспечивает $\nu_i \approx e_{2i}$. Тогда закон управления (6) будет реализован в виде $u = -M_2\sigma(K_2\nu)$.

Данный метод достаточно трудоемкий на подготовительной стадии, но зато существенно упрощает структуру регулятора и объем вычислений, выполняемых в реальном времени, его эффективность подтверждается результатами численного моделирования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-01-00846А, № 20-01-00363А).

Список литературы

1. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. 2017. № 10. Т. 29. С. 5–9

2. *Кожунько Ю.Г., Краснов Д.В.* Синтез подсистемы наблюдения для беспилотного летательного аппарата при действии неконтролируемых возмущений // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 928–933.
3. *Краснова С.А., Антипов А.С.* Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. № 4. С. 10–21.

Feedback Synthesis for UAVs Based on the Control Hierarchy Method

Ju. G. Kokunko¹, S. A. Krasnova¹, S. V. Pivneva²

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of

Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia¹

Russian State Social University, Moscow, Russia²

juliakokunko@gmail.com, skrasnova@list.ru, tlt-swetlana@yandex.ru

For the UAV the problem of synthesis of the control law in the form of dynamic feedback, providing tracking of the given signals of the center of masses invariant in relation to external disturbances, is solved. As part of the block approach using sigmoidal feedbacks, a hierarchical synthesis procedure has been developed that does not require compensation of cross-links. To implement this algorithm, a lower-order observer was constructed to estimate the vector of derivatives of tracking errors by measuring the vector of tracking errors.

Упреждение и запаздывание при использовании постоянного управления в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании

В. А. Корнеев

ИПМех РАН, Москва, Россия
korneev@ipmnet.ru

Рассматривается задача защиты объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора. Минимизируемым критерием качества выбрано максимальное смещение объекта относительно основания. На основе оптимального управления без упреждения, полученного для мгновенного удара, строится гарантирующее управление с оптимизацией момента начала действия управления. Проведено сравнение предлагаемой оптимизации по критерию качества с другими способами управления.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее управление, упреждение, запаздывание

1. Механическая система

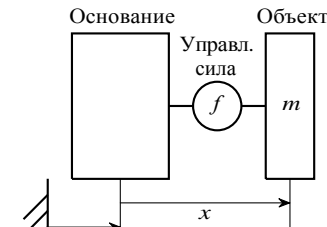


Рис. 1: Механическая система

Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора – устройства, генерирующего управляющую силу f с ограничением $|f| \leq F_0$ между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z' – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x' – смещение объекта относительно основания, m – масса объекта. Ударное воздействие v' на основание

моделируется зависимостью $v' = -\ddot{z}'$ от времени, где \ddot{z}' ускорение основания. В начальный момент времени объект покоится относительно основания, и движение объекта относительно основания описывается соотношениями

- (1) $\ddot{x}' + u' = v'(t'), \quad u' = f/m, \quad |u'| \leq u_0, \quad u_0 = F_0/m, \quad v' = -\ddot{z}'$,
- (2) $x'(0) = 0, \quad \dot{x}'(0) = 0$,
- (3) $v'(t') = V'(t' - t'_0), \quad t'_0 \geq 0$,

где кусочно-непрерывная функция $V'(\xi')$ определена для всех вещественных ξ' , причем $V'(\xi') \equiv 0$ для $\xi' \leq 0$, а t'_0 — момент упреждения, в который возмущение V' начинает действовать на основание спустя время t'_0 после включения системы противоударной изоляции. Ударное воздействие имеет конечную длительность T' , ускорение основания не меняет знака ($V' \geq 0$), а интеграл от величины $V'(t')$ по времени равен v_0 . Возмущение V' превышает величину u_0 только на одном интервале времени. Класс описанных возмущений обозначим V_* . Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{u_0}{v_0^2} x', \quad t = \frac{u_0}{v_0} t', \quad v(t) = \frac{1}{v_0} v' \left(\frac{v_0}{u_0} t' \right), \quad u = \frac{u'}{u_0}, \quad J = \frac{u_0}{v_0^2} J'.$$

2. Оптимизация момента начала действия управления

Задача 1. Для системы (1) при начальных условиях (2) и заданного возмущения (3) найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению $|u(t)| \leq u_0, t \in [0, \infty)$, и время упреждения t_0 , которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания:

$$J(u, V, t_0) = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u, V, t_0)| \rightarrow \min_{u, t_0}.$$

Задача 2. Для заданного класса допустимых управлений $u_s(t) \in U_s$ найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^* , минимизирующие максимальную величину смещения объекта относительно основания при наилучшем возмущении:

$$J(u_{s^*}, t_0^*) = \min_{t_0, s} \max_{V \in V_*} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u_s, V, t_0)|.$$

Рассмотрим класс управлений $U_d = \{u_d\}$, описываемый параметрическим семейством допустимых управлений $u_d(t)$, где

$$(4) \quad u_d(t) = \begin{cases} 0, & t < d, \\ 1, & d \leq t \leq 1 + d, \quad d \geq 0. \\ 0, & t > 1 + d, \end{cases}$$

Управление $u_d(t)$ при $d = 0$ обозначим $u_{0d}(t)$ и будем называть d -управлением. Управление $u_{0d}(t)$ есть оптимальное управление для частного случая задачи 1, когда упреждения нет ($t_0=0$) и возмущение реализуется в виде мгновенного удара, т.е. $v(t)=V(t)=\delta(t)$ [1]. Управление $u_d(t)$ есть u_{0d} -управление с запаздыванием d , так как $u_d(t)=u_{0d}(t-d)$. Получено решение задачи 2 для класса управлений U_d с не единственными значениями d^*, t_0^* :

$$(5) \quad t_0^* = \begin{cases} d^* + \sqrt{2T + 2} - T - 1, & T \leq 1, \\ d^* + 1/2 - T/2, & 1 < T, \end{cases} \quad d^* \geq \max \left[0, \frac{T-1}{2} \right],$$

$$(6) \quad J_d(T) = J(u_{d^*}, t_{d^*}^*) = \begin{cases} 3/2 - \sqrt{2T + 2} + T, & T \leq 1, \\ T/2, & 1 < T. \end{cases}$$

Проведено сравнение предлагаемой оптимизации по критерию качества с оптимизацией без упреждения и с совместной оптимизацией момента упреждения и момента переключения управления [2].

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310 387-0 при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 17-01-00538-а и № 17-08-00742-а).

Список литературы

1. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
2. *Корнеев В.А.* Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 89-97.

Anticipation and Delay for a Constant-force Control in the Problem of Protection of an Object on a Movable Base from an Impact

V. A. Korneev

IPMech RAS, Moscow, Russia
korneev@ipmnet.ru

A problem of protection of an object on a movable base from transient impacts by means of an active shock isolator is considered. The peak magnitude of the displacement of the object relative to the base is chosen as the performance index to be minimized. Based on the optimal control without anticipation for the instantaneous impact, a guaranteeing control with optimized instant of engagement is constructed. The control that involves optimization of the engagement instant is compared with other control strategies.

УДК 62-50

Управление упреждением и запаздыванием в задаче защиты объекта от удара на подвижном основании

В. А. Корнеев, С. В. Юдин

ИПМех РАН, Москва, Россия
korneev@ipmnet.ru, webneomech@gmail.com

Рассматривается задача защиты объекта, расположенного на подвижном основании, от кратковременных ударных воздействий с помощью активного изолятора. Минимизируемым критерием качества выбрано максимальное смещение объекта относительно основания. На основе упреждающего оптимального управления, полученного для мгновенного удара, строится гарантирующее управление с оптимизацией момента начала действия управления. Проведено сравнение предлагаемой оптимизации по критерию качества с другими способами управления.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, гарантирующее управление, упреждение, запаздывание

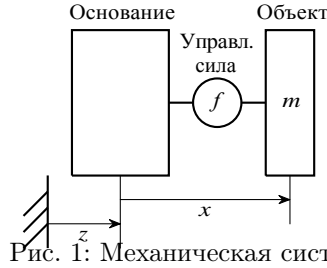


Рис. 1: Механическая система

1. Механическая система

Пусть механическая система (рис. 1) состоит из основания и объекта, соединенного с основанием посредством противоударного изолятора — устройства, генерирующего управляющую силу f с ограничением $|f| \leq F_0$ между основанием и объектом и предназначенного для защиты объекта при ударном воздействии на основание. Движения основания и объекта предполагаются поступательными вдоль одной прямой. Обозначим: z' — смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета, x' — смещение объекта относительно основания, m — масса объекта. Ударное воздействие v' на основание моделируется зависимостью $v' = -\dot{z}'$ от времени, где \ddot{z}' — ускорение основания. В начальный момент времени объект покоится относительно основания, и движение объекта относительно основания описывается соотношениями

- (1) $\ddot{x}' + u' = v'(t'), \quad u' = f/m, \quad |u'| \leq u_0, \quad u_0 = F_0/m, \quad v' = -\dot{z}'$,
- (2) $x'(0) = 0, \quad \dot{x}'(0) = 0$,
- (3) $v'(t') = V'(t' - t'_0), \quad t'_0 \geq 0$,

где кусочно-непрерывная функция $V'(\xi')$ определена для всех вещественных ξ' , причем $V'(\xi') \equiv 0$ для $\xi' \leq 0$, а t'_0 — момент упреждения, в который возмущение V' начинает действовать на основание спустя время t'_0 после включения системы противоударной изоляции. Ударное воздействие имеет конечную длительность T' , ускорение основания не меняет знака ($V' \geq 0$), а интеграл от величины $V'(t')$ по времени равен v_0 . Возмущение V' превышает величину u_0 только на одном интервале времени. Класс описанных возмущений обозначим V_* . Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{u_0}{v_0} x', \quad t = \frac{u_0}{v_0} t', \quad v(t) = \frac{1}{v_0} v' \left(\frac{v_0}{u_0} t' \right), \quad u = \frac{u'}{u_0}, \quad J = \frac{u_0}{v_0} J'.$$

2. Параметрическая оптимизация

Задача 1. Для системы (1) при начальных условиях (2) и заданного возмущения (3) найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению $|u(t)| \leq u_0$, $t \in [0, \infty)$, и время упреждения t_0 , которые минимизируют максимальную величину смещения объекта относительно основания:

$$J(u, V, t_0) = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u, V, t_0)| \rightarrow \min_{u, t_0}.$$

Задача 2. Для заданного класса допустимых управлений $u_s(t) \in U_s$ найти время упреждения t_0^* и значение параметра s^* , минимизирующие максимальную величину смещения объекта относительно основания при наихудшем возмущении:

$$J(u_{s^*}, t_0^*) = \min_{t_0, s} \max_{V \in V^*} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u_s, V, t_0)|.$$

Рассмотрим класс управлений $U_c = \{u_c\}$, описываемый параметрическим семейством допустимых управлений $u_c(t)$, где

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ -1, & c \leq t \leq 1/4 + c, \\ 1, & 1/4 + c < t \leq 3/2 + c, \\ 0, & t > 3/2 + c \end{cases} \quad c \geq 0.$$

Управление $u_\delta(t) = u_c(t)|_{c=0}$ есть оптимальное управление с оптимальным упреждением $t_0 = 1$ для задачи 1 при возмущении $V(\xi) = \delta(\xi)$, [1]. Управление $u_c(t)$ есть u_δ -управление с запаздыванием c , так как $u_c(t) = u_\delta(t-c)$. Получено решение задачи 2 для класса управлений U_c :

$$J(u_{c^*}, t_c^*) = \begin{cases} 25/16 - \sqrt{9/4 + 2T} + T, & T \leq 7/8, \\ T/2, & 7/8 < T, \end{cases}$$

$$t_0^* = \begin{cases} c^* + \sqrt{9/4 + 2T} - 1/2 - T, & T \leq 7/8, \\ c^* + 17/16 - T/2, & 7/8 < T, \end{cases} \quad c^* \geq \max \left[0, \frac{T}{2} - \frac{17}{16} \right],$$

т.е. значения c^* , t_0^* не единственны. Проведено сравнение предлагаемой оптимизации по критерию качества с оптимизацией только по моменту упреждения и с совместной оптимизацией момента упреждения и момента переключения управления [2].

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310 387-0 при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 17-01-00538-а и № 17-08-00742-а).

Список литературы

1. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science, 2001. 440 p.
2. *Корнеев В.А.* Защита объекта на подвижном основании с помощью упреждающего управления при наихудших возмущениях // Изв. РАН. ТИСУ. 2019. № 1. С. 89-97.

Control of Anticipation and Delay in the Problem of Shock Isolation of an Object on a Movable Base.

V. A. Korneev, S. V. Yudin

Russian Academy of Sciences, Institute for Problems in Mechanics, Moscow,
Russia

korneev@ipmnet.ru, webneomech@gmail.com

The problem of protection of an object on a movable base from transient shock disturbances by means of an active shock isolator is considered. The maximal displacement of the object relative to the base is taken as the performance index to be minimized. Proceeding from the anticipating optimal control constructed for the instantaneous impact, a guaranteeing control with optimization of the starting instant is designed for a class of external disturbances. The control optimized with respect to the starting instant is compared in terms of the performance index with other control strategies.

Математические модели управляемого движения космического аппарата с солнечным парусом

В. С. Королев, Е. Н. Поляхова, И. Ю. Потоцкая, Н. А. Степенко

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

vokorol@bk.ru, pol@astro.spbu.ru, irinapototskaya@yandex.ru, nick_st@mail.ru

Рассмотрены особенности управления солнечным парусом космического аппарата и возможности, учитывающие поступательное и вращательное движение. На основе аппроксимации уравнений движения для различных орбит и параметров тел обсуждаются возможности управления и условия устойчивости движения на заданных орбитах, а также в окрестности точек либрации.

Ключевые слова: световое давление, солнечный парус, управление, устойчивость, задача трёх тел, точки либрации

1. Введение

Создатель теории и первых проектов возможного полёта космического аппарата (КА) с солнечным парусом с использованием зеркальной пластины или плоской поверхности специальной пленки для управления движением с использованием силы светового давления Ф. А. Цандер [1, 2] рассматривал задачи маневрирования для межпланетных орбит. Последователи предлагали множество практических проектов возможного полёта КА с солнечным парусом, часть которых уже реализована. Главным было существование решения при выбранном управлении с учётом ограничений.

Классические критерии в задачах оптимального управления по затратам энергии (расход топлива) или времени реализации процесса перехода (быстродействие) в таком случае не будут актуальными. Появляются новые требования достижения заданного положения в пространстве, состояния или условий движения. Это приводит к исследованию новых математических моделей и построению законов управления [2–5] орбитального и вращательного движения всей конструкции с учётом основных действующих сил.

2. Уравнения динамики

Рассмотрим основные задачи механики космического полёта. Для гелиоцентрического движение КА с солнечным парусом в рамках *фотогравитационной задачи двух тел* (при перелётах к Солнцу, планетам, астероидам или кометам; для движения в окрестности Солнца с

учётом давления солнечной радиации) уравнения движения в фотогравитационном поле Солнца имеют следующий вид:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{a},$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — вектор управляющих ускорений, $\vec{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор КА и r его длина, GM — гравитационный параметр Солнца. Эти уравнения удобно переписывать в безразмерном виде.

Подобным образом формализуется и *фотогравитационная ограниченная задача трёх тел* (например, Солнце–планета–КА): геоцентрические перелёты КА на орбиту в окрестности Луны или за пределы сферы влияния Земли; перелёты и удержание КА в окрестности точек либрации.

3. Обратная задача динамики

Рассматривая обратную задачу движения (в безразмерном виде) в случае двух тел, найдём управляющие ускорения,

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\vec{r}}{r^3},$$

когда заранее заданы параметрически $x(t), y(t), z(t)$ для $t \in [0, T]$.

Принимая, что требуемые управляющие ускорения \vec{a} создаются солнечным парусом, запишем их в виде [2]:

$$a_x = \frac{k}{r^2} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2, \quad a_y = -\frac{k}{r^2} \sin \gamma_2, \quad a_z = \frac{k}{r^2} \sin \gamma_1 \cos \gamma_2,$$

где γ_1 и γ_2 — углы трёхмерной ориентации вектора нормали к теневой стороне зеркального с обеих сторон паруса, а безразмерный фактор k зависит от давления солнечного излучения на поверхность паруса КА. Отсюда выводим формулы для нахождения углов и построения управления.

4. Управление и устойчивость

Вращательные движения корпуса КА и системы солнечных парусов относительно центра масс при действии сил давления солнечной радиации определяет орбитальную динамику, стабилизацию и управление в пространстве при учете солнечного давления.

Устойчивость орбитального движения при выбранном законе управления для солнечного паруса определяет достижение заданного конечного положения КА с учетом ограничений или действующих возмущений.

В частности, рассматриваются тепловые ограничения для солнечного паруса во время полета в околосолнечных областях. Представлено моделирование нескольких замкнутых траекторий КА с управляемым солнечным парусом для достижения гелиополярных областей, пролета над Северным и Южным полюсами Солнца и возвращения на околоземную орбиту.

Только разрешая все проблемы, можно говорить о космических полетах. Это может быть обеспечено достаточно сложным управляемым процессом и заданной программой.

5. Заключение

В работе исследована задача динамики нахождения управления элементами солнечного паруса с переменным углом наклона, необходимые для полета, когда траектория задается в аналитической параметрической форме как некоторый закон движения. Изменение угла наклона позволяет изменять малое значение тяги, при котором изменяются геометрия паруса и его отражательные свойства.

Список литературы

1. *Tsander F.A.* Problems of Spaceflights with Jet Propulsion Engines: Interplanetary Travels, (ed. by L.K. Korneev, in Russian). Moscow: Oborongiz, 1961.
2. *Поляхова Е.Н.* Космический полет с солнечным парусом. Изд. 2-е, доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
3. *Поляхова Е.Н., Шмыров А.С.* Физическая модель сил давления световой радиации на плоскость и сферу // Вест. СПбГУ. Сер. 1. 1994. № 2. С. 87–104.
4. *Korolev V.S., Pototskaya I.Yu.* Integration of dynamical systems and stability of solution on a part of the variables // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9(15). P. 721–728. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.4121004>
5. *Polyakhova E., Starkov V., Stepenko N.* Flights of a Spacecraft with a Solar Sail out of Ecliptic Plane // AIP Conference Proceedings “8th Polyakhov’s Reading: Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics” 2018. No. 040017. <https://doi.org/10.1063/1.5034620>

Mathematical Models of a Solar Sail Spacecraft Controlled Motion

V. S. Korolev, E. N. Polyakhova, I. Yu. Pototskaya, N. A. Stepenko

Saint Petersburg State University of Saint Petersburg, Russia
vokorol@bk.ru, pol@astro.spbu.ru, irinapototskaya@yandex.ru, nick_st@mail.ru

The features of controlling the solar sail of the spacecraft and the possibilities taking into account the translational and rotational motion are considered. Based on the approximation of the equations of motion for various orbits and body parameters, control possibilities and conditions for the stability of motion in given orbits, as well as in the vicinity of libration points, are discussed.

УДК 531.391.1+517.977.56

Анализ и оптимизация поворота упругого нагруженного звена с электроприводом

Г. В. Костин

ИПМех РАН, Москва, Россия
kostin@ipmnet.ru

Исследованы плоские повороты упругого звена, управляемого электрическим приводом на одном конце и нагруженного на свободном конце точечной массой. Считается, что задача оптимального управления переводит звено в требуемое состояние с гашением упругих колебаний за счет электрического напряжения, подаваемого на обмотку двигателя. В соответствии с методом интегриродифференциальных соотношений дана обобщенная постановка задачи управления для динамической системы с распределенными и сосредоточенными параметрами и предложены согласованные приближения для неизвестных поперечных смещений, плотности импульса и изгибающего момента. Обсуждается процедура минимизации функции цены и регуляризации численной ошибки.

Ключевые слова: оптимальное управление, упругость, электропривод, вариационная формулировка

1. Введение

Актуальным направлением теории управления является разработка методов оптимизации движения систем с распределенными параметрами. Математическая основа для решения задач оптимального управления такими системами была заложена еще в работах Лионса [1]. Для моделирования колебаний в упругих и вязкоупругих телах и конструкциях, предложены вариационные формулировки задач оптимального управления с помощью метода интегродифференциальных отношений (МИДС) [2]. В данной работе этот подход развивается на случай электромеханических систем, содержащих упругие элементы с неравномерно распределенными параметрами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение электромеханической системы, содержащей прямолинейный упругий стержень, поворачивающийся в плоскости. Один конец стержня фиксирован, к другому концу прикреплена точечная масса. От электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением через редуктор к стержню передается момент сил. В рамках линейной теории Бернулли уравнения поворота стержня во вращающейся системе координат, связанной с касательной к центральной линии стержня в точке его шарнирного закрепления, с краевыми и начальными условиями согласно [2] имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho(x)w_{tt} + (\kappa(x)w_{xx})_{xx} &= -\rho(x)x\ddot{\alpha}(t), & w(t, 0) = w_x(t, 0) = 0, \\ w_{xx}(t, h) = 0, & (\kappa(x)w_{xx}(t, h))_x = m(w_{tt}(t, h) + h\ddot{\alpha}(t)), \\ w(0, x) = w_0(x), & w_t(0, x) = v_0(x). \end{aligned}$$

Здесь m — масса тела на конце стержня, h — его длина. Линейная плотность ρ и изгибная жесткость κ стержня — функции координаты x вдоль оси стержня. Угол поворота звена α определяется из закона изменения момента импульса звена и начальных условий

$$(2) \quad \int_0^h \rho^*(x)\ddot{\alpha}(t) + w_{tt}(0, x)x dx = \mu(t), \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \dot{\alpha}(0) = \omega_0,$$

где μ — момент, обрабатываемый электроприводом. Точечная масса на конце стержня учтена с помощью дельта-функции в обобщенной функции плотности $\rho^*(x) = \rho(x) + m\delta(h - x)$.

Система уравнений, определяющих ток j в обмотке электродвигателя, имеет вид

$$(3) \quad \begin{aligned} L \frac{dj(t)}{dt} + Rj(t) + \nu \Phi \dot{\alpha}(t) &= u(t), \\ J\nu^2 \ddot{\alpha}(t) &= \nu \Phi j(t) - \mu(t), \quad j(0) = j_0. \end{aligned}$$

Здесь $u(t)$ — подаваемое напряжение (управление), L — индуктивность, R — омическое сопротивление в цепи, Φ — магнитный поток, J — момент инерции ротора, ν — передаточное число редуктора.

Для системы (1), (3) задача оптимального управления ставится следующим образом. Найти закон изменения напряжения $u(t)$, который приводит к повороту звена за фиксированное время $t = T$ на заданный угол из начального состояния в состояние покоя и доставляет минимум целевому функционалу

$$(4) \quad W = \int_0^T Rj^2(t)dt \rightarrow \min_u,$$

$$w(T, x) = w_t(T, x) = \dot{\alpha}(T) = j(T) = 0, \quad \alpha(T) = \alpha_T.$$

3. Численное решение задачи

Для решения задачи (1)–(4) используется МИДС, согласно которому вводятся в рассмотрение функции линейной плотности импульса $p(t, x) = r_{xx}(t, x)$ и изгибающего момента $s(t, x) = -r_t(t, x)$, определенные через неизвестную динамическую функцию. В отличие от классической формулировки, функции состояния $q = p - \rho(w_t + x\ddot{\alpha})$ и $f = s - \kappa(x)w_{xx}$, заданные через неизвестные w и r , равны нулю в интегральном смысле

$$(5) \quad F = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^h (\rho^{-1}q^2 + \kappa^{-1}f^2) dx dt = 0.$$

Граничные условия по t и x из (1)–(4) выражаются через новые переменные. При численном моделировании и оптимизации составляется совместная конечномерная система ОДУ, приближенная к исходной. Для этого приравняются нулю проекции функций состояния q и f на линейную оболочку конечного набора тестовых функций в соответствии с методом Петрова–Галеркина.

Конечно-элементные аппроксимации \tilde{w} , \tilde{r} — это кусочно-полиномиальные функции (сплайны) по x , заданные на равномерной по длине стержня сетке с неизвестными коэффициентами по t . Управление выбирается из класса полиномов $u = u_0 + \sum_{k=1}^K u_k t^k$, где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_K)$ — свободный вектор параметров управления, а коэффициент u_0 задействован для выполнения терминального условия. Нахождение параметров движения сводится к решению линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами и полиномиальными правыми частями, зависящими от \mathbf{u} . Минимизация заключается в определении наилучших параметров \mathbf{u}^* через решение линейной системы алгебраических уравнений, вытекающих из необходимых условий стационарности функционала W , определенного в (4). Функционал энергетической невязки решения $F \geq 0$ используется для построения критерия качества решения — чем он меньше, тем более точны приближения \tilde{w} , \tilde{r} . Как было показано в [3], добавление в (4) к целевому функционалу W с некоторым весом функционала ошибки $F \geq 0$, может существенно понизить ошибку численного решения задачи оптимального управления. Был проведен ряд расчетов с выбранными параметрами системы, которые демонстрируют возможность построения достаточно точных аппроксимаций при сравнительно небольших размерах приближенной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 16-11-10343).

Список литературы

1. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1971.
2. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations // Berlin: De Gruyter, 2018.
3. *Kostin G.V.* Modelling and optimization of controlled longitudinal motions for an elastic rod based on the Ritz method // 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference), STAB 2018. IEEE. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408369.

Analysis and Optimization of Rotation of an Elastic Loaded Link with an Electric Drive

G. V. Kostin

Russian Academy of Sciences, Institute for Problems in Mechanics, Moscow,
Russia
kostin@ipmnet.ru

Plane rotations of an elastic link controlled by an electric drive at

one end and loaded at the free end by a point mass are studied. The optimal control problem is considered to turn the link into the desired state with damping elastic vibrations by the voltage supplied to the motor winding. According to the method of integro-differential relations, a generalized formulation of the control problem for the dynamical system with distributed and lumped parameters is given, and consistent approximations for unknown lateral displacements, momentum density, and bending moment are proposed. The procedure minimizing the cost function and regularizing the numerical error is discussed.

УДК 517.977.1

О полиэдральном методе решения задачи уклонения для линейных многошаговых систем

Е. К. Костоусова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
kek@imm.uran.ru

Рассматривается задача конфликтного управления для линейной многошаговой системы с двумя управлениями/возмущениями, где цель одного состоит в приведении траектории в заданное терминальное множество, цель другого противоположна. Здесь возникают две подзадачи: задача сближения и задача уклонения. Предлагается быстрый метод решения задачи уклонения на основе построения параллелотопозначных трубок.

Ключевые слова: управляемая система, системы с неопределенностью, задача уклонения, полиэдральные методы, параллелотопы

1. Введение

Рассматривается задача конфликтного управления для линейной многошаговой системы с двумя управлениями (одно из которых можно трактовать как неопределенное возмущение), где цель первого состоит в приведении траектории системы в заданное терминальное множество в заданный конечный момент времени, тогда как цель второго противоположна. Таким образом, получаются две подзадачи, а именно, задача сближения и задача уклонения. Известны подходы к решению задач такого рода, в том числе для дифференциальных систем, основанные

на построении трубок разрешимости (мостов Н.Н. Красовского) [2, 2]. Поскольку практическое построение трубок траекторий может быть затруднительным, разрабатываются различные численные методы, в т. ч. основанные на оценивании множеств простыми областями, такими как эллипсоиды и параллелепипеды / параллелотопы. В частности, в этом русле были разработаны конструктивные схемы решения задач сближения [2–4]. Разработанная полиэдральная техника была использована [5] для решения задач управления самолетом с возмущениями, причем актуально развитие аналогичной техники и для решения задачи уклонения [5]. В работе предлагается полиэдральный метод решения задачи уклонения на основе построения параллелотопозначных трубок, нахождение которых значительно менее трудоемко, чем построение точных трубок разрешимости. Представлены эволюционные уравнения для центров и матриц, определяющих сечения упомянутых трубок, и стратегии управления, которые можно построить по явным формулам на основе этих трубок.

2. Основной результат

Рассматривается задача конфликтного управления для линейной многошаговой системы

(1)

$$x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N;$$

$$u[k] \in \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]]; v[k] \in \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]]; \mathcal{M} = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f].$$

Здесь $x[j] \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ — управления/возмущения, стесненные параллелотопозначными ограничениями; \mathcal{M} — заданное терминальное множество. Напомним, что параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называют множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Считаем, что в (1) $\bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $\bar{Q}[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$, $\bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Цель u — добиться выполнения включения $x[N] \in \mathcal{M}$, а v — обеспечить $x[N] \notin \mathcal{M}$. Формулировки задачи сближения и «полиэдральной» задачи сближения могут быть найдены, например, в [4, задачи 1 и 2]. В настоящей работе рассматриваются следующие «полиэдральные» задачи уклонения.

Задача 3. Для системы (1) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}[N] \supseteq \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения $x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]]$,

$k=1, \dots, N$, с $x[0] = x_0 \notin \mathcal{P}[0]$ удовлетворяло $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot]$.

Задача 3'. Задача подобна задаче 3, но управление v строится не по обратной связи, а определяется начальным состоянием x_0 : $v = v[k, x_0]$.

Приведем возможные решения этих задач.

Зафиксируем произвольную неособую матрицу P_f ($\det P_f \neq 0$) и рассмотрим следующую нелинейную систему рекуррентных соотношений с явными формулами для центров и матриц параллелотопов $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$, определяющих сечения трубки $\mathcal{P}[\cdot]$:

$$\begin{aligned}
 p[k-1] &= A[k]^{-1}(p[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad k = N, \dots, 1; \\
 \bar{P}[k-1] &= A[k]^{-1} \bar{P}[k] \text{diag}(e + \alpha[k] - \gamma[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\
 (2) \quad \alpha[k] &= (\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k]))e, \quad k = N, \dots, 1, \\
 \gamma[k] &= (\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e, \quad k = N, \dots, 1; \\
 p[N] &= p_f; \quad \bar{P}[N] = P_f \text{diag}((\text{Abs}(P_f^{-1}\bar{P}_f))e)
 \end{aligned}$$

и соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$ вида

$$\begin{aligned}
 (3) \quad v[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k]\chi^*[k, x], \\
 \chi_j^*[k, x] &= \text{sign}(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k])_{i_*[k]j} \text{sign}(\bar{P}[k-1]^{-1}(x-p[k-1]))_{i_*[k]},
 \end{aligned}$$

где $i_*[k]$ — такой (возможно, не единственный) индекс $i_*[k] = i_*[k, x] \in \{1, \dots, n\}$, что $|\bar{P}[k-1]^{-1}(x-p[k-1])_{i_*[k]}| > 1$; $j = 1, \dots, n_v$. Здесь использованы обозначения: $\text{Abs} A = \{|a_{ij}|\}$ для $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\text{diag} \pi$ — диагональная матрица с компонентами вектора π на диагонали; символы e в (2) стоят для обозначения векторов вида $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ соответствующих размерностей.

Теорема 1. Пусть \mathcal{M} — невырожденный параллелотоп (т.е. $\det \bar{P}_f \neq 0$), все $\det A[k] \neq 0$, $k = 1, \dots, N$, и система (2) имеет такое решение $(p[\cdot], \bar{P}[\cdot])$, что выполнены неравенства $\gamma[k] < e$, $k = N, \dots, 1$. Тогда для любой точки $x_0 \notin \mathcal{P}[0]$ можно построить стратегию управления по правилу (3) (возможно, не единственным образом), и она вместе с трубкой $\bar{P}[\cdot]$ будет давать частное решение задачи 3.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 частное решение задачи 3' дается трубкой $\bar{P}[\cdot]$ из (2) и стратегией управления $v = v[k, x_0]$, которая отличается от (3) тем, что нужно векторы $\chi^*[k, x]$ заменить на $\chi^*[k, x_0]$, $\bar{P}[k-1]^{-1}(x-p[k-1])$ — на $\bar{P}[0]^{-1}(x_0-p[0])$ и положить $i_*[k] \equiv i_*[1]$.

В докладе будут представлены также результаты дальнейшего исследования рассматриваемых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00544а).

Список литературы

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1987.
2. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
3. *Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.* Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // *Automatica*. 2011. V. 47. No. 7. P. 1414–1426.
4. *Kostousova E.K.* On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2018. V. 38. No. 12. P. 6149–6162.
5. *Botkin N., Martynov K., Turova V., Diepolder J.* Generation of dangerous disturbances for flight systems // *Dynamic Games and Applications*. 2019. V. 9. No. 3. P. 628–651.

On a Polyhedral Method for Solving an Evasion Problem for Linear Discrete Time Systems

E. K. Kostousova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia
kek@imm.uran.ru

A conflict control problem for a linear discrete time system with two controls/disturbances is considered, where the aim of the first one is to steer the trajectory of the system into a given terminal set, whereas the aim of the second one is opposite. Two subproblems arise here, namely the approach problem and the evasion one. In the paper, a quick method for solving the evasion problem is proposed based on the calculation of parallelepiped-valued tubes.

Метод генерации в кинематическом приближении синтетических трехмерных траекторий подвижных объектов

М. И. Костючек, А. В. Макаренко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
max31@list.ru, avm.science@mail.ru

В работе представлен и исследован метод генерации трехмерных синтетических траекторий подвижных объектов. Траектории синтезируются в кинематическом приближении посредством последовательно соединенных дуг окружностей. Метод позволяет точно контролировать местоположение, скорость и ускорения объекта в каждой точке траектории. При этом возможно управление формой траектории в целом. Сгенерированные наборы траекторий возможно применять для разработки ряда нейросетевых решателей, в том числе: обнаружение и/или классификация подвижных объектов, оценивание координат, прогнозирование траекторий, распутывание траекторий, разрешение групповых сосредоточенных целей.

Ключевые слова: подвижные объекты, синтетические траектории, кинематическое приближение

1. Введение

В настоящее время весьма актуальными являются исследования в области синтеза алгоритмов обработки траекторной информации автономных подвижных объектов методами глубокого обучения. Современные подходы к обучению глубоких нейронных сетей весьма требовательны к объему, разнообразию и качеству наборов данных [1]. Ряд задач, особенно на первых этапах решения, по различным причинам, требуют применения синтетических наборов траекторных данных. Многие известные методы генерации траекторий [2–4] обладают различными существенными недостатками: либо они излишне сложны – используют полноценное динамическое моделирование изучаемых подвижных объектов, либо излишне примитивны – исходят из тривиального геометрического приближения (траектория представляется в виде набора ломанных линий).

Ранее, авторами был предложен [5] достаточно простой и сбалансированный метод генерации траекторий подвижных объектов на плоскости, позволяющий контролировать и гибко управлять кинематическими характеристиками движения и формой траектории в целом. В настоящей работе метод расширен на трехмерное пространство и про-

веден теоретический анализ полученного решения.

2. Формальное описание подхода

Введем в рассмотрение траекторию $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ в трехмерном пространстве с определенной в нем правой декартовой системой координат, $t \in T \subset \mathbb{R}$ — время. Определим условие по непрерывности скорости, тогда $\mathbf{r}(T) \in C^1$. Будем формировать траекторию $\mathbf{r}(t)$ в виде набора дуг окружностей соединенных последовательно так, что конец предыдущей дуги является началом следующей.

Пусть (см. рисунок 1): \mathbf{r}_n^o — радиус-вектор центра n -й дуги окружности; \mathbf{r}_n^b — радиус-вектор ее начальной точки; $\bar{\mathbf{v}}_n^b$ — единичный вектор скорости в начальной точке; ϕ_n — угловая мера n -й дуги.

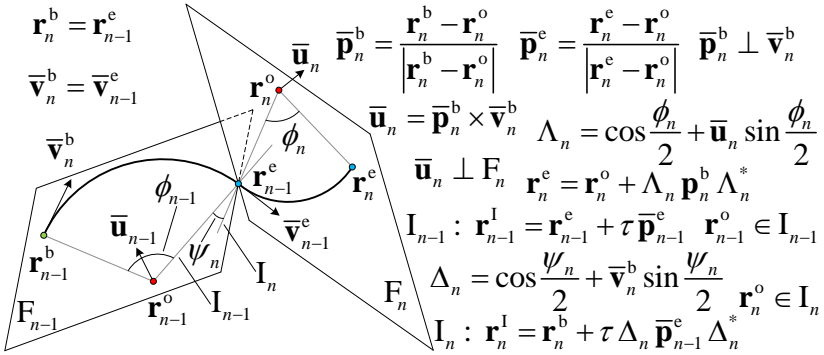


Рис. 1: Иллюстрация принципа генерации траекторий

Единичные вектора $\bar{\mathbf{p}}_n$ и $\bar{\mathbf{v}}_n^b$ определяют плоскость F_n , в которой лежит n -я дуга окружности. На основе кватерниона поворота Λ_n строится уравнение n -й дуги траектории. Кватернион Δ_n отвечает за поворот прямой I_{n-1} вокруг вектора $\bar{\mathbf{v}}_n^b$ и формирование прямой I_n на которой располагается центр n -й дуги — \mathbf{r}_n^o .

Как следует из вышеизложенного, траектория $\mathbf{r}(t)$ однозначно параметризуется натуральным параметром $l = l(t)$, т.е. ее длиной. Управляя угловой мерой сегмента траектории ϕ_n , углом разворота ψ_n и радиусом (кривизной) n -го сегмента, вкупе с заданием зависимости натурального параметра от времени $l(t)$, и ограничений на эту зависимость, возможно управлять как ограничениями на кинематические характеристики движения в каждый момент времени t так и формой траектории в целом, на интервале T .

3. Заключение

Представлен метод генерации трехмерных C^1 -гладких синтетических траекторий, который позволяет накладывать ограничения как на вид траектории в целом, так и на локальные кинематические характеристики движения. Траектории, полученные данным алгоритмом, легко параметризуются от натурального параметра и времени. Алгоритм позволяет гибко управлять формой синтезируемых траекторий. Доказан и исследован ряд утверждений касемо интерполирующих и аппроксимирующих свойств метода в контексте C^1 -гладких траекторий. Предложенный алгоритм реализован в виде библиотеки на языке программирования Wolfram Language.

Список литературы

1. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep Learning. MIT Press, 2016.
2. *Giannotti F., Nanni M., Pedreschi D., Pinelli F.* Trajectory Pattern Mining // 13th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 2007. P. 330–339.
3. *Hervieu A., Bouthemy P., Le Cadre J-P.* A HMM-Based Method for Recognizing Dynamic Video Contents from Trajectories // IEEE International Conference on Image Processing. 2007. San Antonio, TX, USA.
4. *Pelekis N., Ntrigkogiass C., Tampakis P., Sideridis S., Theodoridis Y.* Hermoupolis: A Trajectory Generator for Simulating Generalized Mobility Patterns // Blockeel H., Kersting K., Nijssen S., Zelezny F. (eds) Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. Lecture Notes in Computer Science. 2013. V. 8190. Springer, Berlin, Heidelberg.
5. *Костючек М.И., Макаренко А.В.* Алгоритм генерации двумерных траекторий с заданными кинематическими характеристиками для формирования синтетических наборов данных / Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления, Изд-во ИПУ РАН, 2019. С. 934–939.

A Technique for Generation of Synthetic 3D Trajectories of Moving Objects in Kinematic Approximation

M. I. Kostiuček, A. V. Makarenko

Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
max31@list.ru, avm.science@mail.ru

The article presents and studies a method for generation of 3D synthetic trajectories of moving objects. The trajectories are synthesized in a kinematic approximation by sequentially connecting circular arcs. The

technique allows for precise monitoring of the object's position, velocity and acceleration in all trajectory points. The trajectory shape can generally be managed too.

УДК 62–50

Релейный алгоритм управления для перевернутого маятника на тележке с учетом нелинейности математической модели

С. А. Кочетков

ИПУ РАН, Москва, Россия
kos@ipu.ru

В работе рассмотрена нелинейная модель перевернутого маятника на тележке при воздействии внешнего возмущения в виде силы сухого трения. Разработан нелинейный алгоритм управления на основе трехуровневой декомпозиции. За счет последовательного выбора фиктивных и реальных управляющих воздействий решается проблема стабилизации нулевой динамики и компенсации силы сухого трения.

Ключевые слова: релейное управление, сила сухого трения, перевернутый маятник на тележке, заданная точность

1. Введение

Проблема управления перевернутым маятником на мобильной тележке является одной из классических задач и часто используется в качестве примера, на основе которого демонстрируются результаты современных исследований по теории управления. Несмотря на огромное количество публикаций, посвященных этой проблеме, остается целый ряд неисследованных вопросов. Основной проблемой, связанной с управлением перевернутым маятником на тележке, является существенная нелинейность рассматриваемой системы. Существует ряд подходов, основанных на теории скользящих режимов [1], системах с разнотемповыми движениями [2], теории диссипативных систем [3] и т.д. Отметим, что в указанных публикациях недостаточно внимания уделяется реализации этих подходов на практике, когда дополнительно с уравнением механической подсистемы рассматривается также динамическая подсистема, описывающая поведение исполнительных ме-

ханизмов.

Статья посвящена синтезу закона управления на основе метода декомпозиции с указанными выше особенностями. Основная идея заключается в использовании некоторой модификации закона управления реле, предложенной в [4].

2. Основной результат

Математическая модель электромеханической системы может быть записана с использованием уравнений Кирхгофа и уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= \omega, \\
 \dot{x} &= v, \\
 \dot{\omega} &= \frac{M_{\text{eq}} [-\mu_p \omega + mgl \sin(\varphi)]}{\Delta(\varphi)} + \\
 &+ \frac{ml \cos(\varphi) \left[-ml \sin(\varphi) \omega^2 - F_{fr} - \mu_{\text{beq}} v + \frac{c_i}{r_s} I \right]}{\Delta(\varphi)}, \\
 \dot{v} &= \frac{ml \cos(\varphi) [-\mu_p \omega + mgl \sin(\varphi)]}{\Delta(\varphi)} + \\
 &+ \frac{J_{\text{eq}} \left[-ml \sin(\varphi) \omega^2 - F_{fr} - \mu_{\text{beq}} v + \frac{c_i}{r_s} I \right]}{\Delta(\varphi)}, \\
 \dot{I} &= -\frac{R}{L} I - \frac{c_\omega}{L r_s} v + \frac{u}{L},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $\mu_{\text{beq}} = \mu_{bv} + \frac{\mu_d}{r_s^2}$, $M_{\text{eq}} = m + M + \frac{J_d \eta_g k_g^2}{r_s^2}$, $J_{\text{eq}} = J + ml^2$, $\Delta(\varphi) = M_{\text{eq}} J_{\text{eq}} - m^2 l^2 \cos^2(\varphi)$, $\text{sign}(\cdot)$ – функция знака, φ – угловое положение стержня, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость маятника, J – момент инерции маятника, l – расстояние до центра масс маятника, m – масса маятника, M – масса тележки, x – координата тележки, v – скорость тележки, μ_{bd} – коэффициент сухого трения между тележкой и рельсом, μ_{bv} – коэффициент вязкого трения между тележкой и рельсом, μ_p – коэффициент вязкого трения в подшипнике стержня, μ_d – коэффициент вязкого трения в подшипнике электродвигателя, R – сопротивление статора электродвигателя, L – индуктивность статора электродвигателя, c_i – постоянная момента электродвигателя, c_ω –

коэффициент противо-ЭДС, k_g — передаточное число редуктора, η_g — КПД редуктора, J_d — момент инерции электродвигателя со шкивом, r_s — радиус шкива на на выходном валу редуктора, I — ток статора, u — управляющее напряжение, N — сила реакции опоры тележки.

В работе на основе трехуровневой декомпозиции одновременно решена задача стабилизации маятника в верхнем положении и задача регулирования положения тележки в заданном положении с заданной точностью

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}| \leq \delta_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi| \leq \delta_2,$$

где $\bar{x} = x - x_{\text{ref}}$, $x_{\text{ref}} = \text{const}$ — заданное положение стабилизации тележки, $\delta_1, \delta_2 = \text{const} > 0$ — заданные константы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-01-00846А, № 20-01-00363А).

Список литературы

1. *Wai R., Chang L.* Adaptive stabilizing and tracking control for a nonlinear inverted-pendulum system via sliding-mode technique // *IEEE Trans. Ind. Electronics.* 2006. V. 53. No. 11. P. 674–692.
2. *Lee J., Mukherjee, R., Khalil H.* (2015). Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties // *Automatica.* 2015. V. 54. P. 146–157.
3. *Astrom K., Lischinsky P., Olsson H., de Wit C.* A new model for control of systems with friction // *IEEE Trans. Automatic Control.* 1995. V. 40. No. 3. P. 419–425.
4. *Kochetkov S., Utkin V.* Invariance in systems with unmatched perturbations // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 7. P. 1097–1127.

Relay Control Algorithm for an Inverted Pendulum on a Cart with Accordance the Nonlinearity of the Mathematical Model

S. A. Kochetkov

Institute of control sciences of RAS, Moscow, Russia
kos@ipu.ru

A nonlinear model of an inverted pendulum on a cart under the influence of a dry friction force is considered. The relay control algorithm based on a three-level decomposition is developed. Due to the successive choice of fictitious and real control inputs, the problems of stabilization of zero dynamics and compensation of the dry friction force are solved.

Об альтернативных подходах к задачам устойчивости и стабилизации стационарных движений с нулевыми корнями в замкнутой системе

А. Я. Красинский^{1,2}

МГУПП¹, МАИ², Москва, Россия
krasinsk@mail.ru

Применение переменных Рауса в обобщенных, а также в избыточных координатах допускает использование как теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, так и теоремы Каменкова об устойчивости в особенных случаях. Доказано, что теорема Каменкова уточняет результат в отношении асимптотической устойчивости по позиционным скоростям.

Ключевые слова: Переменные Рауса, постоянно действующие возмущения, особенный случай.

Применение второго метода Ляпунова сводится к построению функций, удовлетворяющих условиям соответствующих теорем. Если действительные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения уравнений возмущенного движения отрицательны, всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы об асимптотической устойчивости независимо от нелинейных членов. Если кроме корней с отрицательными действительными частями хотя бы один корень характеристического уравнения расположен на мнимой оси, имеет место критический случай, когда для обоснованного заключения об устойчивости необходим анализ нелинейных членов уравнений возмущенного движения [1–3]. Как указал Ляпунов, в каждом из критических случаев задача приобретает такое своеобразие, что не может быть речи о каких-либо общих методах, подходящих для всех таких случаев.

Для специальной категории критических случаев, когда, кроме корней с нулевыми действительными частями, обязательно присутствуют корни, действительные части которых отрицательны, разрабатывается восходящий к Ляпунову принцип сведения [1–3], устанавливающий достаточные условия, при которых заключение об устойчивости в полной системе получается в результате рассмотрения так называемой укороченной системы. Эта система содержит только те переменные, которым отвечают критические корни характеристического уравнения.

Достаточные условия применимости результатов принципа сведения сформулированы в новых переменных, которые связаны с выполнением линейных (для приведения к специальному виду) и нелинейных (для повышения порядка свободно входящих критических переменных в уравнениях, соответствующих некритическим переменным) замен переменных, после которых в общем случае чрезвычайно сложно переформулировать эти условия для исходных систем в первоначальных переменных. В этом заключается основная проблема практического применения достижений принципа сведения: требуется сформулировать достаточные условия устойчивости или неустойчивости в исходных переменных.

Наиболее общие результаты принципа сведения, которые могут применяться и уже применяются при решении прикладных задач устойчивости, относятся к особым случаям критических случаев. Основная трудность при применении теоремы Каменкова [3] (об устойчивости в особом случае нескольких нулевых и пар чисто мнимых корней) заключается в проверке достаточных условий сходимости ряда, определяющего нелинейную замену по некритическим переменным, одновременно обнуляющую свободно входящие критические переменные и в присоединенной, и в укороченной системах. В отличие от общей ситуации, развитый аппарат аналитической механики, за счет выбора форм уравнений движения и типов переменных, создает возможности выделения таких классов критических случаев устойчивости, когда в проведении вышеуказанных аналитических преобразований нет необходимости, благодаря чему достаточные условия применимости результатов принципа сведения могут формулироваться в исходных переменных.

В задачах устойчивости установившихся движений систем с линейными однородными дифференциальными связями количество нулевых корней характеристического уравнения не меньше числа связей. Тем не менее, использование переменных Рауса может существенно упростить исследование даже при наличии циклических координат (для систем с неголономными связями в смысле определения [4]) когда появляются дополнительные нулевые корни, вследствие чего задача существенно усложняется уже на этапе приведения к специальному виду теории критических случаев. Применение теоремы Каменкова для таких систем дает достаточные условия неасимптотической устойчивости: структура уравнений возмущенного движения создала возможность выполнения нелинейной замены только по части некритических переменных, причем последним соответствовали дифференциальные

уравнения второго порядка, в то время, как критическим переменным отвечали такие уравнения первого порядка, когда в правых частях уравнений, соответствующих критическим переменным обязательно присутствуют те некритические переменные, по которым нелинейную замену делать не надо.

В задачах устойчивости установившихся движений систем с геометрическими связями при использовании продифференцированных уравнений связей, несмотря на наличие нулевых корней, возможна [1] условная асимптотическая устойчивость и, согласно теореме Малкина [2] об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (за которые принимаются возмущения циклических импульсов) устанавливается только неасимптотическая устойчивость. Однако структура уравнений возмущенного движения в этих задачах имеет вышеуказанные особенности, что допускает использование теоремы Каменкова [3], и, тем самым, в отличие от [1], доказывается асимптотическая устойчивость по отношению к позиционным скоростям, если действительные части корней характеристического уравнения, соответствующие позиционным координатам и их скоростям, отрицательны.

Список литературы

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений, Т.2. Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР. 1956. 472 с.
2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 532 с.;
3. *Каменков Г.В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, Избр. Труды. Т.2. 1972. 211 с.
4. *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах неголономных систем // Вестн. МГУ. Мат., мех., 1972. №6. С. 77–83.
5. *Красинская Э.М., Красинский А.Я.* Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование. 2013. № 03. DOI: 10.7463/0313.0541146.

On Alternative Approaches to the Problems of Stability and Stabilization of Stationary Motions with Zero Roots in a Closed System

A. Ya. Krasinskiy^{1,2}

Moscow State University of Food Production¹ and Moscow Aviation Institute²,
Moscow, Russia
krasinsk@mail.ru

The use of Routh variables in generalized as well as in redundant coordinates allows the use of both Malkin's stability theorem for constantly

acting disturbances and Kamenkov stability theorem in special cases. It is proved that Kamenkov's theorem refines the result with respect to asymptotic stability with respect to positional velocities.

УДК 531.36

О стабилизации движений роботов-манипуляторов с несколькими геометрическими связями при неполной информации

А. Я. Красинский^{1, 2}, А. А. Юлдашев²

МГУПП¹, МАИ², Москва, Россия

Методами механики систем с избыточными координатами получены модели задач стабилизации многозвенных роботов-манипуляторов при неполной информации о состоянии. Коэффициенты управления и системы оценивания найдены методом Красовского из линейно-квадратичных задач для управляемой подсистемы. С учетом динамики приводов рассмотрена задача стабилизации заданного положения схвата двухзвенного манипулятора с двумя связями.

Ключевые слова: манипуляторы, геометрические связи, линейно-квадратичная задача, неполная информация

1. Введение

Математическую модель динамики многозвенного манипулятора, конфигурация которого определяется параметрами $q' = (q_1, \dots, q_{n+m})$, при наложенных геометрических связях

$$(1) \quad F(q) = 0, \quad F' = (F_1(q), \dots, F_m(q)), \quad \det \left| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right| \neq 0.$$

можно привести к виду (причем в отличие от [1] учтены и переходные процессы в исполнительных коллекторных двигателях)

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r + B'(q) \left(Q_s + \frac{\partial L^*}{\partial s} \right); \quad \dot{s} = B(q) \dot{r}$$

$$B_\alpha(\alpha, s) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right); \quad \Gamma \frac{d\alpha}{dt} + R\alpha + \kappa_1 B(q) \dot{r} = \kappa_2 \epsilon;$$

$$q' = (r', s'); \quad r = (q_1, \dots, q_n)'; \quad s = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})'; \quad \iota = (i_1, \dots, i_k)';$$

$$\epsilon = (e_1, \dots, e_k)'; \quad \kappa_1 = (k_1^1, \dots, k_k^1)'; \quad \kappa_2 = (k_1^2, \dots, k_k^2)'; \quad \Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)'$$

здесь ι — вектор токов якорных обмоток двигателей, ϵ — вектор напряжений питания, κ_1 — вектор коэффициентов противо-ЭДС, κ_2 — вектор коэффициентов преобразователей питания, Γ — вектор индуктивностей якорных обмоток, $R = (R_1, \dots, R_k)'$ — вектор сопротивлений этих обмоток, $Q(q, \dot{r})$ — вектор непотенциальных сил, $L^*(q, \dot{r})$ — функция Лагранжа после исключения зависимых скоростей с помощью продифференцированных по времени уравнений (1).

2. Основной результат

В задаче стабилизации положения схвата манипулятора

$$(3) \quad r = r_0; \quad s = s_0; \quad \iota = \iota_0; \quad \epsilon = \epsilon_0$$

введем возмущения, принимая за управление вектор u дополнительных к обеспечивающим существование (3) напряжений на якорных обмотках двигателей (приводы могут действовать по каждой зависимой координате, т.е. $k = m$)

$$(4) \quad r = r_0 + x; \quad \dot{r} = \dot{x}_1; \quad s = s_0 + y; \quad \iota = \iota_0 + v; \quad \epsilon = \epsilon_0 + u.$$

Векторно-матричные уравнения возмущенного движения после замены [2], выделяющей критические переменные z , получают вид

$$\dot{\xi} = P\xi + Qu + Zz + \Phi^{(2)}; \quad \dot{z} = B^{(1)}(x, z)x_1; \quad \xi' = (x', x'_1, v');$$

$$(5) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 \\ A & D & G \\ 0 & b & g \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_k \end{pmatrix}.$$

Постоянные матрицы коэффициентов выражаются известным образом [1, 3] параметры системы. Верхний индекс в скобках означает порядок младших членов в разложении соответствующего выражения. Следует обратить особое внимание на матрицу A , компоненты которой в общем случае зависят [1, 3] от членов второго порядка в разложении связей (1), причем существенно изменяются после замены [2]. Для решения задачи стабилизации при неполной информации о состоянии рассмотрим для простоты следующий вариант матрицы коэффициентов линейного приближения вектора измерений

$$(6) \quad \sigma = C\xi = S_1x + S_2x_1 + S_3v.$$

Теорема 1. Если выполнены условия

$$(7) \quad \text{rank}[Q \quad PQ \dots P^{2n+k-1}Q] = 2n + k;$$

$$(8) \quad \text{rank}[C' \quad P'C' \dots (P')^{2n+k-1}C] = 2n + k;$$

то невозмущенное движение (3) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением линейного управления (дополнительного напряжения на якорных обмотках)

$$(9) \quad \hat{u} = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{x}_1 + K_3 \hat{v}$$

причем компоненты вектора оценки фазового состояния $\hat{\xi}' = (\hat{x}', \hat{x}'_1, \hat{v}')$ могут получены по измерению (6) из системы оценивания

$$(10) \quad \dot{\hat{\xi}} = P\hat{\xi} + L(C\hat{\xi} - \sigma) + Q\hat{u}$$

где матрицы K_1, K_2, K_3, L определяются решением методом Красовского соответствующих линейно-квадратичных задач для подсистем

$$\dot{\xi} = P\xi + Qw; \quad \dot{\mu} = P'\mu + C'w; \quad w = L'\mu.$$

Устойчивость доказана сведением к теореме 1 [3]. Достаточные условия (7), (8) для определения управления (9) с использованием системы оценивания (10) быть выполнены и при приложении управлений по возможно меньшей части приводов. В качестве приложения разработанного метода решена задача стабилизации заданного положения двухзвенного манипулятора с двумя геометрическими связями. Приведены графики переходных процессов.

Список литературы

1. Krasinskiy A.Y., P'ina A.N., Krasinskaya E.M. Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates // Moscow University Mechanics Bulletin. 2019. V. 74. No 1. P. 14–19. <https://doi.org/10.3103/S0027133019010035>.
2. Aiserman M.A., Gantmacher F.R. Stabilitaet der Gleichgewichtslage in einem nichtholonomen System // Z. Angew. Math. Mech. 1957. V. 37. No 1-2. P. 74–75.
3. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование. 2013. № 03. DOI: 10.7463/0313.0541146.

On the Stabilization of the Motions of Robotic Manipulators with Several Geometric Connections with Incomplete Information

A. Ya. Krasinskiy^{1, 2} A. A. Yuldashev²

Moscow State University of Food Production¹, Moscow Aviation Institute,²
Moscow, Russia

A method is being developed for constructing models of stabilization problems for multi-link manipulators with geometric connections. The control coefficients and estimation systems are found by the Krasovskii method from linear-quadratic problems for a controlled subsystem. Taking into account the dynamics of the drives, the problem of stabilization of a given grip position of a two-link manipulator with two connections is considered.

УДК 62.501.2

Синтез динамической обратной связи в следящих одноканальных системах при действии неконтролируемых возмущений

Д. В. Краснов

ИПУ РАН, Москва, Россия
dim93kr@mail.ru

Для нелинейных одноканальных систем с несогласованными возмущениями, представимых в треугольной форме «вход–выход», в рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза динамической обратной связи, включающая: синтез разрывного управления, обеспечивающего слежение выходной переменной за командным сигналом в предположении о гладкости внешних воздействий; синтез наблюдателя пониженного порядка с большими коэффициентами, который по измерениям ошибки слежения оценивает смешанную переменную, по которой формируется обратная связь.

Ключевые слова: нелинейная SISO-система, слежение, внешние возмущения, скользящий режим, наблюдатель состояния

Рассматривается нелинейная система с одним входом и одним вы-

ходом при действии внешних несогласованных возмущений, представляемая в треугольной аффинной форме «вход–выход» вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) + q_i^T(x_1, x_2, \dots, x_i)\eta, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n &= f_n(x) + q_n^T(x)\eta + b_n(x)u, \end{aligned}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subset R^n$ – вектор состояний, $u \in R$ – управление, $x_1(t) \in X_1 \subset R$ – выходная переменная, $q_i^T = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{is}) \in R^{1 \times s}$, $\eta(t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) \in R^s$ – вектор внешних неконтролируемых возмущений, $f_i, q_{ij} \in C^{n-i}$, $i = \overline{1, n-1}$, $\eta_j \in C^{n-1}$, $j = \overline{1, s}$; $|\eta_j^{(i)}(t)| \leq N_{ij} = \text{const} > 0$, $t \geq 0$, $i = \overline{0, n-1}$,

$$(2) \quad \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad b_n(x(t)) \neq 0, \quad x(t) \in X, \quad t \geq 0.$$

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей слежение выходной переменной $x_1(t)$ за заданным сигналом $g(t) \in X_1$, $g \in C^n$, $|g^{(i)}(t)| \leq G_i = \text{const} > 0$, $t \geq 0$, $i = \overline{0, n}$ с заданной скоростью сходимости ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$:

$$(3) \quad |e_1(t)|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-kt)), \quad k > 0.$$

В [1] показано, что при выполнении условий (2) для системы (1) существует диффеоморфная замена локальных переменных к каноническому виду «вход–выход» относительного порядка n , которая служит основой для синтеза следящей системы. В данной работе с целью обеспечить (3) используется блочный подход [2]. Вводится диффеоморфная замена переменных с линейными локальными связями, приводящая систему (1) к верхнетреугольной форме «вход–выход» относительно ошибки слежения:

$$(4) \quad \dot{e}_i = -\bar{k}_i e_i + e_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{e}_n = \psi(x, e, \bar{\eta}, \bar{g}) + b(x)u,$$

где $e_2 = f_1(x_1, x_2) + q_1^T(x_1)\eta - \dot{g} + k_1 e_1$, $e_i = \frac{d}{dt}e_{i-1} + k_{i-1}e_{i-1}$, $i = \overline{3, n}$, $k_{n-1} > \dots > k_2 > k_1 \geq k$, $\bar{k}_1 := k_1$, $\bar{k}_i = k_i - k_{i-1}$, $\bar{\eta} = (\eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)})^T$, $\bar{g} = (g, g^{(1)}, \dots, g^{(n)})^T$, $|\psi(t)| \leq \Psi$, $\bar{b} \leq |b(x(t))| \leq \bar{b}$, $t \geq 0$, Ψ, \bar{b} – известные константы, полученные из наихудшего расчетного случая, $b(x(t)) \neq 0$, знак $b(x)$ известен.

Ориентируясь на практически значимый класс объектов с электрическими исполнительными устройствами, где управление имеет разрывной характер, вводится базовый закон управления

$$(5) \quad u = -M \text{sign } b(x) \cdot \text{sign } e_n, \quad M = \text{const} > 0.$$

При выполнении достаточного условия

$$e_n \dot{e}_n = e_n(\psi(t) - M|b| \cdot \text{sign } e_n) \leq |e_n|(\Psi - M\bar{b}) < 0 \Rightarrow M > \Psi/\bar{b}$$

за конечное время $T > 0$ на поверхности $e_n = 0$ возникнет скользящий режим, а в замкнутой системе (4)–(5) имеют место логическая цепочка $e_{n-1}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow e_{n-2}(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow e_1(t) \rightarrow 0$ и выполнение условия (3).

Для оценивания смешанной переменной $e_n(t)$ по измерениям ошибки слежения $e_1(t)$ разработан оригинальный метод синтеза наблюдателя пониженного порядка с большими коэффициентами. Основой для построения служат $n - 1$ уравнений системы (4), преобразованных с помощью невырожденного линейного преобразования $P(l)\bar{e} = s$, $\det P \neq 0$, $\bar{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})^T$, $s = (e_1, s_2, \dots, s_{n-1})^T$ к виду

$$(6) \quad \dot{e}_1 = -(\bar{k}_1 - l_2)e_1 + s_2, \quad \dot{s}_i = c_i e_1 - (l_i + \bar{k}_i - l_{i+1})s_i + s_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1},$$

где $l_n = 0$, $s_n := e_n$ трактуется как внешнее ограниченное возмущение $|e_n(t)| \leq F$, $|\dot{e}_n(t)| \leq \bar{F}$, $t \geq 0$, нижнетреугольная матрица P и c_i зависят только от коэффициентов усиления k_i $i = \overline{2, n-1}$ и коррекции наблюдателя $l_2 > l_3 > \dots > l_{n-1} > 0$. На основе (6) строится наблюдатель для оценивания «возмущения» e_n в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= -(\bar{k}_1 - l_2)z_1 + z_2 + l_1(e_1 - z_1), \\ \dot{z}_i &= c_i e_1 - (l_i + \bar{k}_i - l_{i+1})z_i + z_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-2}; \\ \dot{z}_{n-1} &= c_{n-1} e_1 - (l_{n-1} + \bar{k}_{n-1})z_{n-1}. \end{aligned}$$

Показано, что сигнал

$$(8) \quad v(t) = (l_1 + \bar{k}_1 - l_2) \dots (l_{n-2} + \bar{k}_{n-2} - l_{n-1})(l_{n-1} + \bar{k}_{n-1})(e_1(t) - z_1(t))$$

при $t > t_0 > 0$ дает оценку $e_n(t)$ с заданной точностью

$$|e_n(t) - v(t)| \leq \bar{F} \left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{l_i + \bar{k}_i - l_{i+1}} + \frac{1}{l_{n-1} + \bar{k}_{n-1}} \right) \leq \delta,$$

которая обеспечивается выбором больших коэффициентов:

$$l_{n-1} > 1/\alpha - \bar{k}_{n-1}, \quad l_i > l_{i+1} + 1/\alpha - \bar{k}_i, \quad i = \overline{n-2, 1}, \quad \alpha = \delta/((n-1)\bar{F}).$$

Использование оценки $v(t) \approx e_n(t)$ (8) в законе управления (5) приводит к реальному скользящему режиму в пограничном слое $|e_n(t)| \leq \delta$,

и, соответственно, к сходимости ошибки слежения с заданной скоростью (3) в область: $|e_1(t)| \leq \delta / (\bar{k}_{n-1} \bar{k}_{n-2} \dots \bar{k}_1)$, $t > T > t_0$.

Преимущество разработанного подхода по сравнению с известными аналогами заключается в простой настройке параметров регулятора и наблюдателя на основе неравенств, не требующей точного знания параметров объекта управления и ввода автономных генераторов внешних воздействий; реализация динамической обратной связи (5), (8) не требует выполнения обратных замен переменных в реальном времени. Известная проблема всплеска вначале переходного процесса, порождаемая большими коэффициентами наблюдателя, здесь отсутствует благодаря ограниченному управлению (5).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-01-00846А).

Список литературы

1. *Краснов Д.В., Уткин А.В.* Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017. Вып. 69. С. 29–49.
2. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // АиТ. 2017. № 12. С. 26–53.

Dynamic Feedback Synthesis in Tracking Single-Channel Systems under the Influence of Uncontrolled Disturbances

D. V. Krasnov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
dim93kr@mail.ru

For nonlinear single-channel systems with unmatched disturbances that can be represented in a triangular “input-output” form, a decomposition procedure for the synthesis of dynamic feedback is developed within the framework of the block approach. The procedure involves the synthesis of discontinuous control, providing tracking of the output variable for the command signal under the assumption of the smoothness of external influences; synthesis of a lower-order high-gain observer, which, based on measurements of the tracking error, estimates a mixed variable by which feedback is formed.

Анализ систем с неотрицательными переменными с помощью метода локализации

А. П. Крищенко, Е. С. Тверская

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

apkri@bmstu.ru, e_tverskaya@bmstu.ru

Рассматривается задача качественного анализа нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неотрицательными переменными. Указаны условия, при которых рассматриваемые системы допускают построение итерационной последовательности локализующих множеств для инвариантных компактов с помощью координатных функций. Полученные результаты применяются при исследовании систем второго и более высокого порядков при нахождении положений равновесия, исследования их устойчивости и нахождения областей с простой и сложной динамикой.

Ключевые слова: локализующая функция, локализующее множество, положение равновесия, инвариантный компакт

1. Введение

Под задачей локализации инвариантных компактов системы $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ понимают задачу построения такого множества, которое включает в себя все инвариантные компакты этой системы. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $S(h, Q) = S(h) \cap Q$, где $S(h) = \{\dot{h}(x) = 0\}$. Множество $S(h)$ называют инвариантным сечением, а функцию h — локализующей функцией.

Обозначим $h_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S(h, Q)} h(x)$ и $h_{\sup}(Q) = \sup_{x \in S(h, Q)} h(x)$.

Теорема 1 ([1]). *Все инвариантные компакты автономной системы $\dot{x} = f(x)$, лежащие в множестве Q , содержатся в множестве $\Omega(h, Q) = \{h_{\inf}(Q) \leq h(x) \leq h_{\sup}(Q)\} \cap Q$.*

Использование различных локализующих функций h_i (далее это будут координатные функции) приводит к локализующим множествам $K_0 = Q$, $K_i = \Omega(h_i, K_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$ и можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Все инвариантные компакты системы $\dot{x} = f(x)$, лежащие в множестве Q , содержатся в множестве $K_\infty = \bigcap_{i=0}^{\infty} K_i$.*

2. Основные результаты

Для двумерной системы

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_1 \psi_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2 \psi_2(x_1, x_2),$$

где $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, рассмотрим задачу локализации инвариантных компактов, лежащих в $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$. О функциях ψ_1, ψ_2 будет предполагаться, что они удовлетворяют каким-то условиям вида [2]:

(i) $\{\psi_1(x_1, x_2) = 0\} \cap \mathbb{R}_+^2 = \{x_1 = \varphi_1(x_2)\} \cap \mathbb{R}_+^2$, где $\varphi_1(x_2)$ непрерывна, монотонно убывает, $\varphi_1(0) > 0$ и $\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \varphi_1(x_2) = 0$;

(ii) $\{\psi_2(x_1, x_2) = 0\} \cap \mathbb{R}_+^2 = \{x_2 = \varphi_2(x_1)\} \cap \mathbb{R}_+^2$, где $\varphi_2(x_1)$ непрерывна, монотонно убывает, $\varphi_2(0) > 0$ и $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \varphi_2(x_1) = 0$.

(iii) $\{\psi_2(x_1, x_2) = 0\} \cap \mathbb{R}_+^2 = \{x_2 = \varphi_2(x_1)\} \cap \mathbb{R}_+^2$, где $\varphi_2(x_1)$, непрерывна, монотонно возрастает и $\varphi_2(0) > 0$.

Теорема 3. *При выполнении условий (i)–(ii) все инвариантные компакты системы (1), целиком расположенные в \mathbb{R}_+^2 , содержатся в множестве $K_\infty = \{\underline{x}_1^\infty \leq x_1 \leq \bar{x}_1^\infty\} \times \{\underline{x}_2^\infty \leq x_2 \leq \bar{x}_2^\infty\}$.*

Координаты вершин прямоугольника K_∞ являются решением системы уравнений, из которой следует, что $(\underline{x}_1^\infty, \bar{x}_2^\infty)$ и $(\bar{x}_1^\infty, \underline{x}_2^\infty)$ — внутренние положения равновесия системы (1). Если они совпадают, то это единственное внутреннее положение равновесия системы (1) (которое всегда есть при сделанных предположениях), а если не совпадают, то система (1) имеет не менее двух внутренних положений равновесия, все они содержатся в K_∞ и если система (1) имеет одно или два внутренних положения равновесия, то она не имеет периодических решений.

Теорема 4. *При выполнении условий (i), (iii): 1) все инвариантные компакты системы (1), целиком расположенные в \mathbb{R}_+^2 , содержатся в множестве $K_\infty = \{\underline{x}_1^\infty \leq x_1 \leq \bar{x}_1^\infty\} \times \{\underline{x}_2^\infty \leq x_2 \leq \bar{x}_2^\infty\}$, совпадающим с единственным внутренним положением равновесия; 2) система (1) не имеет периодических траекторий.*

Аналогичные результаты справедливы и при выполнении других условий относительно правых частей системы (1).

3. Заключение

В данной работе для решения задачи локализации инвариантных компактов использована итерационная процедура построения вложенной последовательности множеств K_i . Основные результаты представлены для систем второго порядка и аналогичные результаты можно

получить для двумерных ограничений трехмерной модели развития рака [3]. Данный подход распространяется на многомерные системы, что демонстрируется на примере системы четвертого порядка, связанной с развитием рака поджелудочной железы [4]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\kappa_C + \mu_C x_2) x_1^{3/4} \left(1 - \left(\frac{x_1}{c_0}\right)^{1/4}\right) - \frac{\lambda_C x_1 x_4}{K_C + 1 - x_3}, \\ \dot{x}_2 &= \left(\kappa_P + \mu_P - \frac{\mu_P K_P}{K_P + x_1}\right) x_2 \left(1 - \frac{x_2}{p_0}\right) - \lambda_P x_2, \\ \dot{x}_3 &= \kappa_r - (\lambda_r + \gamma_P x_2 + \gamma_C x_1) x_3, \\ \dot{x}_4 &= \frac{\kappa_t x_3}{K_t + 1 - x_3} - \lambda_t x_4.\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-07-00269 и № 20-07-00294).

Список литературы

1. *Krishchenko A.P.* Localization of Invariant Compact Sets of Dynamical Systems // *Differ. Equ.* 2005. V. 41. No. 12. P. 1669–1676.
2. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Реализация итерационной процедуры в задачах локализации автономных систем // *Наука и Образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн.* 2014. № 11. С. 307–319.
3. *Тверская Е.С.* Инвариантные компактные множества двумерных ограничений одной модели развития раковой опухоли // *Математика и математическое моделирование.* 2019. № 4. С. 1–19. <https://doi.org/10.24108/mathm.0419.0000108>
4. *Y. Louzoun, C. Xue, G. B. Lesinski and A. Friedman* A mathematical model for pancreatic cancer growth and treatments // *Journal of theoretical biology.* Jan. 2014. V. 351, pp. 7482.

Analysis of Systems With Non-Negative Variables Using the Localization Method

A. P. Krishchenko, E. S. Tverskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia
apkri@bmstu.ru, e_tverskaya@bmstu.ru

The problem of analysis of nonlinear systems of differential equations is considered. The conditions under which it is possible to construct a sequence of localizing sets are found. The results are used to find

equilibrium points and study their stability. The illustrative examples are given.

УДК 531.01

О перемещениях твердого тела с подвижной внутренней массой вдоль прямой с вязким трением

Е. И. Кугушев, Т. В. Попова, С. В. Сазонов

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
kugushev@keldysh.ru, t.shahova@yandex.ru, ssazonovs.v@gmail.com

Для движущегося поступательно вдоль неподвижной прямой с вязким трением твердого тела с подвижной внутренней массой найдены условия, при которых величина скорости тела ограничена. При этом в случае линейного вязкого трения неограниченное смещение тела невозможно. Приведен пример силы вязкого трения, когда смещение тела вдоль прямой не ограничено.

Ключевые слова: вязкое трение, подвижная внутренняя масса, неограниченное смещение

1. Введение

В данной работе рассматривается одномерное движение системы, состоящей из двух твердых тел. Первое твердое тело (платформа) движется поступательно вдоль неподвижной прямой Ox при наличии сил вязкого трения. Внутри платформы по заданному закону совершает поступательное движение вдоль прямой Ox второе (внутреннее) тело. Считается, что это движение происходит за счет внутренних сил системы. Изучается вопрос о том, возможно ли подобрать такой закон относительного движения внутреннего тела, при котором платформа сместится в позицию сколь угодно далекую от начальной.

Задачи о движении тел под влиянием подвижных внутренних масс при наличии внешнего вязкого или сухого трения рассматривались в работах [1–4].

2. Ограниченность величины скорости платформы

Положение платформы будем задавать координатой x ее центра масс S . Свяжем с платформой ось $S\xi$, направленную по оси Ox . Положение внутреннего тела относительно платформы будем задавать

координатой ξ центра масс тела, причем закон движения этого центра масс задан: $\xi = \xi(t)$. Движение системы рассматривается при $0 \leq t < +\infty$. Считается, что на этом промежутке величина относительной скорости внутреннего тела ограничена

$$(1) \quad |\dot{\xi}| \leq C \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Здесь $C > 0$ — некоторая константа. С физической точки зрения следует предполагать, что относительное перемещение внутреннего тела также ограничено.

На платформу, движущуюся поступательно вдоль оси Ox , действует сила вязкого трения

$$\vec{F} = -f(v)\vec{e}_x,$$

где $v = \dot{x}$ — величина (со знаком) скорости платформы, \vec{e}_x — направляющий вектор оси Ox , а $f(v)$ — функция, задающая зависимость величины силы вязкого трения от величины скорости платформы. Предполагается, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$(2) \quad f(v) > 0 \quad \text{при} \quad v > 0, \quad f(v) < 0 \quad \text{при} \quad v < 0$$

и в любой ограниченной области выполняется условие Липшица с некоторой константой L :

$$(3) \quad |f(v_1) - f(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|.$$

Заметим, что в этом случае $f(v)$ непрерывна и $f(0) = 0$.

Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{f(v)}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\xi},$$

где m_1 и m_2 — массы платформы и внутреннего тела.

Теорема 1. Пусть для закона относительного движения внутреннего тела и силы вязкого трения выполнены условия (1), (2), (3). Тогда при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ величина скорости платформы ограничена

$$|v(t)| \leq B \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где $B > 0$ — константа, зависящая от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела.

3. Линейное вязкое трение

В случае линейного вязкого трения $f(v) = cv$ ($c = \text{const} > 0$) условия (2), (3) выполнены.

Теорема 2. Пусть для закона относительного движения внутреннего тела выполнено условие (1). Тогда при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ величина скорости платформы ограничена и смещение платформы ограничено

$$|x(t)| \leq A, \quad |v(t)| \leq B \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где $A > 0, B > 0$ — некоторые константы, зависящие от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела.

В соответствии с теоремой 2 неограниченное перемещение платформы невозможно в случае линейного вязкого трения. Пусть движение внутреннего тела относительно платформы периодическое, а на платформу действует сила анизотропного линейного вязкого трения

$$f(v) = c_1 v \quad \text{при} \quad v \geq 0, \quad f(v) = c_2 v \quad \text{при} \quad v < 0,$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные и $c_1 \neq c_2$. Тогда можно показать, что найдется такая начальная скорость платформы, что на периоде относительного движения внутреннего тела она не изменится, а смещение платформы на периоде не равно нулю. Значит, при данной начальной скорости с ростом времени смещение платформы не ограничено.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00887).

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Докл. РАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Управление движением неоднородного цилиндра с подвижными внутренними массами по горизонтальной плоскости // Прикл. матем. и механ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 942–958.
3. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динам. 2012. Т. 8. № 4. С. 763–772.
4. Бардин Б.С., Панев А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62995>

On the Motion of a Rigid Body with a Movable Internal Mass along a Straight Line with Viscous Friction

E. I. Kugushev, T. V. Popova, S. V. Sazonov

Lomonosov Moscow State University, Russia
kugushev@keldysh.ru, t.shahova@yandex.ru, ssazonovs.v@gmail.com

For a rigid body that has a movable internal mass and moves progressively along a fixed straight line with viscous friction, conditions are found under which the velocity of the body is bounded. At that in the case of linear viscous friction unbounded displacement of the body is not possible. An example of a viscous friction force is given when the displacement of a body along a straight line is not bounded.

УДК 004.94, 517.97

Оптимальное управление с фазовыми ограничениями в задаче поиска режима колебаний зоопланктона

О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, А. Гарсиа Гарсиа

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
kuzenkov_o@mail.ru, helen4ever@rambler.ru, garciamparo14@gmail.com

Решается задача поиска эволюционно устойчивого режима ежедневных вертикальных перемещений зоопланктона в слое воды. При этом используется вариационный принцип максимизации энергетического выигрыша. Поставленная задача сводится к проблеме оптимального управления с фазовыми ограничениями. На основе принципа максимума Понтрягина строится аналитическое решение для простейших аппроксимаций внешних факторов. Создано программное обеспечение, позволяющее численно находить решение задачи по наблюдаемым характеристикам внешней среды. В случае приближенных и неполных данных о внешних факторах решается задача распознавания качественных характеристик решения – наличия или отсутствия выраженных вертикальных перемещений в течение суток.

Ключевые слова: вариационный принцип, максимизация энергетического выигрыша, суточные вертикальные миграции, зоопланктон, фазовые ограничения, оптимальное управление

1. Введение

Закономерности механических движений живых организмов представляют большой интерес для исследователей. Они рассматривались, например, в работах Е.С. Пятницкого и М.А. Айзермана. Существует общий подход, когда законы поведения биологической системы выводятся из некоторых вариационных принципов, подобных классическим принципам Лагранжа-Эйлера в механике. Один из таких принципов был предложен А.Н.Горбанем и развит в работах [1-2]. Согласно этому принципу в результате биологической эволюции система будет осуществлять то поведение, которое обеспечивает максимум репродуктивных возможностей. В ряде простейших случаев этот принцип можно сформулировать как принцип максимизации среднего удельного энергетического выигрыша, который может быть использован для осуществления репродуктивных функций. В настоящей работе этот принцип применяется для моделирования ежедневных вертикальных перемещений зоопланктона в слое воды.

Явление повторяющихся каждый день движений зоопланктона было открыто двести лет тому назад исследователем Кювье. Впоследствии было установлено, что эти движения представляют собой одно из наиболее значимых синхронных перемещений биомассы на Земле, вносят существенный вклад в экологическое состояние мирового океана и потенциально влияют на климат Земли. Некоторые результаты недавних наблюдений такого поведения представлены на ресурсах <http://www.oceannetworks.ca/zap-data-saanich-inlet> и <http://hdl.handle.net/1828/4630>, а также в работе [3]. Вариационный принцип максимума среднего удельного энергетического выигрыша успешно применялся для моделирования таких движений при простейших предположениях в [4], где на основе этого были получены объяснения некоторых неочевидных эффектов. Здесь этот же принцип используется в условиях более сложных фазовых ограничений, которые, как известно, представляют один из наиболее технически сложных случаев для решения оптимизационных задач.

2. Модель вертикальных миграций зоопланктона

Пусть x – вертикальная координата положения зоопланктона, t – время, измеряющееся в сутках (от 0 до 1). Координата положения удовлетворяет естественным ограничениям - зоопланктон не может подняться выше поверхности воды ($x = 0$) и опуститься ниже дна ($x = -C$). Стратегия вертикальных миграций в течение суток есть гладкая функция $x(t)$ с периодом 1 – одни сутки, допускающая непре-

рывное периодическое продолжение, т.е. $x(0) = x(1)$, удовлетворяющая указанным выше фазовым ограничениям.

При построении функции энергетического баланса учитывается поступление энергии с пищей пропорциональное количеству пищи $E_0(x)$ в данном слое x . Предполагается, что расход энергии на осуществление перемещений пропорционален кинетической энергии движения, то есть квадрату скорости $(x'(t))^2$. Учитываются потери в результате хищнических атак, пропорциональные количеству хищника $S_x(x)$ в слое воды x и активности хищника (вероятности атаки) $S_t(t)$ в течение дня. Дополнительно принимается во внимание энергетический штраф $G(x)$ из-за неблагоприятных факторов окружающей среды в слое x – температуры, солнечной радиации, концентрации кислорода, сероводорода и т.п. Тогда функция удельного энергетического баланса в среднем за сутки определяется следующим образом

$$R = \int_0^1 (\alpha E_0(x) - \beta (x'(t))^2 - \gamma S_x(x) S_t(t) - \delta G(x)) dt,$$

где константы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – весовые коэффициенты, отражающие энергетический вклад каждого фактора. В соответствии с вариационным принципом будет осуществляться такой режим перемещений, на котором функционал R принимает наибольшее значение. Таким образом, задача поиска реализуемого поведения зоопланктона сводится к вариационной задаче, которую также можно сформулировать как проблему оптимального управления с фазовыми ограничениями. На основе принципа максимума Понтрягина строится аналитическое решение для простейших линейно-квадратичных аппроксимаций функций распределения источников энергии $E_0(x)$ и потерь $S_x(x), G(x)$ и изменения активности хищника по синусоидальному закону $S_t(t) = \cos 2\pi t$. Для более сложных наблюдаемых в природе законов изменения указанных факторов создано программное обеспечение, позволяющее численно находить решение оптимизационной задачи. В случае приближенных и неполных данных о внешних факторах решается задача распознавания качественных характеристик решения – наличия или отсутствия выраженных вертикальных перемещений в течение суток. Произведено сопоставление результатов численного эксперимента и данных натурных наблюдений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Проект № 14.Y26.31.0022).

Список литературы

1. *Kuzenkov O., Ryabova E.* Variational Principle for Self-replicating Systems // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2015. № 2. V. 10. P. 115–128.
2. *Kuzenkov O., Morozov A.* Towards the Construction of a Mathematically Rigorous Framework for the Modelling of Evolutionary Fitness. // *Bull. of Math. Biol.* 2019 V. 81. N 11.
3. *Morozov A., Kuzenkov O., Arashkevich E.* Modelling Optimal Behavioural Strategies in Structured Populations Using a Novel Theoretical Framework. // *Sci. Rep.* 2019. V. 9. N. 1.
4. *Morozov A.Y., Kuzenkov O.A.* Towards Developing a General Framework for Modelling Vertical Migration in Zooplankton // *J. Theor. Biol.* 2016. T. 405. C. 17–28.

Optimal Control with State Constraints in the Problem of Zooplankton's Oscillations Modeling

O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, A. Garcia Garcia

N. I. Lobachevskiy State University of Nizhniy Novgorod, Russia
kuzenkov_o@mail.ru, helen4ever@rambler.ru, garciamparo14@gmail.com

The problem of finding an evolutionarily stable strategy of diel vertical movement of zooplankton in the water layer is solved. To solve this problem, the variational principle of maximizing the energy gain is used. The proposed issue is reduced to the problem of optimal control with state constraints. An analytical solution for the most elementary approximations of external factors is reached using Pontryagin's Maximum Principle. The created software allows us to numerically find a solution based on the observed characteristics of the environment.

Применение алгоритма Ковачича к задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса

А. С. Кулешов

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
kuleshov@mech.math.msu.su

В 1890 году немецкий математик и механик В. Гесс [1] указал новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона движения тяжёлого твердого тела с неподвижной точкой. В 1892 году П. А. Некрасов показал [2], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к интегрированию линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В докладе дан вывод соответствующего уравнения второго порядка и показано, как привести коэффициенты этого уравнения к виду рациональных функций. Затем при помощи алгоритма Ковачича [3] исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного уравнения второго порядка. Показано, что лиувиллевы решения могут существовать лишь в двух случаях: в случае, соответствующем случаю Лагранжа движения твердого тела с неподвижной точкой или в случае, когда постоянная интеграла площадей равна нулю.

Ключевые слова: тело с неподвижной точкой, случай Гесса, лиувиллевы решения, алгоритм Ковачича

1. Постановка задачи. Основной результат

Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле сил тяжести. Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O . Пусть M — масса тела, g — ускорение свободного падения, A_s — моменты инерции тела относительно осей Ox_s , ($s = 1, 2, 3$); ω_s , γ_s и x_s — проекции на оси Ox_s вектора мгновенной угловой скорости тела $\vec{\omega}$, единичного вектора $\vec{\gamma}$, направленного по вертикали вверх, и радиуса — вектора центра масс тела соответственно. Уравнения движения тела в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид уравнений Эйлера – Пуассона:

$$(1) \quad \begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 &= Mg(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3), \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \end{aligned} \quad (123)$$

где символ (123) означает, что два других уравнения получаются из указанного уравнения циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Известно, что для решения уравнений Эйлера – Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (1). При любых значениях параметров A_s , x_s , $s = 1, 2, 3$ известны три независимых первых интеграла системы (1) — интеграл энергии

$$2H = (A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + 2Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3) = 2E,$$

интеграл площадей $K = A_1\omega_1\gamma_1 + A_2\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 = k$ и геометрический интеграл $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

В 1890 году В. Гесс показал [1], что при выполнении условий

$$(2) \quad x_3 = 0, \quad A_2(A_3 - A_1)x_2^2 = A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad A_2 > A_3 > A_1$$

уравнения (1) допускают частный четвертый интеграл, имеющий вид:

$$(3) \quad A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 = 0.$$

Если обозначить

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$L_1 = A_1\omega_1 \cos \alpha + A_2\omega_2 \sin \alpha, \quad L_2 = A_2\omega_2 \cos \alpha - A_1\omega_1 \sin \alpha, \quad L_3 = A_3\omega_3,$$

$$\nu_1 = \gamma_1 \cos \alpha + \gamma_2 \sin \alpha, \quad \nu_2 = \gamma_2 \cos \alpha - \gamma_1 \sin \alpha, \quad \nu_3 = \gamma_3,$$

то интеграл Гесса (3) принимает вид $L_1 = 0$, а уравнения (1) с учётом этого интеграла переписываются следующим образом:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{L}_2 &= bL_2L_3 + \nu_3\Gamma, & \dot{L}_3 &= -bL_2^2 - \nu_2\Gamma, \\ \dot{\nu}_1 &= c(L_3\nu_2 - L_2\nu_3), & \dot{\nu}_2 &= bL_2\nu_3 - cL_3\nu_1, & \dot{\nu}_3 &= (c\nu_1 - b\nu_2)L_2, \\ b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & c &= \frac{1}{A_3}, & \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Система уравнений (4) допускает следующие первые интегралы

$$c(L_2^2 + L_3^2) + 2\Gamma\nu_1 = 2E; \quad L_2\nu_2 + L_3\nu_3 = k;$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$L_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}y, \quad L_3 = \sqrt{\frac{\Gamma}{c}}z, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad d_1 = \frac{b}{c}, \quad h = \frac{E}{\Gamma}, \quad k_1 = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}$$

запишем систему уравнений (4) и первые интегралы в безразмерной форме

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z - \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 + \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1 y\nu_3 - z\nu_1, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= y\nu_1 - d_1 y\nu_2, \\ \frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 &= h, & y\nu_2 + z\nu_3 &= k_1. \end{aligned}$$

Вводя новые переменные по формулам

$$y = \sigma \cos \varphi, \quad z = \sigma \sin \varphi, \quad u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

получим, что функция $u(\sigma)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{du}{d\sigma} + \frac{(d_1 \sigma^3 - k_1) u^2 - d_1 \sigma^3 - k_1}{\sigma \sqrt{4h\sigma^4 - \sigma^6 + 4(1-h^2)\sigma^2 - 4k_1^2}} = 0,$$

из которого можно получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Применение к этому дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича [3] приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Лиувиллевы решения в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса существуют только если $d_1 = 0$ (случай Лагранжа) или если $k_1 = 0$ (постоянная интеграла площадей равна нулю).*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00140).

Список литературы

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. V. 37. 2. P. 153–181.
2. *Некрасов П.А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Матем. сб.* 1892. V. 16. 3. С. 508–517.
3. *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // *J. Symb. Comp.* 1986. V. 2. P. 3–43.

Application of the Kovacic Algorithm to the Problem of Motion of a Body with a Fixed Point in a Hess Case

A. S. Kuleshov

Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
kuleshov@mech.math.msu.su

In 1890 W. Hess found new partial case of integrability of Euler – Poisson equations describing the motion of a heavy rigid body about a fixed point. In 1892 P. A. Nekrasov proved that the solution of the problem of motion of a heavy rigid body with a fixed point in a Hess case is reduced to integration the linear second order differential equation. In this paper the derive the corresponding linear differential equation and present its coefficients in the rational form. Using the Kovacic algorithm we proved that the liouvillian solutions of the corresponding second order linear differential equation exists only in the case, when the moving rigid body is a Lagrange top, or in the case when the constant of the area integral is zero.

Активное гашение колебаний несущих конструкций перемещением внутренней массы

С. А. Кумакшев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
kumak@ipmnet.ru

Исследовано активное гашение колебаний груза (полезной нагрузки), размещенного на конце длинной упругой балки, путем перемещения внутренней массы (гасителя) по направляющей, перпендикулярной балке. За управляющую величину принята сила взаимодействия гасителя с грузом. Управление осуществляется путем линейной обратной связи по отклонению и скорости как гасителя относительно конца балки, так и груза относительно неподвижного основания. Коэффициенты обратной связи формируются таким образом, чтобы уменьшить время переходного процесса при ограничении на отклонение гасителя. Предложено комбинированное управление с переключением коэффициентов обратной связи. Данное исследование может быть использовано для гашения колебаний упругих крупногабаритных конструкций.

Ключевые слова: гашение колебаний, линейная обратная связь

1. Геометрия задачи

Будем рассматривать плоское движение механической системы [1], изображенной на рис. 1. Эта система состоит из абсолютно твердого тела 1, точечной массы 2 m_0 , соединенной с телом 1 упругим стержнем (балкой длиной l) 3, и точечной массы 4 m_1 , которая может перемещаться вдоль направляющей 5 (η — смещение), жестко закрепленной на конце стержня (его смещение $u(l, t) = \xi$) и перпендикулярной его оси. Тело 1 моделирует космический аппарат, точечная масса 2 — платформу с измерительной аппаратурой, стержень 3 — соединительную штангу, а точечная масса 4 — тело гасителя. Предполагается, что движение тела гасителя происходит посредством электрического мотора, где V — управляющее напряжение, R — омическое сопротивление обмотки якоря, k_1 и k_2 — постоянные параметры, характеризующие конкретный двигатель.

2. Модель в квазистатическом приближении

Предположим, что линейные и угловые скорости и ускорения космического аппарата равны нулю и на систему не действуют внешние

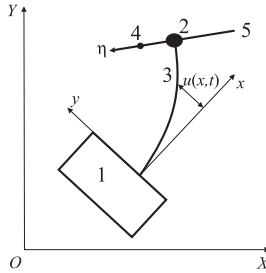


Рис. 1: Геометрия задачи

силы и моменты. Тогда, задача об управлении колебаниями системы с упругим стержнем сводится к задаче об управлении механической системой с двумя степенями свободы, уравнение движения которой можно представить в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} (1 + \mu)\ddot{\xi} + \mu\ddot{\eta} + \xi &= 0, & \mu(\ddot{\xi} + \ddot{\eta}) + \sigma\dot{\eta} &= v, \\ \mu &= m_1/m_0, & \sigma &= k_1k_2/m_0R, & v &= k_2V/m_0R. \end{aligned}$$

Будем искать управление v в виде линейной функции фазовых переменных этой системы

$$(2) \quad v = \mu \left[a\xi + b\dot{\xi} + \left(\frac{\sigma}{\mu} - c \right) \dot{\eta} - d\eta \right],$$

где a, b, c, d — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

3. Максимизация степени устойчивости

Быстроту затухания свободных колебаний системы (1), (2) будем характеризовать величиной, называемой степенью устойчивости, определяемой как взятый со знаком минус максимум вещественных чисел характеристического полинома системы. Можно показать, что устойчивость максимальна когда все корни одинаковы. В этом случае коэффициенты a, b, c, d связаны соотношениями

$$(3) \quad (1 + \mu)c + \mu b = 4d^{1/4}, \quad (1 + \mu)d + \mu a + 1 = 6d^{1/2}, \quad c = 4d^{3/4}.$$

Из этих соотношений параметры a, b, c однозначно выражаются через d и задача определения управления v в соответствии с (2) сводится к выбору параметра d . Этот параметр следует выбирать из условия «компромисса» между временем затухания колебаний $\tau \approx d^{-1/4}$ и амплитудой колебаний массы гасителя.

4. «Мягкое» гашение колебаний платформы

Предложенное выше управление допускает существенные отклонения тела гасителя, что объясняются весьма сильной обратной связью по переменным движения платформы (ξ и $\dot{\xi}$) при малых μ . Коэффициенты a и b имеют порядок $1/\mu$. Ослабим эту обратную связь, полагая $a = 0$ и $b = 1/\sqrt{\mu}$, а коэффициенты c и d будем выбирать так, чтобы нулевое решение системы было асимптотически устойчивым. Назовем такой способ настройки коэффициентов обратной связи «мягким» гашением колебаний платформы. Он приводит к меньшим отклонениям тела гасителя, но увеличивает время переходного процесса.

5. Заключение

Подход, описанный в данной статье, позволяет оценить возможность демпфирования упругих колебаний крупногабаритных несущих конструкций балочного или ферменного типа при помощи активного виброгасителя с поступательно перемещающейся массой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00812) и по теме государственного задания АААА-А17-117021310387-0.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакишев С.А., Чернов А.А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 135–145.

Active Damping of Vibrations of Load-bearing Structures by Moving the Internal Mass

S. A. Kumakshev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Russia
kumak@ipmnet.ru

Active damping of oscillations of a load (payload) placed at the end of a long elastic beam by moving the internal mass (dampener) along a guide perpendicular to the beam is investigated. The force of interaction of the damper with the load is taken as the control value. Control is performed by linear feedback on the deflection and speed of both the damper relative to the end of the beam and the load relative to the fixed base. The feedback coefficients are formed in such a way as to reduce the transition time when limiting the deflection of the damper. Combined control with switching

of feedback coefficients is proposed. This study can be used to dampen vibrations of elastic large-sized structures.

УДК 681.5.011

Вычисление анизотропийной нормы стационарной² случайной системы

А. Ю. Кустов¹, В. Н. Тимин¹, А. В. Юрченков^{1,2}

ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова, Москва, Россия¹

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия²

arkadiykustov@yandex.ru, timin.victor@rambler.ru, yurchenkov@ipu.ru

В работе рассматривается задача анализа линейной дискретной системы со случайными матрицами. Матрицы системы образуют случайный стационарный процесс. Для данной системы сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия изометричности. Приведены формулы для вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний.

Ключевые слова: случайные матрицы системы, анизотропия, анизотропийная норма

1. Введение

Стохастический подход к \mathcal{H}_∞ теории управления, предложенный И.Г. Владимировым [1], со временем сформировал отдельное направление, названное анизотропийной теорией [2]. До недавнего времени в рамках этой теории рассматривались исключительно детерминированные модели объектов, для которых были решены задачи анализа, управления и фильтрации [3]. Система со случайными матрицами реализации, для которой описан способ вычисления анизотропийной нормы, была впервые рассмотрена в [4]. В данной работе для стационарной системы со случайными матрицами получен критерий изометричности, используемый для вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний.

²Рассматривается случай, когда последовательности матриц системы являются стационарными случайными процессами.

2. Основной результат

Рассмотрим объект, описываемый в пространстве состояний следующей линейной дискретной системой на бесконечном интервале времени $k \geq 0$ с начальным состоянием $x_0 = 0$:

$$(1) \quad F \sim \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ z_k = C_k x_k + D_k w_k. \end{cases}$$

Здесь $w_k \in \mathbb{L}_2^m$ и $z_k \in \mathbb{L}_2^p$ обозначают соответственно случайный вход и выход системы, $x_k \in \mathbb{L}_2^n$ – состояние системы. В пространстве последовательностей, для примера, X векторов x_k из \mathbb{L}_2^n введена норма $\|X\| = \sqrt{\sum_{k \geq 0} \mathbf{E}[x_k^T x_k]}$. Внешние возмущения выбраны из множе-

ства стационарных эргодических случайных процессов с ограниченной средней анизотропией: $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$, где $a \geq 0$ – известное число. Последовательности матриц $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $\{B_k\}_{k \geq 0}$, $\{C_k\}_{k \geq 0}$, $\{D_k\}_{k \geq 0}$ системы предполагаются стационарными случайными процессами, причем все матрицы независимы в совокупности по k , а также статистически независимы с внешним возмущением. Для удобства (в силу стационарности) используются следующие обозначения: $\mathbf{E}[A_k] = \mathbf{E}[A]$, $\mathbf{E}[B_k] = \mathbf{E}[B]$, $\mathbf{E}[C_k] = \mathbf{E}[C]$, $\mathbf{E}[D_k] = \mathbf{E}[D]$, $\mathbf{E}[X_k^T Y X_k] = \mathbf{E}[X^T Y X]$, где X – матрица из четверки матриц системы, Y – произвольная неслучайная квадратная матрица соответствующей размерности.

Для вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний используется вспомогательный результат – критерий иннерности системы (или, эквивалентно, критерий изометричности пространств входа и выхода). Далее приведены последовательно критерий иннерности стационарной случайной системы, и теорема о вычислении ее анизотропийной нормы $\|F\|_a = \sup_{W: \bar{\mathbf{A}}(W) \leq a} \frac{\|Z\|}{\|W\|}$.

Лемма 1. *Стационарная (в смысле, описанном ранее) случайная система вида (1) является иннером тогда и только тогда, когда ее матрицы удовлетворяют соотношениям*

$$\mathbf{E}[D^T D] + \mathbf{E}[B^T R B] = I_m, \quad P \cdot (\mathbf{E}[A^T] \cdot R \cdot \mathbf{E}[B] + \mathbf{E}[C^T] \cdot \mathbf{E}[D]) = 0,$$

где P и R – решения следующих уравнений Ляпунова:

$$P = \mathbf{E}[A] \cdot P \cdot \mathbf{E}[A^T] + \mathbf{E}[B] \cdot \mathbf{E}[B^T], \quad R = \mathbf{E}[A^T R A] + \mathbf{E}[C^T C].$$

Теорема 1. *Анизотропийная норма стационарной (в смысле, описанном ранее) случайной системы (1) вычисляется по правилу $\|F\|_a =$*

$\mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}^{-1}(a) = q$ является единственным на интервале $[0, \|F\|_{\infty}^{-2})$ решением уравнения $\mathcal{A}(q) = a$. Функции $\mathcal{A}(q)$ и $\mathcal{N}(q)$ определены как

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{m}{2}(\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

где функции $\Phi(q) = \text{tr}(L\Upsilon L^T + S)$ и $\Psi(q) = \ln \det(S)$ связаны с матрицами наилучшего формирующего фильтра

$$G \sim \begin{cases} \xi_{k+1} = (\mathbf{E}[A] + \mathbf{E}[B]L)\xi_k + \mathbf{E}[B]S^{1/2}v_k, \\ w_k = L\xi_k + S^{1/2}v_k \end{cases}$$

следующими выражениями:

$$\begin{aligned} S &= (I_m - q\mathbf{E}[D^T D] - \mathbf{E}[B^T R_1 B] - \mathbf{E}[B^T] \cdot \mathbf{E}[B])^{-1}, \\ L &= S(q\mathbf{E}[D^T] \cdot \mathbf{E}[C] + \mathbf{E}[B^T] \cdot R_1 \cdot \mathbf{E}[A] + \mathbf{E}[B^T] \cdot R_2 \cdot \mathbf{E}[A]), \\ R_1 &= \mathbf{E}[A^T \cdot R_1 \cdot A] + q\mathbf{E}[C^T C], \\ R_2 &= \mathbf{E}[A^T] \cdot R_2 \cdot \mathbf{E}[A] + L^T S^{-1} L, \\ \Upsilon &= (\mathbf{E}[A] + \mathbf{E}[B] \cdot L) \cdot \Upsilon \cdot (\mathbf{E}[A] + \mathbf{E}[B] \cdot L)^T + \mathbf{E}[B] \cdot S \cdot \mathbf{E}[B^T]. \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-31-00067 мол_а, № 18-07-00269а).

Список литературы

1. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to \mathcal{H}_{∞} -optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, FL, USA. 1994. P. 2249–2250.
2. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // ДАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
3. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. and Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. of the 13th IFAC World Cong., San-Fr., Cal., USA. 1996. P. 179–184.
4. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // 15th Int. Conf. on Electr. Eng., Comp. Sc. and Aut. Cont. (CCE), Mexico City, Mexico. 2018.

Computation of the Anisotropic Norm of a Time Invariant Stochastic System

A. Yu. Kustov¹, V. N. Timin¹, A. V. Yurchenkov^{1,2}

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia¹

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia²

arkadiykustov@yandex.ru, timin.victor@rambler.ru, yurchenkov@ipu.ru

The paper considers the anisotropy-based analysis problem for a linear discrete system with random matrices. Matrices of the system are supposed to be stationary random process. The necessary and sufficient conditions are formulated for system to be inner. The state-space formulas for anisotropic norm of such a system are given.

УДК 681.5.08

Анизотропийная фильтрация для нестационарной системы при потере измерений на основе коррекции выхода

А. Ю. Кустов¹, А. В. Юрченко^{1,2}

ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова, Москва, Россия¹

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия²

arkadiykustov@yandex.ru, yurchenkov@ipu.ru

Работа посвящена задаче оценивания для линейной нестационарной дискретной системы с неидеальным измерителем на основе минимизации анизотропийной нормы в присутствии окрашенного возмущения. На основе исходной модели объекта вводится расширенная система, в описании которой присутствует мультипликативный шум. Используя лемму о вещественной ограниченности для такого класса систем, приводится условие ограниченности анизотропийной нормы расширенной системы в виде существования решения задачи минимизации с выпуклыми ограничениями.

Ключевые слова: фильтрация, анизотропия, мультипликативный шум, нестационарная система

1. Введение

Довольно часто в задачах фильтрации и построения различных оценок для динамических систем используется наблюдаемый выход, данные с которого принимаются безотказно. Однако такое предполо-

жение является слишком жестким и полностью исключает применение результатов теории надежности, когда речь идет о физических объектах. Поэтому в данной работе рассматривается случай построения фильтра для линейной дискретной нестационарной системы на конечном временном интервале при частичной потере данных с измеряемого выхода. Предполагается, что безотказная работа измерителя подчинена биномиальному распределению с известными характеристиками, а коррекция производится на основе предыдущих измерений. Внешнее возмущение выбирается из класса окрашенных последовательностей с ограниченной анизотропией. В работе [1] рассмотрен анализ нестационарной системы, получены выражения для вычисления анизотропийной нормы. Позже, в [2], были получены результаты, позволяющие решить такую задачу для системы со случайными матрицами, а также выведен критерий ограниченности анизотропийной нормы. В работе [3] для системы с мультипликативными шумами приведены окончательные выражения для вычисления анизотропийной нормы и условия ограниченности этой нормы. Формулировку задачи фильтрации системы с отказами в наблюдениях оказалось возможным погрузить в задачу, представленную в [3], в текущей работе приводится основной результат.

2. Основной результат

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)w(t), & x(0) &= 0, \\ z(t) &= M(t)x(t) + N(t)w(t), \\ y(t) &= \lambda(t)C(t)x(t) + D(t)w(t) \\ &\quad + (1 - \lambda(t))y(t-1), \end{aligned}$$

на конечном временном интервале $t = \overline{0, N}$, детерминированные матрицы $A(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$, $M(t) \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$, $N(t) \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p_y \times n_x}$ и $D(t) \in \mathbb{R}^{p_y \times m_w}$ зависят от текущего момента времени t . Вектора $x(t)$, $w(t)$, $z(t)$ и $y(t)$ представляют собой состояние, возмущение, оцениваемый выход и измерение, соответственно. Расширенный вектор возмущения $W_{0:N} = (w^T(0), \dots, w^T(N))^T$ имеет ограниченный уровень анизотропии, т.е. $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$. Случайная величина $\lambda(t)$ имеет распределение Бернулли с параметрами $P(\lambda(t) = 1) = p$ и $P(\lambda(t) = 0) = 1 - p$. С помощью дополнительного слагаемого $(1 - \lambda(t))y(t-1)$ в измерениях осуществляется коррекция в случае потери измерений.

Задача состоит в построении оценки $\widehat{z}(t)$ величины $z(t)$, для которой анизотропийная норма расширенной системы в ошибках была бы ограниченной.

Результат можно сформулировать следующим образом: если найдутся положительно определенные матрицы $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{S}(t)$ и скалярный параметр $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})$, где $\|F\|_\infty^{-2}$ — \mathcal{H}_∞ -норма расширенной системы в ошибках, удовлетворяющие следующему рекуррентному уравнению Риккати

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &> \mathcal{A}_0^T(t)\mathcal{R}(t+1)\mathcal{A}_0(t) + \sigma^2 \mathcal{A}_1^T(t)\mathcal{R}(t+1)\mathcal{A}_1(t) \\ &+ q\mathcal{M}^T(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{L}^T(t)\mathcal{S}^{-1}(t)\mathcal{L}(t), \end{aligned}$$

где $\sigma^2 = p(1-p)$, матрицы $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{L}(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) &= (I_{m_w} - \mathcal{B}^T(t)\mathcal{R}(t+1)\mathcal{B}(t) - qN(t)^T N(t))^{-1}, \\ \mathcal{L}(t) &= \mathcal{S}(t)(\mathcal{B}^T(t)\mathcal{R}(t+1)\mathcal{A}_0(t) + qN(t)^T \mathcal{M}(t)), \end{aligned}$$

при дополнительном ограничении

$$\sum_{t=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(t) \geq 2a + m_w(N+1) \ln(1 - q\gamma^2),$$

$$\mathcal{A}_0(t) = \begin{bmatrix} \overline{A}^p(t) & 0 \\ \overline{A}^p(t) - W(t) & W(t) - H(t)\overline{C}^p(t) \end{bmatrix}, \overline{B}(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ D(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(t) & 0 \\ \tilde{A}(t) - H(t)\tilde{C}(t) & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} \overline{B}(t) \\ \overline{B}(t) - H(t)\overline{D}(t) \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}^p(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ pC(t) & (1-p)I_{p_y} \end{bmatrix}, \tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C(t) & -I_{p_y} \end{bmatrix},$$

$$\overline{C}^p(t) = [pC(t), (1-p)I_{p_y}], \mathcal{M}(t) = [0, M(t), 0], \tilde{C}(t) = [C(t), -I_{p_y}],$$

то анизотропийная норма расширенной системы в ошибках будет ограничена числом γ , при этом искомым оценителем имеет вид:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t+1) &= W(t)\widehat{x}(t) + H(t)(y(t) - \widehat{y}(t)), \quad \widehat{x}(0) = 0, \\ \widehat{z}(t) &= \overline{M}(t)\widehat{x}(t), \end{aligned}$$

где $\overline{x}(t) = [x^T(t), y^T(t-1)]^T$ — состояние расширенной системы, $\widehat{z}(t)$ — оценка $z(t)$ в (1).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-31-00067 мол_а и № 18-07-00269а).

Список литературы

1. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // *АиТ.* 2006, вып. 8, С. 92–111.
2. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic Systems // *Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control (CCE), Mexico City, Mexico.* 2018. P. 6.
3. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // *Proc. of the 27th Med. Conf. on Contr. and Aut. (MED 2019), Akko, Israel.* 2019. P. 148–152, 2019.

Anisotropy-based Filtration Problem for Time-varying System with Paket Dropouts

A. Yu. Kustov¹, A. V. Yurchenkov^{1,2}

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia¹
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia²
arkadiykustov@yandex.ru, yurchenkov@ipu.ru

This paper is devoted to anisotropy-based filtration problem for linear discrete time-varying system with coloured input and packet dropouts. Packet dropouts are considered random and Bernoulli distributed. The extended system with output dynamics corrupted by multiplicative noise is introduced and boundedness condition of anisotropic norm is derived.

Линейно-квадратичные кооперативные дифференциальные игры с непрерывным обновлением информации

И. И. Кучкаров

Санкт-Петербургский Государственный университет, Санкт-Петербург,
Россия
kuchkarov_ildus@mail.ru

В статье рассматривается класс линейных квадратичных кооперативных дифференциальных игр с непрерывным обновлением информации. Для частного случая линейной квадратичной постановки строятся кооперативные стратегии, результирующая характеристическая функция или характеристическая функция с непрерывным обновлением, кооперативная траектория с непрерывным обновлением и кооперативное решение. В качестве кооперативного решения мы используем значение Шепли. Для численного моделирования используется дифференциальная игровая модель двух лиц, инвестирующих в общественный запас знаний. Моделирование выполняется в среде Python.

Ключевые слова: дифференциальные игры, непрерывное обновление информации

1. Введение

В классической теории дифференциальных игр предполагается, что игрокам в начале игры известна вся информация о динамике игры (уравнения движения) и предпочтениях игроков (функциях выигрыша). Однако подобный подход не учитывает того, что во многих конфликтно-управляемых процессах игрокам в начальный момент времени неизвестна вся информация об игре. Таким образом, существующие подходы не могут быть напрямую использованы для построения достаточно большого круга реалистичных теоретико-игровых моделей.

Предлагается в этом случае использовать подход с непрерывным обновлением информации. В данной статье рассматривается кооперативная постановка линейно-квадратичной задачи [1].

2. Основной результат

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x, t, \bar{T})$, $t \in [t_0, +\infty)$, определенную на интервале $[t, t + \bar{T}]$, где $0 < \bar{T} < +\infty$. Динамика

$\Gamma(x, t, \bar{T})$ описывается системой

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}^t(s) &= Ax^t(s) + B_1 u_1^t(s, x^t) + \dots + B_n u_n^t(s, x^t), \\ x^t(t) &= x, \end{aligned}$$

где $x^t \in \mathbb{R}^l$, $u^t = (u_1^t, \dots, u_n^t)$, $u_i^t = u_i^t(s, x^t) \in U_i \subset \text{comp} \mathbb{R}^k$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Функция выигрыша игрока $i \in N$ в игре $\Gamma(x, t, \bar{T})$ задается следующим функционалом

$$(2) \quad \begin{aligned} K_i^t(x^t, t, \bar{T}; u^t) &= \int_t^{t+\bar{T}} \left((x^t(s))' Q_i x^t(s) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n (u_j^t(s, x^t))' R_{ij} u_j^t(s, x^t) \right) ds, \end{aligned}$$

где $x^t(s)$, $u^t(s, x)$ траектория и стратегии в игре $\Gamma(x, t, \bar{T})$.

Кооперативных подход подразумевает задачу оптимизации

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n K_i^t(x^t, t, \bar{T}; u^t) \longrightarrow \max_{u_i^t \in U_i, i=1, \dots, n}$$

Дифференциальная игра с непрерывным обновлением информации происходит по правилу:

С непрерывным обновлением параметра $t \in [t_0, +\infty)$ игроки получают новую информацию об уравнениях движения и функциях выигрыша в подыгре $\Gamma(x, t, \bar{T})$.

Стратегии $u(t, x)$ в игре с непрерывным обновлением информации определяются следующим образом

$$(4) \quad u(t, x) = u^t(t, x), \quad t \in [t_0, +\infty),$$

где $u^t(s, x)$, $s \in [t, t + \bar{T}]$ некоторые стратегии, определенные в подыгре $\Gamma(x, t, \bar{T})$.

Теорема 1. *Дифференциальная игра $\Gamma(x_0, t_0, \bar{T})$ с непрерывным обновлением информации имеет решение с обратной линейной связью для любого начального значения x_0 тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение Риккати имеет симметричное решение на интервале $[0, 1]$*

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{K}(\tau) &= -\bar{T}A'K(\tau) - \bar{T}K(\tau)A + K(\tau)SK(\tau) - Q, \\ K(1) &= 0, \end{aligned}$$

где $S = \bar{T}^2 B R^{-1} B'$, а $B = [B_1, \dots, B_n]$, $R = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — блочные матрицы. Если оптимальное решение задачи существует, то оно единственно и имеет вид

$$(6) \quad u(t, x) = -R^{-1} B' K(0) \bar{T} x.$$

3. Заключение

В работе рассмотрена кооперативная линейно-квадратичной дифференциальная игра с непрерывным обновлением информации и получено необходимое и достаточное условие существования кооперативного решения в ней.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 18-71-00081).

Список литературы

1. *Kuchkarov, I., Petrosian, O.* On class of linear quadratic non-cooperative differential games with continuous updating. // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11548 P. 635–650

Linear Quadratic Cooperative Differential Games with Continuous Updating

I. I. Kuchkarov

St.Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia
kuchkarov_ildus@mail.ru

In the paper the class of linear quadratic cooperative differential games with continuous updating is considered. For a special case of linear quadratic setting the cooperative strategies, resulting characteristic function or characteristic function with continuous updating, cooperative trajectory with continuous updating and cooperative solution are constructed. The cooperative solution we use Shapley value. For numerical simulation the differential game model of two individuals investing in a public stock of knowledge is used. The simulations are performed in python environment.

**Моделирование и оптимизация
структурно неоднородных ориентируемых сред**

С. А. Лычев¹, А. Г. Петренко¹, Д. К. Бут², К. Г. Койфман²

ИПМех РАН, Москва, Россия¹

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия²

lychevsa@mail.ru, petrenkas@yandex.ru, dmitry.but96@gmail.com,

koifman.bmstu@yandex.ru

В настоящей работе предлагается формализация ориентируемых сред с дефектами на языке главных расслоений. Тотальное пространство материального расслоения представляет глобальную отсчетную форму, свободную от напряжений. Деформация ориентируемой среды определяется как вложение тотального пространства материального расслоения в тотальное пространство физического расслоения. Инварианты связности на главном расслоении представляют меры несовместности деформаций и могут быть функциями цели при оптимизации ориентируемых структур.

Ключевые слова: ориентируемая среда, несовместные деформации, оптимальное управление

В работе развиваются методы математического моделирования структурно-неоднородных сред с усложнённой кинематикой, учитывающей дополнительные степени свободы элементарных объёмов. Примерами могут служить среды типа Коссера, в которых, наряду с трансляциями, учитываются повороты, не связанные с трансляционной деформацией. В общем случае дополнительные степени свободы могут определять различные геометрические преобразования. Совокупность таких преобразований характеризует обобщённую ориентацию элементарного объёма. В этой связи подобные среды будем называть ориентируемыми. Механика ориентируемых деформируемых сред имеет давнюю историю и восходит к работам Фохта и Коссера [1], однако нелинейные уравнения для конечных деформаций были сформулированы лишь в середине 20 века [2]. Модели ориентируемых сред позволяют в полной мере учесть физико-механические свойства слоистых и тонкоплёночных структур с электроупругими, магнитоупругими слоями. В настоящее время подобные структуры создаются с помощью разнообразных аддитивных технологий, в ходе которых слои наносятся один на другой последовательно. Наряду с очевидными преимуществами, аддитивные технологии имеют проблемные стороны. Одна из них —

технологическая усадка, неизбежная в аддитивном процессе, которая приводит к появлению несовместных деформаций в слоистой структуре и, как следствие, к искажению геометрической формы и накоплению собственных напряжений. Полностью исключить усадку невозможно, однако оказывается возможным минимизировать искажения или интенсивность собственных напряжений за счёт изменения параметров технологического процесса. Поиск таких параметров приводит к задаче оптимизации.

Моделирование и оптимизация несовместно деформированных слоистых структур при конечных деформациях может быть осуществлено с помощью геометрических методов механики континуума [3]. В рамках этой методологии несовместные деформации вычисляются относительно неевклидовой ненапряжённой формы. Неевклидовость количественно характеризуется инвариантами аффинной связности, которую принято называть материальной [4]. Полные локальные деформации, определяющие упругий отклик, представляют собой композицию обобщённых деформаций из неевклидовой формы в евклидово пространство и классической деформации в нём. В результате обобщённой деформации нелинейно упругий материал приобретает свойство неоднородности, даже если его локальные физические свойства были одинаковыми. В этом состоит отличие от материальной неоднородности, связанной с различием физической природы частей тела. Следует отметить, что подобная деформационная неоднородность так же может возникать вследствие дефектов типа дислокаций или дисклинаций.

В настоящей работе предлагается развитие формализма геометрической механики континуума на ориентируемые среды. Кратко поясним суть проблемы. Геометрический подход к описанию деформационной неоднородности предполагает независимую формализацию тела как гладкого многообразия, которое задаёт его топологическую структуру, но никоим образом не определяет его геометрию — метрику или связность, и отдельную формализацию образов его вложения в физическое пространство — форм тела. Формы так же являются многообразиями, но снабженными специальной геометрией, либо индуцированной физическим пространством (как правило, евклидовым), либо определённой по заданному распределению дефектов. В последнем случае геометрия формы оказывается неевклидовой. Классическая формализация кинематики ориентируемых сред предполагает формализацию дополнительных степеней свободы с помощью векторных полей директоров непосредственно на форме тела, а не на его материальной структуре, что существенно осложняет методологию неевклидового от-

счётного описания. В настоящей работе предлагается задавать расширенную кинематическую структуру на теле, а пространственные векторные поля, подобные полям директоров, определять образами вложенной этой структуры в расширенное физическое пространство. При этом тело и физическое пространство представляются в расширенном виде как главные расслоения над трёхмерными гладкими многообразиями [5]. Последние, с формальной точки зрения, являются базами расслоений, а, с точки зрения механики континуума, представляют классические трёхмерные объекты, несущие расширенную кинематику. Структурная группа расслоения задаёт топологические свойства дополнительной кинематической структуры. Определение конфигураций, деформаций, форм и геометрий на них осуществляется так же, как и в классическом трёхмерном случае, с учётом лишь того, что многообразия теперь имеют более высокую размерность. В таком описании структурная неоднородность характеризуется инвариантами связности над главным расслоением. Классическое описание сред типа Коссера может быть получено как частный случай, если рассмотреть сечение главного расслоения, представляющего расширенное описание тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 18-08-01346, № 18-01-00812).

Список литературы

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909.
2. *Ericksen J.L., Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // Arch. Rational Mech. Anal. 1957. V. 1. Iss. 1. P. 295–323. DOI: 10.1007/BF00298012
3. *Lychev S., Koifman K.* Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. De Gruyter, 2019. DOI: 10.1515/9783110563214
4. *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 27. P. 1–32.
5. *Epstein M., de Leon M.* The Differential Geometry of Cosserat Media. В: Tamassy L., Szenthe J. (eds) New Developments in Differential Geometry. Mathematics and Its Applications. V. 350. Springer, Dordrecht, 1996

Modeling and Optimization of Structurally Inhomogeneous Oriented Media

*S. A. Lychev*¹, *A. G. Petrenko*¹, *D. K. Bout*², *K. G. Koifman*²

IPMech RAS, Moscow, Russia¹

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia²
lychevsa@mail.ru, petrenkas@yandex.ru, dmitry.but96@gmail.com,
koifman.bmstu@yandex.ru

In this paper we propose the formalization of oriented media with defects in the language of principal bundles. The total space of the bundle represents global reference stress-free shape. The deformation of the oriented media is defined as the embedding of the total space of the material bundle in the total space of the physical bundle. The invariants of affine connection on the principal bundle represent measures of incompatibility of deformations and can be considered as cost functions in optimization problem.

УДК 539.3

Моделирование и оптимизация формы контактирующих тел при конечных деформациях

Т. Н. Лычёва, С. А. Лычев

ИПМех РАН, Москва, Россия¹
taniko81@mail.ru, lychevsa@mail.ru

При решении контактных задач для “мягких” материалов возникает необходимость в учёте нелинейных эффектов, связанных с изменением формы и текстуры контактирующих тел. В работе развиваются численно-аналитические методы моделирования подобных нелинейных задач и вопросы оптимизации формы и текстуры контактирующих поверхностей.

Ключевые слова: контактная задача, конечные несовместные деформации, оптимизация формы и текстуры контактирующих поверхностей

В работе исследуются конечные деформации контактирующих гиперупругих тел. Моделирование производится методами нелинейной механики континуума, в рамках которой тело и его формы представ-

лены гладкими многообразиями [1]. Фундаментальные положения геометрической теории контактного взаимодействия были сформулированы В. Ноллом [2]. Обзор последних достижений в этой области можно найти в [3, 4]. Формы оснащены геометрическими структурами - метрикой и аффинной связностью. На актуальных формах, представляющих тела в физическом пространстве, метрика и связность индуцируется физическими метрикой и связностью и, с точностью до замены координат, эквивалентны. Метрика и связность, задаваемые на отсчётной форме, в общем случае неевклидовы. Это позволяет сформулировать меры несовместности конечных деформаций в терминах кривизны и кручения связности. Если эти меры заданы заранее, то моделирование процесса деформирования сводится к нахождению такой формы, которую принимает тело в результате композиции обобщённой деформации, представляющей вложение отсчётной неевклидовой формы в физическое пространство, и классической деформации, характеризующей преобразование форм в физическом пространстве для заданных внешних силовых полей.

При моделировании конечных деформаций контактирующих тел меры несовместности деформаций заранее не известны и должны быть определены из моделирования процесса контактного взаимодействия. С этой целью решается эволюционная задача [5], в ходе которой определяется изменение контактной области и развитие несовместных деформаций в контактирующих телах. При этом процесс контактного взаимодействия характеризуется континуальным семейством многообразий, каждый элемент которого определяет контактирующие тела как составное тело. Это позволяет представить взаимодействие как эволюцию тела переменного материального состава, причём изменение материального состава определяется вхождением граничных точек в состав тела и изменения их статуса на внутренние. В виду нелинейного характера деформирования, локальные деформации оказываются несовместными, что ведет к накоплению собственных (остаточных) напряжений в системе контактирующих тел.

В рамках предлагаемой методики исследовалось контактное взаимодействие гиперупругого параллелепипеда с текстурированным полупространством. Разработан численно-аналитический алгоритм решения эволюционной задачи, который позволяет следующее.

1. Учитывать влияние характера изменения формы области контактного взаимодействия на эволюцию конечных несовместных деформаций. При её изменении граничные точки преобразуются

во внутренние, причем новые “внутренние” элементарные объемы входят в состав тела, которое к моменту их вхождения уже было напряженным в силу предшествующего деформирования. В этой связи можно утверждать, что контактирующие тела обладают памятью, т.е. их напряженно-деформированное состояние зависит от предыстории процесса.

2. Определить эволюцию в ходе процесса контактного взаимодействия инвариантов материальной связности, которые характеризуют меры несовместности деформаций и соответствующих им остаточные напряжения. Формально это позволяет вычислить плотности распределенных дефектов, порождающих эквивалентное распределение мер несовместности.
3. Описать движение границы области контакта, вызванное преобразованием материальной структуры, т.е. преобразованием граничных точек во внутренние, отдельно от движения образа этой границы в составе формы, вызванное деформацией формы.
4. Сформулировать уравнения баланса на границе области контакта в терминах конфигурационных сил в материальной формулировке, что позволяет, в частности, описать эволюцию локального адгезионного взаимодействия.

Произведено моделирование контактного взаимодействия гиперупругого тела с текстурированным полупространством. Текстура полупространства определялась микрорельефом, рисунок которого синтезировался на прямоугольной сетке. В ненапряженной форме образующая рельефа имела ступенчатое сечение. Тело, контактирующее с полупространством, так же обладало глобальной ненапряженной формой — параллелепипедом. Законы состояния гиперупругого материала определялись трехконстантным потенциалом Муни-Ривлина. Решение эволюционной задачи осуществлялось итерационно, продолжением по параметру. На каждом шаге производилась линеаризация уравнений баланса для внутренних точек по формуле Грина-Ривлина-Шилдта.

Осуществлена постановка задачи оптимизации, в которой функцией цены является интенсивности инвариантов тензорного поля напряжений. Оптимальное решение предполагает такую текстуру, при которой для заданного сценария нагружения максимальные значения инвариантов напряжений в контактирующих телах оказываются наименьшими.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 19-01-00231 и № 19-01-00173).

Список литературы

1. *Epstein. M.* The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge University Press. 2010. 326 p.
2. *Noll W.* The Geometry of Contact, Separation, and Reformation of Continuous Bodies. // Arch. Rational Mech. Anal. 1993. V. 122. P. 197–212.
3. *Ciarlet P.G., Necas J.* Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 97 : 3. P. 171–188.
4. *Schuricht F.* A New Mathematical Foundation for Contact Interactions in Continuum Physics // Arch. Rational Mech. Anal. 2007. V. 184.
5. *Lychev S.A., Koifman K.G.* Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. De Gruyter. 2019. 408 p. 495–551.

Modeling and Optimization of the Shape of Contacting Solids at Finite Deformations

T. N. Lycheva, S. A. Lychev

IPMech RAS, Moscow, Russia
lychevsa@mail.ru, lychevsa@mail.ru

When solving contact problems for “soft” materials, it becomes necessary to take into account nonlinear effects associated with changes in the shape and texture of contacting zones. The paper develops numerical and analytical methods for modeling such nonlinear problems and issues of optimizing the shape and texture of contacting surfaces.

Исследование переходных процессов при T-синхронизации многомерных хаотических систем

А. В. Макаренко

ИПУ РАН, Москва, Россия
avm.science@mail.ru

Предложен новый подход к комплексному исследованию во временной области переходных процессов при синхронизации многомерных хаотических систем. Метод позволяет изучать структуру переходного процесса и количественно оценивать некоторые его характеристики. Проведено исследование двух модельных примеров связанных систем: Логистические отображения, осцилляторы Ресслера. Продемонстрированы основные возможности метода.

Ключевые слова: синхронизация хаоса, переходной процесс, структура аттрактора

1. Введение

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и в обществе [1]. Одно из важных проявлений этого явления – это синхронизация хаотических колебаний. Ранее, автором был предложен новый метод комплексного исследования временной структуры синхронизации нелинейных хаотических систем [2]. Метод позволяет диагностировать и количественно оценивать структурные и интегральные характеристики перемежаемости при синхронизации хаотических колебаний в режиме так называемой T-синхронизации.

В рамках обозначенной темы, одной из актуальных проблем остается разработка подходов и методов к комплексному исследованию во временной области переходных процессов при синхронизации многомерных хаотических систем. Причем интересным является как вхождение в синхронизм, так и выход из него. Теоретический и прикладной интерес вызывают также вопросы анализа структуры аттрактора в момент переходного процесса. В настоящей работе предложен один из подходов к решению означенной проблемы.

2. Формальное описание подхода

Введем в рассмотрение дискретную динамическую систему:

$$(1) \quad \mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}), \quad \phi_{\mathbf{p}} : S \times K \rightarrow S, \quad \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{s}, k) \equiv \mathbf{f}^k(\mathbf{s}, \mathbf{p}),$$

со свойствами: $\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^L$, $\mathbf{f} \in C^0(S \times P)$, $k \in K \subseteq \mathbb{Z}$, $n \in \overline{1, N}$, $l \in \overline{1, L}$, где \mathbf{s} — переменная состояния отображения, \mathbf{p} — вектор параметров отображения, k — дискретное время. С системой (1) также свяжем траекторию эволюции ее состояния \mathbf{s} : $\{\mathbf{s}_k\}_{k \in K}$.

Определим исходное отображение [3], кодирующее в пространстве $S \times K$, в терминах конечного T-алфавита, форму n -й компоненты последовательности $\{\mathbf{s}_k\}$:

$$(2) \quad \left\{ \mathbf{s}_{k-1}^{(n)}, \mathbf{s}_k^{(n)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(n)} \right\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \quad T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N].$$

Для связанных систем типа (1) определим $\{J_k^s\}_{k \in K}$ — индикаторную последовательность T-синхронизации [2]. Над $\{J_k^s\}_{k \in K}$ однозначно определяется индикаторная последовательность временной структуры T-синхронизации:

$$(3) \quad \{D_r^{\text{SS}}\}_{r=1}^{R^{\text{SS}}}, \quad D^{\text{SS}} \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{\text{SD}} = 0, \text{SD} = 1\},$$

где: r — номер домена; $\bar{\text{SD}}$ и SD — десинхронный и синхронный домены [2]. С (3) связаны: b_r^{SS} — время k появления и L_r^{SS} — длина домена.

Пусть для наблюдения доступно множество последовательностей $\{D_r^{\text{SS}}\}_{r=1}^{R^{\text{SS}}}|_{\tilde{S}_0}$, отвечающее множеству начальных условий $\tilde{S}_0 \ni \mathbf{s}_0$, причем \tilde{S}_0 по мощности и составу является репрезентативной выборкой из генеральной совокупности S . Тогда над $\{D_r^{\text{SS}}\}_{r=1}^{R^{\text{SS}}}|_{\tilde{S}_0}$ для каждого отсчета времени k возможно определить ряд статистически состоятельных характеристик по правилу $\{r : b_r^{\text{SS}} \leq k < b_r^{\text{SS}} + L_r^{\text{SS}}\}$.

Так, базовыми аналитическими характеристиками являются эмпирические распределения условных вероятностей длин доменов $\tilde{p}(L^{\bar{\text{SD}}}|k)$ и $\tilde{p}(L^{\text{SD}}|k)$. Определение L° см. в [2].

Анализируя во взаимосвязи $\tilde{p}(L^{\bar{\text{SD}}}|k)$ и $\tilde{p}(L^{\text{SD}}|k)$ возможно определять, с заданным уровнем статистической значимости, моменты времени k_b^{tp} и k_e^{tp} — отвечающие началу и окончанию переходного процесса по входу/выходу динамических систем в/из режима T-синхронизма. Соответственно, появляется возможность разбиения динамики систем на три различных режима: $k < k_b^{\text{tp}}$, $k_b^{\text{tp}} \leq k \leq k_e^{\text{tp}}$, и $k > k_e^{\text{tp}}$. В каждом из этих режимов возможно изучать как структуру процессов синхронизации/десинхронизации, так и структуру аттракторов систем, например, анализируя наблюдаемые TQ-бифуркации [4] отображений.

3. Заключение

В заключение, отметим, что рассмотренный метод, основанный на анализе доменного представления T-синхронизации [2], может быть с

успехом применен для исследования во временной области переходных процессов при синхронизации многомерных систем состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решеток с произвольной топологией. Инвариантность анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [3], позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем.

Проведенное исследование модельных систем продемонстрировало информативность предложенного метода. Кроме того, дополнительно подтвердился ранее сделанный автором вывод [2], что широко распространенный подход [1], при котором анализу подвергаются только паттерны синхронизации, а зоны десинхронизации рассматриваются как фоновый сигнал и фактически не анализируются – следует признать методологически неполным из-за потери существенной информации о характере переходного процесса, особенностях перестройки структуры аттракторов и перемежаемом поведении в синхронизирующихся системах.

Список литературы

1. *A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths*, Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
2. *Макаренко А.В.* Исследование временной структуры синхронизации в многомерных хаотических системах // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. Вып. 5. С. 1053-1063.
3. *Макаренко А.В.* Исследование дискретных отображений в TQ-пространстве // Проблемы математического анализа. 2016. Вып. 86. С. 19–31.
4. *Макаренко А.В.* TQ-бифуркации в дискретных динамических системах. Общие положения // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Матриалы XIII Межд. конф. М.:ИПУ РАН, 2016. С. 246–248.

Study of Transition Processes During T-synchronization of Multidimensional Chaotic Systems

A. V. Makarenko

Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
avm.science@mail.ru

A new approach is proposed to comprehensive time-domain study of transition processes during synchronization of multidimensional chaotic systems. The method enables analysis of the transition structure and

enables quantification of some of its characteristics. Two example models of coupled systems were studied: logistic maps, Rossler oscillators. Main capabilities of the proposed method are demonstrated.

УДК 681.5.013

Децентрализованное управления по состоянию наблюдателя для многосвязных систем с неопределенными возмущениями

А. И. Маликов

КНИТУ-КАИ, ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия
a_i_malikov@mail.ru

Предлагаются способы синтеза децентрализованного управления по состоянию наблюдателя, обеспечивающие ограниченность на конечном интервале исходной системы и ошибки оценивания относительно заданных множеств начальных состояний и допустимых траекторий для неавтономных непрерывных многосвязных систем. Они основываются на численном решении задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами. Результаты иллюстрируются на примерах двух связанных перевернутых маятников и телеоперационной системы.

Ключевые слова: многосвязные нелинейные системы, неопределенные возмущения, децентрализованный регулятор, наблюдатель, дифференциальные линейные матричные неравенства, ограниченность на конечном интервале

Проблема децентрализованного управления многосвязными системами широко исследуется в литературе, поскольку представляют собой эффективное средство для разработки алгоритмов управления, особенно для систем со слабыми взаимосвязями [1]. В ряде публикаций предложены способы синтеза децентрализованного управления по состоянию, робастного децентрализованного управления и децентрализованного управления с обратной связью по выходу [2–4]. Возможность управления взаимосвязанной системой посредством децентрализованной обратной связи по состоянию в большой степени зависит от доступности состояний в каждой подсистеме для измерения. В большинстве практических случаев полные измерения состояния недоступны в каждой отдельной подсистеме. Следовательно, для реализации управ-

ления многосвязной системой с помощью децентрализованной обратной связи по состоянию требуется восстановление неизмеримых состояний подсистем. Для этого используются наблюдатели состояния. Способ синтеза наблюдателя, в структуре которого использовались взаимосвязи, был предложен [4]. Кроме того, были разработаны способы синтеза децентрализованных наблюдателей, где отсутствует обмен информацией между локальными подсистемами [4–6].

Как отмечалось в работах [1, 4], проблема синтеза децентрализованного управления с обратной связью по состоянию наблюдателя для взаимосвязанных систем неочевидна, поскольку принцип разделения не может быть применим в этой ситуации. Таким образом, необходимо одновременно рассмотреть проблему синтеза управления и наблюдателя для обеспечения требуемых свойств полной системы.

В [7] были разработаны способы синтеза децентрализованного управления по состоянию децентрализованного наблюдателя, которые обеспечивают ограниченность или H_∞ свойство непрерывной многосвязной системы с неопределенными, ограниченными по L_2 -норме, возмущениями. При этом предполагается, что отсутствует обмен информацией между локальными подсистемами, а используется только информация об измеряемых выходах каждой из подсистем. В данной работе решаются задачи децентрализованного управления и оценивания при учете одного из возможных вариантов информационного обмена между подсистемами, а именно доступности для каждой подсистемы или возможности получения с помощью наблюдателя информации о всех или отдельных взаимосвязях, оказывающих влияние на поведение данной подсистемы. Используется подход, развитый в работах [7, 8] для синтеза наблюдателей и регуляторов для оценивания и стабилизации неавтономных нелинейных систем с неопределенными возмущениями, основанный на методе матричных систем сравнения и технике дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН). При этом на конечном интервале обеспечивается ограниченность относительно заданных множеств начальных состояний и допустимых траекторий исходной системы с помощью обратной связи по состоянию децентрализованного наблюдателя, который, в свою очередь, обеспечивает ограниченность для ошибки оценивания. Определение коэффициентов усиления регулятора и наблюдателя производится с помощью решения задачи оптимизации с ограничениями в виде ДЛМН. Это позволяет минимизировать в каждый момент времени из рассматриваемого интервала влияние внешних возмущений на динамику системы и процесс оценивания. Результаты иллюстрируются на примерах двух

связанных маятников и простейшей телеоперационной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН №7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники» и РФФИ (Проект № 18-08-01045).

Список литературы

1. *Šiljak D.D.* Decentralized Control of Complex Systems. N.Y: Academic Press, 1991.
2. *Zecevic A.I. Šiljak D.D.* Control of Complex Systems. Structural Constraints and Uncertainty/ Series Communications and Control Engineering. N.Y: Springer Science+Business Media, LLC, 2010.
3. *Yan M.G. et al.* Decentralized Control of Nonlinear Large-scale Systems Using Dynamic Output feedback // Journal of Optimization Theory and Applications. 2000. V. 104. P. 459–475.
4. *Pagilla P.R., Zhu Y.* A Decentralized Output Feedback Controller for a Class of Large-scale Interconnected Nonlinear Systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2007. V. 24. P. 57–69.
5. *Dhbaibi S., Thili A.S., Benhadj B. N.* Decentralized Observer Based H_∞ Decentralized Control for Interconnected Systems // ICGST-ACSE Journal. 2008. V. 8. Is. 2. P. 43–53.
6. Frej G.B.H. et al. Decentralized Observers for Optimal Stabilization of Large Class of Nonlinear Interconnected Systems // International Journal of Computer Applications, Foundation of Computer Science. 2016. V. 137 (14). P. 1–7.
7. *Malikov A.I.* Синтез децентрализованного управления по состоянию наблюдателя для многосвязных систем с неопределенными возмущениями // XXIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. М.:ИПУ РАН, 2019. С.731–735.
8. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния для нелинейных липшицевых систем с неопределенными ограниченными по L_∞ норме возмущениями // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2016. № 3. С. 128–140.
9. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // АиТ. 2017. № 5. С. 16–35.
10. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // АиТ. 2018. № 3. С. 21–43.
11. *Маликов А.И.* Управление на конечном интервале нелинейных систем одного класса с H_∞ - критерием качества // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 25–46.
12. *Malikov A.I.* State and Unknown Inputs Finite Time Estimation for Time-Varying Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. Iss. 1. P. 1439–1444.

Observer Based Decentralized Control for Interconnected Systems with Uncertain Disturbances

A. I. Malikov
KNRTU-KAI, Kazan, Russia
FRC KazSc RAS, Kazan, Russia
a_i_malikov@mail.ru

Methods for observer based decentralized control design are proposed which provide the finite time boundedness of the original system and estimation error with respect to given sets of initial states and admissible trajectories for time-varying continuous interconnected systems. They are based on the numerical solution of optimization problems with differential linear matrix inequalities. The results are illustrated by two connected inverted pendulums and a teleoperational system.

УДК 531.36 : 531.53

О точности хода маятниковых часов, установленных на вибрирующей платформе

A. П. Маркеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
anat-markeev@mail.ru

Исследуется задача о влиянии периодических вибраций точки подвеса физического маятника на его нелинейные колебания в окрестности устойчивого положения равновесия на вертикали. В плоскости двух безразмерных параметров: амплитуды колебаний маятника и параметра, характеризующего разность величин интенсивности вибраций точки подвеса по горизонтальному и вертикальному направлениям указаны области, в которых маятниковые часы спешат и области, в которых они отстают.

Ключевые слова: маятник, вибрации, устойчивость

1. Введение

Физический маятник движется в неподвижной вертикальной плоскости O_*YZ , ось O_*Z направлена вертикально вверх, точка подвеса O

совершает периодическое движение в плоскости O_*YZ :

$$Y_0 = \varepsilon l \eta(\tau), \quad Z_0 = \varepsilon l \zeta(\tau); \quad \tau = \Omega t, \quad \Omega = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{l_r}}; \quad (0 < \varepsilon \ll 1).$$

(G — центр тяжести, $OG = l$, l_r — приведенная длина маятника, φ — угол между отрезком OG и нисходящей вертикалью). Безразмерные координата и импульс:

$$\varphi = \chi, \quad p_\varphi = m l \sqrt{g l_r} p_\chi.$$

Близкая к тождественной, периодическая по τ , каноническая замена $\chi, p_\chi \rightarrow q, p$ приводит функцию Гамильтона к виду $H = H_1 + O(\varepsilon^2)$, где

$$H_1 = \varepsilon \left(\frac{1}{2} p^2 - \cos q - \frac{1}{2} \alpha \cos 2q + \frac{1}{2} \beta \sin 2q \right),$$

$$\alpha = \frac{\langle \dot{Z}_0^2 \rangle - \langle \dot{Y}_0^2 \rangle}{2g l_r}, \quad \beta = \frac{\langle \dot{Z}_0 \dot{Y}_0 \rangle}{g l_r}.$$

Здесь в качестве независимой переменной принята величина τ , угловыми скобками обозначена операция усреднения. Будем считать, что вибрации точки подвеса таковы, что $\langle \dot{Z}_0 \dot{Y}_0 \rangle = 0$. Тогда приближенная система с функцией Гамильтона H_1 допускает частное решение — равновесие $q = 0$. Это равновесие устойчиво, если $\alpha > -1/2$.

2. О переменных действие-угол в приближенной системе

Предполагая, что $\alpha > -1/2$, рассмотрим нелинейные колебания в окрестности устойчивого положения равновесия $q = 0$. Через q_m обозначим амплитуду колебаний. В области D возможных значений параметров α, q_m при $-1/2 < \alpha < 1/2$ выполняется неравенство $0 < q_m < \pi$, а при $\alpha \geq 1/2$ — неравенство $0 < q_m < \arccos(-1/(2\alpha))$. Введем обозначения

$$\mu = \sin \frac{q_m}{2}, \quad k = \mu \sqrt{\frac{1 - 2\alpha\mu^2}{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}}, \quad n = -\frac{2\alpha\mu^2}{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}.$$

Для переменной действие можно получить следующее выражение

$$I = \frac{2\sqrt{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}}{\pi\alpha} \left[2\alpha \mathbf{E}(k) - (1 + 2\alpha - 2\alpha\mu^2) \mathbf{K}(k) + \frac{1 - k^2}{1 - \mu^2} \mathbf{\Pi}(n, k) \right].$$

Это выражение определяет зависимость μ от I . В переменных действие-угол I, w гамильтониан приближенной системы зависит только от I :

$$H_1 = \varepsilon 2[(1 + 2\alpha)\mu^2(I) - 2\alpha\mu^4(I)].$$

Явные формулы для канонического преобразования $q, p \rightarrow w, I$ здесь для краткости не выписываем.

3. Об условно-периодических движениях полной системы

Вычисления показали, что в области D существует одна кривая, на которой функция H_1 является вырожденной (на ней производная $\partial^2 H_1 / \partial I^2$ обращается в нуль). Вне этой кривой из большинства фазовых траекторий приближенной системы при достаточно малых ε рождаются условно-периодические движения. Это большинство фазовых траекторий приближенной системы не разрушается в полной системе, а лишь мало (на величину порядка ε) деформируется. Мера Лебега разрушающихся при малых ε фазовых траекторий имеет порядок $\exp(-c\varepsilon^{-1})$ ($c > 0 - \text{const}$) [1].

4. О точности хода маятниковых часов

Период колебаний маятника с неподвижной точкой подвеса определяется амплитудой колебаний q_m :

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{\ell_r}{g}} \mathbf{K}\left(\sin \frac{q_m}{2}\right).$$

При наличии вибраций имеем

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell_r}{g(1 + 2\alpha \cos q_m)}} \mathbf{K}\left(\sin \frac{q_m}{2} \sqrt{\frac{1 - \alpha + \alpha \cos q_m}{1 + 2\alpha \cos q_m}}\right).$$

Равенство $T = T_0$ реализуется в области D на двух кривых γ_1 и γ_2 . Кривая γ_1 — это интервал $0 < q_m < \pi$ оси $\alpha = 0$. Кривая γ_2 начинается на левой границе области D в точке $\alpha = -1/2$, $q_m = 1.908$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ она имеет горизонтальную асимптоту и задается уравнением

$$q_m = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathbf{K}(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{2\alpha}} + O\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right).$$

Кривые γ_1 и γ_2 разбивают область D на четыре подобласти, в двух из которых часы спешат, а в остальных двух отстают. В качестве примера рассмотрим случай, когда $Y_0 \equiv 0$, т. е. вибрации происходят вдоль

вертикали. Тогда, в соответствии с [2], при не очень больших амплитудах колебаний (например таких, что маятник не поднимается выше горизонтали) часы с вибрирующим подвесом будут спешить.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ регистрации АААА-А17-117021310382-5) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект №17-01-00123).

Список литературы

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Неёштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
2. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физ. наук.* 1951. Т.44. Вып. 1. С.7–20.

On the Accuracy of the Pendulum Clock Mounted on a Vibrating Platform

A. P. Markeev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
anat-markeev@mail.ru

The problem of the influence of periodic vibrations of the suspension point of a physical pendulum on its nonlinear oscillations in the vicinity of a stable vertical equilibrium position is studied. In the plane of two dimensionless parameters (the oscillation amplitude of the pendulum and the parameter characterizing the difference in the values of the vibration intensity of the suspension point in the horizontal and vertical directions) the regions in which the pendulum clock is in a hurry and the regions in which it is late are obtained.

Total quality management, PMBoK, HR как элементы моделирования состояния динамической системы для оценки управления резидента особой экономической зоны

С. Н. Масаев

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
faberi@list.ru

В настоящей работе метод интегральных показателей применяется для оценки управления резидентом особой экономической зоны. С помощью авторского комплекса программ деятельность резидента особой экономической зоны смоделирована как динамическая нестационарная, по структуре, система из 1,2 млн. значений с идентифицированными на каждом временном такте пространствами: выходных данных, данных управления и параметров внешней среды. Исследование показало существенные изменения значений интегрального показателя, характеризующего состояния резидента особой экономической зоны при внедрении стандартов управления Total quality management (TQM), PMBoK, HR.

Ключевые слова: динамическая система, особая экономическая зона, методы управления, TQM, PMBoK, интегральный показатель, HR.

1. Введение

Выявлено большое количество подходов по оценке эффективности управления на экономических объектах. Однако не было обнаружено универсального метода для единой цифровой оценки результативности управления. Цель: применить метод интегрального показателя [1] для оценки результативности системы управления предприятием резидентом особой экономической зоны (ОЭЗ).

2. Основной результат

Описание ОЭЗ как системы, параметры и контур управления, подробно раскрыто в предыдущей работе [2]. Динамическая и нестационарная, по структуре, система задана уравнением

$$(1) \quad y(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t),$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор сигналов состояния объекта исследования (статьи доходов/расходов резидента ОЭЗ), $u(t) \in R^m$ — вектор управляющих воздействий на уровне системы (планирование статей доходов/расходов), $v(t) \in R^l$ — вектор возмущений внешней среды, $y(t) \in$

R^P — вектор наблюдения и $y(t) = Hx(t+1)$, $A = [a_{ij}] N \times N$ -матрица, определяющая скорость развития и структуру взаимодействия параметров $x(t)$ системы, $B = [b_{ij}] - N \times M$ -матрица, определяющая структуру управляющего воздействия $u(t)$ на систему. Анализ системы в момент t выполняется по $x(t)$ за k предыдущих тактов. Параметр k — длина отрезка временного ряда. Тогда имеем матрицу $X_k(t)$. Величину k можно использовать для идентификации влияния внешних факторов на систему [3]. Следуя методу интегральных показателей. Получаем корреляционную матрицу $R_k(t)$ с коэффициентами корреляции $r_{ij}(t)$:

$$(2) \quad R_k(t) = \frac{1}{k-1} X_k(t) X_k^T(t), \quad r_{ij}(t) = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^k x_k(t-l) x_k^T(t-l)$$

и рассчитаем интегральный показатель $G = \sum_{i=1}^n G_i(t)$, $G_i(t) = \sum_{j=1}^n |r_{ij}(t)|$. Управление по цели $J = J(W) \rightarrow \inf_{W \in U^*}$, где q — процедура предсказания состояния динамической системы в разные такты, $W = [w_{ij}] - Q \times N$ -матрица, определяющая структуру выбранного метода управления, в общем виде J — параметр цели для состояний системы при различных q , определяющий допустимое множество матриц выбранного метода управления U^* с учетом всех требований к динамике процесса и синтаксиса языка выбранного метода управления $u = W(q)y$.

3. Практическая задача

Расчеты G выполнены в авторском комплексе программ. Пример 1: резидент ОЭЗ — деревообрабатывающее предприятие. Размерность $n=1,2$ млн., $T=5,5$ лет, $t=1$ мес. В $t=29$ J — увеличение переработки леса с 1 до 2 млн. куб. м. за год. W : а) стандартный режим бюджетирования, б) TQM, в) РМВоК. Результат расчета G см. рис. 1. Пример 2:



Рис. 1: Значения интегрального показателя G в режимах метода управления а), б), в).

резидент ОЭЗ — строительное предприятие. Размерность $n=400$, $T=5$

лет, $t=1$ мес., J — две различные стратегии персонала, отличающихся набором задействованных должностных обязанностей, W — синтаксис метода управления персоналом HR (Human Resource). Результат расчета: базовая стратегия ($G=153\ 080$), стратегия 2 ($G=155\ 896$).

4. Заключение

Цель работы достигнута. Работа выполнена как продолжение предыдущих исследований [4, 5].

Список литературы

1. *Масаев С. Н.* Оценка управления в компании методом интегральных показателей компании для шести вариантов ее развития // Решетневские чтения. Красноярск. СибГАУ. Т. 2. 2013. С. 133–134.
2. *Масаев С.Н.* Динамическое уравнение для управления особой экономической зоной субъекта РФ // (ECTST–2019) Всеросс. научно-практ. конф. с межд. участием, посв. 90-летию со дня рождения Ю.И. Черского (ECTST–2019). Тез. докл. Симферополь, Россия, 2019. С. 49–51.
3. *Масаев С.Н.* Определение горизонта планирования автокорреляционной функцией в процессе управления предприятием особой экономической зоны // IX Межд. научно-техн. конф. «Технологии разработки информационных систем (ТРИС-2019). Материалы конф.. Т. 1. Ростов-на-Дону, 2019. С. 52–59.
4. *Masaev S. N.* Destruction of the Resident Enterprise in the Special Economic Zone with Sanctions // 2019 Twelfth International Conference "Management of large-scale system development"(MLSD). Moscow, 2019. P. 1–5. doi: 10.1109/MLSD.2019.8910997
5. *Масаев С. Н.* Оценка режима ограниченной работы многомерной динамической системы методом интегральных показателей // Информатизация и связь. 2019. № 4. С. 160–166.

Total Quality Management, PMBoK, HR as Elements of Modeling the State of a Dynamic System for Assessing the Management of a Resident in Special Economic Zone

S. N. Masaev

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia
faberi@list.ru

In the present work, the method of integrated indicators is used to assess the management of a resident of a special economic zone. Using the author's software package, a resident of a special economic zone is modeled as a dynamic non-stationary, in structure, system of 1.2 million values with spaces identified at each time step: output data, control data,

and environmental parameters. The study showed significant changes in the values the integral indicator characterizing the state of a resident of a special economic zone when implementing management standards Total quality management (TQM), PMBoK, HR.

УДК 517.977.57

Допустимая область оптимального управления инфраструктурными проектами субъекта РФ

С. Н. Масаев,¹ В. В. Цыганов,² Г. А. Доррер¹

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия¹

ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия²

faberi@list.ru

Рассчитана динамическая область управления на основании матрицы, определяющей структуру развития, многомерной динамической системы. Установлено, что оптимальное распределение методом Р. Беллмана позволяет увеличить прирост значения целевой функции за 5 лет на 85% от первоначального значения при уменьшении (затрачиваемого) распределяемого ресурса на 20%. Традиционно считается, что строительство железных дорог приводит к росту валового регионального продукта на 2%, но авторы доказали, что возможно увеличить этот показатель до 7%.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамическая система, инфраструктурный проект, железная дорога, особая экономическая зона, аэропорт

1. Введение

В работе исследуется задача оптимального распределения ресурсов при развитии особых экономических зон и ее влияние на окупаемость строительства железной дороги для субъекта РФ. В прикладном смысле, расчет оптимального управления достаточно сложная задача. Объект управления имеет большую размерность и с каждым временным тактом изменяет свою структуру под воздействием реализации собственных целей и влияния факторов внешней среды.

2. Основной результат

Многомерная динамическая система задана уравнением

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(x(t), u(t)) + v(t), \\ y(t) &= G((x(t), u(t), v(t))), \\ x(t) &\in R^n, u(t) \in R^m, v(t) \in R^l, y(t) \in R^k. \end{aligned}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор сигналов состояния объекта исследования, $u(t) \in R^m$ — вектор управляющих воздействий на уровне системы, $v(t) \in R^l$ — вектор возмущений внешней среды, $y(t) \in R^k$ — вектор наблюдения $y(t) = Hx(t)$, $u = W(q)y$. Передаточную матрицу W находим решая задачу вида: $J = J(W) \rightarrow \inf_{W \in \mathcal{U}^*}$. q — оператор сдвига на такт вперед, $H = [h_{ij}] - K \times N$ -матрица, определяющая структуру наблюдения за системой, J — параметр качества для состояний системы при различных q , определяющий допустимое множество передаточных матриц \mathcal{U}^* с учетом всех требований к динамике процесса. Требования определяются через матрицы: $A = [a_{ij}] - N \times N$ -матрица, определяющая скорость развития и структуру системы, $B = [b_{ij}] - N \times M$ -матрица, определяющая структуру управляющего воздействия на систему.

3. Практическая задача

Особая экономическая зона (ОЭЗ) субъекта РФ (X) определяется состоянием резидентов ОЭЗ: деревообрабатывающего предприятия, нефтеперерабатывающего предприятия, радиотехнического предприятия и предприятием производителем сухой десткой смеси $X = [X^1, X^2, X^3, X^4]$. Работа ОЭЗ за 5 лет оценивается по валовому региональному продукту $y(t)=130$ млрд. руб., $u_6=16$ млрд. руб. субсидии на транспортные расходы (строительство ЖД ветки от ОЭЗ на территории аэропорта Красноярск до г. Красноярск длиной 40 км) [1], $u_{12}=1,92$ млрд. руб. налог на прибыль. Влияние всех налоговых ставок u на y деятельность ОЭЗ подробно раскрыто в отдельной работе [2]. Передаточные матрицы W определены индивидуальными параметрами деятельности каждого резидента ОЭЗ в зависимости от размера ставки налога на прибыль u_{12} . Требуется подобрать управление $u_{12} = (u_{12}^1; u_{12}^2; u_{12}^3; u_{12}^4; \cdot)$ таким образом, чтобы максимизировать функцию J . Оптимальное распределение субсидий находится методом Р. Беллмана см. рис. 1. Расчет проводился по 4,6 млн. значений в авторском программном комплексе программ [3]. Моделирование показало

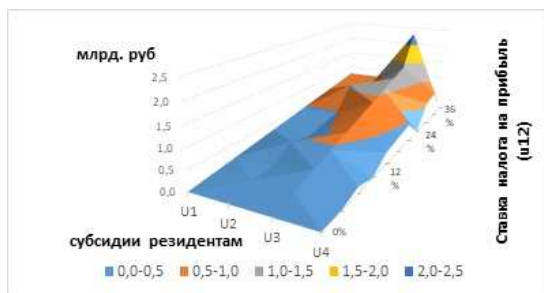


Рис. 1: Область оптимального управления (множество передаточных матриц)

оптимальное управление ОЭЗ $u = 1,54$ млрд.руб. $= (0,31; 0,31; 0,61; 0,31)$. За 5 лет прирост показателей Красноярского края, от строительства ЖД пути (инфраструктурного проекта), составит: y – ВРП с 130 до 150 млрд. руб, J – прибыль с 1,54 до 1,8 млрд. руб. Окупаемость инфраструктурного проекта в ОЭЗ сократится с 8 лет до 3 месяцев.

4. Заключение

Цель работы достигнута. Работа выполнена как продолжение предыдущих исследований [4, 5].

Список литературы

1. *А. А. Макошко и др.* Инфраструктура Сибири, Дальнего Востока и Арктики. Состояние и три этапа развития до 2050 года // Книга. М.: ИПТ РАН, 2019. 465 с.
2. *Масаев С.Н.* Динамическое уравнение для управления особой экономической зоной субъекта РФ // Всеросс. научно-практ. конф. с межд.участием, посв. 90-летию со дня рожд. Ю.И. Черского (ECTST–2019). Тез.докл. Симферополь, 2019. С. 49–51.
3. *Масаев С.Н.* Автоматизированный расчет параметров эффективности налоговых льгот, применяемых в отрасли производства, услуг // Свид. РосПатента о рег. программы для ЭВМ № 2017617079 26.04.2017
4. *Masaev S. N.* Destruction of the Resident Enterprise in the Special Economic Zone with Sanctions // 2019 Twelfth International Conference "Management of large-scale system development"(MLSD). Moscow, Russia, 2019. P. 1–5. doi: 10.1109/MLSD.2019.8910997
5. *Масаев С. Н.* Оценка режима ограниченной работы многомерной динамической системы методом интегральных показателей // Информатизация и связь. 2019. № 4. С. 160–166.

Acceptable Area of Optimal Management of Infrastructure Projects in Subject of the RF

S. N. Mashaev,¹ V. V. Syganov,² A. G. Dorrer,¹

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia¹

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia²
faberi@list.ru

The dynamic control region is calculated on the basis of a matrix determining the structure of the development of a multidimensional dynamic system. It was established that the optimal distribution by R. Bellman's method allows increasing the increase in the value of the objective function over 5 years by 85% from the initial value with a decrease in the distributed resource by 20%. It is believed that the construction of railways leads to an increase in gross regional product by 2%, but the authors proved that it is possible to increase this figure to 7-8%.

УДК 531.36

Об эмпирической модели воздействия потока на ротор Савониуса

A. A. Masterova¹, Ю. Д. Селицкий¹, R. Garziera²

НИИ механики МГУ, Москва, Россия¹

University of Parma, Parma, Italy²

masterovaanya@yandex.ru, seliutski@imec.msu.ru, yds@inbox.ru

В настоящей работе предложена эмпирическая модель для описания воздействия потока на ротор Савониуса, позволяющая проводить параметрический анализ сложных механических и электромеханических систем с ротором в терминах теоретической механики и теории динамических систем. Подход использован для моделирования тележки, приводимой в движение ветром (приводом служит ротор Савониуса). Проведено численное интегрирование полученной системы. Описаны характеристики установившихся режимов движения и переходных процессов в зависимости от параметров.

Ключевые слова: динамика, авторотация, ротор Савониуса

В настоящее время методы вычислительной гидро- и аэромеханики позволяют довольно эффективно описывать динамику объектов, вра-

щающихся под действием потока среды. Однако, если такой объект представляет собой часть более сложной механической системы, для описания ее динамики необходимо решать сопряженную задачу. Это требует серьезных вычислительных затрат. Даже на сегодняшний день техника не позволяет смоделировать все возможные варианты эволюции такой системы при условии, что диапазон возможных значений параметров и начальных условий относительно широкий. Существует потребность в разработке простой механико-математической модели, позволяющей получить достаточно точное интегральное описание поведения сложной системы для проведения параметрического анализа и получения качественного описания динамики всей системы.

В работе предложен эмпирический подход к описанию воздействия потока на ротор Савониуса, позволяющий представить коэффициент аэродинамического момента ротора в виде функции мгновенных значений угла его поворота и его угловой скорости, другими словами, от обобщенных координат и скоростей системы.

Ротор Савониуса — довольно широко распространенный тип вертикально осевых ветротурбин. Схематичное изображение ротора представлено на Рис. 1.

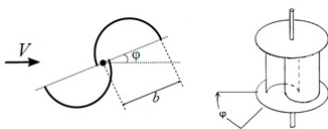


Рис. 1: Вид сверху и вид сбоку на ротор Савониуса

Крутящий момент создается за счет разности сил сопротивления, возникающих на лопастях ротора. В рамках квазистатического подхода традиционно момент записывают следующим образом:

$$M_a(\varphi, \omega) = 0,5\rho S b V^2 C_m(\varphi, \Omega),$$

где φ — угол поворота ротора, ω — угловая скорость ротора, ρ — плотность среды, b — радиус ротора, S — площадь поперечного сечения ротора, перпендикулярная направлению набегающего потока, V — скорость потока, C_m — безразмерный коэффициент аэродинамического момента, $\Omega = b\omega/V$ — безразмерная угловая ско-

рость ротора. Последний представим в виде усеченного ряда Фурье:

$$(1) \quad C_m(\varphi, \Omega) = b_0(\Omega) + \sum_{k=1}^N [a_k(\Omega) \sin(2k\varphi) + b_k(\Omega) \cos(2k\varphi)].$$

Значения коэффициентов $a_k(\Omega)$, $b_k(\Omega)$ и число N учитываемых гармоник должны быть определены эмпирическим путем. На основе экспериментальных данных из [1] получены зависимости коэффициентов b_0 , a_1 , b_1 данного разложения от Ω (Рис. 2).

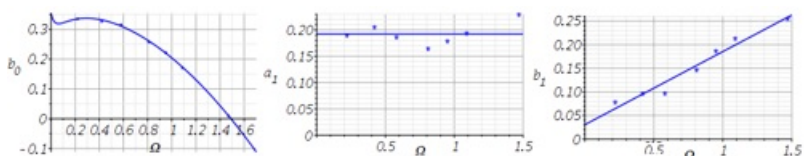


Рис. 2: Зависимость первых коэффициентов разложения аэродинамического момента от быстроходности

Пусть ротор Савониуса используется в качестве привода для трехколесной тележки (Рис. 3), движущейся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Показано, что в этой системе существуют установившиеся движения, на которых тележка движется поступательно против ветра (или по ветру). На Рис. 4 представлена зависимость угловой скорости ротора на таком режиме от времени без учета зависимости аэродинамического момента от угла и с учетом этой зависимости. Использование предлагаемого подхода обеспечивает возмож-

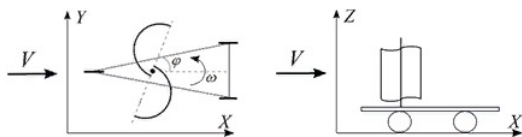


Рис. 3: Схематичное изображение колесной тележки с ротором Савониуса

ность более детального анализа поведения исследуемого транспортного устройства.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект №19-31-99973).

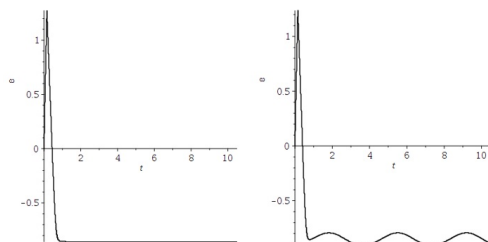


Рис. 4: Влияние учета зависимости аэродинамического момента от угла

Список литературы

1. *Jaohindy P., Ennamiri H., Garde F., Bastide A.* Numerical investigation of airflow through a Savonius rotor // *Wind Energy*. 2014. No. 17. P. 853-868.

On Empirical Model of Flow Impact on the Savonius Rotor

*A. A. Masterova*¹, *Y. D. Selyutskiy*¹, *R. Garziera*²

Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Moscow, Russia¹

University of Parma, Parma, Italy²

masterovaanya@yandex.ru, seliutski@imec.msu.ru, yds@inbox.ru

A method for describing the aerodynamic torque acting on the Savonius rotor in the flow is proposed. The considered approach does not provide a detailed and accurate picture of the flow, but it allows to describe the aerodynamic load on a rotating object quite well integrally. On the basis of this method, a mechanical system describing the dynamics of a wheeled cart with a Savonius rotor as a drive is constructed.

Управление роботом-колесом с помощью маятника

И. В. Матросов¹, Ю. В. Морозов², А. В. Пестерев²

ООО Джавад джи Эн Эс Эс, Москва, Россия¹

ИПУ РАН, Москва, Россия²

matrossov@gmail.com, tot1983@inbox.ru, alexanderpesterov.ap@gmail.com

Рассматривается задача управления роботом-колесом, описываемого системой алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), с помощью маятника, подвешенного на оси колеса. Ставится задача синтеза обратной связи, позволяющей привести систему из произвольного начального положения на прямой в заданное при ограничениях на скорость движения и управляющий момент. Для решения поставленной задачи вводится более простая, по сравнению с исходной, «эталонная» система АДУ, решения которой удовлетворяют заданным фазовому ограничению и ограничению на управление. Решения эталонной системы берутся в качестве множества целевых траекторий движения исходной системы. Обратная связь находится путем численного интегрирования с проекциями исходной системы совместно с эталонной. Результаты численных экспериментов демонстрируют эффективность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: робот-колесо, управление с помощью маятника, алгебро-дифференциальные уравнения

Движение по прямой робота-колеса с подвешенным на оси колеса маятником определяется уравнениями Лагранжа второго рода [1]

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = R, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = rR - f\dot{\theta} - U, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q + U,$$

где x, θ и ϕ — позиция, угол поворота колеса и угол наклона маятника, соответственно, U — искомый управляющий момент, $Q = -mgl \sin \phi$,

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\phi} \cos \phi)^2 + (l\dot{\phi} \sin \phi)^2],$$

M, m, l, r, f — постоянные параметры. Сила реакции в горизонтальном направлении R определяется условием непроскальзывания:

$$(2) \quad -\dot{x} + r\dot{\theta} = 0.$$

Требуется синтезировать закон управления по принципу обратной связи $U = U(x, \theta, \phi, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, приводящий систему из произвольного на-

чального положения в начало координат. Дополнительно требуется выполнение ограничений $\forall t : |\dot{x}(t)| < V_{max}, |U(t)| < U_{max}$.

Обсуждается подход, позволяющий алгоритмически построить такое управление путем двукратного применения метода стабилизации связей для систем АДУ, описанного в работе авторов [2]. В качестве первого шага такого построения, уточним задачу стабилизации с фазовыми ограничениями $|\dot{x}| < V_{max}$, задав желаемое поведение в виде “эталонной” системы дифференциальных уравнений, для которой ограничения выполнены по построению. По аналогии с [3] здесь в качестве такой эталонной системы используется следующая:

$$(3) \quad \delta = \dot{x}_1 - k_2 \text{th}(k_1(x_1)), \quad \dot{\delta} = -k_4 \text{th}(k_3 \delta),$$

где $k_i > 0, i = 1, \dots, 4$ — постоянные параметры.

Переформулируем задачу управления: найти U такое, что невязка $y = x(t) - x_1(t)$ стремится к нулю. Иначе говоря, найти $x, \theta, \phi, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, x_1, \dot{x}_1, R, U$, такие что выполняются уравнения (1)–(3) и

$$(4) \quad x - x_1 = 0.$$

Однако так полученное решение не обладает свойством единственности. В частности, существуют решения, при которых колесо движется с постоянной скоростью, а маятник при этом совершает колебания вместо того, чтобы отклониться на постоянную величину. Кроме того, не гарантировано выполнения ограничения $|U| < U_{max}$.

Для преодоления этого затруднения, усложним эталонную систему так, чтобы включить не только желательное положение и скорость, но и другие переменные исходной системы, перейдя от дифференциальных уравнений (3) к системе АДУ. А именно, возьмем в качестве эталонной модель качения колеса без маятника:

$$(5) \quad Mr^2 \ddot{\theta}_2 = -f \dot{\theta}_2 + R_2 r - U_2, \quad (m + M) \ddot{x}_2 = R_2, \quad -\dot{x}_2 + r \dot{\theta}_2 = 0,$$

где U_2 - управляющий момент, приложенный к оси колеса. Как и ранее, для нахождения зависимости U_2 и R_2 от переменных $x_1, x_2, \theta_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}_2$, применим метод стабилизации связей к системе, состоящей из уравнений (3), (5) и $x_1 - x_2 = 0$, рассматривая U_2 и R_2 как реакции связей. Полученное выражение для U_2 даст крутящий момент, при приложении которого к колесу будут выполняться заданные ограничения на управление и скорость. С другой стороны, момент, необходимый для удержания маятника массы m и длины l в положении, отклоненном на

угол ϕ от вертикали, равен $mg \sin \phi$. Следовательно алгебраическое уравнение эталонного положения маятника примет вид:

$$(6) \quad U_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \theta_2, \dot{\theta}_2) = mg \sin \phi.$$

Теперь все готово для повторного применения алгоритма стабилизации связей к системе АДУ (1)–(6), который позволит найти вектор $[U, U_2, R, R_2]$ как функцию $(x, x_1, x_2, \theta, \theta_2, \dot{x}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\theta}, \dot{\theta}_2)$. В качестве окончательного результата синтеза теперь берется проекция $U = U(x, x, x, \theta, \theta, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\theta})$.

Приведены результаты численного анализа работы описанной здесь системы управления движением, демонстрирующие возможность подбора постоянных параметров так, чтобы удовлетворялись фазовые ограничения и ограничения на управление.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-00531а) и Программы Президиума РАН № 29 «Актуальные проблемы робототехнических систем».

Список литературы

1. *Painlevé, P.* Lecons sur le frottement. Paris. 1895. С. 216 с.
2. *Морозов Ю.В., Матросов И.В., Пестерев А.В.* Использование подходов теории управления для численного интегрирования уравнений качения робототехнических систем // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2019). ИПУ РАН. С. 301–305.
3. *R. Olfati-Saber* Global stabilization of a flat underactuated system: The inertia wheel pendulum // IEEE Conf. Decis. Conf. 2001. V. 4. P. 3764–3765.

Control of the Robot-wheel with a Pendulum

I. V. Matrosov¹, Yu. V. Morozov², A. V. Pesterev²

Javad GNSS, Moscow, Russia¹

Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia²
matrossov@gmail.com, tot1983@inbox.ru, alexanderpesterov.ap@gmail.com

The problem of control of a robot-wheel with a pendulum, which is governed by a DAE system, is considered. The problem of synthesizing control law is set that brings the system from an arbitrary initial position on a straight line to a given one, with the velocity of motion and control torque being limited. To solve this problem, a simpler, “reference” DAE system is introduced the solutions of which satisfy the given phase and control constraints. The solutions of the reference system are taken to be

the set of target trajectories for the original system. The feedback is found by numerical integration with projections of the original system together with the reference one. Results of a numerical experiments demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

УДК 531.36

Движение колесного инерциоида за счет перемещения внутренних масс

*П. К. Махмудов¹, В. А. Самсонов¹, М. З. Досаев¹, Л. А. Климина¹,
Ю. А. Вершинин²*

¹ НИИ Механики МГУ, Москва, Россия

² Университет Ковентри, Ковентри, Великобритания
fillipmacgreen@gmail.com, samson@imec.msu.ru, dosayev@imec.msu.ru,
klimina@imec.msu.ru, vershy@coventry.ac.uk

В данной работе рассматривается движение тележки, катящейся по горизонтальной плоскости. Приводится алгоритм циклического относительного движения внутренней массы, приводящий к перемещению тележки.

Ключевые слова: тележка, инерциоид, удар.

1. Введение

В последнее время публикуются работы [1-4], рассматривающие системы, совершающие перемещения за счет движения внутренних масс, и называемые инерциоидами. Примером подобного инерциоида может служить тележка, состоящая из корпуса массы M , к которому прикреплены колеса, массы $M/2$ и моментом инерции относительно оси вращения J , и ползунок массы m , способного двигаться вдоль корпуса.

2. Постановка задачи

Тележка (рис. 1) катится по абсолютно шероховатой поверхности. Центр масс корпуса расположен в точке S . Ползунок C способен двигаться параллельно отрезку, соединяющему центры масс колес A и B . Управление движением ползунка осуществляется посредством задания относительного ускорения d . Требуется найти такое циклическое дви-

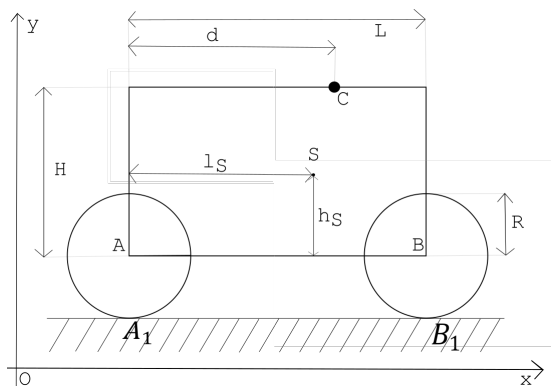


Рис. 1: Схема тележки

жение ползунка, при котором за один цикл корпус тележки совершит ненулевое перемещение.

3. Основной результат

В случае движения, при котором оба колеса находятся в сцеплении с опорой, перемещение корпуса пропорционально перемещению ползунка, поэтому по завершении цикла тележка вернется в начальное положение. Предлагается разделить движение ползунка на три фазы (рис. 2), в течение которых сцепление будут испытывать только правое, только левое и оба колеса соответственно.

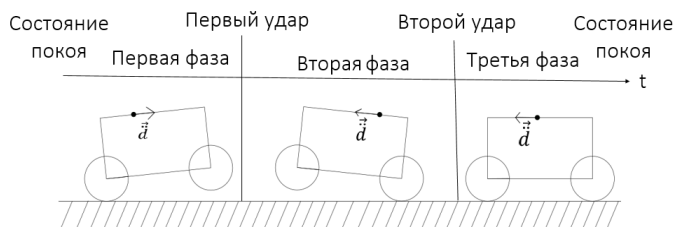


Рис. 2: Схема фаз движения

В момент смены фазы движения одно из колес всегда будет приобретать сцепление с поверхностью, а потому тележка будет испытывать удар, который даст скачок скоростей. Будем реализовывать такое дви-

жение ползунка, при котором корпус остается в горизонтальном положении. Примем, что зазор между оторвавшимся колесом и поверхностью бесконечно мал. Такая последовательность движений ползунка за один цикл приводит к ненулевому перемещению корпуса.

4. Заключение

Рассмотрено движение тележки, катящейся по горизонтальной плоскости, за счет относительного движения точечной внутренней массы (ползунка). Предложенный алгоритм показал принципиальную возможность ненулевого перемещения тележки за один цикл движений ползунка.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00538).

Список литературы

1. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел. // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 213–222.
2. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3–22.
3. Golitsyna M., Samsonov V. Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration) // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2015. V. 181. P. 221–232.
4. Dosaev M., Samsonov V., Holub A. Plane-Parallel Motion of a Friction-Powered Robot Moving Along a Rough Horizontal Plane // Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019, Springer Mechanisms and Machine Science. 2019. V. 73. P. 2559–2565.

Wheel Inertioïd Motion due to Internal Mass Motion

*P. K. Makhmudov¹, V. A. Samsonov¹, M. Z. Dosaev¹,
L. A. Klimina¹, Yu. A. Vershinin²*

¹Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Russia

²Coventry University, Coventry, United Kingdom

fillipmacgreen@gmail.com, samson@imec.msu.ru, dosayev@imec.msu.ru,
klimina@imec.msu.ru, vershy@coventry.ac.uk

A motion of a wheeled robot with an internal mass rolling without sliding along a horizontal plane is considered. An algorithm for the cyclic motion of the internal mass with a nonzero displacement of the inertioïd is given.

Синтез робастной системы управления неустойчивым объектом посредством QFT

Ю. В. Митришкин, С. Л. Иванова

МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПУ РАН, Москва, Россия
 yvm@mail.ru, ivanovasvetlanamsu@gmail.com

В работе был синтезирован робастный регулятор в виде двух левых нулей и двух левых полюсов для управления положением плазмы для модели токамака Т-15МД методом QFT. Ввиду большого перерегулирования переходной характеристики была разработана двухкаскадная робастная система управления положением плазмы. Сначала был синтезирован робастный ПИД-регулятор внутреннего каскада для системы управления током в обмотке горизонтального поля, а затем робастный ПИД-регулятор внешнего каскада для управления положением плазмы методом QFT.

Ключевые слова: плазма, токамак, QFT, робастное управление

1. Метод QFT

Передаточная функция модели объекта управления — плазмы в токамаке Т-15МД — состоит из последовательного соединения передаточных функций моделей выпрямителя, катушки горизонтального поля, плазмы (рис. 1а) [1].

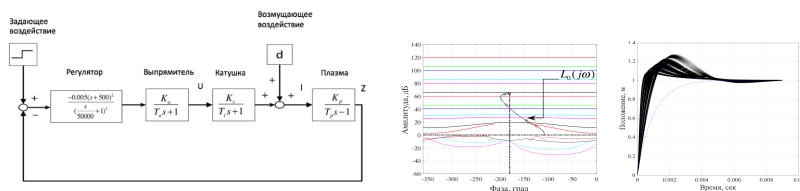


Рис. 1: а) Структурная схема управления вертикальным положением плазмы в токамаке б) Границы на диаграмме Николса и $L_0(j\omega)$ в) Переходные функции замкнутой системы для разных параметров звеньев модели объекта

При разработке робастных регуляторов все коэффициенты в модели объекта имели неопределенность 20%. При решении задачи синтеза регулятора использовалась теория количественной обратной связи (Quantitative Feedback Theory – QFT) [2]. Эта теория применяет построение характеристик, называемых QFT-границами, на диаграмме Николса: линии постоянного модуля и постоянной фазы замкнутой системы, изображенные в координатах амплитуда-фаза. Характеристики строятся для разных параметров системы (т.е. содержат всю информацию неопределенной модели), что позволяет использовать только номинальную передаточную функцию разомкнутой системы $L_0(j\omega) = P_0(j\omega)G(j\omega)$, где $P_0(j\omega)$, $G(j\omega)$ – АФЧХ номинальной модели объекта управления и регулятора, при построении диаграммы Николса. Если $L_0(j\omega)$ лежит выше границ пунктирной линии и ниже границ сплошной линии (границы с минимальной и максимальной амплитудой для $L_0(j\omega)$) для каждой частоты, значит система с робастным регулятором удовлетворяет всем заданным ограничениям. Это делается путем добавления полюсов и нулей или настройки коэффициентов ПИД-регулятора. Границы порождаются ограничением следующих характеристик: спецификации устойчивости $|T_1(j\omega)| = \left| \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_1(\omega)$, спецификации чувствительности к внешним воздействиям на вход объекта $|T_2(j\omega)| = \left| \frac{y(j\omega)}{d(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_2(\omega)$, спецификации слежения за управляющим воздействием $\delta_{3a} \leq |T_3(j\omega)| = \left| \frac{y(j\omega)}{d(j\omega)} \right| = \left| \frac{P(j\omega)}{1+P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{3b}(\omega)$. Представив частотные передаточные функции в полярной форме $P(j\omega) = pe^{j\theta}$, $G(j\omega) = ge^{j\phi}$, получим неравенства: $p^2(1 - \frac{1}{\delta_1^2})g^2 + 2p \cos(\varphi + \theta)g + 1 \geq 0$, $p^2g^2 + 2p \cos(\varphi + \theta)g + (1 - \frac{p^2}{\delta_2^2}) \geq 0$, $p^2g^2 + 2p \cos(\varphi + \theta)g + (1 - \frac{p^2}{\delta_3^2}) \geq 0$, $\delta_3 = \frac{\delta_{3b}}{\delta_{3a}}$. На каждой фиксированной частоте и фазе регулятора указанное выше неравенство имеет $g = |G(j\omega)|$ в качестве неизвестного параметра. Одно квадратное уравнение (равенство в ограничении спецификации) имеет два решения g_{min} , g_{max} , которые дают для выбранной частоты две границы при изменении ϕ в диапазоне $[-2\pi, 0]$ (рис. 16, рис. 26). QFT-границы для $L_0 = l_0 e^{j\psi_0} : l_{0max} e^{j\psi_0} = p_0 g_{max} e^{j\varphi}$, $l_{0min} e^{j\psi_0} = p_0 g_{min} e^{j\varphi}$, $\psi_0 = \varphi + \theta_0$.

2. Синтез робастных регуляторов для управления положением плазмы

При решении задачи управления положением плазмы были заданы три спецификации: $\delta_1 = 1.28$, $\delta_2(s) = \frac{0.001s}{0.001s+1}$, $\delta_{3a}(s) = \frac{s}{0.001s+1}$, $\delta_{3b}(s) = \frac{0.001s+1}{0.0000001s^2+0.001+1}$. Был синтезирован путем добавления полюсов и нулей робастный регулятор $G = 0.005(s + 500)^2 / (\frac{s}{50000} + 1)^2$. Для уменьшения перерегулирования было предложено встроить второй каскад. Первым этапом синтеза двухкаскадной системы является построение регулятора для последовательного соединения катушки с выпрямителем. ПИД-регулятор имеет следующие коэффициенты: $P = 0.000005$, $I = 0.00143$, $D = 0.000735$, $N = 19047$. Заданные спецификации для синтеза двухкаскадной системы управления положением плазмы: $\delta_1 = 1.28$, $\delta_2(s) = \frac{0.001s}{0.001s+1}$, $\delta_{3a}(s) = \frac{s}{0.0001s+1}$, $\delta_{3b}(s) = \frac{s}{0.0004s+1}$. Коэффициенты построенного второго ПИД-регулятора второго каскада для выхода Z: $P=7$, $I=0.07$, $D=70$, $N=0.00001$.

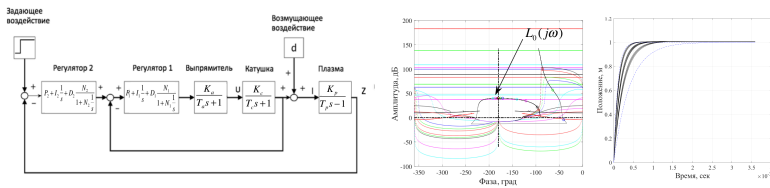


Рис. 2: а) Структурная схема двухкаскадной системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке б) Границы на диаграмме Николса и $L_0(j\omega)$ в) Переходные функции замкнутой системы для разных параметров звеньев модели объекта

Разработанные регуляторы для одноконтурной и двухкаскадной систем сохраняют работоспособность при повышении неопределенности коэффициентов модели плазмы до 40%. Вторая схема имеет нулевое перерегулирование и значения запасов устойчивости по амплитуде и по фазе больше, чем у первой схемы.

Список литературы

1. *Y.V. Mitrishkin, E.A. Pavlova, E.A. Kuznetsov, K.I. Gaydamaka.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // Fusion Engineering and Design. 2016. V. 108. P. 35–47.
2. *Garcia-Sanz M.* Robust Control Engineering. Practical QFT solutions. Taylor & Francis Group, 2017.

QFT Robust Controllers for Unstable Plant

Y. V. Mitrishkin, S. L. Ivanova

M. V. Lomonosov MSU, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of
RAS
yvm@mail.ru, ivanovasvetlanamsu@gmail.com

A robust controller was synthesized in the form of two left zeros and two left poles to control the unstable vertical position of the plasma for the T-15MD tokamak model by the QFT. Due to the large overshoot of the transient response, a two-cascade robust plasma position control system was developed by the QFT.

УДК 681.51:621.3.002.5:621.039.6:533.95

Двухкаскадная многоконтурная система управления формой плазмы в токамаке с развязкой каналов и робастными ПИД-регуляторами

Ю. В. Митришкин, В. И. Кружков

МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова
yvm@mail.ru, kruzhkov.vi14@physics.msu.ru

В работе синтезируется и моделируется двухкаскадная система управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2 (ФТИ им. А.Ф.Иоффе, г. С-Петербург). Объектом управления является линейная модель плазмы токамака. Первый каскад управляет токми в катушках полоидального поля, второй – формой плазмы. В обоих контурах используются развязывающие матрицы, полученные на основе матричной связи входа и выхода линейной модели объекта в установившемся режиме. В обоих каскадах использованы ПИД-регуляторы, настроенные методом QFT (Quantitative Feedback Theory). Полученная система управления с линейной моделью плазмы и нелинейной моделью инвертора тока как исполнительного устройства моделируется в среде MatLab/Simulink.

Ключевые слова: плазма, токамак, развязка каналов, QFT

1. Система магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М2

Система магнитного управления плазмой в токамаке Глобус-М2 [1] представлена на рис. 1. Целью этой работы является настройка ПИД-регуляторов и нахождение развязывающих матриц [2], обеспечивающих управление формой плазмы такое, что отсутствует статическая ошибка, малое перерегулирование (<10%) и достаточное быстродействие. Под смещением формы плазмы подразумеваются проекции смещений 6 точек на сепаратрисе плазмы на 6 выделенных направлений (рис. 2а). Для настройки системы используется линейная модель в пространстве состояний:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^{26}, \quad u \in \mathbb{R}^8, \quad y \in \mathbb{R}^{16}.$$

Задачу осложняет влияние каждого входа на каждый выход. Один из путей решения — использование развязки каналов.

2. Настройка регуляторов положения плазмы

Первым этапом настройки системы является настройка регуляторов положения плазмы. Для этого используется метод QFT [3], т.к. позволяет синтезировать робастные ПИД-регуляторы, что необходимо из-за наличия в системе тиристорных инверторов тока, работающих в автоколебательном режиме [4], которые аппроксимируются пропорциональным звеном, а также из-за наличия неопределенностей в модели плазмы. Идея метода QFT заключается в анализе годографа Никол-

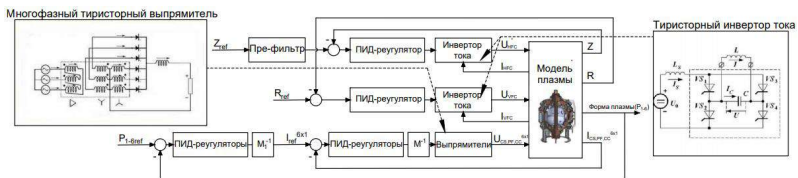


Рис. 1: Структурная схема системы управления положением и формой плазмы с развязкой каналов в токамаке Глобус-М2.

са разомкнутой системы, чем он дальше от точки $(-180^\circ, 0 \text{ дБ})$ — тем выше запасы устойчивости системы (рис. 2б).

3. Развязка каналов

После настройки ПИД-регуляторов положения плазмы в устойчивой системе можно найти матричную связь между входами и выходами

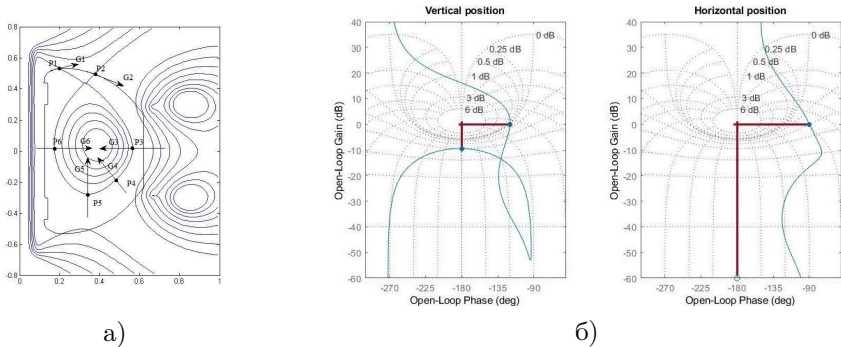


Рис. 2: а) Линии равного уровня полоидального магнитного потока и расположение точек P1-P6 — проекций формы плазмы. б) Диаграмма Николса вертикальной и горизонтальной разомкнутой системы с ПИД-регуляторами, настроенными методом QFT. Запасы устойчивости: 121° ; 155° , 5,94 дБ; 65,9 дБ.

в установившемся режиме. Внутренний каскад — каскад управления токами в RF-катушках, поэтому в данном случае в качестве выходных переменных — только токи в этих катушках. Тогда в уравнении в пространстве состояний (1) после настройки регуляторов положения, полагая $\dot{x} = 0$, получим:

$$(2) \quad Ax + Bu = 0, \quad y = Cx, \quad \Rightarrow y = \underbrace{-CA^{-1}Bu}_M$$

Таким образом, получаем матричную связь M между входом и выходом системы в установившемся режиме, обращением M получаем развязывающую матрицу. Затем настраиваются 6 ПИД-регуляторов методом QFT. Далее аналогично каскаду управления RF-токами настраивается каскад управления формой плазмы с матрицей M_1 .

4. Заключение

Введение развязывающих матриц в каскады управления токами в RF-катушках и формой плазмы позволяет проводить независимую настройку ПИД-регуляторов по каждому каналу. Это дает возможность применить метод QFT для настройки ПИД-регуляторов в токамаке Глобус-M2. Моделирование полученной системы показало ее работоспособность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (Проект № 17-19-01022).

Список литературы

1. *Minaev V.B., Gusev, V.K., Sakharov N.V.* Spherical tokamak Globus-M2: design, integration, construction, Nuclear Fusion 57 066047 (2017)
2. *Гудвин Г.К., Гребен С.Ф. Сальгадо М.Э.* Проектирование систем управления, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.
3. *Garcia-Sanz M.* Robust Control Engineering. Practical QFT solutions. Taylor & Francis Group, 2017.
4. *Kuznetsov E.A., Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M.* Current Inverter as Auto-Oscillation Actuator in Applications for Plasma Position Control Systems in the Globus-M/M2 and T-11M Tokamaks // Fusion Engineering and Design. 2019. V. 143. P. 247–258.

Two-stage Multi-variable Control System of Plasma Shape in Tokamak with Decoupling of Channels and Robust PID-controllers

Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzchkov

M. V. Lomonosov MSU, V. A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAS
yvm@mail.ru, kruzchkov.vi14@physics.msu.ru

Paper deals with Globus-M2 tokamak (Ioffe Inst., St.-Peterburg, Russia). Control system with decoupling was made for linear model of a plasma in the tokamak. Idea of decoupling is in reversing of matrix relationship between inputs and outputs of the system. PID-controllers in the system were tuned by QFT (Quantitative Feedback Theory). The approach is in the Nichols chart analysis of an open-loop system.

Управляемость в задаче стабилизации спутника при помощи магнитных моментов

В. М. Морозов, В. И. Каленова

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
moroz@imec.msu.ru, kalen@imec.msu.ru

Рассматривается стабилизация относительного равновесия спутника на круговой орбите, снабженного магнитной системой ориентации. Показано, что линеаризованная система уравнений движения относится к специальному классу линейных нестационарных по управлению систем, приводимых к стационарным. На основе приведенной стационарной системы исследуется управляемость и строятся работоспособные алгоритмы стабилизации. Результаты математического моделирования, подтверждают эффективность предложенной методики.

Ключевые слова: линейные нестационарные приводимые системы, управляемость, алгоритмы стабилизации, спутник, магнитные моменты.

1. Введение

Одним из распространенных методов ориентации и стабилизации является использование магнитных систем, принцип действия которых основывается на различных типах взаимодействия спутника с внешним магнитным полем. Линеаризованные модели рассматриваемых задач представляются линейными нестационарными системами (ЛНС), так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите. Зависимость коэффициентов во времени вносит существенные трудности, как в изучение управляемости, так и в разработку алгоритмов стабилизации. Предлагается новый аналитический подход к изучению рассматриваемой проблемы, основанный на приводимости исходной ЛНС к стационарной системе большей размерности [1, 2].

2. Основной результат

Рассматривается движение спутника вокруг центра масс в гравитационном поле Земли. Управляющий момент создается либо за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли [3], либо силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность космического аппарата [4]. Линеаризованные в окрестности положения относительного равновесия, в котором оси связанной

системы координат совпадают с осями орбитальной, уравнения управляемого движения имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + D_1 \dot{x}^{(1)} + R_1 x^{(1)} &= B_1(\tau)u, \\ \ddot{x}^{(2)} + R_2 x^{(2)} &= B_2(\tau)u. \end{aligned}$$

Здесь $x^{(1)} = [x_1, x_3]$, $x^{(2)} = x_2$; x_1, x_2, x_3 — малые углы рассогласования между осями орбитальной и связанной системами координат. Матрицы $B_i(\tau)$ в случае, когда управляющим моментом является собственный магнитный момент, имеют вид

$$B_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta_1 \sin \tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 \cos \tau & 0 \end{bmatrix}, B_2(\tau) = [-2\beta_2 \sin \tau, 0, \beta_2 \cos \tau].$$

Если управление формируется силами Лоренца, матрицы $B_i(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & \tilde{b}_2 \cos \tau + \tilde{b}_3 \sin \tau \\ -(b_2 \cos \tau + b_3 \sin \tau) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_2(\tau) &= [\tilde{b}_1, 0, 0]. \end{aligned}$$

Система (1) относится к классу ЛНС, содержащих управление, которая допускают приведение к стационарной системе большей размерности [1, 2]. Управляемость системы исследована, как исходя из анализа нестационарной системы (1), так и на основе приведенной стационарной системы. Показано, что нестационарная система (1) управляема при любых значениях моментов инерции спутника, тогда как для расширенной стационарной системы имеют место некоторые условия нарушения управляемости. Оптимальный алгоритм стабилизации строится на основе стационарной системы при квадратичном критерии качества. Проведено моделирование, подтверждающее эффективность предложенной методики.

Список литературы

1. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010.
2. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением. // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 576–588.
3. *M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Science. 2019. V. 109

4. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле. // Космич. исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.

Controllability of the Satellite Stabilized by Magnetic Torques

V. M. Morozov, V. I. Kalenova

Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia
moroz@imec.msu.ru, kalen@imec.msu.ru

In this paper the stabilization of the satellite with a magnetic orientation system is considered. It is shown, that such non-stationary system can be reduced to a stationary one and the control algorithm can be built. The efficiency of this algorithm is proved by computer modeling.

УДК 517.911.5

Об устойчивости селекторно-линейных периодических дифференциальных включений

М. В. Морозов

ИПУ РАН, Москва, Россия
miguel@ipu.ru

Рассмотрены селекторно-линейные периодические дифференциальные включения. С помощью вариационного метода, развитого Е. С. Пятницким, получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения и доказана эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости для рассматриваемого класса включений.

Ключевые слова: селекторно-линейные периодические дифференциальные включения, равномерная асимптотическая устойчивость, равномерная экспоненциальная устойчивость

1. Введение

Изучение систем управления привело к применению дифференциальных включений. Теория дифференциальных включений хорошо развита, однако в публикациях, посвященных периодическим по времени дифференциальным включениям, в основном рассматриваются

вопросы существования периодических решений. Немного работ посвящено исследованию свойств решений периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [1] доказано, что решения периодических дифференциальных включений с асимптотически устойчивым нулевым решением обладают в ряде случаев теми же свойствами, что и решения автономных дифференциальных включений. В [2,3] изучались периодические дифференциальные включения с асимптотически устойчивыми множествами, в частности установлен равномерный характер стремления решений к асимптотически устойчивому множеству, в случае однородности включения получена оценка решений экспоненциального вида. В [4] доказано, что решения периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством при малых возмущениях, не нарушающих периодичности и однородности включения, обладают свойством сохранения оценки экспоненциального вида.

В работе рассмотрены селекторно-линейные периодические дифференциальные включения. С помощью вариационного метода, развитого в [5], получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения и доказана эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости для рассматриваемого класса включений.

2. Основные результаты

Рассмотрим селекторно-линейное периодическое дифференциальное включение вида

$$(1) \quad \dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \{y : y = B(t)x, B(t) \in \Omega(t)\},$$

где $\Omega(t)$ ($\Omega(t+T) = \Omega(t)$) — произвольное выпуклое, компактное множество ($n \times n$) матриц, $F: R^{n+1} \rightarrow R^n$ — многозначное отображение. Предполагается, что элементы матрицы $B(t)$ являются периодическими с периодом $T > 0$, ограниченными и измеримыми функциями, а функция $x(t) \equiv 0$ является положением равновесия дифференциального включения (1).

Пусть $x_B(t, t_0, x_0)$ — решение с начальными условиями (t_0, x_0) , соответствующее матрице $B(t) \in \Omega(t)$. Рассмотрим функции

$$S(t, t_0, x_0) = \max_{B(t) \in \Omega(t)} \|x_B(t, t_0, x_0)\|^2,$$

$$r(t, t_0) = \max_{\|x_0\|=1} S(t, t_0, x_0), \quad t \geq t_0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы включение (1) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t, t_0) = 0$ равномерно по $t_0 \geq 0$.

Теорема 2. Для того, чтобы включение (1) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы включение (1) было равномерно экспоненциально устойчиво.

Список литературы

1. Морозов М.В. О свойствах периодических дифференциальных включений // Диф. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 612–617.
2. Морозов М.В. О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами // Труды ИСА РАН. 2017. Т. 67. Вып. 3. С. 13–19.
3. Морозов М.В. Оценка решений периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством // Труды ИСА РАН. 2018. Т. 68. Вып. 4. С. 101–103.
4. Морозов М.В. О малых возмущениях периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством // АиТ. 2019. № 5. С. 58–65.
5. Пятницкий Е.С. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // АиТ. 1970. № 1. С. 5–15.

On Stability of Selector-Linear Periodic Differential Inclusions

M. V. Morozov

Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia
miguel@ipu.ru

Selector-linear periodic differential inclusions are considered. The necessary and sufficient condition of asymptotic stability in the form of some limit relation is obtained by means of the variational method developed by E. S. Pyatnitskii and the equivalence of the properties of uniform asymptotic stability and uniform exponential stability for the considered class of inclusions is proved.

Компенсационный квадратичный регулятор маятникового акселерометра с функционалом качества управления на основе инвариантного эллипсоида

В. М. Никифоров, А. А. Гусев, К. А. Андреев

ФГУП «НППЦАП имени академика Н.А. Пилогина», Москва, Россия
v.m.nikiforov@gmail.com, andre900104@list.ru

Целью данной работы является нахождение для маятникового акселерометра, представленного математической моделью в форме пространства состояний, управляющего воздействия в цепи обратной связи, обеспечивающего минимизацию максимальной динамической ошибки акселерометра. В работе представлены результаты математического моделирования квадратичного регулятора с весовыми матрицами Q и R , определёнными исходя из максимальных значений инвариантного эллипсоида.

Ключевые слова: динамическая ошибка акселерометра, линейные матричные неравенства (LMI), инвариантный эллипсоид

1. Введение

На точность измерения акселерометра оказывает существенное влияние динамическая ошибка углового положения подвижной системы чувствительного элемента акселерометра, возникающая при появлении внешнего возмущения. Цель данной работы заключается в нахождении для маятникового акселерометра управляющего воздействия в цепи обратной связи, при котором будет минимизирована максимальная динамическая ошибка акселерометра. Объектом исследования является маятниковый акселерометр, представленный математической моделью в пространстве состояний.

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_1 \cdot u(t) + D \cdot w(t) \\ y(t) = C_y \cdot x(t) \\ z(t) = C_z \cdot x(t) + B_2 \cdot u(t) \end{cases},$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовое состояние

$z(t) \in \mathbb{R}^l$ – минимизируемый выход

$u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление

$w(t) \in \mathbb{R}^m$ – возмущение, ограниченное по L_∞ -норме: $|w(t)| \leq 1$
при $\forall t \geq 0$

При этом учитывается ограничение на максимальное управляющее воздействие $\mu = M_{\max}/k_i \cdot k_{dm}$, где $M_{\max} = 1.5 \cdot \text{ml} \cdot 50 \cdot \text{g}$ – максимальный развивающий момент датчика момента.

2. Квадратичный регулятор маятникового акселерометра с функционалом качества управления на основе инвариантного эллипсоида

В основе синтеза квадратичного регулятора, предложенного в работе, лежит обобщённый квадратичный функционал качества:

$$(2) \quad J[u(t)] = \int_0^{\infty} (x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t)) dt.$$

Одна из основных проблем при составлении функционала качества управления по формуле (2) заключается в отсутствии однозначности выбора весовых матриц Q и R . Весовые матрицы в работе определяются, как $Q = \text{diag} \left(\frac{1}{x_{\max}^2} \right)$ и $R = \text{diag} \left(\frac{1}{M_{\max}^2} \right)$.

Максимальные значения фазовых переменных и управляющего воздействия можно определить двумя способами:

1. По заданным конструктивным параметрам (максимальному углу «прокачки» подвижной системы чувствительного элемента и максимальному развивающему моменту датчика момента);
2. По максимальным отклонениям инвариантных эллипсоидов, полученных с помощью линейных матричных неравенств.

Во втором способе сначала формулируются равносильные поставленной задаче с использованием условия ограниченности функционала, после полученное условие ограниченности функционала при линейно-квадратичном законе управления представляется в виде линейных матричных неравенств. При этом ограничения формируются согласно требованиям к устойчивости системы. Для аппроксимации областей достижимости используются инвариантные эллипсоиды [1–3]. Применение инвариантных эллипсоидов обусловлено их простой структурой и прямой связью с квадратичными функциями Ляпунова, на которых основываются линейно-матричные неравенства и задача полуопределённого программирования [4].

3. Математическое моделирование переходных процессов

Проведено математическое моделирование переходного процесса изменения углового положения подвижной системы чувствительного элемента акселерометра при воздействии эквивалентного ускорения 1 g, подаваемое как функция Хевисайда, с различными регуляторами: номинальным регулятором, ЛМI-регулятором, квадратичным регулятором (LQR 1) с весовыми матрицами Q и R, определёнными исходя из конструктивных параметров, и квадратичным регулятором (LQR 2) с весовыми матрицами Q и R, определёнными исходя из максимальных значений инвариантных эллипсоидов.

Параметры качества переходных процессов с различными регуляторами представлены в таблице 1.

Таблица 2: Параметры качества переходных процессов с различными регуляторами

Регулятор	Максимальная динамическая ошибка (дуг. сек)	Время достижения максимального значения, мсек	Время управления, мсек	Статические коэффициенты усиления
Номинал.	75.6	2.31	30.6	—
ЛМI	31.7	1.45	22.0	$[2.5 \cdot 10^3; 7.8; 0.7]$
LQR 1	0.43	0.43	0.13	$[1.7 \cdot 10^5; 1.4 \cdot 10^3; 37]$
LQR 2	$2.6 \cdot 10^{-3}$	2.72	21.0	$[2.5 \cdot 10^7; 4.4 \cdot 10^4; 4.4 \cdot 10^4]$

4. Заключение

Максимальная динамическая ошибка акселерометра с предложенным квадратичным регулятором с функционалом качества на основе инвариантного эллипсоида незначительна при сохранении устойчивости системы, что подтверждено результатами математического моделирования. Однако высокие значения статических коэффициентов усиления данного регулятора приводят к уменьшению соотношения полезного сигнала к шуму.

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное линейно-квадратичное управление: от матричных уравнений к линейным матричным неравенствам // Автоматика и телемеханика. Москва: Наука, 2011. № 11. С. 60–69.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. Москва: Физматлит, 2007.
3. Никифоров В.М., Гусев А.А., Золотухин С.С., Жукова Т.А., Нижегородов А.А. Синтез регулятора обратной связи маятникового акселерометра с применением линейных матричных неравенств и построением инвариантных эллипсоидов. XXIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 326-328.
4. Никифоров В.М., Гусев А.А., Золотухин С.С., Жукова Т.А., Нижегородов А.А. Синтез анизотропных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределённого программирования и алгоритма поиска взаимнообратных матриц. Управление большими системами. Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. № 39. С. 95–137.

Compensation Quadratic Regulator of Pendulum Accelerometer With Functional of Quality Control Based on an Invariant Ellipsoid

V. M. Nikiforov, A. A. Gusev, K. A. Andreev

Academician Pilyugin Scientific-Production Center of Automatics and Instrument-Making, Moscow, Russia
v.m.nikiforov@gmail.com, andre900104@list.ru

The purpose of this paper is to find for the pendulous accelerometer represented by a mathematical model in the form of the state space, the control action in the feedback circuit which provides a minimum of dynamic maximum accelerometer error. The results of mathematical modeling quadratic regulator with weighting matrices Q and R , based on certain maximum values of invariant ellipsoid are present of this paper.

Влияние формы лопасти на спуск тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде

Ю. М. Окунев, О. Г. Привалова, В. А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
privalova@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

Проводится сопоставление траекторий спуска оперенного тела с лопастями в виде тонких пластин в форме шайбы и прямоугольника.

Ключевые слова: форма лопасти, режимы спуска, скорость спуска

1. Введение

Рассматривается задача о спуске тяжелого тела с лопастями в виде тонких пластин в форме шайбы и прямоугольника в сопротивляющейся среде.

Показывается, как форма лопасти влияет на скорость спуска тела в тривиальном режиме авторотации и в режиме установившегося вертикального спуска с постоянной скоростью.

2. Постановка задачи

Рассмотрим свободное падение динамически симметричного оперенного тела в невозмущенной атмосфере. На тело действует сила тяжести и аэродинамические силы. Оперение тела состоит из n одинаковых лопастей симметрично расположенных на теле. Лопасть устанавливается на угол β_i , который определяется как угол между плоскостью, проходящей через центры лопастей и нормалью к плоскости лопасти. Угол α_i атаки i -ой лопасти вводится как угол между вектором скорости точки O_i центра лопасти и плоскостью, жестко связанной с лопастью.

Лопасты представляют собой тонкие пластины в форме шайбы или прямоугольника, аэродинамические характеристики которых известны [1].

Считается, что аэродинамическое воздействие сводится к равнодействующей силе, приложенной к центру давления лопасти. Исследование движения проводится в рамках квазистатической модели воздействия среды на тело [2].

3. Режим авторотации

В силу симметрии рассматриваемой задачи в ней, очевидно, существует тривиальное стационарное решение (режим авторотации), отве-

чающее движению тела вдоль своей оси симметрии, ориентированной вертикально, с постоянной скоростью V_0 . При этом угловая скорость авторотации тела вокруг оси симметрии постоянна Ω_0 . В этом режиме углы атаки для всех лопастей одинаковы между собой $\alpha_i = \alpha$. Величина угла α удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$(1) \quad k(\alpha) + tg(\alpha + \beta) = 0,$$

где $k(\alpha) = c_l(\alpha)/c_d(\alpha)$ — аэродинамическое качество, c_l, c_d — коэффициенты подъемной силы и сопротивления, соответственно. Сумма всех внешних сил равна нулю, если вертикальная проекция скорости V_0 есть $V_0 = \sqrt{mgc_d^2(\alpha)/0.5nps[c_d^2(\alpha) + c_l^2(\alpha)]^{3/2}}$, где m — масса тела, ρ — плотность воздуха, s — площадь лопасти, n — число лопастей. Отсюда видно, что скорость спуска зависит от комбинации аэродинамических коэффициентов, которые являются функциями угла α , который в свою очередь является функцией установочного угла лопасти β , согласно (1). На рис. 1а представлена функция $P(\beta) = c_d^2(\beta)/[c_d^2(\beta) + c_l^2(\beta)]^{3/2}$ для обеих форм пластин: кривая L для лопасти в форме шайбы и H в форме прямоугольника. Из рисунка видно, чем больше угол β , тем меньше скорость спуска для обеих форм лопастей.

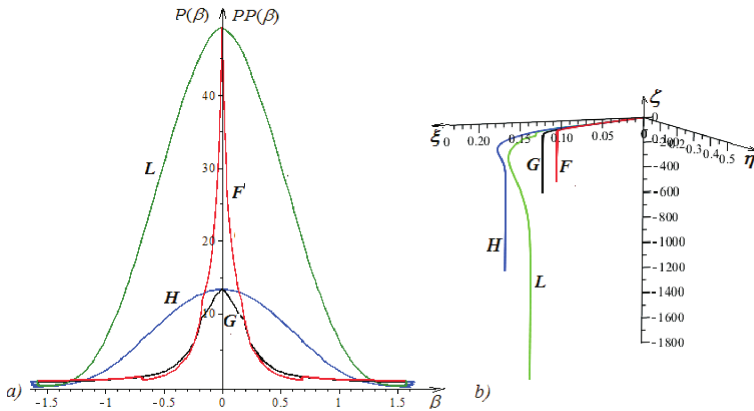


Рис. 1: а). Функции $P(\beta), PP(\beta)$. б). Траектории центра масс тела

Траектории центра масс в неподвижном пространстве в случае, когда значения $\beta_i = \beta = 0.5$ рад. и смещение центра масс вдоль оси динамической симметрии $R = 1$, удовлетворяют устойчивому режиму

авторотации [3], представлены на рис. 1*b*. Кривая L отвечает спуску тела с лопастью в виде шайбы, H в форме прямоугольника.

4. Режим установившегося вертикального спуска с постоянной скоростью

Рассмотрим спуск тела с четным числом лопастей, лопасти которого установлены на углы одинаковой величины, но с поочередной сменой знака. При таком расположении лопастей возможен режим устойчивого установившегося вертикального спуска с постоянной скоростью. В этом случае значения углов атаки равны значениям установочных углов лопастей $\alpha_i = \beta_i = \beta$, $\alpha_{2i} = \beta_{2i} = -\beta$ ($i = 1, \dots, n/2$). Вертикальная проекция скорости V_0 имеет вид $V_0 = \sqrt{mg/0.5n\rho s c_d(\alpha)}$. Таким образом, скорость спуска обратно пропорциональна коэффициенту $c_d(\alpha)$. Графики функции $PP(\beta) = 1/c_d(\alpha) = 1/c_d(\beta)$ для двух типов пластин: кривая F для шайбы и G для прямоугольника, представлены на рис. 1*a*.

Траектории центра масс тела в неподвижном пространстве для значений тех же параметров $\beta = 0.5$ рад. и $R = 1$, что для режима авторотации, на рис. 1*b* представлены кривыми F для лопасти в форме шайбы и G в форме прямоугольника. В соответствии с функцией $PP(\beta)$ скорость центра масс тела с лопасти в форме прямоугольника будет больше, чем для тела с лопастями в форме шайбы.

Таким образом, скорость центра масс тела на двух режимах спуска определяется функциями $P(\beta)$, $PP(\beta)$.

5. Заключение

Проведенное исследование позволяет оптимально выбрать углы установки лопастей и форму оперения для спуска тела с желаемой скоростью в режиме авторотации или в режиме вертикального спуска с постоянной скоростью.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00538).

Список литературы

1. Табачников В.Г. Стандартные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 2000. 1974. Вып. 1621. С. 79–93
2. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 73–78.
3. Okunev Yu M., Privalova O.G., Samsonov V.A. Influence of blade shape upon the auto-rotation stability // International Conference Stability and

Influence of Shape of a Blade Upon Descent of a Rigid Finned Body in Resisting Media

Yu. M. Okunev, O. G. Privalova, V. A. Samsonov

Institute of mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
privalova@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

Trajectories of descent of a finned body are compared with each other for two types of thin blades: disk and rectangle.

УДК 629.78

Биоинспирированные методы оптимизации в задачах управления КА

А.С. Охитина, Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
okhitina@phystech.edu, Rolduginds@gmail.com, stevens_l@mail.ru

Рассматривается задача трехосного управления угловым движением космического аппарата с использованием магнитных катушек. Для преодоления проблемы локальной неуправляемости, когда невозможно выдать управляющее воздействие в заданном направлении в данный момент времени, предложено использование вдохновленных природой (биоинспирированных) алгоритмов оптимизации. Проведен сравнительный анализ различных подходов.

Ключевые слова: биоинспирированные алгоритмы оптимизации, трёхосное управление, магнитные катушки

1. Введение

Магнитная система ориентации, используемая на малых космических аппаратах, плохо применима для решения задачи поддержания требуемой ориентации, так как компоненту возмущающего момента, направленную вдоль вектора магнитной индукции, компенсировать невозможно. Возникает проблема локальной неуправляемости аппарата. В этом случае можно рассматривать задачу стабилизации «в

среднем», которая решается с помощью методов оптимизации. Однако функционал для подобной задачи затруднительно построить в виде простой функции вектора состояния спутника и времени, что значительно усложняет применение непрямых методов оптимизации, в частности, принципа максимума. Обычно в последнем случае задачу решают в два этапа – приведение задачи поиска оптимального управления к краевой задаче и ее решение [1–3]. Современный обзор [4] содержит описание основных классических подходов в прямой оптимизации, однако такие подходы требуют хорошего начального приближения, и имеют невысокую точность.

Чтобы получить предварительное начальное приближение (или окончательное решение, пусть и с невысокой точностью), в представленной работе рассматриваются алгоритмы эволюционной оптимизации, которые используют модели поведения биологических систем [5, 6], в частности, метод роя [7]. Задача роя – найти наилучшие условия существования, которые задаются функционалом задачи, вид которого может быть произвольным, так как прямые методы связаны с его расчетом в ходе работы алгоритма. В частности, с помощью метода частиц можно найти примерный вид глобально оптимального решения, учитывая сложное ограничение на величину и структуру управления.

2. Метод роя

Метод роя основан на модели принятия решений каждой частицей роя (например, в стае птиц). Положение каждой частицы в рое задает возможное решение оптимизационной задачи. Решение о перемещении частица принимает на основе трех факторов: ее текущей скорости, знания о собственном лучшем состоянии и о лучшем состоянии всего роя. Ставится следующая оптимизационная задача для роя:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{U}} \Phi(\mathbf{x}),$$

где $\Phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал задачи, D – количество параметров, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ – вектор параметров, который задает положение частицы в пространстве поиска $\mathbb{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D \mid b_{low}^j \leq x^j \leq b_{up}^j, j = 1, \dots, D\}$, определяющем ограничения на величины параметров.

Для нахождения наилучшего положения рою отводится некоторый отрезок дискретного времени, разбитый на определенное количество моментов. Решение о том, какое положение занять, каждая частица принимает на основе своего положения в прошлый момент времени

$\mathbf{x}_i(k)$ и текущей скорости $\mathbf{v}_i(k+1)$:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{v}_i(k+1),$$

где

$$\mathbf{v}_i(k+1) = c_{in}\mathbf{v}_i(k) + c_{cog}U(0,1)[\mathbf{r}_i(k) - \mathbf{x}_i(k)] + c_{soc}U(0,1)[\boldsymbol{\rho}_i(k) - \mathbf{x}_i(k)],$$

$\boldsymbol{\rho}_i(k)$ — лучшее положение среди всех частиц роя (или для окрестности i -ой частицы).

Первое слагаемое в выражении для скорости отвечает за то, что частица стремится продолжить движение в том же направлении (инерционная компонента), второе за стремление к собственному лучшему положению (когнитивная компонента), а третье — за стремление к лучшему положению, найденному окружением частицы (социальная компонента). Вклад каждой компоненты варьируется с помощью коэффициентов c_{in} , c_{cog} , c_{soc} .

В работе используется два критерия остановки поиска — малая величина производной функционала и попадание всех частиц в некоторую окрестность найденного лучшего положения (стагнация роя).

3. Уравнение движения

Угловое движение КА описывается динамическим уравнением Эйлера:

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{возм}},$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ — тензор инерции спутника, $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость КА, $\mathbf{M}_{\text{возм}}$ — возмущающий механический момент, $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}$ — управляющий момент, где \mathbf{m} — дипольный момент КА, \mathbf{V} — вектор геомагнитной индукции. Таким образом, если векторы \mathbf{m} и \mathbf{V} коллинеарны, то управляющий момент выдать невозможно.

В первую очередь рассматривается модельная задача оптимальной по затратам энергии (топлива) переориентации. Функционал имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt,$$

где T — время совершения маневра.

Благодаря простоте функционала, оказывается возможным использовать принцип максимума. За счет этого удается проверить работу

метода роя и других биоинспирированных алгоритмов в сравнении с результатами, даваемыми классическим подходом; а также использовать их для получения первого приближения для решения краевой задачи принципа максимума.

Основная решаемая в работе задача — поддержание требуемой ориентации аппарата «в среднем». За счет вращения вектора геомагнитной индукции оказывается возможным поддержание орбитальной ориентации аппарата [8]. Однако проблема парирования возмущающего момента, направленного вдоль вектора геомагнитной индукции, остается открытой. При этом во многих миссиях, особенно миссиях малых аппаратов, нет необходимости все время поддерживать высокую точность ориентации. Достаточно либо иметь неплохую точность в среднем, либо высокую точность в течение части орбитального периода. Такая постановка — хорошая точность ориентации, в том или ином смысле осредненная за виток — не поддается формализации в виде функционала, пригодного для применения принципа максимума. Биоинспирированные методы, напротив, позволили эффективно решить поставленную задачу.

4. Заключение

Рассмотрена задача оптимизации углового движения аппарата, оснащенного магнитной системой ориентации, как для классического случая оптимальной по топливу переориентации, так и для поддержания требуемой ориентации аппарата «в среднем» с помощью вдохновленных природой алгоритмов.

Список литературы

1. *Junkins J.L., Carrington C.K., Williams C.E.* Time-Optimal Magnetic Attitude Maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1981. V. 4. № 4. P. 363—368.
2. *Bilimoria K.D., Wie B.* Time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 1993. V. 16. № 3. P. 446—452.
3. *Li F., Bainum P.M.* Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1990. V. 13. № 1. P. 38—45.
4. *Conway B.A.* A Survey of Methods Available for the Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 2012. V. 152. № 2. P. 271—306.
5. *Dan Simon.* Evolutionary optimization algorithms. Biologically-inspired and Population-Based Approaches to Computer Intelligence. WILEY, 2013
6. *А.П. Карпенко.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.

7. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // Proc. Int. Conf. Neural Networks. IEEE. 1995. V. 4. P. 1942–1948.
8. *Bhat S.P.* Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. № 11. P. 1725–1735.

Biologically Inspired Optimization Algorithms in Satellite Attitude Control Problems

A. S. Okhitina, D. S. Roldugin, S. S. Tkachev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia
okhitina@phystech.edu, Rolduginds@gmail.com, stevens_l@mail.ru

The three-axis magnetic control for satellite angular motion is considered. The problem is locally uncontrollable due to the restriction on the control torque direction. The latter cannot be applied along the geomagnetic induction vector. The controllability is proven on average. The biologically inspired optimization algorithms are proposed to find the optimal control torque that provides good average accuracy of the necessary attitude. The comparative analysis of various approaches is carried out.

Влияние средней частоты колебаний земного полюса на точность прогнозирования его положения

В. В. Перепелкин¹, Д. С. Румянцев²

МАИ, Москва, Россия¹, ИПУ РАН, Москва, Россия²
vadimkin1@yandex.ru, n3050@mail.ru

Предложен метод определения временного интервала, на котором происходит существенное изменение соотношения амплитуд чандлеровской и годичной компонент движения земного полюса (точки пересечение мгновенной оси вращения Земли с земной поверхностью). Так в течение нескольких десятков лет может успешно работать одна модель или семейство моделей прогнозирования, но при смене отношения амплитуд они становятся неприменимы и следует брать другие модели, более отвечающие новому движению. Результат используется для уточнения модели вращения Земли и выбора стратегии прогнозирования положения полюса, колебание которого из-за циркуляции атмосферы и океана носит нелинейный характер.

Ключевые слова: положение полюса Земли, чандлеровская и годичная компоненты движения

1. Введение

Годовое и чандлеровское движение полюса Земли – наиболее значимые и изучаемые компоненты в его движении. В работе рассматриваются возникающие эффекты при изменении амплитуд чандлеровской и годичной компонент. Для вычисления указанных амплитуд можно использовать разложение колебательного процесса в ряд Фурье. Авторы предлагают более простой способ обнаружить изменение соотношения амплитуд, что в конечном счёте влияет на выбор прогнозной модели движения полюса.

2. Основной результат

Вектор мгновенной угловой скорости ω движется в теле Земли, рассмотрим изменения во времени проекций ω на экваториальные оси. Уравнения (1) для проекций p , q получаются из решения динамических уравнений Эйлера–Лиувилля (теоремы об изменении вектора собственного кинетического момента вращения Земли в проекции на связанные оси) [1]:

$$(1) \quad \begin{aligned} p &= c_p + a_{ch} \cos(2\pi Nt + \alpha_{ch}) + a_h \cos(2\pi \nu t + \alpha_h), \\ q &= c_q + a_{ch} \sin(2\pi Nt + \alpha_{ch}) + a_h \sin(2\pi \nu t + \alpha_h). \end{aligned}$$

Чандлеровская частота N принимается постоянной и равной 0.843ν цикла в год, где ν — среднее движение Земли по орбите вокруг Солнца, равное 1 цикл в год. Время t измеряется в годах. Параметры $c_{p,q}$ — долгопериодические вариации вектора угловой скорости; a_{ch} , a_h , α_{ch} , α_h — амплитуды и фазы чандлеровской и годичной составляющих, соответственно, подлежащие вычислению по данным наблюдений и измерений, публикуемых Международной службой вращения Земли (МСВЗ) [2].

Т.о. модель движения полюса (1) учитывает годичную и чандлеровскую компоненты движения. С другой стороны, удобно провести амплитудно-частотный анализ колебательного процесса земного полюса, представив p , q в виде:

$$(2) \quad p = \omega(c_x + a \cos \psi), \quad q = -\omega(c_y + a \sin \psi),$$

где a и ψ — измеряемые угловыми величинами амплитуда и фаза результирующего движения полюса вокруг «среднего» положения с координатами (c_x, c_y) на поверхности Земли.

Выразим из (2) ψ , используя (1), усредним мгновенную частоту $\dot{\psi}$ обращения полюса вокруг «средней» точки на периоде модуляции чандлеровской и годичной гармоник $1/(\nu - N)$. В результате получим, что фаза $\langle \psi \rangle_T$ аппроксимируется функцией вида:

$$(3) \quad \langle \psi \rangle_T = \begin{cases} 2\pi\nu t, & \text{если } a_{ch} < a_h, \\ \pi(\nu + N)t, & \text{если } a_{ch} = a_h, \\ 2\pi Nt, & \text{если } a_{ch} > a_h. \end{cases}$$

Формула (3) даёт метод определения смены соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. В работе показано, что наблюдая за фазой ψ , можно установить интервал времени, на котором произошло изменение соотношения амплитуд.

График вариации полярного угла $\psi^{var} = \psi - Nt$ представлен на рис. 1, где выделяются два непродолжительных интервала (в пределах десяти лет каждый), на которых амплитуда годичной компоненты больше чандлеровской, а средняя частота обращения полюса вокруг средней точки оказывается близкой к годичной частоте. Таким образом, выявлен эффект смены колебательного режима полюса, заключающийся в скачкообразном изменении средней частоты $\langle \dot{\psi} \rangle_T$ квазистационарного колебательного процесса полюса, что приводит к изменению средней скорости его движения.

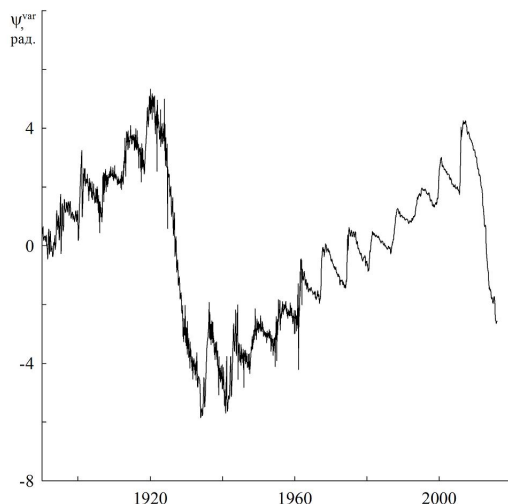


Рис. 1: Вариация фазы ψ^{var} за вычетом линейной части для интервала времени с 1890 по 2018 г.

3. Заключение

Как следует из (3), изменение средней частоты происходит, когда амплитуды годичной и чандлеровской гармоник становятся равными. Используя спектральный анализ и численную обработку данных измерений координат земного полюса, можно получить оценки амплитуд чандлеровской и годичной гармоник в зависимости от времени. Однако такие алгоритмы обладают большой вычислительной сложностью, что затрудняет их применение в реальном времени. Для модифицированной же модели прогноза нет необходимости в точном определении момента изменения колебательного режима и для решения задачи можно ограничиться анализом параметров результирующего модуляционного процесса. Достаточно установить произошедшие изменения средней частоты $\langle \psi \rangle_T$ за период модуляции гармоник с запаздыванием в той степени, в которой это позволяет сделать анализ функции $\psi(t)$ с помощью численной обработки данных измерений положения земного полюса.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г. Движение полюса Зем-

- ли // Доклады РАН. 2002. № 2. Т. 382. С. 199–205.
2. <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>

The Influence of the Average Frequency of Oscillations of the Earth Pole on the Accuracy of Predicting its Position

V. V. Perepelkin¹, D. S. Rummyantsev²

MAI, Moskva, Russia¹, ICS RAS, Moskva, Russia²
vadimkin1@yandex.ru, n3050@mail.ru

A method is proposed for determining the time interval at which a significant change in the ratio of the amplitudes of the Chandler and annual components of the Earth's pole motion (the point of intersection of the instantaneous axis of rotation of the Earth with the Earth's surface) is proposed. So for several decades one model or a family of forecasting models can work successfully, but when the amplitude ratio changes, they become inapplicable and other models should be taken that are more consistent with the new movement. The result is used to refine the model of the Earth's rotation and to select a strategy for predicting the position of the pole, whose oscillation due to the circulation of the atmosphere and the ocean is non-linear.

**Метод управления неголономной механической системой,
основанный на стабилизации связей**

А. В. Пестерев¹, И. В. Матросов², Ю. В. Морозов¹

ИПУ РАН, Москва, Россия¹

ООО Джавад джи Эн Эс Эс, Москва, Россия²

alexanderpesterev.ap@gmail.com, matrossov@gmail.com, tot1983@inbox.ru

Обсуждается метод решения задачи стабилизации механической системы со связями, основанный на применении техники стабилизации связей, применявшейся ранее для численного интегрирования уравнений движения пассивных механических систем со связями. В рамках исследуемого подхода цели управления трактуются как дополнительные связи, наложенные на систему, а сами управления, как реакции этих связей. Рассматривается применение предлагаемого метода для решения задачи об управляемом качении колеса по криволинейному профилю.

Ключевые слова: управляемые механические системы с ограничениями, алгебро-дифференциальные уравнения, численное интегрирование

Рассматривается задача стабилизации выходов $y_i(X)$, $i = 1, \dots, s$, механической системы с r связями $f_i(X) = 0$, $i = 1, \dots, r$, и s входами, где $X \in R^n$ — вектор состояния системы. Движение системы описывается уравнениями Ньютона или Лагранжа, линейно зависящими от реакций связей R_1, \dots, R_r и управлений u_1, \dots, u_s . Требуется найти управления $u_i = u_i(X)$, стабилизирующие в нуле выходы y_i , и соответствующее движение управляемой системы.

Введем обозначение N для m -вектора, включающего в себя реакции связей и управления, $N = [R_1, \dots, R_r, u_1, \dots, u_s]^T$, $m = r + s$, и запишем уравнения движения в пространстве состояний в виде:

$$(1) \quad \dot{X} = B(X)N + \tilde{F}(X), \quad X(0) = X_0, \quad t \in [0, t_1],$$

где $B(X)$ и $\tilde{F}(X)$ — $n \times m$ -матрица и вектор, не зависящие от N . Для удобства выкладок введем также обозначения: $f_{r+1} \equiv y_1, \dots, f_m \equiv y_s$. Требование стабилизации выходов для совместимого со связями движения системы эквивалентно выполнению уравнений

$$(2) \quad f_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

и поставленная выше задача стабилизации сводится к решению системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ) (1), (2), которая может быть решена с помощью разработанного авторами метода численного интегрирования пассивных механических систем, описанного в [1]. Идея метода заключается в следующем.

Обозначим через r_i порядок наименьшей производной по времени функции $f_i(X)$ в силу системы (1), которая явно зависит по крайней мере от одной компоненты вектора N [1]:

$$(3) \quad \frac{d^{r_i} f_i}{dt^{r_i}} = A_i(X)N + \dots, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $A_i(X)$ — вектор-строка, а многоточием обозначена сумма всех не зависящих от N членов. Вместо выполнения строго равенства $f_i(X(t)) = 0$ на решениях системы потребуем, чтобы i -ая невязка $f_i(X(t))$ удовлетворяла «эталонному» линейному дифференциальному уравнению порядка r_i , любое решение которого, соответствующее ненулевым начальным условиям, экспоненциально стремится к нулю. Выражая старшую производную i -ой невязки из эталонного уравнения и подставляя полученное выражение в (3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно N :

$$(4) \quad A(X)N + \varphi(X) = 0,$$

где $A(X)$ — $m \times m$ -матрица, составленная из строк $A_i(X)$, и $\varphi(X)$ не зависит от N . Пусть $A(X)$ обратима на многообразии, определенном уравнениями (2). Тогда, в некоторой окрестности многообразия $A(X)$ также обратима, и искомый вектор N находится как: $N(X) = -A^{-1}(X)\varphi(X)$. Подставляя полученное выражение для N в (1) и решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью любого метода численного интегрирования, получаем искомую траекторию движения управляемой системы.

Применим описанный выше метод для решения задачи об управлении качении колеса массы M и радиуса r по желобу, заданному уравнением $h(x, z) = 0$. Обозначим через x и z координаты центра колеса относительно горизонтальной и вертикальной осей неподвижной системы координат, а через θ угол поворота колеса. После освобождения от связей уравнения движения колеса принимают вид [1]:

$$(5) \quad M\ddot{x} = R_x, \quad M\ddot{z} = -Mg + R_z, \quad J\ddot{\theta} = Q + u, \quad \dot{\alpha} = U,$$

где g — ускорение свободного падения; J — момент инерции колеса; R_x, R_z и $Q = rR_z \cos \alpha - rR_x \sin \alpha$ — проекции силы реакции опоры на

оси координат и ее момент; α — угол между осью x и направлением из центра колеса в точку касания; и u — управляющий момент. Из условий движения без отрыва и проскальзывания, а также из определения угла α , находим алгебраические уравнения связей [1]:

$$(6) \quad h(x_a, z_a) = 0, \quad -\dot{x} \sin \alpha + \dot{z} \cos \alpha + r\dot{\theta} = 0, \quad h'_x \sin \alpha - h'_z \cos \alpha = 0,$$

где $x_a = x + r \cos \alpha$ и $z_a = z + r \sin \alpha$ — координаты точки касания колеса и кривой, а h'_x и h'_z — частные производные функции $h(x, z)$ в точке касания. Задача о неуправляемом ($u \equiv 0$) качении колеса сводится к решению системы АДУ (5), (6); ее решение подробно обсуждается в [1].

Выберем профиль кривой и начальные условия так, чтобы колесо без управления совершало периодические колебания и при этом $x(t) \in [-x_0, x_0]$. Поставим задачу «гармонизации» колебаний: найти $u = u(X)$ такое, что координата x меняется по гармоническому закону: $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Легко видеть, что рассматриваемая задача стабилизации приводится к виду (1), (2), если ввести обозначения $X = [x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}, \alpha]^T$, $N = [R_x, R_z, U, u]^T$ и переписать уравнения (5) в виде системы уравнений первого порядка, а под системой алгебраических уравнений (2) понимать систему (6), дополненную уравнением $x(t) - x_0 \cos \omega t = 0$. Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-00531а) и Программы Президиума РАН № 29 «Актуальные проблемы робототехнических систем».

Список литературы

1. Морозов Ю.В., Матросов И.В., Пестерев А.В. Использование подходов теории управления для численного интегрирования уравнений качения робототехнических систем // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2019). 2019. С. 460–464.

Control of a Nonholonomic Mechanical System Based on the Constraint Stabilization Technique

A. V. Pesterev¹, I. V. Matrossov², Yu. V. Morozov¹

Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia¹

Javad GNSS, Moscow, Russia²

alexanderpesterev.ap@gmail.com, matrossov@gmail.com, tot1983@inbox.ru

A method for stabilizing constrained mechanical systems that is based on the so-called constraint stabilization technique is proposed. It extends

the approach that was earlier employed for numerical integration of equations governing motion of passive constrained mechanical systems to the case of controlled systems. In the framework of the suggested approach, control goals are treated as additional constraints, and the controls themselves, as constraint reactions. The application of the method to the problem of stabilizing a wheel rolling along a curvilinear profile is considered.

УДК 517.977, 519.688

Применение нейросетевых алгоритмов оптимизации и дивергентных условий устойчивости в задачах моделирования управляемых систем с переключениями

А. А. Петров¹, О. В. Дружинина², О. Н. Масина³

Елецкий государственный ун-т им. И. А. Бунина, Елец, Россия^{1,3}

ФИЦ ИУ РАН и ИПУ РАН, Москва, Россия²

xeal91@yandex.ru, ovdruzh@mail.ru, olga121@inbox.ru

Рассмотрены возможности исследования управляемых систем с переключениями на основе применения нейросетевых алгоритмов оптимизации и дивергентных условий устойчивости. Предложено построение ряда классов обобщенных моделей систем с переключениями при учете нестационарных возмущений. Выполнен анализ устойчивости на основе свойств дивергенции векторных полей, задаваемых правыми частями дифференциальных уравнений. Для поиска оптимальных параметров управляемых систем разработаны нейросетевые алгоритмы оптимизации, реализованные в виде компьютерных библиотек. Результаты могут найти применение при решении задач стабилизации нелинейных управляемых систем, задач управления автоматизированными системами транспорта, задач качественного и численного анализа моделей систем с переключениями.

Ключевые слова: оптимизация, искусственные нейронные сети, устойчивость, системы с переключениями

1. Введение

Разработка инструментально-методического обеспечения для решения задач моделирования нелинейных управляемых систем с приме-

нием технологий искусственного интеллекта является одним из актуальных направлений исследований. В рамках этого направления существенный интерес представляют задачи анализа моделей управляемых систем с переключениями, решаемые на основе методов машинного обучения нейронных сетей [1–3].

Систему с переключениями можно представить в виде многорежимной динамической системы с законом переключения режимов, определяющим интервалы активности каждого режима. Ряд результатов, связанных с построением и устойчивостью систем с переключениями, представлен в [4].

В настоящей работе рассмотрены вопросы построения и анализа математических моделей с переключениями на основе искусственных нейронных сетей и численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен качественный анализ моделей на основе свойств дивергенции векторных полей, задаваемых правыми частями дифференциальных уравнений. Разработаны нейросетевые алгоритмы оптимизации и программное обеспечение.

2. Анализ систем с переключениями

Рассматриваются модели с переключениями, задаваемые дифференциальными уравнениями вида

$$(1) \quad m\ddot{x} = P \cdot T + mG + D, \quad P \in \Gamma,$$

где $x \in R^n$ – вектор состояний системы, G – вектор потенциального поля, $P - (n \times k)$ – матрица параметров системы, $T = (t_0 \ t_1 \ \dots \ t_k)^*$, Γ – дискретное отображение, ставящее в соответствие определенным моментам времени соответствующую матрицу коэффициентов, D – вектор внешних возмущений, который задается вектор-функцией $D(t, x)$. Предполагается, что для указанной функции выполняется условие $\forall t, x : \|D(t, x)\| < \lambda$, где λ – ограничение на максимальное возмущение. Частные случаи модели (1) рассмотрены в [5–7]. Изучена модель динамики летательного аппарата при условии минимальности расхода топлива [5]. Для (1) и частных случаев разработаны нейросетевые алгоритмы генерации переключений при наличии нестационарных возмущений.

Под дивергентным методом исследования качественных свойств понимается метод, позволяющий судить об этих свойствах решений на основе анализа свойств дивергенции поля скоростей динамической системы [8]. Указанный метод (часто в комбинации с методами функций Ляпунова) позволяет получить эффективные условия устойчивости [8, 9].

В настоящей работе для различных частных случаев системы с переключениями найден вид дивергенции поля скоростей. В предположении существования регулярной функции Ляпунова и неположительности дивергенции векторного поля в окрестности состояния равновесия для системы с переключениями, являющейся частным случаем системы (1), предложены условия устойчивости состояния равновесия. С помощью вычислительного пакета получены результаты верификации моделей, согласующиеся с дивергентными условиями устойчивости.

3. Модули программного комплекса и расширение возможностей алгоритмической инфраструктуры

Программный комплекс моделирования систем с переключениями адаптирован на базе процессора «Эльбрус 801-РС». Модули программного комплекса разработаны с использованием библиотек языка Python. Проведена серия вычислительных экспериментов. Программный комплекс состоит из нескольких структурных модулей: класса модели; параметрической оптимизации; генераторов переключений; искусственных нейронных сетей; обучения нейросетей; построения графических интерфейсов.

Модуль искусственных нейронных сетей содержит собственную реализацию на основе матрично-векторной алгебры, предоставляемой пакетом NumPy. В модуль построения графических интерфейсов входит блок вывода, который реализует процедуру вывода для построения траекторий движения модели и процедуру вывода для поиска оптимальных параметров модели.

В качестве перспективы развития нейросетевого подхода к моделированию систем с переключениями следует выделить: использование рекуррентных сетей с единичной задержкой, хранящих информацию о прошлых реализациях переключений; использование сетей каскадного обучения; использование сетей для поиска коэффициентов матриц, входящих в правые части уравнений движения.

Список литературы

1. Синицын И.Н., Дружинина О.В., Белоусов В.В., Масина О.Н., Петров А.А. Опыт разработки инструментально-методического обеспечения для решения задач моделирования нелинейных управляемых систем с применением технологий машинного обучения и отечественных программно-аппаратных средств // *Нелинейный мир*. 2019. Т. 17. № 4. С. 5–19.
2. Хайкин С. *Нейронные сети*. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.

3. *Плас Дж. В.* Python для сложных задач. Наука о данных и машинное обучение. С.-Пб.: Питер, 2018. 576 с.
4. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
5. *Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А.* Разработка алгоритмов поиска значений параметров моделей управляемых систем с учетом условия минимальности расхода топлива // Вестник РГРТУ. 2018. № 64. С. 46–54.
6. *Петров А.А.* Моделирование и построение алгоритма поиска оптимальных параметров управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными включениями // Нелинейный мир. 2017. Т. 15. № 4. С. 47–52.
7. *Druzhinina O. V., Masina O. N., Petrov A. A.* The synthesis of the controlled systems optimal parameters search algorithms // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Springer, 2019. V. 974. P. 308–320.
8. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1979. Т.15. № 4. С. 650–661.
9. *Дружинина О.В.* Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: Изд. группа URSS, 2013.

Application of Neural Network Optimization Algorithms and Divergent Stability Conditions in Modeling Problems of Controlled Switching Systems

A. A. Petrov¹, O. V. Druzhinina², O. N. Masina³

Bunin Yelets State University, Yelets, Russia^{1,3}

Federal Research Center «Computer Science and Control» of RAS and
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia²
xeal91@yandex.ru, ovdruz@mail.ru, olga121@inbox.ru

The possibilities of studying controlled switching systems based on the use of neural network optimization algorithms and divergent stability conditions are considered. The construction of a number of classes of switching systems generalized models with the inclusion of unsteady disturbances is proposed. The stability analysis is performed based on the vector fields divergence properties defined by the right-hand sides of differential equations. To search for optimal parameters of controlled systems, neural network optimization algorithms were developed and implemented in the form of computer libraries. The results can be used

in solving stabilization problems for nonlinear controlled systems, control problems for automated transport systems, problems of qualitative and numerical analysis of switching systems models.

УДК 517.977

Задача о многократной поимке заданного числа убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Удмуртский университет, Ижевск, Россия
kma3@list.ru, kma3@list.ru

Рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями всех участников и геометрическими ограничениями на управления игроков. Предполагается, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Цель преследователей — поймать заданное число убегающих, причем каждого убегающего необходимо поймать не менее, чем заданным числом преследователей. Получены достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, рекуррентная функция

1. Постановка задачи

В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей P_1, \dots, P_n и m убегающих E_1, \dots, E_m , описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0,$$

где $z_{ij}, u_i, v_j \in R^k$, V — строго выпуклый компакт R^k , $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k . Здесь и далее $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$. Считаем, что $z_{ij}^0 \notin M_{ij}$, где M_{ij} — заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\omega}(t) = A(t)\omega(t)$, $\omega(t_0) = E$, $\text{Int}X$, $\text{co}X$ — соответственно

внутренность, выпуклая оболочка множества X ,

$$\lambda(h_{ij}, v) = \sup\{\lambda \geq 0 : -\lambda(h_{ij} - M_{ij}) \cap (V - v) \neq \emptyset\},$$

$$\Omega_K(l) = \{(i_1, \dots, i_l) : i_p \in K, p = 1, \dots, l \text{ и попарно различны}\},$$

где K — конечное подмножество множества натуральных чисел.

Определение 1. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка убегающего E_β , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется момент $T > t_0$, что для любого допустимого управления $v_\beta(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ убегающего E_β найдутся допустимые управления $u_i(t, z_{ij}^0, v_j(t))$, $t \in [t_0, \infty)$ преследователей P_i множество $\Lambda \in \Omega_I(r)$, моменты времени $\tau_l \in [t_0, T]$, $l \in \Lambda$, что $z_{l\beta}(\tau_l) \in M_{l\beta} + D_\varepsilon(0)$ для всех $l \in \Lambda$, где $D_\varepsilon(0) = \{z : \|z\| < \varepsilon\}$.

Определение 2. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T > t_0$ при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, $j \in J$ убегающих найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s))$, $s \in [t_0, \infty)$, $j \in J$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, |M| = q, \{N_\alpha, \alpha \in M\}, N_\alpha \subset I, |N_\alpha| = r \text{ для всех } \alpha \in M,$$

$$N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset \text{ для всех } \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Определение 3. Функция $f : R^1 \rightarrow R^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in R^1$ существует $\tau(t) \in [a, a+T(\varepsilon)]$ для которых справедливо неравенство $\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon$. Функция $f : [t_0, \infty) \rightarrow R^k$ называется рекуррентной по Зубову на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : R^1 \rightarrow R^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Следует отметить, что в литературе ранее задача о многократной поимке [1] и задача о поимке заданного числа убегающих [2] рассматривались по отдельности.

2. Основной результат

Предположение 1. Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Предположение 2. Для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что

$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v) > 0$$

для всех $\beta \in M$.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha 1}^0, v) > 0.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда в игре Γ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 3. Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geq t_0$ и выполнено предположение 2. Тогда в игре $\Gamma(n, t)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 4. Пусть выполнено предположение 1, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Int co}\{z_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta}, \alpha \in \Lambda\} \text{ для всех } \beta \in M.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, t)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-51-41005).

Список литературы

1. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. матем. и механ. 1997. Вып. 5. Т. 61. С. 747–754.
2. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // АиТ 1996. № 6. С. 48–54.

The Problem of the Multiple Capture of a Given Number of Evaders in Linear Recurrent Differential Games

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva

Udmurt State University of Izhevsk, Russia
kma3@list.ru, kma3@list.ru

The article deals with the linear pursuit problem with n pursuers and m evaders with equal opportunities for all participants and geometric restrictions on the control of players. The evaders use program strategies, each pursuer catches no more than one evader. The goal of the pursuers is to catch a given number of evaders, and each evader needs to be caught no less than a certain number of pursuers. In this paper, a sufficient conditions are obtained for multiple capture of a given number of evaders.

УДК 531.36

Анализ устойчивости нелинейных механических систем с нестационарными потенциальными силами

А. В. Платонов

СПбГУ, С.-Петербург, Россия

В работе исследуется проблема устойчивости механических систем, находящихся под воздействием нелинейных диссипативных, гироскопических и потенциальных сил. Предполагается, что при потенциальных силах имеется нестационарный кусочно-монотонный коэффициент. Для анализа системы конструируются как одиночные, так и составные функции Ляпунова. Используемый подход позволяет обобщить известные результаты, полученные ранее для таких классов систем.

Ключевые слова: нелинейные нестационарные механические системы, устойчивость, функции Ляпунова

1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, описываемую уравнением

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial R(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{G}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - h(t) \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Здесь \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$ — n -мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, соответственно; квадратичная форма $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 1/2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ с симметрической положительно определенной матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ описывает кинетическую энергию системы. Будем считать, что матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ задана и непрерывно дифференцируема при $\|\mathbf{q}\| < \rho$ ($0 < \rho \leq +\infty$), и существуют положительные постоянные a_1, \dots, a_4 такие, что для всех $\|\mathbf{q}\| < \rho$, $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ справедливы неравенства

$$a_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq T \leq a_2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \quad \left\| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq a_3 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \quad \left\| \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| \leq a_4 \|\dot{\mathbf{q}}\|;$$

диссипативная функция Рэлея $R(\dot{\mathbf{q}})$ задана и непрерывно дифференцируема при всех $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$, положительно определена и является однородной порядка $\nu + 1$, $\nu > 1$; $\mathbf{G}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — непрерывная и ограниченная в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{q}\| < \rho$, $\|\dot{\mathbf{q}}\| < \eta$ ($0 < \eta \leq +\infty$) кососимметрическая матрица; потенциал $\Pi(\mathbf{q})$ — непрерывно дифференцируемая при всех $\mathbf{q} \in R^n$ положительно определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu \geq 1$; функция $h(t)$ — определена, непрерывно дифференцируема и положительна при $t \geq 0$.

Уравнение (1) имеет положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Если $h(t) \equiv \text{const} > 0$, то это положение равновесия асимптотически устойчиво. Система вида (1) с переменным параметром $h(t)$ исследовалась во многих работах (см., например, [1] и цитируемую там литературу). Однако, там в числе прочего предполагалось, либо стремление производной от параметра к нулю, либо наличие у параметра положительного среднего или предельного значения, либо монотонное изменение данного параметра на интервале $[0, +\infty)$. В настоящей работе будем считать, что на любом конечном временном промежутке функция $h(t)$ является кусочно-монотонной. Обозначим через $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ моменты времени, в которые происходит смена характера монотонности функции $h(t)$ с возрастания на убывание, или наоборот. Не умаляя общности, считаем, что общее число таких моментов бесконечно, причем на промежутке $[0, \tau_1]$ функция $h(t)$ убывает.

2. Условия устойчивости

Построим функции Ляпунова в виде [1]:

$$V_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = h(t)\Pi(\mathbf{q}) + T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \gamma \|\mathbf{q}\|^{\mu\nu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

$$V_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Pi(\mathbf{q}) + \frac{1}{h(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \gamma \|\mathbf{q}\|^{\mu\nu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}.$$

Здесь $\gamma > 0$. Для анализа устойчивости системы (1) будем использовать составную функцию Ляпунова $V_{\omega(t)}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, где $\omega(t) = 1$ при $t \in [\tau_{2i}, \tau_{2i+1})$, и $\omega(t) = 2$ при $t \in [\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2})$, $i = 0, 1, \dots$

Выберем $c > 1$ и построим числовую последовательность

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} L_i (c^{k-i} h^{p_{i+1}}(\tau_{i+1}) \dots h^{p_k}(\tau_k))^{-\rho}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\rho = (\mu\nu - 1)/(\mu + 1)$; $p_j = 1$, если j — четное, и $p_j = -1$, если j — нечетное, $j = 1, 2, \dots$; $L_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \dots$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют положительные постоянные a и b , такие что $a \leq h(t) \leq b$ при $t \geq 0$;

2) имеет место соотношение: $\psi_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1 предполагает отделенность функции $h(t)$ от 0. Рассмотрим теперь ситуацию, когда этого может не быть. Будем использовать единичную функцию Ляпунова вида [1]:

$$\tilde{V}_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = h(t)\Pi(\mathbf{q}) + T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \gamma h^\nu(t) \|\mathbf{q}\|^{\mu\nu-1} \mathbf{q}^T \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \gamma > 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) существуют положительная постоянная b и ограниченная функция $M(t)$, такие что $0 < h(t) \leq b$ и $|\dot{h}(t)| \leq M(t)h(t)$ при $t \geq 0$;

2) имеет место соотношение:

$$h^\rho(t) e^{-\rho J(t)} \int_0^t h^{(\nu+1)/(\mu+1)}(\tau) e^{\rho J(\tau)} d\tau \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $\rho = (\mu\nu - 1)/(\mu + 1)$, $J(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [\tau_{2i}, \tau_{2i+1}), \\ cM(t) & \text{при } t \in [\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, \quad c > 1.$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Указанный подход легко можно адаптировать для случая, когда функция $h(t)$ является кусочно-непрерывной на любом конечном интервале времени. Тогда система (1) может быть рассмотрена, как нестационарная система с переключениями.

Список литературы

1. Александров А.Ю., Платонов А.В. О сохранении устойчивости положений равновесия механических систем при эволюции потенциальных сил // Вестник ТюмГУ, 2010. № 6. С. 93–101.

Stability Analysis for Nonlinear Mechanical Systems with Non-stationary Potential Forces

A. V. Platonov

Saint Petersburg State University, Russia

In the paper, the stability problem for mechanical systems under the influence of nonlinear dissipative, gyroscopic and potential forces is investigated. It is assumed that there is a non-stationary piecewise monotone coefficient at potential forces. Both single and multiple Lyapunov functions are used for the analysis. Considered approach allows to generalize the known results obtained earlier for such classes of systems.

Стационарное оптимальное управление в дискретно-континуальной системе

В. Ю. Поляков¹, В. В. Саурин²,

Российский университет транспорта, Москва, Россия¹

ИПМех РАН, Москва, Россия²

pvy55@mail.ru, saurin@ipmnet.ru

В статье рассматриваются проблемы оптимального проектирования (стационарного оптимального управления) в многокомпонентной динамической несущей системе, включающей поезд, рельс на упругом основании, взаимодействующие с балочными мостами. При этом скорость движения достигает 400 км/ч. Ставится задача отыскания оптимального распределения свойств континуальной подсистемы (подрельсового основания) в смысле равномерного воздействия на основание при ограничении минимального усилия прижатия колеса к рельсу, при котором обеспечивается устойчивость колес против схода поезда.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод интегриродифференциальных соотношений

1. Постановка задачи оптимизации

Колебания рельса в глобальной системе координат (x, y_p) описываются уравнением

$$(1) \quad k_b \beta(x) \rho_p F_p \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} + c_p \left(\frac{\partial y_p}{\partial t} - \frac{\partial y_b}{\partial t} \right) + E_p J_p \frac{\partial^4 y_p}{\partial x^4} + \gamma(x) \beta(x) U'(y_p - y_b) + P(x, t) = 0.$$

Колебания K -го балочного пролетного строения из N (N — число пролетов) в локальной системе координат (x_k, y_k)

$$(2) \quad E_b J_0 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\alpha^A(x_k) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_k^2} \right) + \alpha^2(x_k) \rho F_0 \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + c \frac{\partial y_k}{\partial t} = c_p \left(\frac{\partial y_p}{\partial t} - \frac{\partial y_k}{\partial t} \right) + \gamma(x) \beta(x) U'(y_p - y_b),$$

где P_i — вертикальное усилие в контакте i -колеса и рельса, m — число вагонов в поезде, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $y(x)$ — управляющие функции, J_0 , U' —

начальные значения момента инерции и жесткости основания рельса, причем

$$P(x, t) = - \sum_{i=1}^{4m} P_i \delta(x - Vt + \Delta_i), \quad x_k = x - \sum_{j=0}^{k-1} l_j, \quad x \geq 0, \quad x_k \in [0, l_k],$$

Δ_i — расстояние от оси переднего сцепного устройства до i -колеса. Начальные условия приняты нулевыми для функций перемещений и их производных. Граничные условия:

Пролетные строения:

$$\frac{\partial^2 y_k(0, t)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 y_k(l_k, t)}{\partial x_k^2} = y_k(0, t) = y_k(l_k, t) = 0, \quad k = (1, N), \quad x_k \in [0, l_k],$$

Рельс:

$$\frac{\partial^2 y_p(0, t)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 y_p(l_k, t)}{\partial x_k^2} = y_p(0, t) = y_p(l_k, t) = 0,$$

L — длина расчетного участка. Дискретную подсистему «поезд» можно представить системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями. $\gamma(x)$ — функция, управляющая жесткостью пути деформативными свойствами элементов подрельсового основания. $\beta(x)$ — функция, управляющая шагом подрельсовых опор, также влияющая на жесткость пути.

В [1] были сформулированы критерии оптимальности подсистемы «путь». При минимизации функционала

$$(3) \quad D = \int_L \text{int}_T (\gamma(x)\beta(x)U'(y_p - y_b) - Q)^2 dx dt, \quad R_{min} > 23.8kH$$

требуется минимальное отклонение реакции подрельсового основания от некоторого заданного значения Q , не являющегося средним значением. Здесь L — длина зоны моста с подходами, T — время движения всего поезда по L . Из условия минимума (3) находится искомое оптимальное управление $\gamma(x)$ и $\beta(x)$, определяющее динамику системы.

2. Пример оптимизации

Безусловность выполнения критерия безопасности видна из приведенного рисунка, где показан пример оптимизации системы «мост-путь-экипаж» для поездов со скоростями 400 км/ч. На этом рисунке приведена управляющая функция $\gamma(x)$, изменение которой было разрешено в пределах $0,85 \leq \gamma(x) \leq 1,25$ и это ограничение выполнено.

Ввиду того, что под поездом деформации подрельсового основания на мосту (пролетных строений) превышают аналогичные на насыпи в 15 раз, оптимизация требует максимально разрешенного снижения жесткости на подходах (на 15% меньше установленного), а на мосту – наоборот, увеличения жесткости на 25% для компенсации значительных деформаций балки.

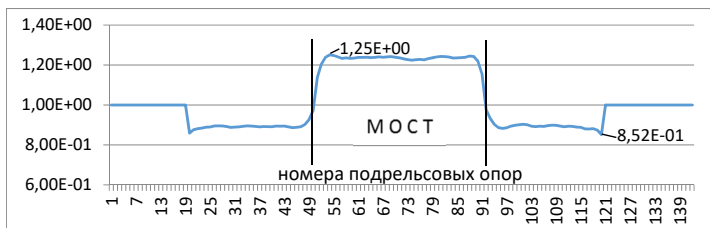


Рис. 1: Функция $\gamma(x)$ минимизирующая (3) при условии (4)

Работа выполнена в рамках Госзадания № АААА-А17-117021310380-1 и при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-01-00812, 18-08-01346, 18-29-03228, 19-01-00173).

Список литературы

1. Поляков В.Ю. Синтез оптимальных пролетных строений для высокоскоростной магистрали // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 35–42.

Stationary Optimal Control in a Discrete-continuous System

V. Yu. Polyakov, V. V. Saurin

Russian Transport Universitet, Moscow, Russia

IPM RAS, Moscow Russia

pvy55@mail.ru, saurin@ipmnet.ru

This paper discusses the problems of optimal design (stationary optimal control) in a multicomponent dynamic carrier system, including a train, a rail on an elastic base, interacting with beam bridges. In this case, the speed reaches 400 km/h. The problem is to find the optimal distribution of the properties of the continuum subsystem (under-rail base) in the sense of uniform impact on the base while limiting the minimum effort of pressing the wheel to the rail, which ensures the stability of the wheels against the derailment of the train.

Оптимальное управление в невыпуклых множествах

А. С. Попков

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
alexandr.popkoff@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления в системах ОДУ. Управление выбирается в классе кусочно-постоянных функций. Поиск управления ведется при наличии различных линейных ограничений на фазовые переменные и управление. Важной особенностью работы является рассмотрение невыпуклых множеств допустимых управлений. Изучается переход к нелинейным случаям.

Ключевые слова: оптимальное управление, невыпуклая оптимизация, управление в режиме реального времени, линейное программирование, дифференциальные уравнения, нелинейные управляемые системы, метод Габасова

1. Введение

В данной статье рассматривается задача оптимального управления (ОУ) при наличии различных выпуклых и невыпуклых ограничений на фазовый вектор в заданные моменты времени и на вектор управления. Описываемые алгоритмы основываются на подходе Габасова [1]: сведения линейной задачи ОУ с управлением в классе кусочно-постоянных функций к задаче линейного программирования. Важная особенность метода — управление ведется в режиме реального времени.

2. Линейная выпуклая задача

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления.

Движение рассматриваемого объекта описывается линейной системой ОДУ с управлением:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T].$$

Вектор фазовых переменных x имеет размерность n , вектор управлений u — m -мерный.

Первая группа ограничений — линейные ограничения на фазовые переменные в некоторые заранее заданные моменты времени:

$$(2) \quad P_l x(t_l) \leq p_l, \quad 0 < t_l \leq T, \quad l = \overline{1, r},$$

для определенности положим, что таких моментов времени — r штук, а число уравнений для каждого t_l равняется s .

Вторая группа ограничений — q линейных ограничений на управления:

$$(3) \quad Du \leq d.$$

Теперь выпишем представление компонент вектора управления в виде кусочно-постоянных функций с периодом квантования, равным T/N :

$$(4) \quad u_i(t) = u_{ik}, \quad t \in \left[\frac{(k-1)T}{N}, \frac{kT}{N} \right), \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Наконец, зададим целевую функцию как некоторую линейную комбинацию от фазового вектора в финальный момент T :

$$(5) \quad c^T x(T) \rightarrow \max.$$

Теорема 1. *Задача оптимального управления (1)–(5) может быть сведена к задаче линейного программирования.*

Размерность такой задачи — Nm переменных и $(rs + qN)$ ограничений. Причем в качестве искомым переменных выступают значения компонент управления на различных участках — u_{ik} .

3. Линейная невыпуклая задача

Пусть теперь в уравнениях (2) присутствуют ограничения типа "ИЛИ":

$$(6) \quad \begin{cases} P_l^{(1)} x(t_l) \leq p_l^{(1)}, \\ P_l^{(2)} x(t_l) \leq p_l^{(2)}, \\ \dots \\ P_l^{(\alpha)} x(t_l) \leq p_l^{(\alpha)}, \end{cases} \quad 0 < t_l \leq T, \quad l = \overline{1, r}.$$

То же самое для ограничений на управления (3):

$$(7) \quad \begin{cases} D^{(1)}u \leq d^{(1)}, \\ D^{(2)}u \leq d^{(2)}, \\ \dots \\ D^{(\beta)}u \leq d^{(\beta)}. \end{cases}$$

Ограничения таких видов появляются в невыпуклых пространствах. Например, когда объект управления должен обогнуть некоторый сторонний объект.

Теорема 2. *Задача оптимального управления (1), (4)–(7) может быть сведена к задаче целочисленного линейного программирования.*

В такой задаче — Nm вещественных переменных, $\lceil \log_2 \alpha r \rceil + \lceil \log_2 \beta \rceil$ бинарных переменных и $(\alpha rs + \beta qN)$ ограничений. Причем в качестве вещественных переменных выступают значения компонент управления на различных участках — u_{ik} , а в качестве бинарных — переключатели между различными группами ограничений.

4. Нелинейная задача

Подобный подход может быть распространен и на нелинейный случай.

Для нелинейной по фазовым переменным системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно воспользоваться приближенным алгоритмом поиска управления из [2, 3]. Тогда будет необходимо в режиме реального времени найти решения для N последовательных линейных задач, сведение которых было рассмотрено ранее.

В случае наличия нелинейностей в неравенствах (2)–(3) (или в неравенствах (6)–(7) для невыпуклой задачи) может быть осуществлен переход к задаче нелинейного программирования.

5. Заключение

Задачи ОУ во всех описанных постановках можно свести к задачам математического программирования различных типов. А их, в свою очередь, даже при больших размерностях можно эффективно решать при помощи различных программных пакетов (например, Gurobi Optimizer или CPLEX Optimizer).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-31-90033).

Список литературы

1. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // ЖВМ и МФ. 2000. Вып. 40. № 6. С. 838–859.
2. *Popkov A.S.* Application of the adaptive method for optimal stabilization of a nonlinear object // 2016 13th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference)(STAB). IEEEXplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7541215>
3. *Popkov A.S., Smirnov N.V., Smirnova T.E.* On modification of the positional optimization method for a class of nonlinear systems // ACM International Conference Proceeding Series. 2018. P. 46–51.

Optimal Control in Non-convex Sets

A. S. Popkov

Saint-Petersburg State University, Russia
alexandr.popkoff@gmail.com

In this paper reduction of optimal control problems is described. Control vector belongs to the class of piecewise constant functions. Non-convex and non-linear cases are considered. In each case control problem can be reduced to some type of mathematical programming problem.

О разрешимости линейных матричных неравенств при квадратичных ограничениях

Л. Б. Рапопорт¹, Т. А. Тормагов²

ИПУ РАН, Москва, Россия¹

Сколтех, Москва, Россия²

LBRapoport@gmail.com, tormagov@phystech.edu

Использование полуопределенной релаксации в задаче о знакоопределенности квадратичной формы при квадратичных ограничениях позволяет получить новые достаточные условия разрешимости линейного матричного неравенства (ЛМН) в случае, когда S-процедура не дает ответа. Приводится пример.

Ключевые слова: знакоопределенность квадратичных форм, S-процедура, линейное матричное неравенство

1. Введение и постановка задачи

Заданы квадратичные формы (КФ) $f_i(x) = x^T F_i x$, $i = 0, \dots, m$, и $g_j(x) = x^T G_j x$, $j = 1, \dots, k$, $x \in R^n$. Обозначим через $\alpha \in R^m$ вектор неизвестных параметров α_i , подлежащих выбору и $F(\alpha) = F_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i$, $f(x, \alpha) = x^T F(\alpha)x$. Рассматривается вопрос о том, при каких условиях на матрицы F_i , G_j существуют такой вектор $\alpha \in R^m$, что из условия $g_j(x) \geq 0$ и $x \neq 0$ следует $f(x, \alpha) < 0$:

$$(1) \quad \exists \alpha \in R^m : \{x \in R^n, x \neq 0 : g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, k\} \subseteq \{x \in R^n : f(x, \alpha) < 0\}.$$

Распространенный прием, названный S-процедурой, заключается в проверке условия

$$(2) \quad \exists \alpha_i, \tau_j \geq 0 : F_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i + \sum_{j=1}^k \tau_j G_j \prec 0,$$

где символы \prec, \succ (\preceq, \succeq) обозначают знакоопределенность (полуопределенность) матриц. Если $m = 1$, то (1) и (2) эквивалентны, см. [1]. Для случая $m = 2$ условия эквивалентности (1) и (2) исследованы в [2]. В общем случае, при $m > 1$, S-процедура дает только достаточные условия (1). Это свойство называется ущербностью S-процедуры при нескольких связях.

2. Полуопределенная релаксация и S-процедура

Для двух симметричных $n \times n$ матриц A и B определим скалярное произведение $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Тогда $f_i(x) = \langle xx^T, F_i \rangle$, $g_j(x) = \langle xx^T, G_j \rangle$. Обозначим $\mathcal{P} = \{X : X \succeq 0\}$ - острый выпуклый конус. Граница \mathcal{P}° конуса \mathcal{P} образована матрицами $\{X : \text{rank}(X) \leq n-1\}$. Внутренность $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ = \{X : X \succ 0\}$. Обозначим $\mathcal{P}_1 = \{xx^T : x \in R^n\} = \{X \in \mathcal{P}^\circ : \text{rank}(X) = 1\}$. Известно, что $\mathcal{P} = \text{Co}(\mathcal{P}_1)$. Задача (1) эквивалентна следующей

$$(3) \quad \exists \alpha \in R^m : \{X \in \mathcal{P}_1 \setminus \{0\} : \langle X, G_j \rangle \geq 0, j = 1, \dots, k\} \subseteq \{X \in \mathcal{P}_1 : \langle F_0(\alpha), X \rangle < 0\}$$

или, другими словами,

$$(4) \quad \exists \alpha \in R^m : \mathcal{K}_1(\alpha) = \{X \in \mathcal{P}_1 : \langle X, F(\alpha) \rangle \geq 0, \langle X, G_j \rangle \geq 0, j = 0, \dots, k\} = \{0\}.$$

Множество \mathcal{P}_1 есть невыпуклый конус. Замена \mathcal{P}_1 на выпуклый конус \mathcal{P} называется полуопределенной релаксацией, применив которую приходим к задаче проверки условия

$$(5) \quad \exists \alpha \in R^m : \mathcal{K}(\alpha) = \{X \in \mathcal{P} : \langle X, F(\alpha) \rangle \geq 0, \langle X, G_j \rangle \geq 0, j = 0, \dots, k\} = \{0\}.$$

Теперь, в силу теоремы двойственности (см. [3]), (5) эквивалентно существованию таких $\alpha_i, i = 1, \dots, m, \tau_0 > 0, \tau_j \geq 0, j = 1, \dots, k$, и матрицы $Y \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ$, что $\tau_0 F(\alpha) + \sum_{j=1}^k \tau_j F_j + Y = 0$, что эквивалентно выполнению (2). Таким образом, при замене области определения \mathcal{P}_1 на \mathcal{P} S-процедура неушербна.

3. Основной результат

Пусть S-процедура не дала ответа, т.е. линейное матричное неравенство (2) несовместно. Тогда в (5) выпуклый конус $\mathcal{K}(\alpha) \neq \{0\} \forall \alpha \in R^m$. При этом не исключается, что найдется такое $\alpha \in R^m$, что $\mathcal{K}_1(\alpha) = \{0\}$ и справедливо (1). Пусть при некотором α конус $\mathcal{K}(\alpha)$ не касается границы \mathcal{P}° . Тогда, в частности, в этом конусе нет элементов из $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}^\circ$. Следовательно, $\mathcal{K}(\alpha) \cap \mathcal{K}_1(\alpha) = \{0\}$. Тогда, поскольку $\mathcal{K}_1(\alpha) \subseteq \mathcal{K}(\alpha)$, то $\mathcal{K}_1(\alpha) = \{0\}$.

Теорема 1. Пусть найдется такое α , что $\mathcal{K}(\alpha) \neq \{0\}$ и $(\mathcal{K}(\alpha) \setminus \{0\}) \subset \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ$. Тогда выполняется (1).

Для случая $n = 2$ предложен численный метод проверки выполнения условия теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-00531).

Список литературы

1. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестник ЛГУ. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1971. № 1. С. 62–77.
2. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // J. Optim. Theory App. 1998. V. 99. No 3. P. 553–583.
3. *Balakrishnan V., Vanderberghe L.* Semidefinite Programming Duality and Linear Time-Invariant Systems // IEEE Trans. Automatic Contr. 2003. V. 48. №. 1. P. 30–41.
4. *Rapoport L.B.* Semidefinite relaxation and new conditions of signdefiniteness of quadratic forms under quadratic constraints // 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEEExplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408391>

On the Solvability of Linear Matrix Inequalities under Quadratic Constraints

L. B. Rapoport, T. A. Tormagov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia Skoltech,
Moscow, Russia

LBRapoport@gmail.com, tormagov@phystech.edu

The use of semidefinite relaxation in the problem of the sign-definiteness of a quadratic form under quadratic constraints allows us to obtain new sufficient conditions for the solvability of a linear matrix inequality (LMI) in the case when the S-procedure does not give an answer. Results are illustrated by an example.

Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями на нефиксированных отрезках времени

И. В. Расина¹, О. В. Даниленко²

ИПС РАН, Переславль-Залесский, Россия¹

ИПУ РАН, Москва, Россия²

irinarasina@gmail.com, olga@danilenko.org

Рассматривается один из классов гибридных систем: дискретно-непрерывные системы (ДНС) для случая, когда все однородные подсистемы нижнего уровня определены на нефиксированных отрезках времени и не только связаны общим функционалом, но имеют и свои собственные цели. На основе модификации достаточных условий оптимальности типа Кротова для указанных систем строится метод улучшения управления, позволяющий также определять моменты окончания этапов функционирования подсистем.

Ключевые слова: оптимальное управление, гибридные системы, дискретно-непрерывные системы

1. Модель дискретно-непрерывной системы

Математическая модель рассматриваемой ДНС имеет следующий вид.

Пусть задана абстрактная дискретная управляемая система [1]:

$$(1) \quad x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, \dots, k_F\},$$

где k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, x и u — соответственно переменные состояния и управления, f — оператор. Все указанные объекты — произвольной природы (возможно различной) для различных k , $\mathbf{U}(k, x)$, — заданное при каждом k и x множество, k_I, k_F — начальный и конечный шаги соответственно. На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, действует непрерывная система нижнего уровня

$$(2) \quad \dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c(z, t, x^c, u^c), \quad t \in \mathbf{T}(z) = [t_I(z), t_F(z)],$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad z = (k, x, u^d),$$

для которой на отрезке $[t_I(z), t_F(z)]$ задана промежуточная цель в виде

функционала:

$$I^k = \int_{\mathbf{T}(z(k))} f^k(t, x^c(k, t), u^c(k, t)) dt \rightarrow \inf.$$

При этом момент $t_F(z)$ не фиксирован и подлежит определению. Оператор правой части (1) имеет вид $f(k, x, u) = \theta(z, \gamma^c)$, где

$$\gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \Gamma^c(z),$$

$$\Gamma^c(z) = \{\gamma^c: t_I = \tau(z), x_I^c = \xi(z), (t_F, x_F^c) \in \Gamma_F^c(z)\}.$$

Здесь $z = (k, x, u^d)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющих на нижнем уровне роль параметров, u^d — переменная управления произвольной природы, $t_I = \tau(z)$, $x_I^c = \xi(z)$ — заданные функции z . Очевидно, что $t_I(k+1) = t_F(k)$, $t_F(k) - t_I(k) > 0$.

Решением этой двухуровневой системы считается набор $m = (x(k), u(k))$, где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = (u^d(k), m^c(k))$, $m^c(k) \in \mathbf{D}^c(z(k))$, (называемый *дискретно-непрерывным процессом*), где $m^c(k)$ — непрерывный процесс $(x^c(k, t), u^c(k, t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, а $\mathbf{D}^c(z)$ — множество допустимых процессов m^c , удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2) с дополнительными ограничениями при кусочно-непрерывных $u^c(k, t)$ и кусочно-гладких $x^c(k, t)$ (на каждом дискретном шаге k). Предполагается, что функции f^k обладают всеми необходимыми для существования функционалов I^k свойствами. Совокупность элементов m , удовлетворяющих всем выше перечисленным условиям, обозначим через \mathbf{D} и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов.

Для модели (1), (2) рассматривается задача о поиске минимума на \mathbf{D} функционала $I = F(x(k_F))$ при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x(k_I)$ и дополнительных ограничениях

$$x(k) \in \mathbf{X}(k), \quad x^c \in \mathbf{X}^c(z, t)$$

$\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c(z, t)$ — заданные множества.

На основе модификации достаточных условий оптимальности типа Кротова [2] для указанных систем строится метод улучшения управления, позволяющий также определять моменты окончания этапов функционирования подсистем. Приводится иллюстративный пример.

Список литературы

1. *Кротов В.Ф.* Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // ДАН СССР. 1967. Т. 172. № 1. С. 18–21.
2. *Расина И.В.* Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017). М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 699–701.

Discrete-continuous Systems with Intermediate Criteria on Non-fixed Time Intervals

*I. V. Rasina*¹, *O. V. Danilenko*²

Program Systems Institute, Peraslavl-Zalesky, Russia¹

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia²

irinarasina@gmail.com, olga@danilenko.org

We consider one of the classes of hybrid systems: discrete-continuous (DCS) systems for the case when all the homogeneous subsystems of the lower level are defined on non-fixed time intervals and are not only connected by a common functional, but also have their own goals. Based on the modification of the Krotov-type sufficient optimality conditions for these systems, a control improvement method is constructed. That also allows determining the moments of completion of the subsystems functioning stages.

Регулирование электромеханической системы в потенциальном поле при ограниченном управлении

Ю. М. Рассадин

ИПУ РАН, Москва, Россия
rassadin@ipu.ru

В работе рассмотрена задача регулирования электромеханической системы в поле силы тяжести в предположении, что развиваемое исполнительным устройством управляющее воздействие ограничено по модулю, и его не везде достаточно для преодоления силы тяжести. На основе блочного подхода и теории скользящих режимов предложен подход к синтезу закона релейной обратной связи с постоянной амплитудой. Приводится логика построения допустимой траектории для переходного процесса. В качестве объекта управления предлагается маятник, закрепленный на валу электродвигателя.

Ключевые слова: электромеханическая система, стабилизация

1. Введение

Классическими примерами электромеханических систем, при рассмотрении которых учитывается потенциальный характер поля силы тяжести, являются манипуляторы, подъемные краны, электромагнитные подвесы. Для таких объектов существует ряд постановок задачи управления, в которых управляющие воздействия полагаются ограниченными. Как следствие, возникают случаи, когда развиваемых усилий недостаточно для преодоления силы тяжести. Например, маятник на тележке теряет управляемость при углах отклонения, близких к $\pi/2$. В данной работе рассматривается подобная постановка задачи стабилизации в вертикальном положении тяжелого маятника, жестко закрепленного на валу двигателя постоянного тока (ДПТ), где максимального момента τ_{max} недостаточно для простого перевода системы из нижнего устойчивого положения равновесия в верхнее неустойчивое. Для преодоления этого барьера предлагается декомпозиция задачи стабилизации на два этапа, а именно начальная накачка энергии в колебания системы, которая позволит «проскочить» проблемный угловой сектор, и дальнейшая стабилизация маятника в заданном положении.

2. Постановка задачи

Математическая модель, описывающая физический маятник на валу ДПТ, соответствует системе

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= H^{-1}(\theta)(\tau - C(\theta, \omega)\omega - G(\theta) + \eta(t)), \\ \dot{\tau} &= -A\tau - D\omega + Bu, \end{aligned}$$

где θ – угол отклонения маятника от вертикального положения, ω – угловая скорость, τ – вращательный момент, развиваемый ДПТ, u – реальное управление, закон обратной связи для которого должен решать поставленную задачу, а именно обеспечить $\theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При начальных условиях $\theta(0) = \pi$ маятник не сможет совершить поворот в вертикальное положение, а остановится в некотором углу $\theta_{max} = \arcsin(\tau_{max}/mgl)$, где m – масса маятника, l – расстояние от оси вращения до центра массы. Такие методы синтеза обратной связи, как ПИД-регулятор, блочный подход [1] оказываются неприменимыми.

3. Синтез базового алгоритма

В работе [4] описан один из подходов к данной проблеме, который заключается в регулировании полной энергии объекта, которая описывается уравнением

$$(2) \quad \dot{E} = J\omega\dot{\omega} - mgl\omega\sin(\theta) = -\tau ml\cos(\theta)\omega$$

Конечная цель управления преобразуется в $E = 0$ при начальном условии $E_0 = -2mgl$. В новых координатах объект управления будет описываться уравнениями вида

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{e} &= -\tau ml\cos(\theta)\omega - \eta, \\ \dot{\tau} &= -A\tau - D\omega + Bu, \end{aligned}$$

где $e = E - E_{des}$ – невязка энергии маятника, а η включает все неучтенные модели. Так как возмущения не принадлежат подпространству управлений, и их нельзя непосредственно подавить с помощью входного сигнала, проведем синтез обратной связи в соответствии по вихревому алгоритму [2]. Запишем уравнения для поверхности скольжения s [3]:

$$(4) \quad \begin{aligned} s &= \tau - \tau^*, \\ \dot{\tau}^* &= -\alpha\tau^* - M\text{sgn}(e). \end{aligned}$$

Вихревой алгоритм обеспечивает асимптотическую инвариантность к неизвестным несогласованным возмущениям, в качестве которых рассматривается воздействие неучтенных моментов. Продифференцируем уравнение поверхности скольжения s в соответствии с (4):

$$\dot{s} = -A\tau - D\omega + Bu + \alpha\tau^* + M\text{sgn}(e)$$

Выбрав истинное управление в виде $u = -U\text{sgn}(s)$, при достаточно большой амплитуде U , можно обеспечить соотношение $\dot{s}s < 0$, а значит удовлетворить условия возникновения скользящего режима [3] и реализовать вихревой алгоритм. Тогда невязка энергии сойдется к нулю, что решает задачу накачки энергии маятника до требуемого значения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (Проекты № 18-01-00846а и № 20-01-00363а).

Список литературы

1. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А. и др., Принцип блочного управления // *Авт. Ч. I*. 1990. № 5. С. 3–13; *Ч. II*. 1990. № 6. С. 20–31.
2. С. А. Кочетков, В. А. Уткин Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями // *Авт. 2013*. № 7. С. 46–83.
3. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
4. K.J. Astrom, K. Furuta Swinging up a pendulum by energy control // *Automatica*. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 287–295.

Regulation of an Electromechanical System in a Potential Field with Limited Control

Yu. M. Rassadin

Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
rassadin@ipu.ru

The paper considers the regulation problem of the electromechanical system in the field of gravity under the assumption that the control action is limited in module, and it is not everywhere enough to overcome gravity. On the basis of block principle and theory of sliding modes the approach to synthesis of relay feedback with constant amplitude is offered. The design logics of an allowable trajectory for a transition process is given. A pendulum fixed on an electric motor shaft is offered as a control object.

Моделирование плоских вертикальных колебаний колеса с учетом неравновесных процессов в динамике шины

С. А. Решмин

ИПМех РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
reshmin@ipmnet.ru

Получена нелинейная система с переменной структурой для моделирования движения колеса с проскальзыванием во время старта и возникновением плоских вертикальных колебаний. Из-за нелинейности в модели шины управляющий крутящий момент влияет на силу нормальной реакции дороги, действующей на колесо. Основным допущением является предположение о невесомости шины и о ее квазистатическом равновесии в каждый момент времени. Также рассматриваются и изучаются более сложные режимы движения с неравновесными процессами в динамике шины. Представлены результаты численного моделирования управляемых движений.

Ключевые слова: система многих тел, вертикальные колебания колеса, сухое трение, проскальзывание, квазистатика, неравновесные процессы

1. Введение

Как показали исследования [1,2], частичная или даже почти полная потеря тяги транспортного средства с межколесным дифференциалом может произойти в результате маловероятного возникновения следующих относительно редких событий во время старта: развитие колебаний пары ведущих колес в вертикальной плоскости, рассинхронизация этих колебаний и их трансформация в устойчивые колебания в противофазе. При этом может наблюдаться проскальзывание и отрыв колес от дороги.

Для исследования эффекта возникновения колебаний отдельного колеса ранее была предложена математическая модель шины [3,4], которая была использована совместно с двухмассовой моделью передней стойки [5], учитывающей упругие элементы подвески. Прикладываемый к колесу управляющий момент выбирался постоянным, что приводило к возникновению колебаний в начальный момент и их последующему (причем ожидаемому) затуханию. В данном докладе будут представлены новые результаты моделирования, демонстрирующие эффект нарастания колебаний колеса.

2. Основной результат

Колесо состоит из диска a с заданными массой m_a и моментом инерции I_a относительно оси вращения и невесомой шины b , которая моделируется внешним полым невесомым твердым цилиндром радиуса r_b . Углы поворотов диска и цилиндра, отсчитанные от вертикали, обозначены через α , β . Смещение центра цилиндра b относительно центра диска a характеризуется относительными координатами x , y в прямоугольной системе координат в вертикальной плоскости, в которой происходят колебания. Потенциальная энергия взаимодействия диска и цилиндра задана в виде:

$$(1) \quad \Pi_{\text{tire}} = \frac{1}{2} [k_r^0(x^2 + y^2) + k_r^\varphi(x^2 + y^2)(\alpha - \beta)^2 + k_\varphi^0(\alpha - \beta)^2],$$

где k_r^0 , k_r^φ , k_φ^0 — заданные положительные постоянные. Такая упругая энергия шины соответствует следующим переменным коэффициентам радиальной и крутильной жесткости:

$$k_r = k_r^0 + k_r^\varphi(\alpha - \beta)^2, \quad k_\varphi = k_\varphi^0 + k_r^\varphi(x^2 + y^2).$$

Также заданы приведенная масса корпуса, коэффициент упругости пружины передней стойки и ее длина в свободном состоянии, коэффициент демпфирования амортизатора, коэффициент сухого трения в законе Амонтона-Кулона при проскальзывании колеса.

В начальный момент $t = 0$ времени крутящий момент отсутствует, диск, полый цилиндр (шина) и корпус неподвижны и находятся в равновесии. При $t > 0$ к диску прикладывается управляющий момент, но ради простоты считаем, что положение корпуса фиксируется в пространстве, а передняя стойка поддерживается в вертикальном положении за счет большой жесткости соответствующих элементов подвески, так что продольные движения и колебания диска полностью отсутствуют.

По сравнению с предыдущими упомянутыми во введении исследованиями [3,4] сделаны следующие дополнения и изменения. Во-первых, управляющий момент выбирается переменным по времени, например, в форме обратной связи по скорости изменения вертикального отклонения y :

$$(2) \quad M(t) = M_0 - K\dot{y}(t), \quad M_0 = \text{const} > 0, \quad K = \text{const} > 0,$$

что может соответствовать, например, вибрациям в трансмиссии. Расчеты подтвердили, что управление вида (2) может приводить к увели-

чению амплитуды колебаний колеса. Во-вторых, дополнительно предлагается принимать во внимание более сложные неравновесные процессы в динамике шины, которые могут возникать при некоторых параметрах системы. В случае, если в какой-то момент t^* квазистатическое равновесие невесомой шины невозможно, например, в области значительных горизонтальных отклонений x , полагаем

$$(3) \quad x(t^*) = 0,$$

считая при этом, что соответствующее время релаксации бесконечно мало. Отметим, что из результатов [3, 4] следует, что $\alpha(t^*) = \beta(t^*)$ при условии (3), и поэтому потенциальная энергия (1) минимальна.

3. Заключение

Для моделирования управляемого движения одного ведущего колеса использована адекватная модель шины, которая учитывает радиальную и крутильную жесткость шины, а также влияние радиальной деформации на крутильную жесткость и влияние крутильной деформации на радиальную жесткость. Модель является нелинейной и более сложной, чем упрощенная модель низкого порядка, где указанные коэффициенты упругости считаются постоянными, и лучше подходит для описания нежелательных плоских колебаний ведущих колес. При численном исследовании развития колебаний с нарастающей амплитудой дополнительно учтены неравновесные процессы в динамике шины. Дальнейшая работа будет направлена на определение причин рассинхронизации колебаний именно двух ведущих колес, приводящей затем к потере тяги транспортного средства.

Работа выполнена в ИПМех РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 18-11-00307).

Список литературы

1. *Решмин С.А.* Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // ДАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293.
2. *Решмин С.А.* Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 24–33.
3. *Glazkov T. V., Reshmin S. A.* A nonlinear tire model to describe an unwanted flat vibrations of the wheels // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 16. P. 268–273.
4. *Решмин С.А., Глазков Т.В.* Нелинейная модель с переменной структурой для моделирования плоских колебаний ведущих колес транспортного средства // Проблемы управления и моделирования в сложных си-

стемах: Труды XXI международной конференции. Самара: Офорт, 2019. Т. 1. С. 447–452.

5. *Hao D., Zhao C., Huang Y.* A reduced-order model for active suppression control of vehicle longitudinal low-frequency vibration // Shock and Vibration, Hindawi Publ. Corp. 2018. Article ID 5731347. P. 1–22.

Simulation of Flat Vertical Vibrations of the Wheel Taking into Account Non-equilibrium Processes in the Dynamics of the Tire

S. A. Reshmin

IPMech RAS, Bauman MSTU, Moscow, Russia
reshmin@ipmnet.ru

A nonlinear system with a variable structure is obtained for modeling the movement of a wheel with slippage during start and the occurrence of plane vertical vibrations. Due to the non-linearity in the tire model, the control torque affects the normal reaction force of the road acting on the wheel. The main assumption is the assumption of the weightlessness of the tire and its quasistatic equilibrium at every moment in time. More complex driving modes with non-equilibrium processes in tire dynamics are also considered and studied. The results of numerical simulation of controlled movements are presented.

Маятниковые движения космического аппарата с солнечным парусом, связанного тросом с гелиоцентрической космической станцией

А. В. Родников

МАИ(НИУ), Москва, Россия
avrodnikov@inbox.ru

Рассматривается движение космического аппарата (КА) с управляемым солнечным парусом, связанного тросом с гелиоцентрической станцией. Решаются задачи перемещения КА вдоль плоских сечений сферы, ограничивающей его движение относительно станции, с помощью движений, аналогичных возмущенным движениям сферического маятника или некоторым их обобщениям.

Ключевые слова: солнечный парус, космическая тросовая система, сферический маятник

1. Введение

Давление солнечного света, как показывают современные теоретические исследования и практические эксперименты, является хорошим подспорьем при реализации различных космических миссий [1]. Однако, в некоторых ситуациях сила, им продуцируемая, оказывается основной силой, вызывающей движение. Рассмотрим, например, космическую тросовую систему, состоящую из связанных тросом тяжелой гелиоцентрической орбитальной станции и легкого космического корабля, снабженного солнечным парусом. Будем изучать движение космического корабля в орбитальной системе отсчета, считая ее началом точку закрепления троса на станции, описывающую круговую орбиту с радиусом, близким к 1 а.е. В этом случае движение корабля оказывается ограниченным некоторой сферой. Если считать, что солнечный парус является отражающей плоскостью, отношение площади которой к массе корабля превышает $1 \text{ м}^2/\text{кг}$, а трос имеет длину от 1 до нескольких километров, то, как нетрудно вычислить, сила солнечного давления, объективно малая по величине, оказывается на несколько порядков больше разности гравитационной силы и переносной силы инерции. Кориолисова сила при этом оказывается на два-три порядка меньше силы давления солнечного света и может рассматриваться как малое возмущение. Тогда, если допустить, что солнечный парус можно поворачивать под любым углом по отношению к солнечным лучам, оказываются возможными движения корабля как от Солнца так и в

сторону Солнца вдоль любых плоских сечений ограничивающей сферы, плоскости которых или содержат местную вертикаль, или пересекают ее в точке, расположенной не ближе к Солнцу, чем выбранное начало отсчета. Эти движения могут быть описаны как возмущенные маятниковые и конические движения сферического маятника, что, в частности, позволяет решать задачу перемещения корабля между двумя точками с нулевыми начальной и конечной скоростями. Некоторые дополнительные алгоритмы управления парусом позволяют ускорять или замедлять рассматриваемые движения.

2. Уравнения движения

Если рассматривать трос как идеальную неударживающую связь, уравнения движения космического корабля A массы m с парусом площади S , в орбитальной системе отсчета с началом в точке B в безразмерных переменных можно записать как

$$(1) \quad \mathbf{r}'' = n_x^2 \mathbf{n} - 2\varepsilon[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}'] + \lambda \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{BA}$, \mathbf{n} — единичная нормаль к солнечному парусу, n_x — проекция \mathbf{n} на местную вертикаль ($n_x \geq 0$, если считать местную вертикаль направленной от Солнца), \mathbf{e}_z — орт угловой скорости орбитальной системы отсчета, λ — множитель Лагранжа ($\lambda \leq 0$), штрихом обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \sqrt{pS/(am)}t$, p — характеристическая величина солнечного давления, a — длина троса, $\varepsilon = \omega\sqrt{am/(pS)}$ — безразмерный параметр, в рассматриваемой ситуации являющийся величиной порядка 10^{-3} .

Выбрав длину троса единицей безразмерной длины, будем рассматривать только движения точки A по сфере $|\mathbf{r}| = 1$. В этом случае, если пренебречь величинами порядка ε , должно выполняться условие $-\lambda = (\mathbf{r}', \mathbf{r}') + n_x^2(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \geq 0$. Заметим, что если при этом \mathbf{n} неизменна в орбитальной системе отсчета, уравнения (1) превращаются в уравнения движения сферического маятника.

3. Маятниковые и конические движения

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ и $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 = \text{const}$ проекция кинетического момента точки A на \mathbf{n} является первым интегралом (1). Если константа этого интеграла равна нулю, движение космического корабля аналогично движению математического маятника. Это дает возможность перемещать космический корабль между двумя точками сферы $|\mathbf{r}| = 1$ с нулевыми начальной и конечной скоростями, направляя \mathbf{n} параллельно биссектрисе меньшего из углов между радиус-векторами

этих точек. Движение при этом возможно в обоих направлениях, но только если угол между биссектрисой и местной вертикалью будет острым.

Если же константа интеграла не равна нулю, то возможны конические движения, когда точка A описывает плоское сечение сферы $|r| = 1$. Нетрудно показать, что такие движения существуют для любых начальных значений r и r' . Более того, коническое движение возможно вдоль любого сечения, плоскость которого пересекает местную вертикаль в точке, расположенной не ближе к Солнцу, чем B . При движении вдоль сечения, не являющегося большой окружностью, n ортогональна его плоскости и $|r'| = n_x \sqrt{1 - \rho^2} / \sqrt{\rho}$, где ρ - расстояние от плоскости сечения до B .

Так как на самом деле $\varepsilon \neq 0$, хотя и мало, для реализации маятниковых и конических движений положим $n = n_0 + \varepsilon n_1$. Поправки n_1 выводятся из (1) при условии сохранения траектории и периода движения, а также (для маятникового движения) нулевых начальной и конечной скоростей.

4. Некоторые обобщения

Если допустить возможность изменения направления нормали n во время движения, можно ускорять и замедлять маятниковые и конические движения. В частности, движение вдоль сечения, ортогонального местной вертикали, оказывается возможным в любом направлении с любой скоростью, не превышающей v_{\max} , где

$$(2) \quad v_{\max}^2 = \frac{\sqrt{6}}{36\rho} \left(\sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{9 - \rho^2} + 3 - 3\rho^2 \right) \sqrt{3 + \rho^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{9 - \rho^2}}.$$

Список литературы

1. Поляхова Е.Н., Космический полет с солнечным парусом. М.: ЛИБРОКОМ, 2011.

Pendulum Motions of a Spacecraft Equipped with a Solar Sail and Tethered to a Heliocentric Space Station

A. V. Rodnikov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia
avrodnikov@inbox.ru

Motions of a spacecraft equipped with a controlled solar sail and tethered to a heliocentric station is considered. The problems of the

spacecraft relocation along flat sections of a sphere restricting its motion relative to the station are solved using motions similar to perturbed motions of the spherical pendulum or to some generalizations of them

УДК 629.7.15 : 528.852

Идентификация и стохастическая оптимизация управления движением БПЛА в турбулентной атмосфере

Н. Е. Роднищев

КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева, Казань, Россия
nrodnishev@yandex.ru

В классе диффузионных Марковских процессов рассматриваются задачи идентификации нелинейных стохастических систем со случайными параметрами, мультипликативными и аддитивными шумами, функциями управления и вектором состояния в конечный момент времени. Представляются разработанные методы идентификации и стохастической оптимизации параметров автопилота беспилотного летательного аппарата (БПЛА) при поворотном маневре его движения по курсу с ветровыми возмущениями, вызванными атмосферной турбулентностью.

Ключевые слова: аэрокосмическая техника, беспилотный летательный аппарат, закон управления, идентификация, стохастическая оптимизация

1. Введение

Изучается проблема идентификации вектора параметров $\mathbf{a} \equiv \{a_i\} \in \mathbb{R}^m$ и векторной функции управления $\mathbf{u} \equiv \{u_i\} \in \mathbb{R}^f$ нелинейной стохастической системы

$$(1) \quad \begin{aligned} dy_i = & \sum_{j=1}^n (C_{ij}(t, \mathbf{b}) dt + dw_{ij}(t)) \phi_{ij}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ & + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t, \mathbf{y}, \mathbf{b}) d\eta_j(t), \quad i \in \mathbb{N}_1^n, \quad t \in [t_i, t_f] \end{aligned}$$

с вектором состояния $\mathbf{y} \equiv \{y_i\} \in \mathbb{R}^n$ при начальном условии $\mathbf{y}_i = \{y_{ii}\}$, где $\mathbb{N}_1^n \equiv [1, 2, \dots, n]$, и наблюдениях

$$(2) \quad z_k = \sum_{\nu=1}^n c_{k\nu} y_\nu + \dot{w}_k(t), \quad k \in \mathbb{N}_1^p.$$

Эффективность идентификации оценивается по функциональному минимуму цели управления

$$(3) \quad I_0(u, a) = \int_{t_i}^{t_f} M \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \left(z_k - \sum_{\nu=1}^n c_{k\nu} y_\nu \right)^2 \right] dt,$$

а технические и оперативные требования к системе определяются ограничениями на её конечное состояние типа равенства

$$(4) \quad I_s = M[f_s(\mathbf{y}_f)] - c_s = 0, \quad s \in \mathbb{N}_1^q.$$

Здесь $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания; t_i и t_f – начальная и конечная точки временного интервала; $\mathbf{y}_f \equiv \{y_{fi}\} = \mathbf{y}(t_f)$. Изучается как программное управление $\mathbf{u}(t)$, так и управление с обратной связью $\mathbf{u}(t, y)$. Столбец \mathbf{a} определяет управляющие параметры структурных и энергетических свойств системы; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ – случайный вектор, компоненты которого относятся к непрерывным случайным величинам, характеризующим, в частности, отклонения параметров системы \mathbf{a} от их номинальных значений; $dw_{ij}(t) = W_{ij}(t)dt$ и $d\eta_j = N_j(t)dt$ – стохастические дифференциалы Стратоновича для винеровских процессов типа мультипликативных $w_{ij}(t)$ и аддитивных $\eta_j(t)$ шумов, $W_{ij}(t)$ и $N_j(t)$ – белые гауссовские шумы, $C_{ij}(t, \mathbf{b})$, $\varphi_{ij}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ – заданные детерминированные функции, удовлетворяющие требованиям существования решения (1), и $\mathbf{z} = \{z_k\} \in \mathbb{R}^p$ – вектор координат наблюдений тестера z_k , $p \leq n$. Матрица $(c_{k\nu})$ определяет выбор координат наблюдаемой системы (1), $\dot{w}_k(t)$ является производной винеровского процесса, $w_k(t)$ – компонент аддитивного белого шума в тестере, $I_s(\mathbf{u}, \mathbf{a})$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функционалами на множестве переменных, $I_0(\mathbf{u}, \mathbf{a})$ – ограниченный функционал, дифференцируемый на множестве переменных, и, наконец, α_k – весовые коэффициенты. Разработанный подход к решению проблемы (1) – (4) основан на формировании необходимых условий идентификации в терминах сопряжённых конусов общей теории экстремальных задач, полученные теоретические результаты опубликованы в монографии [1].

Задача статьи состоит в применении методов математической статистики по апостериорным семиинвариантам [2] для идентификации и оптимизации параметров автопилота БПЛА при развороте его движения по курсу с турбулентными ветровыми возмущениями.

2. Оптимизация параметров автопилота БПЛА

При угловой скорости $\omega_y^* = \text{const}$ разворот курсового движения БПЛА в стандартных обозначениях описывается уравнениями

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{\beta} &= k_\gamma \gamma - k_\beta (\beta + \beta_w) + \alpha_o \omega_x + \omega_y; \\ \dot{\omega}_x &= -L_\beta (\beta + \beta_w) + L_\delta \delta - L_x \omega_x - L_y \omega_y - l_e i_y^e \omega_y^*; \\ \dot{\omega}_y &= -N_\beta (\beta + \beta_w) - N_x \omega_x - N_y \omega_y; \quad \dot{\gamma} = \omega_x; \quad \dot{\psi} = \omega_y; \\ \dot{\delta} &= \omega_y - \omega_y^*; \quad \dot{\beta}_w = -q_x \beta_w + \sigma_{\beta_w} \sqrt{2q_x} N(t), \end{aligned}$$

где $q_x = V_o/L_{w_x}$ при воздушной скорости V полета БПЛА и масштабе турбулентности L_{w_x} ; $\sigma_{\beta_w} = \sigma_{w_x}/V_o$ при значении СКО σ_{w_x} интенсивности турбулентности, $N(t)$ – стандартный белый шум и α_o – балансировочный угол атаки. Здесь применяются параметры L и N с различными индексами, которые связаны линейными соотношениями с коэффициентами БПЛА и его автопилота. Для моделирования турбулентности ветра используется угол скольжения β_w в виде гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью $S(\omega) = (2/\pi) \sigma_{w_x}^2 L_{w_x} / (1 + \omega^2 L_{w_x}^2)$, что представляется дифференциальным уравнением в (5) с входным белым шумом $N(t)$. Идентификация коэффициентов автопилота выполняется по измерениям угловой скорости $z_1 = \omega_x + N_{\omega_x}(t)$; $z_2 = \omega_y + N_{\omega_y}(t)$; $\mathbf{z} \equiv \{z_1, z_2\}$, где $N_{\omega_x}(t)$ и $N_{\omega_y}(t)$ являются белыми шумами, эффективность идентификации оценивается по функциональному минимуму [3]

$$I_0 = \int_{t_i}^{t_f} (\omega_y - \omega_y^*)^2 dt \Rightarrow \min.$$

Выполнена оптимизация динамики разворота курсового движения БПЛА массой 320 кг на высоте полета $H = 1000$ м со скоростью $V_o = 111$ м/с при ветровых возмущениях, вызванных атмосферной турбулентностью, и балансировочном угле атаки $\alpha_o = 3.9$ град.

3. Заключение

Кратко представлены методы идентификации и оптимизации стохастических систем управления с возмущениями и ограничениями, синтезированы параметры автопилота БПЛА при курсовом повороте его траектории с турбулентными возмущениями ветра.

Список литературы

1. *Денисов К.Г., Роднищев Н.Е.* Идентификация параметров и управления стохастических динамических системах с функциональными ограничениями. Казань: Школа, 2017.
2. *Роднищев Н.Е.* Приближённый метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ограничениями//АиТ. 2001. № 3. С. 63–71.
3. *Rodnishchev N., Somov S., Somova T.* Identification and stochastic optimizing the UAV control law//Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019. V. 10. No. 4. P. 749–757.

Identification and Stochastic Optimizing the UAV Motion Control in Turbulent Atmosphere

N. E. Rodnishchev

Tupolev KNRTU–KAI, Kazan, Russia
nrodnishev@yandex.ru

The developed methods of identification and optimizing nonlinear stochastic systems with application for unmanned aerial vehicles at the wind disturbances caused by atmospheric turbulence are presented.

Стохастическая оптимизация отказоустойчивого управления движением космического аппарата при орбитальных перелетах

Н. Е. Роднищев¹, С. Е. Сомов², Т. Е. Сомова²

¹КНИТУ-КАИ, Казань, Россия ²СамГТУ, Самара, Россия
 nrodnishev@yandex.ru, s_somov@mail.ru, te_somova@mail.ru

Рассматриваются проблемы пассивного отказоустойчивого управления движением космического аппарата при межорбитальном перелёте и переходе с траектории пассивного движения на круговую орбиту при стохастическом потоке отказов работающих реактивных двигателей.

Ключевые слова: космический аппарат, поток отказов двигателей, отказоустойчивое управление движением, стохастическая оптимизация

1. Введение

Задачи стохастической оптимизации системы управления космических аппаратов (КА) наименее исследованы для выбора параметров, связанных с надежностью выполнения их полетного задания. В статье кратко представляются методы оптимизации управления в стохастических системах с отказами и их применение к задачам орбитальных перелетов при отказах реактивных двигателей.

2. Теоретические результаты и постановка задачи

Рассматривается нелинейная стохастическая система

$$(1) \quad dx_i^k = \sum_{q=1}^n \{ (C_{iq}^j(t, b^j) dt + dw_{iq}) \varphi_{iq}^j(t, x^k, u, a, b^j) + \sigma_{iq}^j(t, x^k, b^j) d\eta_q \};$$

$x_i^k(t_0) = x_{i0}$, $i \in \mathbb{N}_1^n \equiv [1, \dots, n]$; $t \in [T_j, T_{j+1}]$, $j \in \mathbb{N}_0^k$; $T_0 = t_0$, $T_{k+1} = t_f$, которая описывает функционирование КА, его переключаемая структура $\forall t \in [t_0, t_f]$ формируется стационарным либо нестационарным пуассоновским потоком случайных событий с вероятностями $P_k = \lambda^k (t_f - t_0)^k \exp(-\lambda(t_f - t_0))/k!$ либо $P_k = (\mu_0^f)^k \exp(-\mu_0^f)/k!$ соответственно, где $\mu_0^f \equiv \int_{t_0}^{t_f} \lambda(\tau) d\tau$, с $k \in \mathbb{N}_0^k$ точками разрыва и известной плотностью потока $\lambda(t)$. При $T_1 < \dots < T_k$ значения T_j имеют плотность распределения $\psi_k(t_1, \dots, t_k | k)$ в виде $\psi_k(\cdot) = k! (t_f - t_0)^{-k}$ либо $\psi_k(\cdot) = k! \prod_{j=1}^k \lambda(t_j) (\mu_0^f)^{-k}$, где моменты времени t_j являются реализациями случайных значений T_j . На каждом временном интервале

$[T_j, T_{j+1}]$ вектор состояния $x^k(t) \equiv \{x_i^k(t)\} \in \mathbb{R}^n$ является непрерывным, вектор управления $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – кусочно-непрерывной детерминированной вектор-функцией, вектор $a \in \mathbb{R}^m$ представляет номинальные значения параметров системы, $b^j \in \mathbb{R}^l$ – случайный постоянный вектор, а $dw_{iq}(t)$ и $d\eta_q(t)$ – стохастические дифференциалы Стратоновича винеровских процессов $w_{iq}(t)$ и $\eta_q(t)$.

При расширенном векторе управления $\nu \equiv \{u, a\}$ различные требования к системе описываются смешанными ограничениями типа равенства $I_s(\nu) = M[F_s(x_f^k) | k \leq k_0] = c_s, s \in \mathbb{N}_1^q$, где символ $M[\cdot] \equiv \int [\cdot] p(t, x | z) dx$ – оператор условного математического ожидания для непрерывной случайной переменной с функцией плотности вероятности $p(t, x)$. Для системы (1) эффект оптимизации достигается когда функционал $I_0(\nu) \equiv M[F_0(x_f^k) | k \leq k_0] \Rightarrow \min$.

Для того чтобы модель (1) описывала Марковский процесс, вводится расширенный вектор состояния $z^k \equiv \{x^k, b^j\}$. Разработанный подход к решению рассматриваемой проблемы основан на необходимых условиях оптимальности в терминах сопряжённых конусов общей теории экстремальных задач, полученные теоретические результаты опубликованы в статьях [1, 2]. Задача статьи состоит в применении методов математической статистики по апостериорным семиинвариантам [3] для оптимизации орбитальных перелётов КА при стохастическом потоке отказов реактивных двигателей [4].

3. Межорбитальный перелёт космического аппарата

Рассматривается задача о переходе материальной точки (МТ), движущейся в центральном поле сил, с одной орбиты на другую с помощью двигательной установки (ДУ), которая содержит две параллельные управляемые секции, состоящие из двух симметрично расположенных реактивных двигателей, и в случайные моменты времени эти секции могут выходить из строя. Определяется относительная скорость расхода массы $u(t)$, подверженная аддитивному возмущению $\xi(t)$, параметрическому шуму $\eta(t)$ и помехам в виде пуассоновского процесса дискретных событий, приводящих к отказу одной из секций ДУ, которая обеспечивает минимальный массовый расход, если функционал $I_0(u) = \int_0^T |(1 + \eta)u + \xi| dt \Rightarrow \min$. Перемещение МТ описывается нелинейной стохастической системой уравнений третьего порядка с вектором состояния $x^k = \{x_i^k\}, i = 1, 2, 3 \equiv 1 \div 3$ при заданных начальных условиях и функциональных ограничениях $I_s(u) = M[x_s^k(T) | k \leq 1] = c_s, s = 1 \div 3$ в момент завершения нормированного времени перелёта $T = 2\pi$.

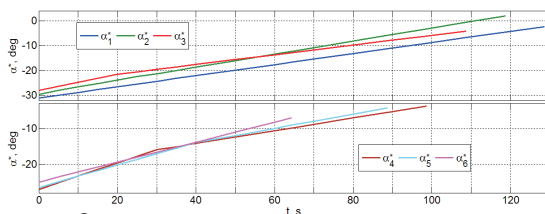


Рис. 1: Оптимальные изменения угла атаки $\alpha^*(t)$

Исследовалось 4 типовых варианта отказов секций ДУ. С применением семиинвариантов задача сводится к процедуре численной оптимизации функционала I_0 для нелинейной системы ОДУ 12-го порядка с 3 терминальными функциональными ограничениями [4].

4. Переход космического аппарата на круговую орбиту

Переход КА на круговую орбиту с траектории его пассивного движения в верхней атмосфере Земли описывается нелинейной стохастической системой 3-го порядка с учётом неопределённости и отказов любой секции ДУ, а также изменения угла атаки $\alpha(t)$. Решается задача оптимального управления КА при выведении полезной нагрузки с максимальной массой на заданную орбиту. Оптимальные вариации угла атаки $\alpha_p^*(t)$ для всех 6 типовых вариантов $p = 1 \div 6$ отказов секций ДУ представлены на рис. 1, детали приведены в [4].

5. Заключение

Кратко представлены методы оптимизации управления в стохастических системах с отказами и их применение к задачам орбитальных перелетов при отказах реактивных двигателей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-08-00779).

Список литературы

1. Роднищев Н.Е. Оптимизация управления нелинейных стохастических систем с ограничениями //АиТ. 2001. №2. С. 87–100.
2. Роднищев Н.Е. Необходимые условия оптимальности управления разрывных нелинейных стохастических систем с ограничениями //Изв. РАН. ТиСУ. 2001. №6. С. 38–50.
3. Роднищев Н.Е. Приближённый метод поиска оптимального управления нелинейных стохастических систем с ограничениями //АиТ. 2001. № 3. С. 63–71.
4. Rodnischev N., Somov S., Somova T. Stochastic optimizing a fault tolerant control of aerospace vehicles//Mathematics in Engineering, Science and Aero-space. 2019. V. 10. No. 3, P. 501–511.

Stochastic Optimization of Fault-tolerant Control the Spacecraft Motion at the Orbital Re-flights

N. Rodnishchev¹, S. Somov², T. Somova²

¹KNRTU–KAI, Kazan, Russia ²SamGTU, Samara, Russia
nrodnishev@yandex.ru, s_somov@mail.ru, te_somova@mail.ru

The methods for control optimization in stochastic systems with failures and their application to the problems of orbital re-flights in case of jet engine failures are briefly presented.

УДК 517.977

О принципе стохастической эквивалентности в детерминированных линейно-квадратичных задачах со случайными начальными данными при наличии информационных ограничений

Д. С. Румянцев, К. А. Царьков

ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Обсуждается ряд примеров, устанавливающих невыполнимость известного принципа стохастической эквивалентности в контексте обобщения линейно-квадратичной задачи децентрализованного управления – задачи с информационными ограничениями – даже на множестве допустимых управлений, ограниченном линейными регуляторами.

Ключевые слова: принцип стохастической эквивалентности, необходимые условия оптимальности, линейно-квадратичная задача, децентрализованное управление

1. Введение

При решении линейно-квадратичных задач оптимального управления в условиях неполноты информации зачастую применяется следующий двухэтапный подход: построить «наилучшую» оценку вектора состояния по всей имеющейся на данный момент информации, а затем использовать её в структуре оптимального регулятора с полной обратной связью вместо вектора состояния. С учетом линейно-квадратичной структуры этот подход в принципе реализуем, т.к. задача оценива-

ния отделима от задачи управления (принцип разделения), а если для данной задачи установлена справедливость теоремы разделения [1], то полученный регулятор гарантированно будет оптимальным (принцип стохастической эквивалентности). Однако при рассмотрении задач с информационными ограничениями общего вида обнаруживается ряд простых примеров, приводимых в данной работе, которые устанавливают невыполнимость принципа стохастической эквивалентности. Трудности определения оптимальных законов управления при наличии информационных ограничений общего вида впервые начали обсуждаться после публикации [2], в которой был приведен пример децентрализованно управляемой системы с нелинейным оптимальным регулятором. Но даже на множестве допустимых управлений, ограниченном линейными регуляторами, принцип стохастической эквивалентности не всегда позволяет получить оптимальное решение. Анализ именно таких ситуаций посвящена работа. Здесь изучается задача поиска оптимального позиционного управления, т.е. случай накопления информации (и соответствующая задача оценивания, связанная с построением уравнений фильтров) не рассматривается.

2. Формулировка проблемы

Рассмотрим однородную линейную динамическую систему

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где x_0 – гауссовская центрированная n -мерная случайная величина с ковариационной матрицей $K_0 := \mathbb{E}[x_0 x_0^T]$, и квадратичный функционал качества управления

$$(2) \quad J = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t_1} (x^T(t)Dx(t) + u^T(t)Eu(t)) dt \right], \quad D, E \succcurlyeq 0.$$

Поставим следующую задачу оптимизации: определить m -мерную вектор-функцию управления в виде $u(t) = P(t)x(t)$, где $P_{ij}(t) \equiv 0$ для некоторого заранее заданного списка пар индексов $(i, j) \in I$, так, чтобы минимизировать значение функционала (2) и выполнить условия. Здесь множество упорядоченных пар $I \subset \overline{1, m} \times \overline{1, n}$ формирует информационные ограничения.

Необходимые условия оптимальности для поставленной задачи получены в работе [3] и имеют вид алгебраического соотношения

$$(3) \quad \{[EP(t) - B^T M(t)]K(t)\}_{ij} = 0, \quad t \in [t_0; t_1],$$

которое должно быть выполнено при всех $(i, j) \notin I$. Здесь функции $K(t)$ и $M(t)$ удовлетворяют системе матричных дифференциальных уравнений, правые части которых содержат матрицу $P(t)$, а $K(t)$ при этом имеет смысл ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$.

С другой стороны, множество I для каждой компоненты управления u_i , $i = \overline{1, m}$, фактически фиксирует набор доступных измерению компонент вектора x , который мы обозначим через $\hat{x}^{(i)}$, и остальных компонент, которые не могут быть измерены явно, $\tilde{x}^{(i)}$. Так как начальное условие имеет гауссовское распределение, система (1) линейна, а управление ищется в виде линейного регулятора, наилучшей в среднеквадратическом смысле оценкой $\mathbb{E}[\tilde{x}^{(i)}(t) | \hat{x}^{(i)}(t)]$ неизмеряемой части компонент вектора $x(t)$ в каждый момент времени будет ортогональная проекция на подпространство центрированных случайных величин, зависящих линейно от $\hat{x}^{(i)}(t)$:

$$(4) \quad \mathbb{E}[\tilde{x}^{(i)}(t) | \hat{x}^{(i)}(t)] = \mathbb{E}[\tilde{x}^{(i)}(t)\hat{x}^{(i)\text{T}}(t)] \left(\mathbb{E}[\hat{x}^{(i)}(t)\hat{x}^{(i)\text{T}}(t)] \right)^{-1} \hat{x}^{(i)}(t).$$

Отсюда возникает вопрос, не будет ли каждая компонента искомого оптимального управления иметь вид

$$u_i(t) = L^{(i)}(t) \begin{pmatrix} \hat{x}^{(i)}(t) \\ \mathbb{E}[\tilde{x}^{(i)}(t) | \hat{x}^{(i)}(t)] \end{pmatrix},$$

где вектор-строки $L^{(i)}(t)$ составляют матрицу оптимального линейного регулятора с полной обратной связью? Иными словами, выполняется ли для рассматриваемой задачи принцип стохастической эквивалентности? Оказывается, что в общем случае это не так.

В работе приведен ряд примеров, когда указанный принцип не выполняется. Каждый из них характеризуется тем, что некоторые диагональные квадратные блоки ковариационной матрицы $K(t)$ становятся нулевыми, что вообще не позволяет использовать их для построения проекций вида (4), где требуется находить обратные к ним. В то же время, как видно из соотношения (3), вырождение матрицы $K(t)$ или ее блоков начиная с некоторого момента $t^* > t_0$ – это один из способов выполнения необходимых условий оптимальности при $t \geq t^*$. Более того, решения, построенные за счет этого, в некоторых случаях оказываются лучше в смысле функционала качества (2).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №20-08-00400).

Список литературы

1. *Wonham W. M.* On the separation theorem of stochastic control // SIAM Journal on Control. 1968. Vol. 6. № 2. P. 312–326.
2. *Witsenhausen H.* A counterexample in stochastic optimum control // SIAM Journal on Control. 1968. Vol. 6. № 1. P. 131–147.
3. *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // АиТ. 2017. № 6. С. 84–105.

On Certainty Equivalence Property in Deterministic LQ-problems with Random Initial Data and Information Constraints

D. S. Rumyantsev, K. A. Tsarkov

V. A. Trapeznikov ICS RAS, Moscow, Russia

Here we discuss a number of examples, which establish the fact that well-known certainty equivalence property is not hold for a generalization of LQ decentralized control problem – information constrained problem – even when admissible controls set contains linear regulators only.

**О достаточных условиях эpsilon-оптимальности
для стохастических систем с пуассоновскими потоками
импульсных воздействий**

К. А. Рыбаков

МАИ, Москва, Россия
rkoffice@mail.ru

На основе принципа расширения Кротова получены достаточные условия эpsilon-оптимальности управления нелинейными динамическими системами при наличии непрерывных и импульсных случайных воздействий при неполной информации о векторе состояния. Импульсные воздействия образуют пуассоновские потоки. В основе используемой математической модели лежит модель нелинейной динамической системы с переключениями режимов функционирования.

Ключевые слова: импульсные воздействия, неполная информация, приближенный метод, принцип расширения, оптимальное управление, стохастическая система.

1. Введение

В работе сформулированы и доказаны достаточные условия эpsilon-оптимальности управления нелинейными динамическими системами при наличии непрерывных и импульсных случайных воздействий. Особенность задачи состоит в том, что импульсные воздействия на систему образуют пуассоновские потоки, например, эрланговские. При управлении может использоваться только информация о времени (программное управление), о времени и векторе состояния (управление с полной обратной связью) и о времени и части координат вектора состояния (управление с неполной обратной связью). Ранее аналогичные достаточные условия эpsilon-оптимальности рассматривались для нелинейных динамических систем при наличии непрерывных и импульсных случайных воздействий, причем импульсные воздействия составляли пуассоновский поток, а также для нелинейных динамических систем с переключениями режимов функционирования при наличии непрерывных случайных воздействий [1, 2]. Именно модели систем с переключениями режимов функционирования позволяют формировать пуассоновские потоки импульсных воздействий [3, 4].

Достаточные условия эpsilon-оптимальности доказаны на основе принципа расширения Кротова. Этот подход подробно изложен для

наиболее простого случая, а именно для нелинейных динамических систем при наличии только непрерывных случайных воздействий в [1, 5]. Полученные условия и соотношения позволяют приближенно находить управление, минимизируя отклонение от оптимального решения в условиях неполной информации о векторе состояния. Условия эпсилон-оптимальности позволяют оценить точность приближенно найденного управления по отношению к оптимальному по величине функционала качества.

2. Постановка задачи

Модель динамической системы описывается уравнением Ито со скачкообразной компонентой [4]:

$$(1) \quad dX(t) = f(t, X(t), \mathbf{u}(t))dt + \sigma(t, X(t), \mathbf{u}(t))dW(t) + dQ(t),$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ — вектор управления, $t \in T = [t_0, t_1]$, T — заданный промежуток времени функционирования системы, $f(t, x, u)$ и $\sigma(t, x, u)$ — заданные функции соответствующих размеров, $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, $Q(t)$ — случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями, начальный вектор состояния $X_0 = X(t_0)$ задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Определим случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, N\}$ и интенсивностями переходов $\lambda_{kr}(t, x)$, $k, r = 1, 2, \dots, N$, $k \neq r$, т.е. вероятность смены состояния $k \rightarrow r$ задается выражением

$$P(K(t + \Delta t) = r \mid K(t) = k, X(t) = x) = \lambda_{kr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

Для определенности будем полагать начальное состояние для процесса $K(t)$ фиксированным: $K(t_0) = 1$.

Случайный процесс $Q(t)$ задается в виде $Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} Y(\tau_i)$, где $J(t)$ — считающий процесс, возрастающий на единицу при смене состояния процесса $K(t)$, $Y(\tau_i)$ — независимые случайные величины из \mathbb{R}^n , распределение которых задано плотностью вероятности $q_{kr}(t, y)$ или в общем случае условной плотностью вероятности $q_{kr}(t, x + y \mid x)$ (индексы k и r соответствуют смене состояний $k \rightarrow r$ для процесса $K(t)$, $t = \tau_i$). Вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, \dots : $X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + Y(\tau_i)$.

При некоторых переходах $k \rightarrow r$ можно положить $q_{kr}(t, y) = \delta(y)$, тогда вектор состояния не будет получать приращения. Это позволяет формировать различные законы распределения для длин промежутков

времени между последовательными разрывами траектории случайного процесса $X(t)$, представляя их как суммы случайных величин, имеющих обобщенное показательное распределение. Например, переходы $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, N-1 \rightarrow N, N \rightarrow 1$ с постоянной интенсивностью λ при условии, что вектор состояния получает приращение только при переходе $N \rightarrow 1$, позволяют задавать длины промежутков времени между последовательными разрывами траектории случайного процесса $X(t)$ эрланговским законом распределения с параметрами λ и N .

При управлении динамической системой используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния: $0 \leq m \leq n$, т.е. $X = [X_{(1)} \ X_{(2)}]^T$, $\mathbf{u}(t) = u(t, X_{(1)}(t))$, где $X_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$. В предельных случаях $m = 0$ и $m = n$.

Функционал качества на множестве допустимых управлений задается следующим образом:

$$J(u(t, x_{(1)}); \varphi_0(x)) = \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t_1} \omega(t, X(t), u(t, X_{(1)}(t))) dt + \gamma(X(t_1)) \right],$$

где \mathbb{E} — математическое ожидание, $\omega(t, x, u)$ и $\gamma(x)$ — заданные функции, обеспечивающие конечность величины функционала качества.

Задача оптимального в среднем управления состоит в нахождении функции $u^*(t, x_{(1)})$, на которой функционал качества достигает минимального значения. При приближенном решении задачи нужно найти такую функцию $u^\varepsilon(t, x_{(1)})$, что

$$|J(u^*(t, x_{(1)}); \varphi_0(x)) - J(u^\varepsilon(t, x_{(1)}); \varphi_0(x))| \leq \varepsilon,$$

где ε — малое положительное число.

Список литературы

1. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // *Авт. 2018. № 1. С. 130–146.*
2. *Рыбаков К.А.* Достаточные условия ε -оптимальности для стохастических систем с переключениями // *Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация (DSSCO-2018). Материалы конференции. Минск: БГУ, 2018. С. 189–191.*
3. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
4. *Рыбаков К.А.* Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // *Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 1 (25). С. 145–165.*

5. *Рыбаков К.А.* Методика точного и приближенного синтеза оптимальных непрерывных стохастических систем управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. № 2. С. 1–44.

The ε -Optimality Conditions for Stochastic Systems with non-Poisson Flow of Impulse Disturbances

K. A. Rybakov

MAI, Moscow, Russia
rkoffice@mail.ru

Using the Krotov's expansion principle the sufficient conditions for the ε -optimality of nonlinear dynamic system control have been obtained. It is assumed that continuous and impulse disturbances affect on the dynamic system, and the incomplete information about the state is used for the control. Impulse disturbances form the non-Poisson flow. The mathematical model is based on the nonlinear dynamic system with regime switching.

УДК 514.853+517.938.5+531.38

О работах М. П. Харламова по фазовой топологии волчка Ковалевской в двойном поле сил

П. Е. Рябов

Финансовый университет, Москва, Россия
PERyabov@fa.ru

В докладе представлен ретроспективный анализ работ М.П. Харламова по исследованию фазовой топологии волчка Ковалевской в двойном поле сил (случай интегрируемости А.Г. Реймана–М.А. Семенова–Тян-Шанского без гиросtatического момента).

Ключевые слова: обобщенный гиросtat Ковалевской, два постоянных поля, критические подсистемы, бифуркационная диаграмма

1. Введение

В докладе представлены задачи и результаты исследования фазовой топологии одной интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы с тремя степенями свободы механического происхождения

с условиями типа Ковалевской на распределение масс и гироскопическими силами с непостоянным гироскопическим моментом. Основой такого исследования послужили работы М.П. Харламова по фазовой топологии волчка Ковалевской в двойном поле сил и понятие топологического атласа, введенное М.П. Харламовым в начале 2000-х гг [1]. Топологический атлас включает аналитическое описание критических подсистем полного отображения момента, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является почти гамильтоновой системой с меньшим числом степеней свободы; классификацию оснащенных изоэнергетических диаграмм Смейла с полным описанием регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций; определение типов всех критических точек полного отображения момента и программы-конструктора построения топологических инвариантов.

2. Обобщенный гиростат Ковалевской в двойном поле сил

Речь идет о следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{M} &= M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial H}{\partial \beta}, \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \frac{\partial H}{\partial M} \end{aligned}$$

с гамильтонианом

$$(2) \quad \begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) + \\ &+ 2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{aligned}$$

Здесь трехмерные векторы M, α, β представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом; λ – параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 – параметры деформации. Если параметр деформации ε_1 и параметр гиростатического момента λ обращаются в нуль, то функция (2) совпадает с гамильтонианом в задаче о движении волчка Ковалевской в системе двух полей [1].

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$(3) \quad \begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \\ \{M_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \beta_k, \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \\ \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), 1 \leq i, j, k \leq 3. \end{aligned}$$

Функциями Казимира являются выражения α^2 , $\alpha \cdot \beta$ и β^2 . Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (3), систему (1) можно представить в гамильтоновом виде. Фазовое пространство системы уравнений (1) задается общим уровнем функций Казимира

$$\alpha^2 = a^2, \quad \beta^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).$$

Для гамильтониана (2) необходимые для интегрируемости по Лиувиллю два дополнительных интеграла K и G имеют следующий явный вид [2]:

$$\begin{aligned} K &= Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] + \\ &\lambda \varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)M_3 + 2\lambda \varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1 M_2] - 2\lambda \varepsilon_1^2 \omega_\gamma, \\ G &= \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\alpha^2 \beta_2 + \beta^2 \alpha_1) + \\ &+ 2\varepsilon_1[\beta^2(M_2 \alpha_3 - M_3 \alpha_2) - \alpha^2(M_1 \beta_3 - M_3 \beta_1)] + \\ &+ 2(\alpha \cdot \beta)[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) + \\ &+ \varepsilon_1[M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2 \alpha_3 - M_1 \beta_3] + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\beta^2 - \alpha^2), \\ Z_2 &= M_1 M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) - \\ &- \varepsilon_1[M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3 M_2 - \alpha_3 M_1] - \varepsilon_1^2(\alpha \cdot \beta), \\ \omega_\alpha &= M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3, \quad \omega_\beta = M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + M_3 \beta_3, \\ \omega_\gamma &= M_1(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + M_2(\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + M_3(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1). \end{aligned}$$

В данной работе предложен подход к описанию фазовой топологии системы (1) на основе метода критических подсистем, проведены классификация и исследование устойчивости всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений, включая всех маятниковых движений и не только (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2). В явном виде описаны некоторые критические подсистемы с указанием бифуркаций торов Лиувилля и некоторые оснащенные изоэнергетические диаграммы. Следует отметить, что на сегодняшний день для системы (1) определены порядка 150 оснащенных изоэнергетических диаграмм полного отображения момента с указанием всех

камер, семейств регулярных 3-мерных торов и их 4-мерных бифуркаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 19-71-30012).

Список литературы

1. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. V. 10. No. 4. P. 381–398.
2. *Рябов П.Е.* Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // Теор.и мат. физика. 2013. № 2. Т. 176. С. 205–221.

On the Works of M. P. Kharlamov on the Phase Topology of the Kovalevskaya Top in a Double Field of Forces

P. E. Ryabov

Financial University, Moscow, Russia
PERyabov@fa.ru

The talk presents a retrospective analysis of the work of M.P. Kharlamov on the study of the phase topology of the Kovalevskaya top in a double field of forces (the case of integrability of A.G. Reiman–M.A. Semenov-Tyan-Shansky without a gyrostatic moment).

Теоретико-экспериментальное исследование изгиба тонкой подложки при электролитическом осаждении

Ю. Н. Сайфутдинов

ИПМех РАН им. А. Ю. Ишлинского, Москва, Россия
jusufsay@mail.ru

Одним из примеров аддитивного процесса является рост пластины по толщине методом электролитического осаждения. В статье исследуется деформация растущих по толщине упругих пластин. Толщина пластины непрерывно увеличивается в результате присоединения материала к ее лицевым поверхностям. Поскольку пластина деформируется в процессе роста, ее напряженно-деформированное состояние зависит не только от нагружения, но и от истории процесса наращивания. Рассматривается наиболее простой режим наращивания, при котором толщина растущей пластины изменяется во времени, но постоянна относительно пространственных координат. Сформулированы уравнения равновесия относительно перемещений, а также относительно скоростей изменения перемещений для различных режимов наращивания. Рассмотрены соответствующие краевые задачи

Ключевые слова: управление изгибом подложки, электролитическое осаждение

1. Введение

Задача, на решение которой направлена настоящая работа, возникает при исследовании распределения остаточных напряжений в многослойных тонкопленочных структурах, возникающие в следствие особенностей аддитивных процессов их последовательного нанесения на тонкостенную подложку.

2. Основной результат

Запишем уравнение движения пластины в соответствии с кинематическими гипотезами Кирхгофа-Лява

$$(1) \quad u = a - z\nabla w, \quad w = ak, \quad a = a(y^1, y^2).$$

$\Pi < 0$ плоскость осреднения, в криволинейных координатах y^1, y^2 , k — единичный вектор, ортогональный к плоскости Π , a — перемещения в плоскости пластины, w — прогибы. Символ ∇ определяет двухмерный оператор Гамильтона: $\nabla = e^1 \partial_1 + e^2 \partial_2$, e^1, e^2 — элементы контравариантного базиса, ∂_1, ∂_2 — частные производные по переменным y^1, y^2 .

Согласно гипотезам теории пластин типа Кирхгофа–Лява полагаем, что нормальные элементы не удлиняются. Выпишем напряжения в текущей конфигурации: $\sigma = \mu(\nabla \otimes a + (\nabla \otimes a)^* - k \times \nabla w - \nabla \times k - z \nabla \otimes \nabla w + \nabla \otimes d + (\nabla \otimes d)^*) + \lambda I(\nabla a - z \nabla^2 w + \nabla d)$. Здесь λ, μ — упругие модули Ламе. Напряжения в отсчетной конфигурации задаются соотношением $\sigma = \mu(\nabla \otimes d + (\nabla \otimes d)^*) + \lambda I(\lambda d)$. Заметим, что в силу несовместности полных деформаций не существует никакой гладкой деформации текущей конфигурации в натуральную, т.е. свободную от напряжений конфигурацию. Осреднение по толщине приводит к следующим выражениям для усилий, моментов и перерезывающих сил в растущей пластине:

$$(2) \quad N = 2\mu[(h_+ - h_-)\mathbf{defa} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla \otimes \nabla w] + \lambda \mathbf{I}[(h_+ + h_-)\nabla \mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2 w] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{defd} + \lambda \mathbf{I}\nabla d) dz,$$

$$(3) \quad \mathbf{M} = -2\mu\left[\frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\nabla \otimes \nabla w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla \otimes a\right] - \lambda \mathbf{I}\left[\frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\nabla^2 w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2 \mathbf{a}\right] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{defd} + \lambda \mathbf{I}\nabla d) dz,$$

$$(4) \quad \mathbf{Q} = -(2\mu + \lambda) \left[\frac{h_+^3 - h_-^3}{3} \nabla \otimes \nabla^2 w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} [\mu + \lambda \mathbf{a} + \mu \lambda^2 \mathbf{a}] \right] + \int_{-h_-}^{h_+} \left[(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \mathbf{d} + \mu \nabla^2 \mathbf{d} \right] dz.$$

Обозначим символом \mathbf{K} осреднение внешних сил, действующих на пластину. С учетом соотношений (2)–(4) уравнения равновесия могут быть записаны в следующей векторной форме:

$$(5) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w = q + (q + 2\mu) \times \int_{-h_-}^{h_+} \left[z - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \right] \nabla^2 \nabla \mathbf{d} \, dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \mathbf{K}_\Pi$$

Где \mathbf{D} — цилиндрическая жесткость, $D = (\lambda + 2\mu)\frac{h^3}{12}$, $h = h_- + h_+$. Проекция на вектор $k \perp \Pi$, $K = K_\Pi + q\mathbf{k}$, $q = K\mathbf{k}$. Уравнение (5) совместно с краевыми условиями позволяет записать краевую задачу растущей по толщине пластины, продифференцируем уравнение по времени:

$$(6) \quad \dot{\mathbf{D}}\nabla^2\nabla^2 w + D\nabla^2\nabla^2 \dot{w} = \dot{q} + (\lambda + 2\mu) \times \left[\frac{\dot{h}}{2}(\dot{h}_+) \nabla^2\nabla \mathbf{d}|_{z=h_+} - \int_{h_-}^{h_+} \left(\frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2} \nabla^2\nabla \mathbf{d} \right) dz \right] - \frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2} \nabla K_\Pi, \dot{D} = (\lambda + \mu) \frac{h^2 \dot{h}}{4}$$

Дифференцируя уравнение (5) по времени для симметричного случая наращивания пластины по толщине получаем:

$$(7) \quad \dot{D}\nabla^2\nabla^2 w + D\nabla^2\nabla^2 \dot{w} = \dot{q} + (\lambda + 2\mu) \frac{h\dot{h}}{4} \nabla^2\nabla (\mathbf{d}|_{z=\frac{h}{2}} - \mathbf{d}|_{z=-\frac{h}{2}}).$$

Присоединяя свободные от напряжений слои, уравнение (6) принимает вид описывающие частный случай симметричного наращивания слоев: $D\nabla^2\nabla^2 w = q$. Если в уравнении осуществить замену $w \rightarrow \dot{w}$, $q \rightarrow \dot{q}$ полученное уравнение будет соответствовать классическому уравнению Софи-Жермен.

3. Заключение

В статье исследованы и построены уравнения равновесия относительно перемещений, а также относительно скоростей изменения перемещений для различных режимов наращивания по толщине пластины. Рассмотрены соответствующие краевые задачи.

Исследование выполнено по теме государственного задания АААА-А17-117021310373-3 и при финансовой поддержке грантов РФФИ 19-01-00173 и 18-29-03228 мк.

Список литературы

1. *Manzhairov A. V., Lychev S. A.* Finite deformations of accreted solids // Proc. of XXXVIII Summer School Conference AMP 2010. St. Petersburg, 2010 P.444-452.
2. *Манжиров А. В., Лычев С. А.* Математическая теория растущих тел. // Книга «Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН». М.: Наука. 2015. С. 426-455.

Theoretical and Experimental Research of Bending a Thin Substrate During Electrolytic Deposition

I. N. Saifutdinov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

jusufsay@mail.ru

The transversally accreted plates are characterized by the continuous adherence of material particles to its facial surface. Since the plate bends during the accretion, its stressed-strained state depends not only on loading, but also on the history of the process of accretion, i.e. the schedule of accretion. A schedule of elementary type, when during every infinitesimal time interval the particles of adhered material constitute the layer of constant infinitesimal thickness, is considered. The equations of motion in terms of displacements and in terms or velocities are derived. The corresponding boundary value problems are considered. Keywords: transversally accreted plates, continuous adherence, schedule of accretion, stress-strain state.

Управление процессами выметания с решениями ограниченной вариации

О. Н. Самсонок

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
olga.samsonyuk@icc.ru

Рассматривается управляемый процесс выметания, заданный системой, состоящей из дифференциального уравнения с мерой (импульсным управлением) и дифференциального включения с правой частью, зависящей от многозначного отображения с ограниченной полной вариацией относительно метрики Хаусдорфа. Процесс выметания рассматривается в конечномерном пространстве, его решения принадлежат пространству пополнений графиков функций ограниченной вариации. В докладе изучаются вопросы существования и единственности решения при заданном импульсном управлении, непрерывности оператора решения, а также вопросы получения условий оптимальности для одной задачи оптимального управления таким процессом выметания.

Ключевые слова: процесс выметания, решения ограниченной вариации, импульсное управление, существование решения

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассматривается частный случай процесса выметания с импульсными управляющими воздействиями:

$$(1) \quad dx(t) = f(t, x(t), y(t), u(t))dt + G(t, x(t))dw(t), \quad x(a) = x_0,$$

$$(2) \quad -dy(t) \in N_{C(t, x(t))}(y(t)), \quad y(a) = y_0 \in C(a, x_0),$$

$$(3) \quad u(t) \in U \text{ для п.вс. } t \in T.$$

Здесь $T = [a, b]$ — заданный промежуток времени, $U \subset \mathbb{R}^k$ — компактное множество, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $w(\cdot)$ — вектор-функции ограниченной вариации, непрерывные справа на $(a, b]$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$. Обозначения dx , dw используются для дифференциальных мер, порожденных функциями $x(\cdot)$, $w(\cdot)$. Предполагается, что функции $f(t, x, y, u)$, $G(t, x)$ непрерывны по всем аргументам, по переменным x, y локально липшицевы и удовлетворяют условию не более чем линейного роста. Многозначное отображение $C : T \times \mathbb{R}^n \mapsto \text{comp}(\mathbb{R}^r)$, где $\text{comp}(\mathbb{R}^r)$ —

множество всех компактных подмножеств пространства \mathbb{R}^T , имеет выпуклые значения и липшицево относительно метрики Хаусдорфа, т.е. для некоторого $L > 0$ и всех $(s_1, x_1), (s_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$d_H(C(s_1, x_1), C(s_2, x_2)) \leq L(|s_1 - s_2| + \|x_1 - x_2\|),$$

где через $d_H(A, B)$ обозначено расстояние Хаусдорфа между компактными множествами A, B . Символ $N_C(y)$ обозначает нормальный конус (в смысле выпуклого анализа) к множеству C в точке y . Отметим, что управление процессом выметания $y(\cdot)$ осуществляется через управление «движущимся» множеством $C(t, x)$, причем многозначное отображение $t \mapsto C(t, x(t))$ имеет ограниченную полную вариацию относительно метрики Хаусдорфа и может иметь разрывы в точках скачка функции $x(\cdot)$.

Решения управляемой системы (1)–(3) рассматриваются в пространстве пополнений графиков функций ограниченной вариации [1, 2]. Такой подход отличается от классического определения BV -решения процесса выметания, сформулированного в [3], а также от близких к рассматриваемым в докладе результатов работ [4, 5], где исследуется специальный случай $C(t) = w(t) + Z$ с замкнутым выпуклым множеством Z .

Рассмотрим пример, иллюстрирующий особенности процесса выметания, взаимосвязанного с решением управляемого мерой дифференциального уравнения. Пусть процесс задан соотношениями:

$$dx_1 = y_1 - 2y_2 + x_2 dw_1, \quad x_1(0) = 0,$$

$$dx_2 = 3y_1 - 2y_2 + x_1 dw_2, \quad x_2(0) = 0.1,$$

$$-y(t) \in N_{C(t, x(t))}(y(t)), \quad y(0) = (0, 0.4), \quad T = [0, 5],$$

где $C(t, x(t)) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid 16(z_1 - x_1(t))^2 + 6(z_2 - x_2(t))^2 \leq 1\}$. Зададим управляющую меру

$$dw_1 = 0.5\delta(t - 2) - 0.5\delta(t - 3), \quad dw_2 = 2\delta(t - 2) + 0.5\delta(t - 3),$$

где $\delta(t - s)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке s . Однако решения процесса выметания будут зависеть также от выбора пополнений графика функции $w(\cdot)$. На рис. 1 представлены два решения, соответствующие разным пополнениям графика.

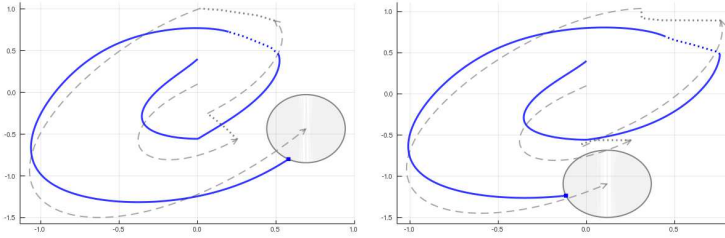


Рис. 1: Процессы выметания для разных пополнений графика w

В докладе будет дано понятие решения процесса выметания (1)–(3) и доказана теорема существования и единственности решения при заданном импульсном управлении и начальном условии. Также будет рассмотрен вопрос получения условий оптимальности для одной задачи оптимального управления таким процессом выметания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00026).

Список литературы

1. Орлов Св.С., Самсонович О.Н. Процесс выметания с разрывным движущимся множеством // Материалы Международной конференции «Stability, Control, Differential Games (SCDG2019)», посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Изд-во: ИММ УрО РАН, 2019. С. 239–243.
2. Samsonyuk O.N., Timoshin S.A. Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // J. Global Optim. 2019. V. 74. No. 3. P. 565–596.
3. Marques M.D.R.M. Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem // J. Differ. Equations. 1987. V. 67. P. 145–164.
4. Kopfova J., Recuperero V. BV-norm continuity of sweeping processes driven by a set with constant shape // J. Differ. Equations. 2016. V. 261. No. 10. P. 5875–5899.
5. Krejčí P., Recuperero V. Comparing BV solutions of rate independent processes // J. Convex. Anal. 2004. V. 21. P. 121–146.

On Control of Sweeping Processes with Solutions of Bounded Variation

O. N. Samsonyuk

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk, Russia
olga.samsonyuk@icc.ru

We consider a controlled sweeping process defined by a system consisting of measure-driven differential equations and a differential inclusion. Solutions of the sweeping process belong to the space of graph completion of functions of bounded variation. The main results address the existence and uniqueness of solutions, the continuity of the solution operator, as well as optimality conditions for such sweeping processes.

УДК 517.977.5

Условия оптимальности для импульсных процессов с промежуточными фазовыми ограничениями

О. Н. Самсоныук, С. П. Сорокин

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия
olga.samsonyuk@icc.ru, sorsp@mail.ru

Рассматривается задача оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации и управлениями, заданными векторными борелевскими мерами. В задаче присутствуют промежуточные фазовые ограничения. Будут представлены нелокальные необходимые и достаточные условия оптимальности, при формулировке которых используются специальные функции типа Ляпунова со свойствами сильной или слабой монотонности относительно импульсной управляемой системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, позиционное импульсное управление, нелокальные условия оптимальности, функция типа Ляпунова

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления (P):

$$J = l(x(b), V(b)) \rightarrow \min$$

$$(1) \quad dx(t) = f(t, x(t), u(t)) dt + G(t, x(t)) \pi(dt),$$

$$(2) \quad (x(\theta_i), V(\theta_i), x(\theta_i^-), V(\theta_i^-)) \in A_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$(3) \quad u(t) \in U \text{ для п.в. } t \in T, \quad \pi \in \mathcal{W}(T, K),$$

где $T = [a, b]$, U — компактное подмножество \mathbb{R}^m , K — выпуклый замкнутый конус в \mathbb{R}^r , $A_i, i = \overline{0, N}$, — заданные замкнутые подмножества из \mathbb{R}^{2n+2} . В задаче (P) два вида управлений — обычное управление $u \in L^\infty(T, U)$ и импульсное управление $\pi = (\mu, S, \{d_s, \omega_s(\cdot)\}_{s \in S})$, элементы которого удовлетворяют условиям: μ — K -значная ограниченная борелевская мера на T , множество S — конечное или счетное подмножество отрезка T , $S \supseteq S_d(\mu) := \{s \in T \mid \mu(\{s\}) \neq 0\}$, для каждого $s \in S$ число d_s и \mathcal{L} -измеримая функция $\omega_s(\cdot) : [0, d_s] \rightarrow co K_1$ удовлетворяют соотношениям

$$d_s \geq \|\mu(\{s\})\|, \quad \int_0^{d_s} \omega_s(\tau) d\tau = \mu(\{s\}).$$

Здесь $\|\cdot\|$ — манхэттенская норма, $K_1 := \{v \in K \mid \|v\| = 1\}$, $co A$ — выпуклая оболочка множества A . Через $\mathcal{W}(T, K)$ обозначено множество всех импульсных управлений. Каждому $\pi \in \mathcal{W}(T, K)$ сопоставлена функция $V = V[\pi] : T \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V(t) = |\mu_c|([a, t]) + \sum_{s \leq t, s \in S} d_s, \quad t \in (a, b], \quad V(a) = 0.$$

Под решением системы (1), соответствующим управлениям $u, \pi = (\mu, S, \{d_s, \omega_s(\cdot)\}_{s \in S})$ и начальному условию $x(a^-) = x_0$, мы понимаем непрерывную справа функцию ограниченной вариации $x(\cdot)$, удовлетворяющую интегральному уравнению с мерой и скачками (см. [1, 2]):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_a^t f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \int_a^t G(\tau, x(\tau)) \mu_c(d\tau) \\ &+ \sum_{s \in S, s \leq t} (z^s(d_s) - x(s^-)), \quad t \in (a, b], \quad x(a) = x_0. \end{aligned}$$

Здесь μ_c — непрерывная составляющая в разложении Лебега для меры μ , а функции $z^s(\cdot)$, $s \in S$, — решения дифференциального уравнения

$$\frac{dz^s(\tau)}{d\tau} = G(s, z^s(\tau)) \omega_s(\tau), \quad z^s(0) = x(s^-) \text{ для п.в. } \tau \in [0, d_s].$$

В докладе будут представлены нелокальные необходимые и достаточные условия оптимальности. Эти условия опираются на применение функций типа Ляпунова со свойствами сильной или слабой монотонности относительно импульсной управляемой системы (1), (3), они обобщают результаты из [3] для задачи с промежуточными ограничениями. При формулировке достаточных условий используются составные сильно монотонные функции типа Ляпунова [4]. Такие условия идейно близки к методу динамического программирования, полученному для нелинейных импульсных задач в [5], но в отличие от него формулируются для задачи с промежуточными фазовыми ограничениями. Необходимые условия оптимальности включают импульсные позиционные управления, полученные при помощи специального класса слабо монотонных функций типа Ляпунова или более общих функций, подуровни которых слабо инвариантны относительно импульсной управляемой системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-31-20030).

Список литературы

1. *Завалишин С. Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991.
2. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // *АиТ.* 2013. № 12. С. 56–103.
3. *Samsonyuk O., Sorokin S., Staritsyn M.* Feedback necessary optimality conditions for nonlinear measure-driven processes // *IFAC-Papers OnLine.* 2019. V. 52. No. 16. P. 132–137
4. *Самсонок О.Н.* Составные функции типа Ляпунова в задачах управления импульсными динамическими системами // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2010. Т. 16, № 5. С. 170–178.
5. *Motta M., Rampazzo F.* Dynamic programming for nonlinear systems driven by ordinary and impulsive control // *SIAM J. Control Optim.* 1996. V. 34. P. 199–225.

Optimality Conditions for Impulsive Processes with Intermediate State Constraints

O. N. Samsonyuk, S. P. Sorokin

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk, Russia
olga.samsonyuk@icc.ru, sorsp@mail.ru

We consider an optimal control problem with trajectories of bounded

variation and controls given by vector Borel measures. The problem contains intermediate state constraints. Nonlocal necessary and sufficient optimality conditions are proposed. These optimality conditions are formulated by using special functions of the Lyapunov type, which possess the properties of strong or weak monotonicity with respect to the impulsive control system describing the dynamics.

УДК 517.977.5

Об одной задаче управления поворотной спутниковой антенной

И. А. Самыловский

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

Мы рассматриваем управляемую систему типа «тележка» при наличии фазового ограничения с границей, представляющей собой прямую линию. Задача — построить оптимальные по времени траектории, приводящие систему в начало координат из заданной начальной точки. Мы строим синтез при различных комбинациях параметров прямой, отдельно рассматривая предельные случаи. Дополнительно мы рассматриваем синтез в координатах, соответствующих азимуту и углу места одноприводной поворотной антенны, настроенной на дугу Кларка данной широты.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовое ограничение, оптимальный синтез, тележка, поворотная спутниковая антенна

1. Введение

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = x_0, & x(T) = 0, \\ \dot{y} = u, & y(0) = y_0, & y(T) = 0, \\ y \geq kx - b, & u \in [-1, 1], & T \rightarrow \min. \end{cases}$$

Здесь $(x(t), y(t))$ — одномерные координата и скорость материальной точки, множество допустимых управлений, конечные условия и функционал аналогичны классическим для системы «тележка». Фазовое ограничение первого порядка, параметр $b > 0$ (чтобы конечная

точка лежала не на фазе). Наша задача — построить оптимальные траектории для всех возможных значений начального фазового вектора и всех возможных значений наклона прямой k .

2. Основной результат

В общем случае ($k \neq 0$) «запретная» область (из которой начало координат недостижимо) ограничена не только прямой — границей фазового ограничения (как в случае $k = 0$), но также:

- В случае $k > 0$ — полупараболой, порождённой постоянным управлением $u \equiv -1$ и проходящей через точку пересечения границы фазового ограничения и оси y (таким образом, область ограничена лучом и полупараболой с неотрицательными значениями y , причем полупарабола также «запретная»),
- В случае $k < 0$ — частью параболы, порождённой постоянным управлением $u \equiv 1$ и касающейся границы фазового ограничения (таким образом, «запретная» область ограничена лучом и частью параболы, причем эта граница не является запретной).

3. Синтез для одноприводной антенны

В качестве приложения строятся картина синтеза в новых координатах: азимут и скорость по азимуту, а также угол места и скорость по углу места антенны, настроенной на дугу Кларка (дуга, на которой на заданной широте находятся геостационарные спутники), которые получаются из координаты $x(t)$ по простым формулам

$$\alpha(t) = \arccos \left(\operatorname{sign}(x) \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right),$$

$$\beta(t) = \arccos \left(\cos(\beta_{max}) + \frac{x^2}{R^2} (1 - \cos(\beta_{max})) \right),$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ — азимут и угол места антенны, β_{max} — максимальный угол места геостационарного спутника на заданной широте.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 19-71-00103).

On one Problem Rrelated to Motorized Satellite Antenna Control

I. A. Samylovskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru

We consider a time-optimal problem for trolley-like system (material point with inertia) passage from start to zero position (i.e. origin) under bounded control (acceleration) and linear state constraint. We solve it with Pontryagin maximum principle for state-constrained problems usage. We construct optimal trajectories synthesis and show that it is not simple “cut” of classical trolley-like problem synthesis. State constraint generates “forbidden zone” bounded by state constraint boundary and half of parabola. We analyse synthesis for different cases of parameters and demonstrates its evolution. In addition, we re-draw obtained synthesis in azimuth-elevation coordinates related to one-motor antenna configured for GEO orbit and selected latitude.

Об условиях стационарности в задаче о выведении набора автономных объектов объектом-носителем

И. А. Самыловский¹, А. К. Самыловская²

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия¹

АО «НПП «Квант», Москва, Россия²

ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru, samylovskaya_ak@npp-kvant.ru

Рассматривается задача оптимального управления, описывающая выведение набора автономных объектов объектом-носителем на целевые орбиты. Для описания этих процессов система уравнений движения составлена из двух подсистем: «основной», описывающей движение носителя и «живущей» на «основном» интервале времени, и набора подсистем, описывающих движение объектов. Эти подсистемы «живут» на вложенных интервалах, начало каждого из которых соответствует моменту отделения объекта. Наша цель состоит в получении необходимых условий расширенного слабого минимума. Для этого мы используем «размножение» переменных и ограничений исходной задачи на количество отрезков времени, соответствующее количеству объектов, сводим задачу к стандартному виду, а затем переписываем полученные условия в терминах исходной задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, промежуточные ограничения, условия стационарности

1. Введение

Мы рассматриваем следующую задачу управления с терминальным функционалом:

$$A : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \text{ на } \Delta_0 = [t_0, T], \\ \dot{y}^i = g^i(y^i, v^i) \text{ на } \Delta_i = [t_i, T], \quad i = 1, \dots, n, \\ \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \\ \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0, \\ \phi(u) \leq 0, \\ \omega^i(v^i) \leq 0, \\ J_A := J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) \rightarrow \min_{u, v^1, \dots, v^n}. \end{cases}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор объекта-носителя в момент t , $y^i(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор i -го объекта-полезной нагрузки. Мы моделируем ситуацию, при которой носитель перемещается между двумя «орбитами» в соответствии с конечными условиями

$$\varphi_1(x(t_0), x(T)) = 0, \quad \varphi_2(x(t_0), x(T)) \leq 0,$$

сбрасывая полезные нагрузки в моменты времени t_i в соответствии с заданным их «распределением по орбитам»

$$\Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) = 0, \quad \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Получение условий стационарности

Для процесса $w^0 = (x^0, y^{1^0}, \dots, y^{n^0}, u^0, v^{1^0}, \dots, v^{n^0})$ мы рассматриваем расширенный слабый минимум и, соответственно, интересуемся вопросом о форме условий стационарности. Мы получаем их, «размножая» задачу в соответствии с количеством интервалов времени, выписывая условия в новой задаче и затем переписывая их в терминах исходной. Таким образом, получаем конечную функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} l = & \alpha_0 J(x(t_0), x(T), y^1(t_1), y^1(T), \dots, y^n(t_n), y^n(T)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x(t_i), y^i(t_i)) + \alpha_{n+1} \varphi_1(x(t_0), x(T)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_i(x(t_i), y^i(t_i)) + \beta_{n+1} \varphi_2(x(t_0), x(T)) \end{aligned}$$

и расширенную функцию Понтрягина

$$\bar{H} = \psi_x f(x, u) + \sum_{j=1}^{i-1} (\psi_{y^j} g(y^j, v^j) - m^j \omega^j(v^j)) - h\phi(v) \text{ на } \Delta_i = [t_{i-1}, t_i],$$

где $i = 1, \dots, n+1$, и по определению $t_{n+1} := T$.

Сопряженные переменные $\psi_x(t)$, $\psi_{y^i}(t)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\begin{cases} \psi_x(t_0) = \alpha_0 J'_{x(t_0)} + \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(t_0)} + \beta_{n+1} \varphi'_{2x(t_0)}, \\ \psi_x(T) = -\alpha_0 J'_{x(T)} - \alpha_{n+1} \varphi'_{1x(T)} - \beta_{n+1} \varphi'_{2x(T)}, \\ \psi_{y^i}(t_i) = \alpha_0 J'_{y^i(t_i)} + \alpha_i \Phi'_{y^i(t_i)} + \beta_i \Psi'_{y^i(t_i)}, \quad \psi_{y^i}(T) = -\alpha_0 J'_{y^i(T)} \end{cases}$$

со скачками

$$\Delta\psi_x(t^i) = l'_{x^i(t_i)} = \alpha_i\Phi'_{x^i(t_i)} + \beta_i\Psi'_{x^i(t_i)}.$$

Условия стационарности имеют вид

$$\begin{cases} \psi_x f_u - h\phi_u = 0 \text{ на } [t_0, T], \\ \psi_{y^i} g_{v^i}^i - \sigma^i \omega_{v^i}^i = 0 \text{ на } \Delta^i := [t_i, T], \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

закон сохранения энергии — вид

$$\psi_x f + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{y^j} g^j = c \text{ на } \Delta_i := [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-31-00091).

On the Stationarity Conditions in an Optimal Control Problem Related to Autonomous Objects Group Target Orbiting by Carrier Object

I. A. Samylovskiy¹, A. K. Samylovskaya²

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia¹

JCS RPE “Kvant”, Moscow, Russia²

ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru, samylovskaya_ak@npp-kvant.ru

We consider a class of optimal control problems related to target orbiting of autonomous objects group with carrier object use. To describe system dynamics, we use system of ODEs consists of two subsystems: “carrier” subsystem and a number of “payload” subsystems. They are determined on “main” and “nested” time intervals ordered w.r.t. start times. Start time of each “nested” interval is in fact time of corresponding payload decoupling. Our goal is to formulate first-order necessary conditions of extended weak minimum (since we consider variations of decoupling times). To do this, we perform replication of variables and reduce our OCP to classical form, then rewriting stationarity conditions and quadratic form in original time.

Вариационный подход к моделированию и оптимизация динамики упругой балки переменного поперечного сечения

*В. В. Саурин*¹, *В. Ю. Поляков*²,

ИПМех РАН, Москва, Россия¹

Российский университет транспорта, Москва, Россия²

saurin@ipmnet.ru, pvy55@mail.ru

В работе изучается моделирование и оптимизация динамического поведения неоднородных балочных структур. Уравнения состояния учитываются интегрально в соответствии с идеями метода интегродифференциальных соотношений. Исходная начально-краевая задача сводится к минимизации неотрицательного квадратичного функционала с ограничениями в виде равенств. Разработан численный алгоритм для решения прямых и обратных задач динамики балок переменного сечения основанный на методе Рунге и технике полудискретных полиномиальных аппроксимаций искомых функций. Минимизируемый функционал используется для определения энергетических критериев качества решения. Эффективность подхода продемонстрирована на примере управляемых движений тонкого прямолинейного упругого неоднородного стержня. Задача управления состоит в том, чтобы оптимальным способом перевести стержень из начального в заданное конечное состояние. Результаты численного анализа представлены и обсуждены.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод интегродифференциальных соотношений

1. Начально-краевая задача для балки с переменным сечением

Рассмотрим тонкую балку длиной L , которая описывается уравнением в предположениях Эйлера–Бернулли. Предполагается, что поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник шириной $b = \text{const}$ и высотой $h = h(x)$, которая может изменяться по ее длине. Боковые движения балки в рамках этой модели могут быть представлены линейным уравнением в частных производных

$$(1) \quad \rho(x)y_{tt} + (EJ(x)y_{xx})_{xx} = q(x, t) \quad x \in (0, L).$$

Здесь y — функция, описывающая поперечные смещения средней линии балки, $\rho(x)$ — линейная плотность балки, E — модуль Юнга, $q(x, t)$ — внешняя распределенная нагрузка, которая также описывает возможное управление, $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения.

Введем новые переменные $p(t, x)$ и $m(t, x)$, которые характеризуют динамику балки и в то же время имеют четкий физический смысл. Функция $p(t, x)$ — линейная плотность импульса, а $m(t, x)$ — изгибающий момент в поперечном сечении балки.

В линейной теории используются уравнения, которые связывают плотность импульса $p(t, x)$ со скоростями точек балки $y_t(x, t)$, а также момент $m(t, x)$ с кривизной балки $y_{xx}(x, t)$ (см. [1]). Тогда уравнение (1) может быть представлено в двух различных видах. Во-первых, в импульсах

$$(2) \quad \eta := p_{tt} + \left(EJ \left(\frac{p}{\rho} \right)_{xx} \right)_{xx} - q_t = 0.$$

Во-вторых в моментах

$$(3) \quad \xi := m_{tt} + EJ \left(\frac{m_{xx} - q}{\rho} \right)_{xx} = 0.$$

Ограничимся рассмотрением начальных и граничных условий для уравнения (1) в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} y(0, x) = y_t(0, x) = 0, \quad y(t, 0) = v(t), \\ y_x(t, 0) = y_{xx}(t, L) = y_{xxx}(t, L) = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные условия в терминах импульсов и моментов можно поставить для уравнений (2) и (3).

2. Задача управления

Задача состоит в нахождении оптимального управления $v^*(t)$ из заданного пространства управлений V , которое перемещает балку из его начального состояния (4) в конечную позицию за заданное время T_0 и минимизирует полную механическую энергию балки в этот момент времени

$$(5) \quad J[v] = E(T_0) \rightarrow \min_{v \in V}, \quad E(t) = \int_0^L \psi(t, x) dx, \quad \psi = \frac{\rho p^2}{2} + \frac{\kappa y_{xx}^2}{2}.$$

Следующие безразмерные параметры были выбраны в задаче управления (5) $\rho = \kappa = L = 1$, $T_0 = 2$. На Рис. 1 приведено оптимальное управление v^* красная линия и смещение свободного конца стержня $y(t, L)$ в процессе движения.

Работа выполнена в рамках Госзадания № АААА-А17-117021310380-1 и при финансовой поддержке РФФИ (гранты 18-01-00812, 18-08-01346, 18-29-03228, 19-01-00173).

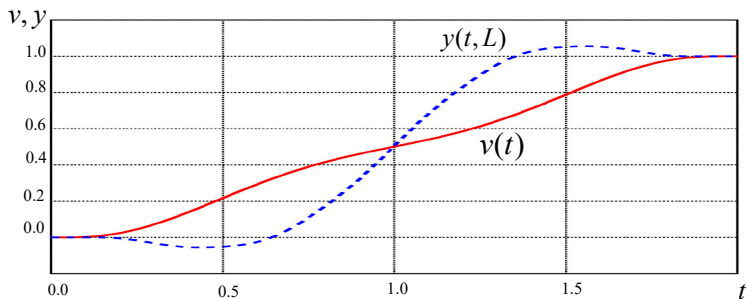


Рис. 1: Оптимальное управление $v(t)$ и перемещение $y(t, L)$

Список литературы

1. *Saurin V.V.* Analysis of Dynamic Behavior of Beams with Variable Cross-section // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Т. 40, № 3. С. 364–374.

A Variational Approach to Modeling and Optimization of the Dynamics for an Elastic Beam With Variable Cross Section

V. V. Saurin, V. Yu. Polyakov

Russian Transport Universitet, Moscow, Russia

IPM RAS, Moscow Russia

pvy55@mail.ru, saurin@ipmnet.ru

The paper studies the modeling and optimization of the dynamic behavior of heterogeneous beam structures. The state equations are taken into account integrally in accordance with the ideas of the method of integrodifferential relations. The original initial-boundary-value problem reduces to minimizing a non-negative quadratic functional with constraints in the form of equalities. A numerical algorithm is developed for solving direct and inverse problems of the beam dynamics with variable cross section based on the Ritz method and the technique of semidiscrete polynomial approximations of the desired functions. The minimized functional is used to determine the energy criteria for the quality of the solution. The effectiveness of the approach is demonstrated by the example of controlled movements of a thin rectilinear elastic inhomogeneous rod. The control problem is to optimally transfer the rod from the initial to the given final state. The results of numerical analysis are presented.

О решении задачи стабилизации для нелинейной треугольной системы с запаздыванием и фазовыми ограничениями на основе выпуклой оптимизации

Н. О. Седова¹, О. В. Дружинина²

УлГУ, Ульяновск, Россия¹

ФИЦ ИУ РАН; ИПУ РАН, Москва, Россия²

sedovano@ulsu.ru, ovdruzh@mail.ru

Изучена возможность сведения задачи стабилизации нелинейной системы с запаздыванием к задачам оптимизации с известными процедурами численного решения. В предположении треугольной структуры системы, предлагаются алгоритмы построения стабилизирующего управления на основе описания подсистем в виде моделей Такаги–Сугено. С учетом ограничений на фазовые переменные и управление, а также свойств весовых функций, задача синтеза стабилизирующего управления сведена к решению задач оптимизации, включая решение систем линейных матричных неравенств. Полученные управления сохраняют стабилизирующие свойства при условии нестационарности весовых функций, а также при наличии возмущений. Рассмотрены перспективы численной реализации алгоритмов на основе стандартных процедур прикладных вычислительных пакетов.

Ключевые слова: нелинейная система, запаздывание, стабилизация

1. Введение

Предметом рассмотрения является задача стабилизации нулевого решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Предполагается, что система имеет треугольную структуру, то есть состоит из нескольких последовательно связанных подсистем. Каждая подсистема, рассматриваемая изолированно, описывается уравнением, правая часть которого представляется в виде выпуклой комбинации линейных функционалов (пример — известные модели Такаги–Сугено [1]). Преимуществом использования такого представления при решении задач анализа и синтеза является возможность сведения решаемой задачи к задачам выпуклой оптимизации, в частности, к системам линейных матричных неравенств (ЛМН), алгоритмы численного решения которых реализованы в целом ряде программных продуктов. При этом практическое решение задачи стабилизации часто предполагает необходимость учета ограничений как на фазовые

переменные, так и на управления. Подобные задачи хорошо изучены для линейных систем ОДУ; в данной работе исследуются возможности применения аналогичной техники к системам с запаздыванием. Полученные результаты основаны на применении функций Ляпунова с условиями Разумихина [2].

2. Постановка задачи

Обозначим $R^+ = [0, +\infty)$, R^n — n -мерное пространство с евклидовой нормой $|\cdot|$, $C = C([-r, 0], R^n)$ — банахово пространство с супремум-нормой $\|\cdot\|$ ($r > 0$). Для функции $x(t)$ элемент $x_t \in C$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $-r \leq s \leq 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную. Для матрицы M условие $M < 0$ ($M \leq 0$) означает, что M симметрическая и отрицательно (неположительно) определенная. Символ $*$ в записи матрицы обозначает блок, транспонированный к симметричному относительно главной диагонали блоку.

Рассмотрим систему следующего вида:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= \sum_{k=1}^p \mu^k(\xi(t))(A_1^k x^1(t) + A_{1\tau}^k x^1(t - \tau_1(t)) + B_1^k u_1(t)) + \\ &\quad + g(t, x_t^1, x_t^2), \\ \dot{x}^2(t) &= \sum_{k=1}^p \mu^k(\xi(t))(A_2^k x^2(t) + A_{2\tau}^k x^2(t - \tau_2(t)) + B_2^k u_2(t)). \end{aligned}$$

Здесь для $j = 1, 2$ предполагается $x_t^j \in C_j := C([-r_j, 0], D_j)$, $D_j = \{y \in R^{n_j} : T_j^m y \leq 1, (T_j^m)^T \in R^{n_j}, m = 1, \dots, q_j\}$, $n_1 + n_2 = n \geq 2$; $u = (u_1^T, u_2^T)^T \in U = \{u \in R^m : |u_1| \leq \mu_1, |u_2| \leq \mu_2\}$; функционал g непрерывен на $R^+ \times C_1 \times C_2$, $g(t, x_t^1, 0) = 0$, $|g(t, x_t^1, x_t^2)| \leq \Delta$, $\tau_j(t) : R^+ \rightarrow [0, r_j]$ — кусочно-непрерывные, $A_j^k, A_{j\tau}^k, B_j^k$ — постоянные матрицы, $\xi(t)$ — кусочно-непрерывная функция, значения которой зависят от t, x_t^1, x_t^2 и принадлежат множеству $D_\xi \subset R^h$, если $t \in R^+$ и $x_t^j(s) \in D_j, s \in [-\tau_j(t), 0]$; функции $\mu^k(\xi) \in C(D_\xi, [0, 1])$, $k = 1, \dots, p$ такие, что $\sum_{k=1}^p \mu^k(\xi) = 1$ для всех $\xi \in D_\xi$.

Управление $u(t) : R^+ \rightarrow U$ назовем стабилизирующим, если нулевое решение соответствующей системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Основной результат

С использованием стандартных приемов преобразования матричных неравенств и рассуждений, близких к доказательствам из [3], получается следующее утверждение:

Теорема 1. *Предположим, что существуют положительные числа $a_j, b_j, c_j, \varepsilon_j, \gamma$, и матрицы $Q_1 > 0, Q_2 > 0, M_{ij}^l$ такие, что справедливы матричные неравенства:*

$$\begin{pmatrix} -a_j Q_j & A_j^k Q_j + B_j^k M_{ij}^1 \\ * & -Q_j \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} -b_j Q_j & A_{j\tau}^k Q_j \\ * & -Q_i \end{pmatrix} \leq 0, \\ \begin{pmatrix} -c_j Q_j & B_j^k M_{ij}^2 \\ * & -Q_j \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_j^2}{r_j} \Phi_{kij} & \varepsilon_j A_{j\tau}^k Q_j + B_j^k M_{ij}^2 \\ * & -\frac{1}{3} Q_j \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} Q_j & (M_{ij}^1 + M_{ij}^2)^\top \\ * & \mu_j Q_j \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Q_j & Q_j (T_j^m)^\top \\ * & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

$\Phi_{kil} + \gamma Q_1 + \frac{\Delta_2}{\gamma} E \leq 0$ для всех $i, k = 1, \dots, p, j, l = 1, 2, m = 1, \dots, q$, где $\Phi_{kij} = Q_j (A_i^k + A_{j\tau}^k)^\top + (A_j^k + A_{j\tau}^k) Q_j + B_j^k (M_{ij}^1 + M_{ij}^2) + (M_{ij}^1 + M_{ij}^2)^\top (B_j^k)^\top + r_j \frac{\varepsilon_j^2 + 1}{\varepsilon_j^2} (a_j + b_j + c_j) Q_j$. Тогда управление $u(t) = (u_1^\top(t), u_2^\top(t))^\top$ с функциями $u_j(t) = \sum_{i=1}^p (K_j^{i1} x_j(t) + K_j^{i2} x_j(t - \bar{\tau}_j(t)))$ при $K_j^{il} = M_{ij}^l Q_j^{-1}, \bar{\tau}_j(t) : R^+ \rightarrow [0, r_j / \varepsilon_j^2]$ — стабилизирующее для системы (1), и для решений, начинающихся в области $\{x : (x^1)^\top Q_1 x^1 < 1, (x^2)^\top Q_2 x^2 < 1\}$ выполняются определенные выше ограничения на фазовые переменные и управление.

Приведенные матричные неравенства могут быть ослаблены за счет использования свойств функций $\mu_j^k(\xi(t))$. Заметим, что неравенства в условиях теоремы 1 линейны лишь при фиксированных значениях скалярных параметров, и их непосредственное использование для расчетов затруднительно. Однако на основе этих условий можно построить алгоритмы в виде последовательностей экстремальных задач, решение которых находится, например, стандартными инструментами пакета Matlab. В результате получаются параметры стабилизирующего управления, а также оценка области начальных условий, при которых ограничения на $x^1(t), x^2(t)$ и управления справедливы в течение переходного процесса.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН (№ 7 Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники).

Список литературы

1. Tanaka K. and Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. Wiley, New York, 2001.
2. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. матем. и механ. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.
3. Дружинина О.В., Седова Н.О. Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных

Stabilization of Nonlinear Triangular Delay Systems with Phase Constraints Using Convex Optimization

N. O. Sedova¹, O. V. Druzhinina²

Ulyanovsk state University (UISU), Ulyanovsk, Russia¹

Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences (FRCCSC RAS); V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS), Moscow, Russia²

sedovano@ulsu.ru, ovdruzh@mail.ru

The possibility is studied of reducing the stabilization problem of delay nonlinear system to optimization problems with known numerical procedures for solving. Assuming a triangular structure of the system, algorithms are proposed for constructing a stabilizing control. The description of the subsystems in the form of Takagi-Sugeno models is used. Given the phase and input constraints, as well as the properties of weight functions, the stabilization problem is reduced to some optimization problems, including LMIs. The obtained controls retain stabilizing properties for non-stationary weight functions, as well as for perturbed systems. Chances of numerical implementation of algorithms based on standard procedures of computational software are considered.

Новые критерии глобальной асимптотической устойчивости систем синхронизации с распределенными параметрами

В. Б. Смирнова^{1,2}, *А. В. Проскурников*^{3,4} *Э. Е. Пак*¹, *Р. В. Титов*²

СПбГАСУ, Санкт-Петербург, Россия¹

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия²

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия³

Politecnico di Torino, Turin, Italy⁴

smirnova_vera_b@mail.ru, anton.p.1982@ieee.org, vadimpak@yandex.ru,
spb_titov_roman@mail.ru

Рассматриваются системы непрямого управления, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра с периодическими нелинейными функциями. С помощью метода априорных интегральных оценок Попова, метода нелокального сведения Леонова и процедуры Бакаева-Гужа устанавливаются новые многопараметрические частотно-алгебраические условия, гарантирующие сходимость любого решения системы к одному из положений равновесия.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, метод априорных интегральных оценок, глобальная асимптотическая устойчивость

Доклад посвящен асимптотическому поведению решений системы управления, математическое описание которой может быть сведено к интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра с периодической нелинейной функцией

$$(1) \quad \dot{\sigma}(t) = b(t) + \rho\varphi(\sigma(t-h)) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau \quad (t > 0).$$

Здесь $h \geq 0$, $\rho \in \mathbb{R}$; $b, \gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Предполагается, что нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ является Δ -периодической, непрерывно дифференцируемой и имеет два простых нуля на периоде. Предполагается также, что функция $b(t)$ непрерывна, функция $\gamma(t)$ кусочно-непрерывна и

$$(2) \quad |b(t)|, |\gamma(t)| < Me^{-rt} \quad (M, r > 0).$$

Линейная часть системы характеризуется своей передаточной

функцией от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$

$$(3) \quad K(p) = -\rho + \int_0^{\infty} \gamma(t)e^{-pt} dt \quad (p \in \mathbb{C}).$$

Уравнениями типа (1) могут быть описаны системы управления самой различной природы: радиотехнические, механические и электро-механические системы, системы дальней космической связи, биологические системы. С учетом наиболее распространенных типов приложений такие системы часто называют системами синхронизации или маятниковыми системами.

Центральной проблемой для систем синхронизации является обеспечение глобальной асимптотической устойчивости, т.е. сходимости любого решения уравнения (1). Эффективные достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости доставляются частотно-алгебраическими критериями, полученными совместным применением метода априорных интегральных оценок Попова и процедуры Бакаева–Гужа, основанной на выделении из нелинейной функции периодической составляющей с нулевым средним на периоде [1].

Целью данного исследования является получение частотно-алгебраических условий глобальной асимптотической устойчивости уравнения (1), позволяющих улучшать оценки областей устойчивости конкретных систем, построенные на основе результатов статьи [1].

Для усиления достаточных условий глобальной асимптотики в данной работе наряду с процедурой Бакаева–Гужа используется технология нелокального сведения Леонова [4], в соответствии с которой в функционалы Попова вводятся траектории устойчивой системы второго порядка

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= -az - \varphi(\sigma) \quad (a > 0), \\ \dot{\sigma} &= z. \end{aligned}$$

Система (4), называемая системой сведения, глобально асимптотически устойчива в случае $a > a_{cr}$, где a_{cr} — бифуркационное значение параметра a [5].

Приведем здесь один из критериев глобальной асимптотики, полученный дополнением процедуры Бакаева–Гужа технологией нелокального сведения. Введем в рассмотрение числовую характеристику нелинейности

$$(5) \quad \mu \triangleq \sup_{\sigma \in [0, \Delta)} \varphi'(\sigma) \quad (\mu > 0)$$

и функцию

$$(6) \quad \nu_0(\alpha) \triangleq \left(\int_0^{\Delta} \varphi(\sigma) d\sigma \right) \left(\int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \alpha^{-1} \varphi'(\sigma)} |\varphi(\sigma)| d\sigma \right)^{-1} \quad (\alpha \geq \mu).$$

Теорема 1. Пусть $\rho \leq 0$. Пусть существуют также такие положительные числа $\varepsilon, \tau, \delta$, числа $\alpha \geq \mu, \lambda \in (0, \frac{r}{2})$, что выполнены следующие условия:

1) для всех $\omega \geq 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\{K(i\omega - \lambda) + \tau\alpha^{-1}(i\omega + \lambda)K(i\omega - \lambda)\} - (\varepsilon + \tau)|K(i\omega - \lambda)|^2 \geq \delta;$$

2) $4\lambda\varepsilon > a_{cr}^2(1 - 2\sqrt{\tau\delta}|\nu_0(\alpha)|^{-1}), \quad |\nu_0| < 1.$

Тогда любое решение (1) стремится к какому-либо положению равновесия при $t \rightarrow +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 16-19-00057).

Список литературы

1. Smirnova V.B., Proskurnikov A.V. Volterra Equations with Periodic Nonlinearities: Multistability, Oscillations and Cycle Slipping// Int. J. Bifurcation and Chaos, 2019. V. 29. No. 5. P. 1950068 (26 p.)
2. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1996.
3. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

New Criteria for Gradient-like Behavior of Synchronization Systems with Distributed Parameters

V. B. Smirnova^{1,2}, A. V. Proskurnikov^{3,4}, E. E. Pak¹, R. V. Titov²

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,

Saint-Petersburg, Russia¹

Saint-Petersburg University, Saint-Petersburg, Russia²

Politecnico di Torino, Turin, Italy³

Institute for Problems in Mechanical Engineering

of Russian Academy of Sciences (IPME RAS), Saint-Petersburg, Russia⁴

smirnova_vera_b@mail.ru, anton.p.1982@ieee.org, vadimpak@yandex.ru,

spb_titov_roman@mail.ru

The paper deals with systems of indirect control which can be described by Volterra integro-differential equations with periodic nonlinear functions.

By means of Popov's method of a priory integral indices, Bakaev–Guzh technique and Leonov's method of nonlocal reduction, new frequency–algebraic multiparametric conditions are established which guarantee that any solution converges.

УДК 517.968.74

Применение метода нелокального сведения Леонова к исследованию точечной устойчивости фазовых систем

В. Б. Смирнова^{1,2}, *А. В. Проскурников*^{3,4}, *Н. В. Утина*¹

СПбГАСУ, Санкт-Петербург, Россия¹

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия²

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия³

Politecnico di Torino, Turin, Italy⁴

smirnova_vera_b@mail.ru, anton.p.1982@ieee.org, utina.n.v@lan.spbgasu.ru

Исследуется асимптотическое поведение фазовых систем управления с одной дифференцируемой нелинейностью. Путем комплексного развития метода нелокального сведения Леонова и метода периодических функций Ляпунова устанавливаются частотные критерии, позволяющие улучшать оценки областей точечной устойчивости в пространстве параметров системы.

Ключевые слова: фазовые системы, периодические функции Ляпунова, нелокальное сведение, теорема Якубовича–Калмана

1. Постановка задачи

Рассматривается фазовая система управления:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= Az(t) + b\varphi(\sigma(t)), \\ \frac{d\sigma(t)}{dt} &= c^* z(t) + \rho\varphi(\sigma(t)), \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b, c \in \mathbb{R}^m$, $\rho \in \mathbb{R}$, $z: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, символом (*) обозначено эрмитово сопряжение.

Относительно линейной части системы (1) и нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ выполнены следующие предположения:

1. Пара (A, b) управляема, пара (A, c) наблюдаема; матрица A гурвицева.

2. Функция $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой, Δ -периодической и имеет на промежутке $[0, \Delta)$ два простых нуля σ_1, σ_2 .

Система (1) имеет бесконечно много положений равновесия: $\{z_{eq} = 0, \sigma_{eq} = \sigma_i + \Delta k\}$ ($i = 1, 2; k \in Z$) как устойчивых в малом, так и неустойчивых. Основной задачей устойчивости для фазовых систем управления является установление условий, гарантирующих стремление любого решения системы (1) к одному из положений равновесия. Решению этой задачи посвящена обширная литература. Подробная библиография приведена в статьях [1, 2].

В докладе предлагается дальнейшее продвижение в решении основной задачи устойчивости фазовых систем. Оно основано на развитии метода нелокального сведения Леонова [3, 4]. Конструируются периодические функции Ляпунова, содержащие в своем составе траектории устойчивых фазовых систем второго порядка. Результаты сформулированы в виде частотно-алгебраических критериев, в терминах передаточной функции линейной части системы от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$

$$(2) \quad K(p) = -\rho + c^*(A - pI_m)^{-1}b \quad (p \in \mathbb{C}),$$

где I_m — единичная матрица порядка m .

2. Основной результат

Сопоставим системе (1) хорошо изученную фазовую систему второго порядка

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= -az - \varphi(\sigma) \quad (a > 0), \\ \dot{\sigma} &= z. \end{aligned}$$

Обозначим через a_{cr} бифуркационное значение параметра a [5]. При $a > a_{cr}$ любое решение (3) сходится к какому-либо положению равновесия, при $a \leq a_{cr}$ система (3) имеет решения, для которых $\dot{\sigma} \geq \varepsilon > 0$.

Введем в рассмотрение набор констант:

$$\mu_1 = \inf_{\sigma \in [0, \Delta)} \varphi'(\sigma), \quad \mu_2 = \sup_{\sigma \in [0, \Delta)} \varphi'(\sigma) \quad (\mu_1 \mu_2 < 0);$$

$$\nu = \frac{\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma}{\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)| d\sigma};$$

$$\lambda_0 = \min_{i=1, \dots, m} |Re \lambda_i|,$$

где λ_i — собственное число матрицы A .

Теорема 1. Пусть существуют такие числа $\lambda \in (0, \lambda_0), \tau \geq 0, \alpha_1 \leq \mu_1, \alpha_2 \geq \mu_2, \varkappa > 0, \varepsilon > 0, \delta > 0$, что выполняются следующие условия:

- 1) $\tau \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} = 0, \tau(\alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1})\rho \leq 0$;
- 2) для всех $\omega \geq 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\{\varkappa K(p) - \tau(K(p) + \alpha_1^{-1}p)^*(K(p) + \alpha_2^{-1}p)\} - \varepsilon|K(p)|^2 \geq 0,$$

где $p = -\lambda + i\omega$;

- 3) для $\varkappa_1 \in [0, \varkappa]$ квадратичная форма

$$W(x, y, z) \triangleq \lambda x^2 + \varepsilon y^2 + \delta z^2 + (\varkappa - \varkappa_1) \nu y z + a_{cr} \sqrt{\varkappa_1} x y$$

является положительно определенной.

Тогда любое решение системы (1) стремится к какому-либо положению равновесия при $t \rightarrow +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (Проект № 16-19-00057).

Список литературы

1. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // АиТ. 2006. № 10. С. 47–85.
2. Перкин А.А., Смирнова В.Б., Утина Н.В., Шепелявый А.И. О применении метода периодических функций Ляпунова // Вест. СПбГУ. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 36–47.
3. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
4. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., and Smirnova V.B. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1996.
5. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

Leonov's Method of Nonlocal Reduction for Pointwise Stability of Phase Systems

V. B. Smirnova^{1,2}, *A. V. Proskurnikov*^{3,4}, *N. V. Utina*¹

Saint-Petersburg State University of

Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russia¹

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia²

Politecnico di Torino, Turin, Italy³

Institute for Problems in Mechanical Engineering

of Russian Academy of Sciences (IPME RAS), Saint-Petersburg, Russia⁴

smirnova_vera_b@mail.ru, anton.p.1982@ieee.org, utina.n.v@lan.spbgasu.ru

In the paper asymptotic behavior of phase control systems with one differentiable nonlinearity is investigated. By combined development of periodic Lyapunov functions and Leonov's nonlocal reduction technique new frequency-algebraic criteria are elaborated, which give the opportunity to improve the estimates of stability domains.

Адаптивное оптимальное робастное управление дискретным минимально-фазовым объектом при нецентрированном возмущении

В. Ф. Соколов

Коми научный центр УрО РАН, Россия
sokolov@fmi.komisc.ru

Рассматривается задача минимизации наихудшей по классу возмущений асимптотической ошибки слежения для дискретного минимально-фазового объекта с нецентрированным ограниченным возмущением и неопределенностью в канале выхода. Коэффициенты уравнения линейной стационарной номинальной модели, коэффициент усиления неопределенности и верхняя и нижняя границы нецентрированного внешнего возмущения предполагаются неизвестными. Решение оптимальной задачи с заданной точностью в условиях неидентифицируемости модели достигается применением полиэдральных оценок неизвестных параметров и использованием показателя качества задачи управления в качестве идентификационного критерия.

Ключевые слова: адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, ограниченное возмущение.

1. Введение

Рассматривается задача минимизации наихудшей асимптотической ошибки слежения для дискретного минимально-фазового объекта с нецентрированным ограниченным возмущением и неопределенностью в канале выхода. Решение задачи базируется на методе рекуррентных целевых неравенств [1]. Линейные целевые неравенства относительно всех неизвестных параметров, включая границы внешнего возмущения и коэффициент усиления неопределенности, несут информацию о неизвестных параметрах и позволяют использовать их полиэдральные оценки для синтеза адаптивного оптимального, с заданной точностью, управления. Субоптимальность адаптивного управления в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров достигается за счет выбора показателя качества задачи управления в качестве идентификационного критерия. Результаты моделирования иллюстрируют эффективность предложенного метода синтеза адаптивного управления и возможное неприемлемое поведение адаптивной системы, построенной на традиционной идентификации с помощью метода наименьших

квадратов, применяемого в стохастических постановках задачи адаптивного оптимального управления объектами без неопределенности [2].

2. Постановка задачи и метод ее решения

Объект управления описывается моделью

$$(1) \quad a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта, управление и возмущение в момент времени t , $q^{-1}y_t = y_{t-1}$ (оператор сдвига назад) и $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}$. Априорная информация о неизвестном векторе коэффициентов $\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T$ состоит во включении

$$\xi \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p \} \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}, \quad p \in \mathbb{R}^l,$$

где Ξ — известный многогранник и для всех $\xi \in \Xi$ корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ и $b_1 \neq 0$.

Суммарное возмущение v удовлетворяет неравенству

$$|v_t - c_w| \leq \delta_w + \delta_y p_t, \quad p_t = \max_{t-\mu \leq s < t} |y_s| \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

где c_w — неизвестное смещение внешнего возмущения, $\delta_w \geq 0$ — неизвестная верхняя граница его амплитуды и $\delta_y \geq 0$ — неизвестный коэффициент усиления неопределенности в канале выхода с известной верхней границей $\bar{\delta}_y$: $\delta_y \leq \bar{\delta}_y < 1$. Память μ в описании неопределенности может выбираться сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления.

Пусть $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots)$ — ограниченный задающий сигнал. Ставится задача минимизации наилучшей по допустимым возмущениям v асимптотической ошибки слежения:

$$J^\mu(\theta, y^*) := \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*|, \quad \theta := (\xi^T, c_w, \delta_y, \delta_w)^T.$$

Для модели с известным вектором коэффициентов ξ регулятор

$$(2) \quad b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^*$$

обеспечивает равенство $y_{t+1} - y_t^* = v_{t+1}$ и, следовательно, является *оптимальным* для показателя качества $J^\mu(\theta, y^*)$.

Известно [3], что для замкнутой системы (1), (2)

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} J^\mu(\theta, y^*) = J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*|}{1 - \delta_y},$$

если значения $|y_t^*|$ равномерно часто попадают в окрестности $\|y^*\|_{ss}$.

Задача. Требуется построить обратную связь для модели (1), гарантирующую с заданной точностью неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*| \leq J(\theta, y^*).$$

Решение поставленной задачи базируется на использовании полиэдральных оценок неизвестных параметров. Полиэдральные оценки фиксированной сложности строятся из неравенств вида

$$(3) \quad |\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t - \hat{c}_w| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{t+1}$$

относительно оценок $\hat{\theta}$. В качестве текущей векторной оценки для управления выбирается оптимальная оценка, минимизирующая показатель качества J на текущей полиэдральной оценке.

Список литературы

1. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
2. Guo L. Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. V. 41. No. 1. P. 79-89.
3. Sokolov V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. V. 42(5). P. 363-377.

Adaptive Optimal Robust Control of Discrete-time Minimum Phase Plant under Biased Disturbance

V. F Sokolov

Komi Science Center, Urals Branch of RAS, Russia
sokolov@fmi.komisc.ru

This paper addresses a problem of adaptive optimal robust tracking of discrete-time minimum phase plant under output uncertainty and biased bounded external disturbance. Coefficients of the nominal model equation, the gain of the uncertainty and upper and lower bounds on the disturbance

are estimated in closed loop. Despite non-identifiability of all unknown parameters, optimal tracking, with a prescribed tolerance, is achieved via polyhedral estimates of unknown parameters and treating the control criterion as the identification criterion.

УДК 681.51, 519.642

**Новый класс многомерных интегральных уравнений
Вольтерра I рода, связанный с моделированием динамики
ветроэнергетической установки**

С. В. Солодуша

ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия
solodusha@isem.irk.ru

Разработан подход для численного моделирования процесса регулирования динамики объекта типа «вход-выход» на базе полиномов Вольтерра с векторными входными сигналами. Задача непараметрической идентификации рассматривается как сопряженная по отношению к задаче деконволюции. Выполнено тестирование на имитационной модели ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения. Вычислительный эксперимент показал, что выбор алгоритма, используемого на этапе идентификации, влияет на точность решения задачи регулирования отклика динамического объекта. Выделен новый класс многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода, возникающий при учете в тестовых сигналах длительности фронта нарастания.

Ключевые слова: нелинейная система, автоматическое управление, идентификация, полином Вольтерра, электроэнергетические объекты

1. Введение

Работа посвящена решению задач идентификации [1, 2] применительно к задаче автоматического управления динамикой объекта типа «вход-выход». Некоторые вопросы синтеза автоматических регуляторов на основе концепции обратных задач применительно к линейным системам исследованы, в частности, в [3]. В данной статье используется двухэтапный подход к численному моделированию нелинейной дина-

мики на основе полиномов Вольтерра

$$(1) \quad y(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq 2} f_{i_1 \dots i_m}(t), \quad t \in [0, T],$$

$$(2) \quad f_{i_1 \dots i_m}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_m}(s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_{i_j}(t - s_j) ds_j,$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. Первый этап заключается в построении полиномов Вольтерра во временной области на основе откликов объекта на тестовые входные сигналы, которые являются вектор-функциями времени. На втором этапе построенная интегральная модель используется для восстановления входного сигнала, обеспечивающего заранее заданный отклик.

2. Основной результат

В качестве имитационной модели рассмотрена математическая модель ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения [4]. Алгоритмы построения интегральных моделей Вольтерра основаны на введении тестовых входных сигналов в виде функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом [5].

Дальнейшее развитие исследований связано с использованием наиболее приближенных к реальным возмущениям сигналов, имеющих фронт нарастания. Восстановление несимметричного ядра $K_{12}(s_1, s_2)$ на $\Omega = \{s_1, s_2 : s_1 < s_2 \vee s_2 < s_1\}$ выполнялось с помощью соответствующих тестовых сигналов

$$(3) \quad x_1(t, t_1) = \zeta(t, t_1), \quad x_2(t) = e(t) \quad \text{и} \quad x_1(t) = e(t), \quad x_2(t, t_1) = \zeta(t, t_1),$$

$$(4) \quad \zeta(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \frac{t}{t_1}, & 0 < t \leq t_1, \\ 1, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

где $e(t)$ — функция Хевисайда, $t_1 > 0$. Подстановка (3), (4) в (1) дает парное интегральное уравнение

$$\int_0^t ds_2 \int_{t-t_1}^t K_{12}(s_1, s_2) \frac{t-s_1}{t_1} ds_1 + \int_0^t ds_2 \int_0^{t-t_1} K_{12}(s_1, s_2) ds_1 = \overset{(1)}{y}(t, t_1),$$

$$\int_{t-t_1}^t ds_2 \int_0^t K_{12}(s_1, s_2) \frac{t-s_2}{t_1} ds_1 + \int_0^{t-t_1} ds_2 \int_0^t K_{12}(s_1, s_2) ds_1 = y^{(2)}(t, t_1),$$

формулы обращения которого имеют следующий вид:

$$K_{12}(t-t_1, t) = - \left(3 \frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y^{(1)}}{\partial t \partial t_1} + t_1 \frac{\partial^3 y^{(1)}}{\partial t \partial t_1^2} + t_1 \frac{\partial^3 y^{(1)}}{\partial t_1^3} \right),$$

$$K_{12}(t, t-t_1) = - \left(3 \frac{\partial^2 y^{(2)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y^{(2)}}{\partial t \partial t_1} + t_1 \frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial t \partial t_1^2} + t_1 \frac{\partial^3 y^{(2)}}{\partial t_1^3} \right).$$

Здесь $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — составляющие f_{12} (2) отклика $y(t)$ имитационной модели, обусловленные влиянием интегрального слагаемого с K_{12} при тестовых воздействиях вида (3).

Результаты получены в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (Проект № АААА-А17-117030310442-8).

Список литературы

1. Райбман Н.С. Идентификация объектов управления (обзор) // *АиТ*. 1979. № 6. С. 80–93.
2. Клейман Е.Г. Идентификация входных сигналов в динамических системах // *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 12. С. 3–15.
3. Карелин А.Е., Майстренко А.В., Светлаков А.А., Харитонов С.А. Синтез метода автоматического регулирования процессов, основанного на концепции обратных задач динамики // *Омский научный вестник*. 2017. № 4(154). С. 83–86.
4. Solodusha S.V., Suslov K.V., Gerasimov D.O. Applicability of Volterra integral polynomials in the control systems of electric power facilities // 2016 13th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7541227>
5. Солодуша С.В. Квадратичные и кубические полиномы Вольтерра: идентификация и приложение // *Вест. СПбГУ. Прикладная математика, информатика, процессы управления*. 2018. Т. 14. № 2. С. 131–144.

A New Class of Multi-dimensional Volterra Integral Equations of the First Kind Related to the Modeling of the Wind Turbine Dynamics

S. V. Solodusha

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Russia
solodusha@isem.irk.ru

An approach based on Volterra polynomials with vector input signals has been developed for numerical modeling the process of regulating the dynamics of an “input-output” type object. The nonparametric identification problem is considered as a conjugate one with respect to the deconvolution problem. The problem is tested on a simulation model of a wind turbine with a horizontal axis of rotation. A computational experiment showed that the choice of the algorithm used at the identification stage affects the accuracy of solving the problem of regulating the response of a dynamic object. A new class of multidimensional Volterra integral equations of the first kind is defined. It appears when the duration of the rise front is taken into account in test signals.

УДК 629.78 : 528.852

Управление движением космического робота при инспекции состояния геостационарного спутника

Е. И. Сомов, С. А. Бутырин, С. Е. Сомов

СамГТУ, Самара, Россия
e_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru, te_somova@mail.ru

Представляются методы наведения и управления движением космического робота при визуальном обследовании технического состояния геостационарного информационного спутника.

Ключевые слова: геостационарная орбита, информационный спутник, инспекция состояния, космический робот, управление движением

1. Введение

Информационные спутники (связи, геодезии, наблюдения Земли) на геостационарной орбите (ГСО) имеют потребную длительность це-

левого функционирования до 25 лет при техническом обслуживании с помощью космических роботов-манипуляторов (КРМ). Здесь актуальны задачи дозаправки топливом электрореактивной двигательной установки спутника, модернизации его служебных систем и полезной нагрузки с обеспечением их электроэнергией [1], а также механического захвата пассивного спутника [2] для восстановления его работоспособности либо транспортировки с целью утилизации. В статье представляются методы наведения и управления движением КРМ при решении первоочередной проблемы — инспекции технического состояния информационного спутника на ГСО.

2. Постановка задачи

Для описания движения КРМ применяются (i) инерциальная система координат (ИСК) \mathbf{I}_{\oplus} с началом в центре Земли O_{\oplus} ; (ii) геодезическая Гринвичская система координат (ГСК) \mathbf{G}_{\oplus} ; (iii) связанная с корпусом КРМ система координат (ССК) \mathbf{B} ($Oxyz$) с началом в его полюсе O ; (iv) орбитальная система координат (ОСК) \mathbf{O} ($Ox^o y^o z^o$). Ориентация ССК \mathbf{B} в ИСК \mathbf{I}_{\oplus} определяется кватернионом $\mathbf{\Lambda}$ и вектором модифицированных параметров Родрига (МПП) $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e} \operatorname{tg}(\Phi/4)$ с ортом \mathbf{e} оси Эйлера и углом Φ собственного поворота, который связан с кватернионом $\mathbf{\Lambda}$ явными соотношениями. Приводами системы управления движением (СУД) робота являются: (i) маршевый реактивный двигатель (РД), который может создавать вектор постоянной тяги по оси Oy ССК; (ii) двигательная установка (ДУ) малой тяги, которая имеет 8 РД с широтно-импульсной модуляцией тяги и может создавать векторы силы и момента произвольного направления в ССК; (iii) силовой гироскопический кластер (СГК) на основе 4 гиродинов с цифровым управлением [2]. Дискретное измерение координат движения КРМ выполняется БИНС с коррекцией сигналами звёздных датчиков и навигационных спутников, в ближней зоне обслуживания геостационарного спутника (цели) расположение и ориентация КРМ относительно цели измеряются также видеокамерами и лазерными дальномерами. Инспекция выполняется с помощью бортового телескопа с осью визирования, направленной по оси Oy ССК. В ИСК расположение и скорость поступательного движения КРМ определяются векторами \mathbf{r}_r и \mathbf{v}_r , нижний индекс r , *robot*. Если конструкцию робота считать твёрдым телом, то при стандартных обозначениях [2] модель его пространственного движения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r &= \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{m}(\mathbf{v}_r^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) = \mathbf{P}^e + \mathbf{F}^d; \\ \dot{\mathbf{\Lambda}} &= \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}/2, \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^g + \mathbf{M}^e + \mathbf{T}^d, \end{aligned}$$

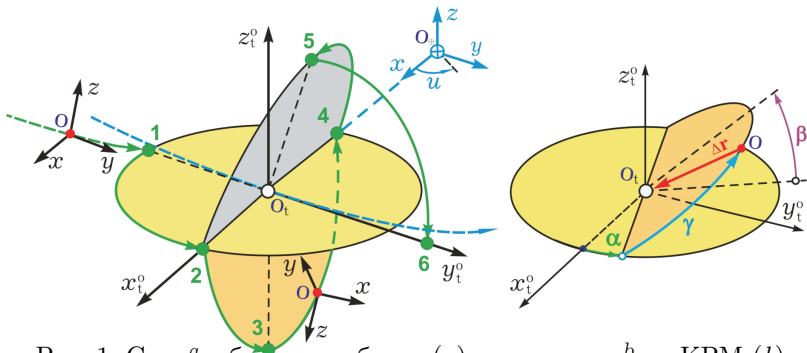


Рис. 1: Схемвы обзорного облета (a) и расположения КРМ (b)

где векторы $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$, $\mathbf{M}^g = -\mathbf{H}^*$, \mathbf{P}^e и \mathbf{M}^e представляют управляющие силы и моменты РД, а векторы \mathbf{F}^d и \mathbf{T}^d — внешние силы и моменты с учётом влияния гравитационных полей Земли, Луны и Солнца. При описании поступательного движения спутника на ГСО с вектором \mathbf{r}_t его расположения в ИСК используется ОСК цели \mathbf{O}_t ($O_t x_t^0 y_t^0 z_t^0$), нижний индекс t , *target*, рис. 1a. Вектор $\Delta \mathbf{r}$ дальности КРМ до цели вычисляется по соотношениям $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_r$, рис. 1b.

Решаются задачи наведения и управления движением КРМ на следующих этапах: (i) орбитальный перелет КРМ от исходной дальности 10 км до дальности 500 м с применением маршевого РД и СГК; (ii) подлет КРМ к ближней зоне обслуживания с дальностью 100 м при работе ДУ малой тяги и СГК; (iii) инспекционный облет геостационарного спутника с произвольной последовательностью наблюдения его состояния с различных ракурсов при вариации дальности $\Delta \mathbf{r} \in [50, 100]$ м, см. пример схемы обзорного облета на рис. 1a.

3. Основные алгоритмы и результаты

В алгоритмах пространственного наведения КРМ на этапах перелета (i) и (ii) используется цилиндрическая система координат \mathbf{S}_{\oplus} ($O_{\oplus}xyz$) [3] с координатами радиали r , угла u в плоскости невозмущённой орбиты геостационарного спутника и бокового отклонения z от этой плоскости, см. рис. 1a. Здесь сначала аналитически решается краевая задача двух-импульсного орбитального перехода, а затем по вычисленным импульсам характеристической скорости определяются длительности включения реактивных двигателей и законы наведения КРМ в виде набора векторных сплайнов. Для реализации пространственного движения КРМ в процессе инспекции используются оригинальные алгоритмы согласованного цифрового управления СГК и

широтного-импульсного управления ДУ малой тяги.

4. Заключение

Кратко представлены разработанные алгоритмы наведения и управления движением космического робота при визуальном обследовании технического состояния геостационарного спутника, описаны результаты их применения при компьютерной имитации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-08-00779).

Список литературы

1. *Testoyedov N., Rayevsky V., Somov Ye., Titov G., Yakimov Ye.* Attitude and orbit control systems of Russian communication, navigation and geodesic satellites: History, present and future // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 6422–6427.
2. *Somov Ye., Butyrin S., Somov S., Somova T.* Control of robot-manipulator during its preparation and capture of a passive satellite // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2019. V. 10. No. 3. P. 421–432.
3. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.

Motion Control of the Space Robot at an Inspection of a Geostationary Satellite State

Ye. Somov, S. Butyrin, S. Somov

SamGTU, Samara, Russia

e_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru, te_somova@mail.ru

The methods for guidance and motion control of a space robot are presented when the visual inspecting the technical state of a geostationary information satellite.

Автономное наведение и управление ориентацией информационного спутника в следящем режиме

Е. И. Сомов, С. А. Бутырин, Т. Е. Сомова

СамГТУ, Самара, Россия

e_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru, te_somova@mail.ru

Представляется новый метод автономного наведения и цифрового управления ориентацией космического аппарата в режиме слежения за изменением вектора модифицированных параметров Родрига.

Ключевые слова: космический аппарат, автономное угловое наведение, режим слежения, цифровое управление ориентацией

1. Введение

В статье основное внимание фокусируется на нелинейностях кинематических соотношений при управлении пространственным угловым движением космического аппарата (КА) с ограничениями на модули векторов его угловой скорости и управляющего момента исполнительных органов. Управление ориентацией КА выполняется магнитным приводом (МП) и кластером четырёх реактивных двигателей-маховиков (ДМ) по сигналам бесплатформенной инерциальной навигационной системы с коррекцией от спутников GPS/ГЛОНАСС и звёздных датчиков, а также по сигналам датчиков угловой скорости. После отделения от ракеты-носителя КА начинает кувыркаться — вращаться с вектором угловой скорости ω изменяемого направления в связанной с его корпусом системе координат (ССК). Выделяются режимы начальной ориентации: (i) успокоение вращения КА в инерциальной системе координат (ИСК) помощью цифрового управления МП; (ii) включение кластера ДМ в контур управления КА с разгрузкой этого кластера от накопленного кинетического момента с помощью МП; (iii) автономное угловое наведение и управление кластером ДМ с приведением ориентации спутника к заданной в орбитальной системе координат (ОСК).

В наших публикациях [1, 2] при решении задачи (iii) применялся закон углового наведения в виде набора гладко сопряжённых векторных сплайнов в зависимости от времени. В отличие от такого подхода, здесь впервые решается задача автономного углового наведения КА при слежении за эталонной моделью для вектора модифицированных параметров Родрига (МПП) с ограниченным по модулю цифровым управлением кластера ДМ в процессе приведения ориентации спутника из

произвольной к заданной в ОСК.

2. Математические модели и постановка задачи

Используются обозначения $\{\cdot\} \equiv \text{col}(\cdot)$, $[\cdot] \equiv \text{line}(\cdot)$ для векторов со скалярным $\langle \cdot, \cdot \rangle$, векторным $\{\cdot\} \times \{\cdot\}$ и диадным $\{\{\cdot\} \cdot \{\cdot\}\}$ произведениями, для матриц $[\cdot \times]$, $(\cdot)^t$, $[\cdot] \equiv \text{diag}(\cdot)$ и для кватернионов $\Lambda = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ с символами умножения \circ и сопряжения $\bar{\cdot}$, а также для вектора МПР $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e} \text{tg}(\Phi/4)$ с ортом Эйлера \mathbf{e} и углом собственного поворота Φ . Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ взаимно-однозначно связан с кватернионом Λ ориентации КА в ИСК явными прямыми $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}/(1 + \lambda_0)$ и обратными $\lambda_0 = (1 - \sigma^2)/(1 + \sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{\sigma}/(1 + \sigma^2)$ соотношениями. Математическая модель электромеханической системы управления ориентацией (СУО) КА с учётом упругости его конструкции представлена в [1, 2]. Если считать, что при тензоре инерции \mathbf{J} КА в виде свободного твёрдого тела СУО является сбалансированной по вектору суммарного кинетического момента, то пространственное угловое движение КА описывается уравнениями $\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}/2$; $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{u}$, где \mathbf{M}^r представляет вектор управляющего момента кластера ДМ. При использовании вектора МПР $\boldsymbol{\sigma}$ такая кинематическая модель углового движения КА принимает вид $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{4}(1 - \sigma^2)\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega} \rangle$; $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}$ с заданными при $t_0 = 0$ начальными условиями $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0$, где вектор $\boldsymbol{\sigma}_0 \equiv \mathbf{e}_o \text{tg}(\Phi_o/4)$ является произвольным с условием $|\Phi_o| < 2\pi$.

Первая задача состоит в синтезе нелинейного закона цифрового управления $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\omega}_k)$ для эталонной модели автономного наведения в моменты времени t_k , $k \in \mathbb{N}_0 \equiv [0, 1, 2, \dots]$ с периодом дискретности $T_u = t_{k+1} - t_k$ и ограниченными модулями векторов управления и угловой скорости, который обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения замкнутой непрерывно-дискретной эталонной модели. Вторая задача заключается в синтезе цифрового закона управления кластером ДМ, который обеспечивает переход КА из произвольной ориентации в малую окрестность его требуемой ориентации в ОСК с применением эталонной модели наведения. Наконец, третья задача состоит в синтезе цифрового управления КА во всех режимах начальной ориентации, когда используется автономное угловое наведение КА по доступным измерениям.

3. Цифровая эталонная модель наведения

Прямые и обратные кинематические уравнения для вектора $\boldsymbol{\sigma}$ представляются как $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, где матрицы $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv$

$\frac{1}{4}(1 - \sigma^2)\mathbf{I}_3 + \frac{1}{2}([\sigma \times] + [\sigma \cdot \sigma])$ и $\mathbf{D}(\sigma) \equiv \mathbf{B}^{-1}(\sigma) = (8/(1 + \sigma^2)^2)\mathbf{B}^t(\sigma)$. Компактная запись второй производной этого вектора $\ddot{\sigma} = \frac{1}{2}[-\langle \sigma, \dot{\sigma} \rangle \omega + \frac{1}{2}(1 - \sigma^2)\varepsilon + \dot{\sigma} \times \omega + \sigma \times \varepsilon + \dot{\sigma} \langle \sigma, \omega \rangle + \sigma \langle \dot{\sigma}, \omega \rangle + \sigma \langle \sigma, \varepsilon \rangle]$ приводит непрерывную управляемую часть эталонной модели наведения к форме Бруновского $\ddot{\sigma} = \mathbf{v} \equiv \mathbf{b}(\sigma, \omega) + \mathbf{B}(\sigma)\mathbf{u}$, где векторная функция $\mathbf{b}(\sigma, \omega) = ([(\mathbf{B}(\sigma)\omega) \times] + [\sigma \cdot \mathbf{B}(\sigma)\omega])\omega/2$. При модальном синтезе закона управления $\mathbf{v}(\sigma, \dot{\sigma})$ для линейной модели $\ddot{\sigma} = \mathbf{v}$ на едином желаемом спектре $S_* = (-\alpha \pm j\beta)$ по каждому каналу получается непрерывный закон управления $\mathbf{v} = -(k_\sigma \sigma + k_\omega \mathbf{B}(\sigma)\omega)$, который представится в дискретном виде $\mathbf{v}_k = -(k_\sigma^d \sigma_k + k_\omega^d \mathbf{B}(\sigma_k)\omega_k)$. Дискретный закон управления в эталонной модели наведения сначала принимается как $\tilde{\mathbf{u}}_k = -[\mathbf{D}(\sigma_k)(k_\sigma^d \sigma_k + \mathbf{b}(\sigma_k, \omega_k)) + (k_\omega^d/2)\omega_k]$, а затем при окончательном формировании цифрового управления $\mathbf{u}_k(\sigma_k, \omega_k)$ в очередной момент времени t_k по явным аналитическим соотношениям учитываются заданные ограничения на модуль вектора управления \mathbf{u} и модуль вектора угловой скорости ω .

4. Цифровое управление ориентацией спутника

Выполнен синтез цифровых законов управления МП и кластером ДМ, которые обеспечивают успокоение КА и перевод его из произвольной ориентации к требуемой в ОСК с применением эталонной модели наведения. В развитие [2] приведены результаты имитации.

5. Заключение

Кратко представлен новый метод автономного наведения и управления ориентацией космического аппарата в режиме слежения, приведены результаты его применения при компьютерной имитации режимов начальной ориентации информационного спутника.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-08-00779).

Список литературы

1. Somov Ye., Butyrin S., Somova T., Somov S. In-flight verification of attitude control system for a land-survey satellite at a final of its manufacturing//IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No 30. P. 66–71.
2. Somova T. Satellite attitude guidance and economical digital control during initial modes//Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2018. V. 9. No 3. P. 365–372.

Autonomous Guidance and Attitude Control of an Information Satellite in a Tracking Mode

Ye. Somov, S. Butyrin, T. Somova

SamGTU, Samara, Russia

e_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru, te_somova@mail.ru

A new method for autonomous guidance and digital control of the spacecraft orientation in the mode of tracking changes in the vector of modified Rodrigue parameters is presented.

УДК 550.831+838

Метод блоков переменной размерности при решении проблемы больших данных в геофизике

И. Э. Степанова¹³, А. М. Сальников² А. В. Батов²¹³

ИФЗ РАН, Москва, Россия¹

ИПУ РАН, Москва, Россия²

НТУ «Сириус», Сочи, Россия³

tet@ifz.ru, salnikov@ipu.ru, batov@ipu.ru

В докладе рассматривается новый блочный метод решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений большой и сверхбольшой размерности. Системы такого вида часто возникают в обратных задачах геофизики и геодезии.

Ключевые слова: СЛАУ большой размерности, обратные задачи геофизики

1. Введение

В работах [1, 3, 4] были изложены принципы построения аналитических аппроксимаций элементов аномальных гравитационного и магнитного полей Земли, а также функции, описывающей рельеф земной поверхности, с помощью модифицированных S-аппроксимаций. S-аппроксимации являются эффективным средством нахождения пространственного распределения полей, разделения полей, генерируемых различными источниками (как по форме, так и по интенсивности сигнала). Ключевой проблемой при построении аналитических аппроксимаций является создание алгоритмов получения устойчивых прибли-

женных решений систем линейных алгебраических уравнений большой и сверхбольшой размерности, матрицы которых могут быть как квадратными, симметричными и положительно полуопределенными, так и прямоугольными. Во втором случае (обычно такая ситуация имеет место при применении структурно-параметрического подхода к решению некорректных задач геофизики) системы оказываются сильно недоопределенными. Авторами настоящего доклада предложен способ решения больших недоопределенных систем уравнений путем разбиения исходной системы на квадратные блоки, соответствующие носителям простого и двойного слоев в методе S-аппроксимаций (носителями являются двугранные углы, в отличие от ранее рассмотренных авторами носителей в виде плоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах).

2. Основной результат

Исходная матрица имеет вид:

$$(1) \quad Ax = f_\delta = f + \delta f.$$

Здесь матрица A размерностью $N \times M$ и вектор $x \in R^M$ поделены на Q блоков ($Q \ll M$)

$$(2) \quad A = \| \| A_1 \ A_2 \ \dots \ A_Q \| \|, \quad x = \left\| \begin{array}{c} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(Q)} \end{array} \right\|.$$

В (2) размерности блоков A_q и векторов $x^{(q)}$ равны $(N \times M_q)$ и M_q соответственно, $q = 1, 2, \dots, Q$, $\sum_{q=1}^Q M_q = M$.

Далее, над каждым из квадратных блоков строится своеобразный «конус». Зависимость размерности блока от параметра t можно описать следующим образом:

$$(3) \quad M_q^{i+1} = \sqrt{(M_q^{(i)})^2 - 4(M_q^{(i)} - 1)},$$

где $q = 1, 2, \dots, Q$; $i = 1, \dots, N_i$; $1 \leq N_i \leq N$.

В формуле (3) дискретный индекс i связан с непрерывным параметром t линейной зависимостью:

$$(4) \quad i = [tN_i], \quad t \in [0, 1]$$

Здесь в правой части равенства стоит целая часть выражения в квадратных скобках. Число шагов N_i зависит от размерности исходной системы уравнений, характера рельефа местности, степени контрастности отдельных выделенных блоков и т.п. Для каждого из квадратных деформируемых блоков решается регуляризованная по методу Страхова-Холецкого система.

3. Заключение

Авторами был поставлен математический эксперимент, который показал эффективность метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-35-51014).

Список литературы

1. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. Комбинированный метод F-, S-и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // Физика Земли. 2018. № 1. С. 96–113.
2. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. Комбинированный метод F-, S-и R-аппроксимаций повышенной размерности при решении задач геофизики и геоморфологии // Физика Земли. 2018. № 6. С. 1–18.
3. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. Интерпретация больших объемов данных при решении задач геофизики и геоморфологии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2017. № 1. С. 123–137.

Variable Dimension Block Method for Solving the Big Data Problem in Geophysics

*I. E. Stepanova*¹³, *A. M. Salnikov*², *A. V. Batov*¹²³

IPE RAS, Moscow, Russia¹

ICS RAS, Moscow, Russia²

Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia³

tet@ifz.ru, salnikov@ipu.ru, batov@ipu.ru

The report discusses a new block method for solving poorly conditioned systems of linear algebraic equations of large and extra large dimensions. Systems of this kind often arise in inverse problems of geophysics and geodesy.

Применение структурно-параметрического подхода при аппроксимации рельефа земной поверхности

И. Э. Степанова^{1,3}, *А. М. Сальников*²,
А. В. Батов^{2,13}, *В. В. Погорелов*^{1,3}

ИФЗ РАН, Москва, Россия¹

ИПУ РАН, Москва, Россия²

НГУ «Сириус», Сочи, Россия³

tet@ifz.ru, salnikov@ipu.ru, batov@ipu.ru, vvp@ifz.ru

В работе рассматриваются особенности применения структурно-параметрического подхода при построении аналитических аппроксимаций рельефа земной поверхности в рамках метода модифицированных S-аппроксимаций. Приводятся результаты математического эксперимента с использованием реальных данных о холмистом и горном рельефе.

Ключевые слова: метод линейных интегральных представлений, гравитационное поле, аппроксимация

1. Введение

Две версии метода S-аппроксимаций (локальная и региональная) являются вариантами метода линейных интегральных представлений; основные характеристики этого метода изложены достаточно подробно описаны в более ранних работах авторов (см., например, [1, 2]). Обратные задачи геофизики и геодезии являются некорректными и сложными, что неоднократно подчеркивалось многими исследователями.

В рамках трехмерного метода S-аппроксимаций известная компонента гравитационного поля аппроксимируется суммой простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности областей (в локальном случае ими являются горизонтальные плоскости и поверхности двугранных углов, в региональном – сферы или сфероиды). Но подобными носителями масс указанный метод не ограничивается. Важно подчеркнуть, что носители масс, эквивалентных по внешнему физическому полю, могут иметь любую размерность, меньшую или равную размерности рассматриваемого пространства. В приведенных выше ссылках на работы первых двух авторов настоящей статьи ранее применялся исключительно вариационный подход к решению обратных задач геофизики и геодезии. Однако в целом ряде случаев целесообразно искать иные пути решения некорректных задач, которые позволили бы повысить качество решения и учесть все «нюансы» по-

становки.

2. Метод

Методика S-аппроксимаций [1, 2] состоит в аппроксимации заданной величины (в данном случае вертикальной координаты, характеризующей рельеф) суммой простого и двойного слоев, залегающих ниже заданного рельефа. В рамках этой методики решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) больших размерностей (соразмерно общему количеству измерений), поэтому основным вычислительным этапом является именно решение СЛАУ.

Основными гиперпараметрами (которые подбираются вручную) S-аппроксимационной модели являются:

1. общее количество плоскостей (или двугранных углов, [3], являющимися носителями простого и двойного слоев, которые будут аппроксимировать рельеф;
2. глубина залегания каждой из плоскостей (под глубиной в данной задаче мы понимаем расстояние от минимальной высотной отметки до соответствующей плоскости), а также правая или левая граница двугранного угла.

При построении аппроксимаций рельефа мы пользовались следующими программами:

- RegCheb – программа по нахождению устойчивого приближенного решения СЛАУ регуляризованным итерационным методом Чебышева;
- ВСМ1 – программа по нахождению устойчивого приближенного решения усовершенствованным блочным методом контрастирования с использованием регуляризованного метода Чебышева;

Топографические данные бывают трех типов: равнины, холмы и горы. От показателя перепада высот зависит выбор параметров модели: чем более резкий рельеф, тем труднее аппроксимация – нужно больше итераций для достижения необходимой точности.

Для равнин и холмистой местности перепад высот не такой значительный и в этом случае аппроксимация возможна практически с любой точностью (даже с миллиметровой, если требуется) [4]. Горы же аппроксимировать гораздо труднее в связи с наличием множества резких подъемов.

В работе представлены результаты расчетов для холмистого и горного типов рельефа, для участков, которые были описаны в работе [3]. Для указанных типов рельефа были рассмотрены несколько вариантов S-аппроксимационных моделей с различными исходными параметрами, а именно варьировалось общее число исходных двугранных углов и их границы.

3. Основной результат

Структурно-параметрического подхода в рамках метода S- аппроксимаций был применен для двух типов рельефа: холмов и гор. В качестве метода решения СЛАУ рассматривались регуляризованный трехслойный итерационный метод Чебышева и усовершенствованный метод блочного контрастирования.

Для обоих типов рельефа аппроксимация возможна с высокой степенью точности, если площадь территории и шаг сетки относительно невелики. С увеличением масштаба качество аппроксимации снижается. Для каждого из двух типов рельефа рассмотрено несколько вариантов моделей с различным количеством аппроксимирующих двугранных углов и различными глубинами их залегания. Во всех случаях отмечено небольшое преимущество использования модели с несколькими двугранными углами по сравнению с использованием всего 1-2 носителей.

Стоит обратить внимание, что с увеличением шага сетки необходимо уменьшать глубину залегания первой плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№19-35-51014).

Список литературы

1. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S- аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. № 2. С. 3–19.
2. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S- аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. № 7. С. 3–12.
3. *Степанова И.Э., Керимов И.А., Ягола А.Г.* Аппроксимационный подход в различных модификациях метода линейных интегральных представлений // Физика Земли. 2019. № 2. С. 31–47.
4. *Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетиллов А.В.* Комбинированный метод F-, S-и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // Физика Земли. 2018. № 1. С. 96–113.

The Use of the Structural-parametric Approach in Approximating the Relief of the Earth's Surface

*I. E. Stepanova*¹³, *A. M. Salnikov*², *A. V. Batov*²¹³, *V. V. Pogorelov*¹³

IPE RAS, Moscow, Russia¹

ICS RAS, Moscow, Russia²

Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia³

tet@ifz.ru, batov@ipu.ru, vvp@ifz.ru

The paper discusses the features of applying the structural-parametric approach to constructing analytical approximations of the earth's relief in the framework of the modified S-approximation method. The results of a mathematical experiment using real data on hilly and mountainous terrain are presented.

Компьютерный анализ радиуса робастной устойчивости в одной электромеханической системе

С. Н. Стребуляев, С. М. Жорин

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
sstrebuliaev@mail.ru

Рассмотрена структурная схема системы электропривода (ЭП), включающая в себя систему управления и двигатель. Получена общая передаточная функция изучаемой системы и характеристическое уравнение в символьном виде. Проведен анализ устойчивости изучаемой системы по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Построены границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров. Получены границы областей устойчивости в виде поверхностей в трехмерном пространстве параметров и найдены параметры, оказывающие наибольшее влияние на устойчивость системы электропривода. Проведено сведение общей передаточной функции к безразмерному виду. Из анализа границ областей устойчивости получен массив радиусов устойчивости и их минимальное значение — радиус робастной устойчивости в восемнадцатимерном пространстве параметров рассматриваемой динамической системы. Проведен многофакторный анализ зависимостей радиуса робастной устойчивости от параметров системы.

Ключевые слова: система электропривода, математическая модель, характеристическое уравнение, область устойчивости, система аналитических вычислений, чувствительные параметры, радиус робастной устойчивости

Электропривод является составной частью почти любой современной машины или оборудования (Рис.1). Система электропривода яв-

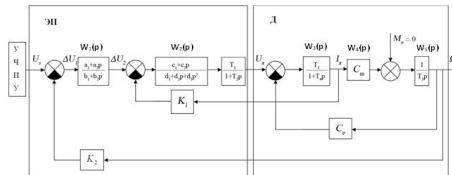


Рис. 1: Структурная схема системы электропривода

ляется сложной многоконтурной системой с несколькими цепями обратной связи и большим количеством регулируемых параметров. Значения этих параметров не всегда известны точно или могут варьироваться в процессе эксплуатации. Актуальна задача нахождения радиуса робастной устойчивости [1] Характеристическое уравнение системы есть полином шестого порядка вида:

$$(1) \quad Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6 = 0,$$

где коэффициенты полинома являются функциями от восемнадцати конструктивных параметров системы $q_i = q_i(\alpha_1 \dots \alpha_{18})$ и имеют сложный вид:

$$\begin{aligned} q_0 &:= T_2 T_4 T_5 b_2 d_3 \\ q_1 &:= T_2 T_4 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + T_2 T_5 b_2 d_2 + T_4 T_5 b_1 d_3 \\ &\quad + T_4 T_5 b_2 d_2 + T_5 b_2 d_3 \\ q_2 &:= C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + \\ &\quad T_2 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_5 b_2 d_2 + T_4 T_5 b_1 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_2 + T_5 b_2 d_3. \end{aligned}$$

Приведем коэффициенты уравнения характеристического уравнения к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_i < \alpha_{i,max} | \div \alpha_{i,max} \\ 0 < \frac{\alpha_i}{\alpha_{i,max}} \alpha_i^* &= \frac{\alpha_i}{\alpha_{i,max}} \\ 0 < \alpha_i^* < 1, \quad \overline{i = 1, 18}. \end{aligned}$$

На первом этапе проводился вычислительный эксперимент с использованием системы аналитических вычислений (САВ) Maple по расчету границ областей устойчивости в 2D и 3D пространствах параметров. В дальнейшем было разработано универсальное программное обеспечение по расчету R – радиуса робастной устойчивости. В основе алгоритма расчета положены следующие шаги. Находим радиус $r_{i,j}$ устойчивости в каждой из плоскостей пространства параметров системы электропривода (Рис.2). Радиус робастной устойчивости R определяем следующим образом: $R = \min(r_{1,2}, r_{1,3} \dots r_{1,18}, r_{2,3}, r_{2,4} \dots r_{17,18})$. Таким образом в восемнадцатимерном пространстве параметров исследуемой системы имеем сферу радиуса R с центром в точке $M_0(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_{18}^*)$. Для любой точки $M(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{18}^*)$ лежащей внутри

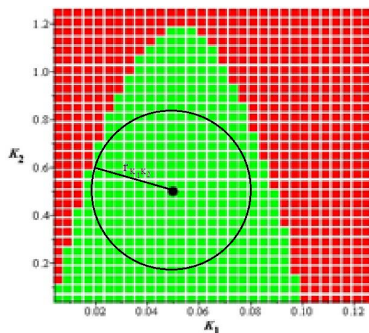


Рис. 2: Схема определения радиуса устойчивости

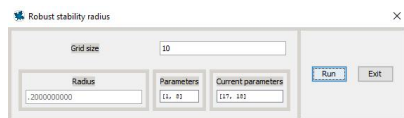


Рис. 3: Интерфейс результатов расчета

сферы, то есть $\rho(M_0, M) < R$, гарантируется устойчивость состояния равновесия исследуемой системы. Итоговый результат расчета на ЭВМ приведен на Рис.3.

Предложенный подход и программные средства могут быть эффективно использованы для анализа робастной устойчивости более сложных систем автоматического регулирования. При этом, вероятно, появится необходимость использования значительных ресурсов вычислительной техники и компьютерных станций.

Список литературы

1. *С.Н. Стребуляев, М.С. Петрова* Использование компьютерных технологий для исследования робастной устойчивости электромеханических систем. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции (30 мая -1 июня 2018 г., Москва)/[Ред. В.Н.Тхай]. М.: ИПУ РАН, 2018. 499 с.

Definition of Robust Stability Radius in an Electromechanical System

S. N. Strebuliaev, S. M. Zhorin

N. I. Lobachevskiy State University of Nizhniy Novgorod, Russia
sstrebuliaev@mail.ru

A type model of electrical drive system is suggested, controlling system and motor inclusive. Getting general transfer function the system under investigation secular equation symbolically. Analysis has been performed on root locus secular equation coordinates. Constructed stability boundary the four centers lie in 2D and 3D spaces.

УДК 517.977;681.5

Стабилизация нелинейных систем с ограниченными возмущениями на основе нечеткого ремоделирования и метода инвариантных эллипсоидов

Ю. В. Талагаев

ВУНЦ ВВС ВВА им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж,
Россия
shangyi@narod.ru

Представлен подход, позволяющий осуществить синтез класса нелинейных систем, находящихся под действием внешних ограниченных возмущений. Реализация подхода происходит в два этапа. На первом шаге осуществляется ремоделирование - данная нелинейная модель заменяется эквивалентной нечеткой моделью Такаги-Сугено. На втором этапе посредством обобщения метода инвариантных эллипсоидов формулируется и решается задача нахождения нечеткого управления, которое стабилизирует замкнутую систему и оптимально подавляет действие внешних возмущений. Представлены результаты численных эксперимента, показывающие эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: нечеткое ремоделирование, нелинейные системы, ограниченные возмущения, стабилизация, инвариантные эллипсоиды

Системы, подверженные действию внешних ограниченных возму-

щений, возникают в широком круге практически важных задач и остаются важным объектом исследований [1].

Продуктивным способом совершенствования методов анализа устойчивости и управления нелинейными системами является нечеткое ремоделирование – замещение исходной (нелинейной) модели эквивалентной в заданной области фазового пространства нечеткой моделью Такаги-Сугено (Т-С) [2]. Получаемая модель представляет собой набор линейных подсистем, взвешенных функциями принадлежности, и для ее исследования оказывается применим аппарат линейных матричных неравенств.

Осуществление нечеткого ремоделирования дает возможность сделать необходимые обобщения и применить метод инвариантных эллипсоидов [1] к нелинейным системам. Результативность этого подхода ранее была показана в [3], где рассматривалась проблема оценки инвариантных множеств нелинейных систем. В настоящей работе исследуется задача синтеза нечеткого регулятора, который стабилизирует систему, компенсируя влияние внешних ограниченных возмущений.

Пусть дана нелинейная управляемая система

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + b_1(x(t))u(t) + d(x(t))w(t), \\ y(t) &= \varphi(x(t)) + b_2(x(t))u(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in R^n$ – состояние, $u(t) \in R^m$ – вход, $w(t) \in R^r$ – внешнее ограниченное возмущение ($\|w(t)\| \leq 1$ для всех $t \geq 0$), $y(t) \in R^l$ – выход, $f(x(t))$, $b_1(x(t))$, $b_2(x(t))$, $d(x(t))$ – гладкие нелинейные матричные функции.

Переход к нечеткому описанию (нечеткое ремоделирование) состоит в замене (1) для всех $x(t) \in H$ нечеткой Т-С моделью

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^q h_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_{1i} u(t) + D_i w(t)), \quad \|w(t)\| \leq 1, \\ y(t) &= C x(t) + B_2 u(t), \end{aligned}$$

где $A_i \in R^{n \times n}$, $B_{1i} \in R^{n \times m}$, $B_2 \in R^{l \times m}$, $D_i \in R^{n \times r}$, $C \in R^{l \times n}$ – постоянные матрицы, $i = 1, \dots, q$ – номер правила, $\theta(x(t)) \in R^p$ – вектор, образованный переменными посылки в правилах нечеткого вывода, $h_i(\theta(t))$ – функции принадлежности ($0 \leq h_i(\theta(t)) \leq 1$, $\sum_{i=1}^q h_i(\theta(t)) = 1$). Множество $H = \{x \in R^n : \theta_j \in [\underline{\theta}_j, \bar{\theta}_j], j = 1, \dots, p\}$, где $\underline{\theta}_j = \min_{x(t) \in H} \theta_j(x(t))$,

$\bar{\theta}_j = \max_{x(t) \in H} \theta_j(x(t))$ задается на основе имеющейся информации о поведении нелинейной системы.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$E_x = \{x \in R^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным по состоянию* для устойчивой нечеткой Т-С модели (2) с $u(t) \equiv 0$, если из $x_0 \in E_x$ следует $x(t) \in E_x$ для всех $t \geq 0$.

Определение 2. Эллипсоид $E_y = \{y \in R^l : y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1\}$, где $P \succ 0$ – матрица эллипсоида E_x , называется *ограничивающим по выходу* для нечеткой Т-С модели (2) при $u(t) \equiv 0$.

Среди эллипсоидов наиболее ценную характеристику влияния возмущений на систему предоставляют минимальные по какому-либо критерию эллипсоиды (объем эллипсоида, длина наибольшей полуоси и др.).

Рассмотрим модель (2) (матрицы A_i не предполагаются гурвицевыми). Задача состоит в нахождении нечеткого регулятора

$$u(t) = \sum_{j=1}^q h_j(\theta(t)) K_j x(t),$$

где $K_j, j = 1, \dots, q$ – матрицы усиления, который стабилизирует замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i(\theta(t)) h_j(\theta(t)) ((A_i + B_{1i} K_j) x(t) + D_i w(t)), \\ y(t) &= (C + B_2 K_j) x(t) \end{aligned}$$

и оптимально (в смысле минимума функции $f(P) = \|CPC^T\|$, соответствующей значению наибольшей полуоси ограничивающего эллипсоида по выходу) подавляет действие внешних возмущений $w(t)$.

Решение сформулированной задачи дает следующая теорема, которая является обобщением теоремы 3 в [1].

Теорема 1. *Решение $\hat{P}, \hat{Z}, \hat{Y}_j$ задачи*

$$\lambda \rightarrow \min_{P=P^T, Z=Z^T, Y_j, \alpha > 0},$$

при ограничениях

$$A_i P + P A_i^T + \alpha P + B_{1i} Y_j + Y_j^T B_{1i}^T + \alpha^{-1} D_i D_i^T \leq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y_j \\ Y_j^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$CPC^T + CY_j^T B_2^T + B_2 Y_j C^T + B_2 Z B_2^T \preceq \lambda I, \quad i, j = 1, \dots, q$$

определяет нечеткий регулятор $\hat{K}_j = \hat{Y}_j \hat{P}^{-1}$ оптимально подавляющий внешние ограниченные возмущения.

Теорема 1 сводит нахождение нечеткого регулятора к поиску минимального ограничивающего эллипсоида по выходу замкнутой системы. Проблема формулируется в терминах линейных матричных неравенств и сводится к стандартной задаче полуопределенного программирования и одномерной выпуклой минимизации.

Эффективность подхода продемонстрирована на примере стабилизации хаотической системы. Полученные в настоящей работе результаты открывают перспективы решения содержательных задач синтеза нелинейных систем.

Список литературы

1. Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *Авт.* 2011. № 11. С. 9–59.
2. Tanaka K., Wang H.O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York: Wiley, 2001.
3. Talagaev Y. Ellipsoidal approximation of reachability sets of a class of nonlinear systems represented by the Takagi-Sugeno fuzzy models // 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference) (STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408405>

Stabilization of Nonlinear Systems with Bounded Disturbances Based on Fuzzy Remodeling and the Invariant Ellipsoid Method

Y. V. Talagaev

Russian Air Force Military Educational and Scientific Center, Voronezh, Russia
shangyi@narod.ru

An approach that allows performing the synthesis of a class of nonlinear systems under bounded exogenous disturbances is presented. Its implementation includes two stages. At the first stage we perform remodeling. The given non-linear system is replaced by the equivalent Takagi-Sugeno fuzzy model. At the second stage via generalization of the method of invariant ellipsoids we formulate and solve the problem of finding fuzzy control that stabilizes the closed-loop system and suppresses the effect of exogenous disturbances in the optimal way. The numerical testing results showing the efficiency of the offered method are presented.

Свойства вероятностных решений задач условной оптимизации со случайными параметрами

Г. А. Тимофеева, О. Н. Ие

УрГУПС, Екатеринбург, Россия
Gtimofeeva@mail.ru, olgaie@mail.ru

Исследуются вероятностные решения задач оптимизации со случайными параметрами. Вероятностные решения используются в случае, когда число лиц, принимающих решения (ЛПР), велико, каждый из них принимает оптимальное решение независимо от других, решая свою задачу оптимизации. В этом случае оптимальное решение принятое случайно выбранным ЛПР можно рассматривать как случайный вектор. В частности, вероятностные решения задач стохастической оптимизации естественно возникают в задаче рационального потребительского выбора, в задаче о распределении инвестиционных решений на рынке ценных бумаг, в бикритериальной модели выбора маршрута пассажиром. В общем случае вероятностное решение задачи оптимизации со случайными параметрами является случайным множеством. Исследуются условия существования решения задачи стохастической оптимизации в форме случайного вектора, изучаются свойства его распределения, в том числе для задачи линейной стохастической оптимизации. Рассмотрены модельные примеры вероятностных решений задач стохастической оптимизации.

Ключевые слова: стохастическая оптимизация, вероятностное решение

1. Введение

При исследовании задач стохастической оптимизации, например задач нахождения максимума функции, которая зависит от случайного параметра, обычно используется один из следующих критериев: оптимизация ожидаемого значения целевой функции, максимизация вероятности достижения определённого уровня целевой функции (вероятностный критерий), оптимизация квантили фиксированной вероятности, может также использоваться бикритериальный подход — максимизация среднего значения и минимизация дисперсии. Во всех

этих подходах предполагается, что решение задачи принимается однократно и является детерминированным. С другой стороны, существует значительное количество задач, в которых решение принимается многократно, многими лицами, независимо друг от друга. В этих случаях имеет смысл рассматривать задачи стохастической оптимизации со случайным решением [1, 2]. Кроме того, вероятностное решение задач оптимизации естественно возникает при имитационном моделировании систем, когда для каждого значения случайного входа решается (возможно вспомогательная) задача оптимизации. Исследование вероятностных решений задач оптимизации со случайными параметрами начато в работах Поповой О. А. [3], где в частности приведен пример расчета плотности распределения вероятностного решения задачи линейного программирования со случайным целевым вектором. Однако, теоретический анализ вероятностного решения задачи оптимизации функции, зависящей от случайного параметра, пока не проводился.

2. Определение и свойства вероятностного решения

Рассмотрим задачу вероятностной оптимизации

$$(1) \quad \min_{x \in X} f(x, \xi),$$

где $X \subset R^n$ — компактное множество, функция $f(x, b) : X \times R^m \mapsto R^1$ — непрерывна по совокупности переменных, $\xi = \xi(\omega)$ — случайный вектор, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ со значениями в R^m .

Обозначим множество решений задачи (1) при фиксированном значении b через $X^*(b) = \text{Arg min}\{f(x, b) | x \in X\}$.

Определение 1. Случайное компактное множество $X^*(\xi)$ будем называть вероятностным решением задачи стохастического программирования (1).

Лемма 1. Пусть функция $f(x, b)$ строго выпукла вниз по x и непрерывна по совокупности переменных на $X \times B$, где X — выпуклое компактное множество, B — открытое связное множество. Тогда решение x^* задачи (1) существует и единственно при всех $b \in B$, а функция $x^* = \phi(b)$ является непрерывной функцией параметра b .

Теорема 1. Пусть выполняются условия Леммы 1 и ξ — случайная величина, принимающая значения из множества B , тогда $X^*(\xi)$ является случайным вектором.

Отметим, что если условия теоремы 1 не выполняются, то вероятностное решение задачи оптимизации может представлять случайное множество.

Пример. Задача случайного линейного программирования.

Рассмотрим свойства вероятностного решения задачи линейного программирования со случайным целевым вектором. Теоретическое исследование свойств для простейшей задачи ЛП проведено в [2]. Рассмотрим задачу ЛП со случайным целевым вектором

$$(2) \quad \max_{x \in X} x^T \xi,$$

$$X = \{x \in R^n : Ax \leq b, \quad x \geq 0\}.$$

Обозначим $X^*(\xi)$ — вероятностное решение задачи (2). Отметим, что оно принимает значения из множества граничных точек множества X , причем $X(\xi)$ может быть множеством, а не точкой. Кроме того, непрерывное распределение параметра ξ приводит, как правило, к дискретному распределению вероятностного решения.

Пусть

$$(3) \quad \max(x_1 + \xi x_2),$$

$$X = \{x \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 3\}.$$

Множество X — пятиугольник с вершинами $O = (0; 0)$, $C_1 = (2; 0)$, $C_2 = (2; 1)$, $C_3 = (1; 2)$, $C_4 = (0; 2)$. Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения 0, 1 и 2 с вероятностями равными p_0 , p_1 и p_2 соответственно, то вероятностное решение задачи (3) является случайным множеством, принимающим одно из 3-х значений:

$$X^*(\xi) = \begin{cases} [C_1; C_2] \text{ с вероятностью } p_0, \\ [C_2; C_3] \text{ с вероятностью } p_1, \\ \{C_3\} \text{ с вероятностью } p_2. \end{cases}$$

В случае непрерывного равномерного распределения ξ на интервале $[0; 2]$ случайное множество $X(\xi)$ с вероятностью 1 состоит из одной точки и имеет дискретное распределение

$$X^*(\xi) = \begin{cases} C_1 \text{ с вероятностью } 0.5, \\ C_2 \text{ с вероятностью } 0.5. \end{cases}$$

Из рассмотренного примера следует, что распределения вероятностного решения задачи стохастической оптимизации достаточно разнообразны даже для задачи линейного программирования и требуют отдельного исследования.

Список литературы

1. *Timofeeva G., Martynenko A.* Analysis of Transport Network Development via Probabilistic Modelling // 2018 14th Intern. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB). IEEEExplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408407>
2. *Timofeeva G.* Investigation of mathematical model of passenger preferences // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2172, 080001. doi: 10.1063/1.5133559
3. *Popova O.A.* Optimization problems with random data // Журн. Сибирского федерального университета. Сер.: Математика и физика. 2013. Т. 6. № 4. С. 506–515.

Properties of Probabilistic Solutions of Conditional Optimization Problems with Random Parameters

G. A. Timofeeva, O. N. Ie

Ural State University of Railway Transport, Russia
Gtimofeeva@mail.ru, olgaie@mail.ru

Probabilistic solutions of optimization problems with random parameters are investigated. Probabilistic decisions are used in the case when the number of decision makers (DM) is large, each of them makes the optimal decision independently of the others, solving his optimization problem. In this case, the optimal decision made by a randomly selected decision maker can be considered as a random vector. In particular, probabilistic solutions to stochastic optimization problems naturally arise in the problem of rational consumer choice, in the problem of the distribution of investment decisions in the securities market, in the bicriterial model of passenger choice of a route. In the general case, the probabilistic solution of the optimization problem with random parameters is a random set. The conditions for the existence of a solution to the stochastic optimization problem in the form of a random vector are studied. The properties of its distribution are investigated, including the case of the linear stochastic optimization problem. Model examples of probabilistic solutions to stochastic optimization problems are considered.

**Об управлении электродинамической
тросовой системой в условиях
взаимодействия с околоземной плазмой**

А. А. Тихонов, А. Б. Яковлев

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
a.tikhonov@spbu.ru, a.b.yakovlev@spbu.ru

Рассматривается проблема стабилизации космической электродинамической тросовой системы (ЭДТС) в локальном вертикальном положении. ЭДТС включает отрицательно заряженный коллектор на нижнем конце троса и положительно заряженный коллектор на верхнем конце. Величина отрицательного заряда является управляемой. Момент сил Лоренца, действующий на ЭДТС благодаря заряженным коллекторам на концах троса, значительно расширяет область устойчивости вертикального положения троса. Проанализировано взаимодействие заряженных коллекторов с околоземной плазмой. Исходя из необходимого для стабилизации закона управления и рассчитанных значений нейтрализующих токов из окружающей плазмы получены зависимости вариации тока в системах сброса заряда с коллекторов при изменении параметров окружающей плазмы при движении ЭДТС.

Ключевые слова: Электродинамический трос, стабилизация, геомагнитное поле, момент сил Лоренца, космическая плазма

1. Введение

Рассматривается проводящий трос, развернутый в околоземном пространстве и обращающийся вокруг Земли. При движении троса в геомагнитном поле внутри троса возникает электродвижущая сила. Поскольку концы троса электрически контактируют с ионосферной плазмой, то электрический ток может протекать через трос, замыкая цепь через окружающую околоземную плазму. Если, кроме того, плазменные контакторы на том или ином конце троса эмитируют и собирают электроны, то в тросе может сохраняться значительный ток. В такой тросовой системе, называемой электродинамической тросовой системой (ЭДТС), возбуждаются амперовы и лоренцевы силы, оказывающие влияние на динамику проводящего троса [1]. В настоящее время возможности использования ЭДТС для удаления с орбиты отработавших искусственных спутников Земли (ИСЗ) оцениваются как весьма перспективные. В этом случае трос используется как

электродинамический тормоз орбитального движения, работающий на основе тормозящего влияния амперовых сил [2]. При этом наибольшей эффективностью отличается проводящий трос, ориентированный в околоземном пространстве по местной вертикали. Данная ориентация троса является устойчивой в центральном ньютоновском гравитационном поле [1]. Однако под действием амперова момента вертикальная ориентация троса разрушается [1]. Решению проблемы неустойчивости ЭДТС посвящено немало работ. Среди возможных подходов к ее решению наиболее известным является подход, предлагающий использование тех или иных вариантов управления силой тока, протекающего по тросу, включая периодическое прерывание тока или изменение его направления. Однако такой способ управления неизбежно снижает эффективность ЭДТС.

2. Основной результат

В данной работе рассматривается принципиально иной способ обеспечения вертикального положения проводящего троса, основанный не на управлении силой тока, протекающего по тросу, а на разделении разноименных зарядов по концам троса и использовании момента лоренцевых сил [3], влияние которого при определенных условиях является ориентирующим, предложен в [4]. Показано, что в пассивном варианте лоренцев момент может быть использован в качестве восстанавливающей составляющей управляющего момента в системе стабилизации проводящего троса в околоземном пространстве вдоль местной вертикали. При наличии в составе ЭДТС блока управления, позволяющего измерять текущее отклонение троса от вертикали и скорость изменения угла отклонения, а также управлять электронным эмиттером, установленным на отрицательно заряженном коллекторе ЭДТС, изменяя тем самым заряд этого коллектора в соответствии с данными измерений, появляется возможность создать дополнительный момент диссипативного характера. Доказано, что несмотря на неполную диссипацию, создаваемую предложенным способом, одновременная работа восстанавливающего и диссипативного моментов позволяет решить задачу стабилизации ЭДТС в вертикальном положении [4]. При этом существенным фактором, ранее не принимавшимся во внимание, однако способным повлиять на работу системы управления ЭДТС, является взаимодействие ЭДТС с околоземной плазменной средой. Изучению этого взаимодействия и вызванных этим явлением особенностей динамики и синтеза системы управления ЭДТС и посвящена данная работа.

Измеренные величины потенциала космического аппарата (КА) в ионосферных экспериментах показали, что даже без использования систем искусственной нейтрализации КА наводимый на поверхности КА электрический заряд не препятствует функционированию систем сброса заряда. Теоретическое исследование процесса нейтрализации тел в ионосфере существенно усложняется необходимостью учета влияния геомагнитного поля на движение частиц плазмы. Особенно это важно для положительно заряженных тел. В настоящей работе сформулирована и решена система нелинейных алгебраических уравнений, включающая два уравнения зарядки частей ЭДТС и уравнение закона Ома для тока в тросе. При этом использованы принципиально разные модели нейтрализации заряда концевых тел. Вокруг движущегося в ионосфере отрицательно заряженного тела возникает область положительного пространственного заряда, где средняя скорость движения ионов меньше скорости тела. Поэтому положительные ионы рассматривались как моноскоростной поток в системе отсчета нижнего концевого тела. Исходя из необходимого для стабилизации закона управления и рассчитанных значений нейтрализующих токов из окружающей плазмы получены зависимости вариации тока в системах сброса заряда на концевых телах при изменении параметров окружающей плазмы при движении ЭДТС по круговой орбите в плоскости магнитного экватора.

3. Заключение

Рассмотрена проблема стабилизации космической электродинамической тросовой системы (ЭДТС) в геомагнитном поле в локально-вертикальном положении. Проанализировано взаимодействие заряженных коллекторов ЭДТС с околоземной плазмой с учетом изменения физических свойств плазмы в процессе орбитального движения ЭДТС. Исходя из необходимого для стабилизации ЭДТС закона управления и рассчитанных значений нейтрализующих токов из окружающей плазмы получены зависимости вариации тока в системах сброса заряда с коллекторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00146-а).

Список литературы

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990
2. *Forward R.L., Hoyt R.P.* Terminator Tether: a spacecraft deorbit device // J. Spacecraft Rockets. 2000. V. 37. P. 187–196.

3. *Tikhonov A.A., Shcherbakova L.F.* On Equilibrium Positions and Stabilization of Electrodynamic Tether System in the Orbital Frame // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 040023.
4. *Тихонов А.А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы // Автоматика и телемеханика. 2020. №. 2. С. 91–114.

On the Attitude Control of an Electrodynamic Tether System Interacting with near-Earth Plasma

A. A. Tikhonov, A. B. Yakovlev

Saint Petersburg State University, Russia
a.tikhonov@spbu.ru, a.b.yakovlev@spbu.ru

The problem of attitude stabilization of the space electrodynamic tether system (EDTS) in a local vertical position is considered. EDTS includes a negatively charged collector at the lower end of the tether and a positively charged collector at the upper end. The magnitude of the negative charge is controllable. The Lorentz torque acting on the EDTS due to the charged collectors at the ends of the tether significantly expands the stability region for the vertical position of the tether. The interaction of charged collectors with near-Earth plasma is analyzed. Based on the designed stabilization control and the calculated values of the neutralizing currents from the surrounding plasma, the dependence of the current variation in collectors' charge discharge systems are obtained taking into account changing the parameters of the surrounding plasma during the EDTS orbital motion.

Сравнение подходов к оцениванию скорости по измерениям положения на примере системы Ван Дер Поля–Дуффинга

О. С. Ткачева¹, М. С. Виноградова², А. В. Уткин¹

ИПУ РАН, Москва, Россия¹

МГТУ им. Н. А. Баумана, Москва, Россия²

tkolga17@gmail.com, mrvinogradova@rambler.ru, utkin-av@rambler.ru

В рамках проблемы диагностики кардиостимуляторов рассматривается задача оценивания скорости распространения трансмембранного потенциала по его измерениям. На основе математической модели кардиостимулятора, которая представлена двумерной нелинейной динамической системой Ван Дер Поля–Дуффинга, разработаны методы синтеза наблюдателей состояния пониженного и полного порядка с нелинейными корректирующими воздействиями. Представлены результаты сравнительного анализа качества оценивания скорости трансмембранного потенциала с помощью различных наблюдателей, а также дифференцирующего фильтра на основе численного моделирования.

Ключевые слова: система Ван дер Поля, наблюдатель состояния, дифференцирующий фильтр

1. Введение

При диагностике кардиостимуляторов возникает задача оценивания скорости распространения трансмембранного потенциала по его измеряемым значениям. Математическая модель, описывающая работу кардиостимулятора, представлена двумерной нелинейной динамической системой Ван Дер Поля–Дуффинга [1]. Для кардиостимулятора может быть измерена только одна переменная — трансмембранный потенциал узла. Вторая переменная — скорость изменения трансмембранного потенциала не доступна для измерений. Для ее оценивания сравниваются три метода восстановления данных: наблюдатели состояния полного и пониженного порядка с нелинейными непрерывными корректирующими воздействиями в виде сигмоидальных функций [2] и дифференцирующий фильтр [3]. Сравнение проводится на основе качественных характеристик численного моделирования.

2. Модель кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля

Рассмотрим модель кардиостимулятора, используемую для стимуляции атриовентрикулярного (AV) или синоатриального (SA) узлов [1]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\alpha(x_1 - v_1)(x_1 - v_2)x_2 - \frac{x_1(x_1 + d)(x_1 + e)}{de}; \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

где переменная x_1 — трансмембранный потенциал узла (SA или AV), для которого строится модель кардиостимулятора, x_2 — скорость изменения потенциала. Скорость x_2 является неизмеряемой величиной, $d, e, \alpha > 0$, v_1, v_2 — параметры модели $v_1 \cdot v_2 < 0$. Данная модель допускает возможность изменять частоту генератора путем изменения значения потенциала покоя. Одновременно изменяя параметры v_1 и v_2 , можно понижать или увеличивать значение потенциала покоя без изменения максимального значения потенциала действия [1]. Слагаемое $\frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{de}$ дает возможность получения хаотической динамики, подобно динамике осциллятора Дуффинга.

3. Построение наблюдателей

Для системы (1) построим наблюдатель полной размерности с корректирующим воздействием в виде сигмоидной функции вида [2]:

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + e^{-kx}} - 1.$$

Наблюдатель полной размерности [2] будет иметь вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \nu_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \nu_2, \end{aligned}$$

где ν_1, ν_2 — корректирующие воздействия. Выпишем ошибки наблюдения $\varepsilon_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $\varepsilon_2 = x_2 - \hat{x}_2$ и динамику ошибок наблюдения:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - \nu_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\alpha(x_1 - v_1)(x_1 - v_2)x_2 - \frac{x_1(x_1 + d)(x_1 + e)}{de} - \nu_2,$$

где $\nu_1 = M_1\sigma(x_1 - \hat{x}_1)$, $\nu_2 = M_2\sigma(k_2M_1\sigma(k_1(x_1 - \hat{x}_1)))$. Показано, что путем настройки параметров $k_1, k_2, M_1, M_2 > 0$ на основе неравенств за конечное время обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения:

$|\varepsilon_1(t)| \leq \delta_1$ при $t > t_1$, $|\varepsilon_2(t)| \leq \delta_2$ при $t > t_2 > t_1$, тогда $\hat{x}_2(t) \approx x_2(t) \pm \delta_2$.

В целях сокращения объема вычислений в реальном времени предложен наблюдатель скорости пониженного порядка, построенный на основе первого уравнения системы (1):

$$(3) \quad \dot{\hat{x}}_1 = \vartheta_1, \quad \vartheta_1 = N_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = x_1 - \hat{x}_1.$$

Задача наблюдения сводится к стабилизации ошибки наблюдения и ее производной: $\dot{\varepsilon}_1 = x_2 - \vartheta_1$. Показано, что при выборе соответствующих параметров N_1 , $k_1 > 0$ выполняется: $|\varepsilon_1(t)| \leq \delta_1$, $t > t_1$, $\dot{\varepsilon}_1(t) \leq \delta_2$, $t > t_2 > t_1$, тогда $\vartheta_1(t) = x_2(t) \pm \delta_2$.

Так же для оценивания скорости изменения трансмембранного потенциала (1) применялся дифференцирующий фильтр, с помощью которого выполняется непосредственная обработка измерений без использования математической модели [3].

Приведены результаты численного моделирования и сравнительного анализа используемых подходов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проекты № 20-01-00363а, № 18-01-00846а и № 19-07-00817а).

Список литературы

1. *Zebrowski J. J., Grudziński K.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // *Physica A*. 2004. V. 336. No.1–2. P. 153–162.
2. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // *АиТ*. № 2. 2014. С. 106–128.
3. *Суворов Д.А., Французова Г.А., Востриков А.С.* Синтез двухкаскадной системы автоматического поиска экстремума со скользящими режимами // *Доклады Академии наук высшей школы РФ*. 2018. №. 2 (39). С. 82–92.

A Comparison of Approaches to Estimating Velocity from Position Measurements Using the Example of the Van der Paul–Duffing System

*O. S. Tkacheva*¹, *M. S. Vinogradova*², *A. V. Utkin*¹

V.A. Trapeznikov ICS RAS, Moscow, Russian Federation¹

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation²

tkolga17@gmail.com, mrnvinogradova@rambler.ru, utkin-av@rambler.ru

As part of the diagnosis of pacemakers, the problem of estimating the propagation velocity of a transmembrane potential from its measurements

is considered. Based on the mathematical model of a pacemaker represented by a two-dimensional non-linear dynamic van der Pol–Duffing system, methods have been developed for the synthesis of observers of low and full order states with non-linear corrective actions. The results of a comparative analysis of the quality of estimating the velocity of a transmembrane potential based on numerical modeling using various observers and a differentiating filter are presented.

УДК 531.36: 534.1

Семейство колебаний, связывающее равновесия

В. Н. Трай

ИПУ РАН, Москва, Россия
tkhainv@ayandex.ru

Рассматривается механическая система, подверженная действию позиционных сил. Предполагается, что на неподвижном множестве системы действующая сила отлична от нуля везде, кроме точек равновесия. Изучаются симметричные периодические движения (СПД). Доказывается общий результат о глобальном двухстороннем продолжении СПД до границы области существования СПД. Дается продолжение ляпуновского семейства на семейство СПД: монотонное изменение периода наследуется. Показывается, каким образом семейство СПД связывает «центр» и «седло». На систему с $n > 1$ степенями свободы распространяется закон Пуанкаре о смене равновесий. В приложении находятся все семейства колебаний пар оснований ДНК, связывающие равновесия.

Ключевые слова: механическая система, позиционные силы, неподвижное множество, равновесие, ляпуновское семейство, симметричное периодическое движение, «центр» и «седло», закон Пуанкаре

1. Введение

Математический маятник доставляет пример семейства колебаний, связывающего равновесия на неподвижном множестве обратимой механической системы. Условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Omega \in \mathbb{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$, даются в [1]. В докладе рассматривается механическая система, под-

верженная действию позиционных сил.

2. Основной результат

Система описывается уравнениями Лагранжа второго рода: $q \in \mathbb{R}^n$ — обобщенная координата. Фазовый портрет системы с точностью до направления по траекториям симметричен относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Предполагается, что на неподвижном множестве действующая сила Q отлична от нуля везде, кроме точек равновесия.

Симметричное периодическое движение (СПД) пересекает множество M в момент времени $t = 0$ и через полупериод $t = T$

$$(1) \quad \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T, \quad s = 1, \dots, n.$$

Предельным случаем СПД будет равновесие.

Рассматривается одно из связных областей Λ_0^s точек $q^0 \in M$, в которой

$$\det A \neq 0, \quad A = \|a_{sj}\|, \quad a_{sj} = \partial \dot{q}_s(q^0) / \partial q_j^0.$$

Наряду с областью Λ_0^s система содержит область Λ_T^s , в которой также $\det A \neq 0$. СПД связывает две точки областей Λ_0^s и Λ_T^s в том смысле, что эти точки принадлежат одному СПД. Условие $\det A \neq 0$ означает, что для начальных точек, принадлежащих областям $\Lambda_{0,T}^s$, уравнения для СПД содержат n независимых решений, симметричных относительно множества $\{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ (см. [2]).

Справедлива теорема о глобальном продолжении семейства СПД.

Теорема 1 (Глобальное продолжение семейства СПД).

Пусть область Λ_0^s содержит начальную точку СПД с полупериодом T . Тогда эта точка принадлежит кривой $\Gamma_0^s \in \Lambda_0^s$ начальных точек СПД, которая продолжается по T в обе стороны до границ области Λ_0^s . При этом граничной точкой P_0 кривой Γ_0^s будет равновесие или через P_0 проходит траектория, двояко-асимптотическая к равновесию. Параметр T на Γ_0^s меняется монотонно.

В случае равновесия P_0 с примыкающим к нему симметричным ляпуновским семейством справедлива теорема о глобальном продолжении ляпуновского семейства.

Теорема 2 (Продолжение ляпуновского семейства).

Пусть механическая система, подвержена действию позиционной силы $Q(q)$, которая на неподвижном множестве системы $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$ отлична от нуля везде, кроме точек равновесия, предполагаемыми изолированными. В этой системе ляпуновское семейство продол-

жаётся глобально до границы существования СПД с сохранением монотонного изменения периода на семействе. При убывании периода семейство уходит на бесконечность с одновременным стремлением к нулю периода. Возрастание периода происходит неограниченно, при этом семейство или уходит на бесконечность, или примыкает к равновесию "седло". В последнем случае два равновесия связываются семейством симметричных колебаний.

Дуальный характер равновесия позволяет распространить закон Пуанкаре о смене равновесий на систему с $n > 1$ степенями свободы.

Теорема 3 (Закон Пуанкаре о смене равновесий). Для равновесий механической системы с n степенями свободы, подверженной действию позиционной силы, закон Пуанкаре о смене равновесий реализуется в n цепочках «центр»–«седло», в которых от равновесия к равновесию меняется знак квадрата корня характеристического уравнения. Переход может происходить в пределах одного равновесия.

Результаты распространяются на обратимую механическую систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= U(u, v), & \dot{v} &= V(u, v), & u, v &\in \mathbb{R}^n, \\ U(u, -v) &= -U(u, v), & V(u, -v) &= V(u, v). \end{aligned}$$

В задаче о колебаниях пар оснований ДНК [3] находятся все семейства колебаний пар оснований ДНК, связующие равновесия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00146).

Список литературы

1. Zevin A.A. Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1997. V. 28. Iss. 9. P. 1499–1507.
2. Тхай В.Н. О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–623.
3. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.D. Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // Biophys.J. 2009. V. 90. № 9. P. 3091–3099.

A Family of Oscillations That Connects Equilibria

V. N. Tkhai

Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia
tkhainv@ayandex.ru

A mechanical system subject to the action of positional forces is

considered. It is assumed that, on a fixed set of the system, the acting force is nonzero everywhere except for the equilibrium points. We study symmetric periodic motions (SPM). The general result of the global bilateral extension of the SPD to the boundary of the SPM existence region is proved. The continuation of the Lyapunov family to the SPM family is given with the inheritance of a monotonic change in the period. It shows how the SPM family links the “center” and the “saddle”. Poincaré’s law on the change of equilibrium extends to a system with $n > 1$ degrees of freedom. All families of DNA base pair oscillations that bind the equilibrium are found.

УДК 519.712.2

**Распознавание мышечной активности с помощью
электромиографических датчиков в задачах управления
бионическим манипулятором**

Н. Н. Унанян, А. А. Белов

ИПУ РАН, Москва, Россия
n.unanyan@mail.ru, a.a.belov@inbox.ru

В статье рассмотрена возможность детектирования движения пальцев кисти руки на основе электромиографических (ЭМГ) датчиков с использованием низкочастотных контроллеров. Предложена многоуровневая обработка входных данных от ЭМГ датчика, которая обеспечивает идентификацию нескольких типов движений пальцев кисти руки.

Ключевые слова: электромиограмма, бионический протез, распознавание сигналов, роботизированные системы.

1. Введение

Использование ЭМГ сигнала в бионическом протезе верхних конечностей в настоящий момент показало свою высокую эффективность. Точность работы бионического устройства во многом определяется степенью достоверности расшифровки биопотенциалов мышцы при планируемом движении. Существует несколько возможных методов классификации [1, 2]: байесовская классификация; искусственные нейронные сети; нечеткая логика; нейро-нечеткие системы.

В данной статье рассматривается возможность распознавания мышечной активности не используя сложных вычислительных ресурсов, что позволяет реализовать систему управления в низкоразрядных контроллерах.

2. Основной результат

Для считывания и распознавания активности пользователя используется несколько модулей и блоков обработки сигнала. Один из них производит считывание и предварительную обработку сигнала. Данный блок предназначен для усиления компонентов сигнала, которые содержат важную информацию для распознавания движения. Из входных сигналов ЭМГ датчика X_i раз в минуту формируется окно из $n = 40$ значений. После чего вычисляется среднее значение данного окна σ .

$$(1) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

После чего все последующие значения, которые блок считывает с датчика, пересчитываются с учетом σ следующим образом:

$$(2) \quad X_i = |X_i - \sigma|.$$

Из полученного сигнала формируются окна по $m = 50$ значений, в которых выбирается максимальное значение $X_{max} = \max_{1 \leq i \leq m} X_i$. Формируются три окрестности вида:

$$F = \begin{cases} 1, & \text{если } a_1 < X_{max} \leq b_1, \\ 2, & \text{если } a_2 < X_{max} \leq b_2, \\ 3, & \text{если } a_3 < X_{max} \leq b_3, \end{cases}$$

где F — флаг принадлежности максимального значения окрестности 1–3 соответственно, a_i и b_i — границы окрестностей. Случай $F = 1$ соответствует расслабленной мышце и разогнутому пальцу, случай $F = 2$ частично напряженной мышце и наполовину согнутому пальцу, а случай $F = 3$ полностью напряженной мышце и согнутому пальцу. Данные границы подбираются экспериментальным путем, методом наблюдения за пациентом. Исходные значения a_i и b_i вводятся вручную и могут быть скорректированы в процессе работы. Результаты распознавания движения пальца показаны на рисунке 1 для следующих значений

границ окрестностей:

$$(3) \quad F = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < X_{max} \leq 30, \\ 2, & \text{если } 30 < X_{max} \leq 70, \\ 3, & \text{если } 70 < X_{max} \leq 200. \end{cases}$$

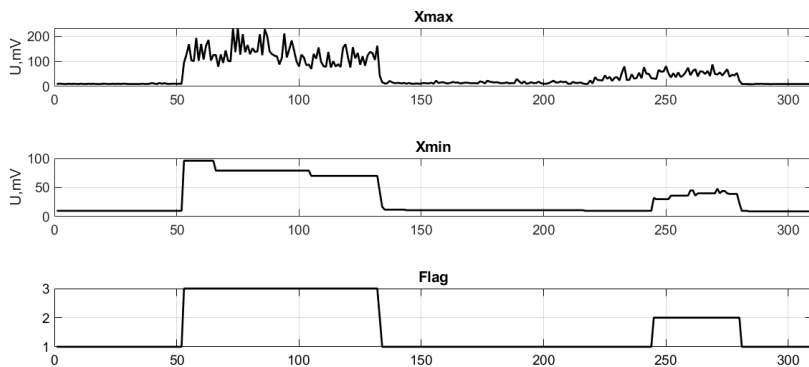


Рис. 1: Результат распознавания: сигнал с датчика, график минимальных и максимальных значений, тип движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-38-90293).

Список литературы

1. *Englehart K., Hudgins B., Parker P.A.* A wavelet-based continuous classification scheme for multifunction myoelectric control // *IEEE Trans Biomed Eng.* 2001. No. 48. P. 302–311.
2. *Englehart K., Hudgins B., Parker P.A., Stevenson M.* Classification of the myoelectric signal using time-frequency based representations // *Med. Eng. Phys.* 1999. No. 21. P. 431–438.

Recognition of Muscle Activity Using Electromyographic Sensors in Control of Bionic Manipulators

N. N. Unanyan, A. A. Belov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Russia

n.unanyan@mail.ru, a.a.belov@inbox.ru

In this article a real-time self-tuning algorithm of detecting fingers movements based on the electromyographic (EMG) sensors is developed.

A multi-level input data processing from the EMG sensor with self diagnosis is suggested. It provides the identification of muscle tension, which corresponds of several types of finger movements. This solution enables to use the low-bit controllers to manipulate the prosthetic hand.

УДК 681.51+519.711

Стабилизация по измеряемому с ошибкой выходу динамической системы с фазовыми ограничениями

А. А. Федюков

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия
TeleginSasha@yandex.ru

Рассматривается задача стабилизации по измеряемому с ошибкой выходу динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные. Подход к решению основан на применении метода функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования регуляторов.

Ключевые слова: стабилизация, управление по выходу, матричные неравенства

1. Введение

Известно [1-4], что существуют разные способы построения регуляторов, в частности способ с применением линейных матричных неравенств. Вместе с тем, возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т. е. в ограниченной области фазового пространства. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничения на фазовые переменные объекта. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2,3].

Выход у реальных механических систем измеряется с ошибкой. Поэтому важной задачей является задача поиска максимальных значений погрешности измеряемого выхода при которых регулятор стабилизирует систему с ограничениями на фазовые переменные.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамический объект, описываемый уравнением

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

где $x \in R^3$ — состояние объекта, A и B — заданные матрицы.

Введем y — измеряемый выход системы

$$(2) \quad y = Cx$$

и z_i — выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные

$$(3) \quad z_i = C_i x, \quad i = 0, 1,$$

где C и C_i — заданные матрицы, соответствующего размера.

Предположим, что для объекта решена задача стабилизации с ограничениями на фазовые переменные и построен регулятор вида

$$(4) \quad u = Ky,$$

который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2), (4) со степенью устойчивости не меньшей, чем β и выполнение при заданных значениях γ_0 и γ_1 ограничений

$$(5) \quad \max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1.$$

Поставим следующую задачу. Пусть измеряемый выход системы измеряется с ошибкой и имеет вид

$$(6) \quad y = (I + \delta(t))x,$$

где I — единичная матрица соответствующего размера, матрица

неопределенности $\delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3(t) \end{pmatrix}$, а неизвестные $\delta_1(t)$,

$\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$ удовлетворяют условиям $|\delta_1(t)| \leq \Delta_1$, $|\delta_2(t)| \leq \Delta_2$,

$|\delta_3(t)| \leq \Delta_3$. Требуется найти матрицу $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{pmatrix}$, для

элементов которой достигается $\max(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$ и при которой регулятор (4) обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4), (6) со степенью устойчивости не меньшей, чем β и выполнение при заданных значениях γ_0 и γ_1 ограничений (5).

3. Достаточные условия существования регулятора

Обозначим $A_c = A + BK$, $B_c = BK$.

Теорема 1. Пусть начальное состояние $x(0)$, матрицы $X = X^T > 0$, $\Delta > 0$, переменная $\lambda > 0$ и величины γ_i , $i = 0, 1$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c + 2\beta X & X B_c & \Delta^T \\ & B_c^T X & -I & 0 \\ & \Delta & 0 & -I \end{pmatrix} < 0,$$

$$x^T(0)Xx(0) \leq \lambda, \lambda C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X, i = 0, 1.$$

Тогда все траектории замкнутой системы (1), (4), (6) с начальными условиями $x(0) \in \{x : x^T X x \leq \lambda\}$ удовлетворяют ограничению (5).

Поиск максимальных допустимых значений $\Delta_1 = \max_{t \geq 0} |\delta_1(t)|$, $\Delta_2 = \max_{t \geq 0} |\delta_2(t)|$, $\Delta_3 = \max_{t \geq 0} |\delta_3(t)|$ сводится к поиску максимального следа матрицы Δ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-31-90086).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // АиТ. 2009. № 6. С. 48–57.
3. Федюков А.А. Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2013. № 2 (1). С. 152–159.
4. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М., Федюков А.А. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без измерения его положения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 12–24.

Static Output Feedback Stabilization under Output Constraints

A. A. Fedjukov

N. I. Lobachevskiy State University of Nizhniy Novgorod, Russia
TeleginSasha@yandex.ru

We consider the static output feedback stabilization problem for a linear time-invariant system under output constraints. The solution based on the

method of Lyapunov functions and linear matrix inequalities. The sufficient conditions for existence of controllers are obtained.

УДК 517.977.1

A-орбитальная линеаризация аффинных систем с векторным управлением

Д. А. Фетисов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
dfetisov@yandex.ru

Рассматривается проблема преобразования аффинных систем с векторным управлением в линейные системы, удовлетворяющие условию управляемости Р. Калмана. Доказывается необходимое и достаточное условие A -орбитальной линеаризуемости аффинных систем с векторным управлением.

Ключевые слова: аффинная система, линеаризация, масштабирование времени

1. Введение

Традиционный подход к преобразованию нелинейной системы с управлением в линейную систему, удовлетворяющую условию управляемости Р. Калмана, основан на использовании гладких невырожденных замен переменных состояния и управлений [1]. В работе [2] было впервые предложено использовать для линеаризации аффинных систем замены независимой переменной, зависящие от состояния. В работе [3] для аффинных систем с одним управлением введено понятие A -орбитальной линеаризации, доказано условие A -орбитальной линеаризуемости. В настоящей работе эти условия обобщаются на системы с векторным управлением.

2. Основной результат

Рассмотрим аффинную систему

$$(1) \quad \dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^m f_j(x)u^j$$

где $x = (x^1, \dots, x^n) \in M$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, M – открытое подмножество \mathbb{R}^n , f_0, \dots, f_m – гладкие векторные поля. В данной работе под гладкостью понимается бесконечная дифференцируемость. Будем обозначать через $\mathcal{F} = \text{span}\{f_0, \dots, f_m\}$ распределение, соответствующее системе (1).

Лемма 1. Для любой матрицы $A = (\alpha_j^i)_{j=\overline{0,m}}^{i=\overline{0,m}}$, $\alpha_j^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha_j^i \in C^\infty(M)$, $i, j = \overline{0,m}$, невырожденной на множестве M , замена независимой переменной

$$(2) \quad \dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^0(x)u^j,$$

и замена управлений

$$(3) \quad v^i = \frac{\alpha_0^i(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^i(x)u^j}{\alpha_0^0(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^0(x)u^j}, \quad i = \overline{1,m},$$

преобразуют на множестве $Q = \{(x, u) : x \in M, \alpha_0^0(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^0(x)u^j \neq 0\}$

систему (1) в аффинную систему $x' = g_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)v^i$, ограниченную

на множество $\tilde{Q} = \{(x, v) : x \in M, \Delta(x, v) \neq 0\}$, где

$$\Delta(x, v) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^0(x) & \dots & \alpha_m^0(x) \\ v^1 & \alpha_1^1(x) & \dots & \alpha_m^1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v^m & \alpha_1^m(x) & \dots & \alpha_m^m(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g_0 \\ \dots \\ g_m \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Система (1) A -орбитально линеаризуема на множестве M , если существуют натуральные числа ρ_1, \dots, ρ_m , удовлетворяющие равенству $\rho_1 + \dots + \rho_m = n - 1$, открытое множество $P \subset \mathbb{R}^n$, матрица $A = (\alpha_j^i)_{j=\overline{0,m}}^{i=\overline{0,m}}$, $\alpha_j^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, гладкая и невырожденная на множестве M , и диффеоморфизм $\Phi : M \rightarrow P$, такие что заменой независимой переменной (2), заменой управления (3) и заменой состояния $y = \Phi(x)$ система (1) преобразуется на множестве $Q = \{(x, u) : x \in M, \alpha_0^0(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^0(x)u^j \neq 0\}$ в систему

$$(y_1^i)' = y_2^i, \dots, (y_{\rho_i-1}^i)' = y_{\rho_i}^i, (y_{\rho_i}^i)' = v^i, \quad i = \overline{1,m},$$

ограниченную на множество $\hat{Q} = \{(y, v) : y \in P, \Delta(\Phi^{-1}(y), v) \neq 0\}$.

Сопоставим системе (1) кораспределение $\mathcal{I} = \mathcal{F}^\perp$ и его производный флаг: $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{I}_k : d\omega \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_k}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если все кораспределения \mathcal{I}_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют постоянную размерность в окрестности точки $x_0 \in M$, то существует такое N , что в окрестности точки x_0 выполнено равенство $\mathcal{I}_N = \mathcal{I}_{N+1}$. Наименьшее число N , удовлетворяющее этому условию, называют длиной производного флага.

Сопоставим гладкому кораспределению $\mathcal{K} = \text{span}\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$, порожденному дифференциальными формами $\omega^1, \dots, \omega^m$, линейно независимыми в окрестности точки $x_0 \in M$, кораспределения [4]

$$\mathcal{L}^i(\mathcal{K}) = \{\xi \in \mathcal{K}^\perp : \xi \lrcorner d\omega^i \in \mathcal{K}\}^\perp, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{L}^i(\mathcal{K}), \quad \mathcal{C}(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^i(\mathcal{K}).$$

Будем обозначать через $\text{rg}_E(\mathcal{K})$ ранг Энгеля кораспределения \mathcal{K} .

Теорема 1. Система (1) *A*-орбитально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in M$ тогда и только тогда, когда:

1. x_0 – регулярная точка кораспределений \mathcal{I}_k , $k = 0, 1, 2, \dots$;
2. $\dim \mathcal{I}_N = 0$ в окрестности точки x_0 ;
3. $\dim \mathcal{C}(\mathcal{I}_{N-1}) = 2 \dim \mathcal{I}_{N-1} + 1$ в окрестности точки x_0 ;
4. $\text{rg}_E(\mathcal{I}_{N-1}) = 1$ в окрестности точки x_0 ;
5. если $\dim \mathcal{I}_{N-1} = 2$, то, дополнително, кораспределение $\mathcal{L}(\mathcal{I}_{N-1})$ вполне интегрируемо в окрестности точки x_0 ;
6. кораспределения $\mathcal{I}_k + \mathcal{L}(\mathcal{I}_{N-1})$, $k = 0, \dots, N-2$, вполне интегрируемы в окрестности точки x_0 ;
7. $\mathcal{L}(\mathcal{I}_{N-1})(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$;
8. $\dim \mathcal{I}_0 = n - m - 1$ в окрестности точки x_0 .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-07-00279).

Список литературы

1. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
2. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1986. V. 31. P. 459–462.
3. Петисов Д.А. *A*-орбитальная линеаризация аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С.1518–1532.
4. Bryant R. et al. Exterior differential systems. New-York: Springer, 1991.

A-orbital Linearization of Multi-Input Affine Control Systems

D.A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Russia
dfetisov@yandex.ru

We consider a problem of transforming multi-input affine control systems into linear controllable systems. We prove a necessary and sufficient condition for A -orbital linearizability of multi-input affine control systems.

УДК 517.977.1

Управление билинейной системой в условиях неопределенности

Т. Ф. Филиппова

ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия
ftf@imm.uran.ru

Рассматриваются задачи управления и оценивания для нелинейной управляемой системы с неопределенностью в задании начальных состояний и в матрице линейных членов фазовых скоростей динамической системы. Предполагается, что значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. На основе применения результатов и методов теории эллипсоидального оценивания для многозначных движений системы указанного вида исследуются проблемы гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной динамической системы с неопределенностью.

Ключевые слова: управление, оценивание, неопределенность, множество достижимости, квадратичная нелинейность, билинейность, эллипсоидальное исчисление.

1. Введение

Рассматриваются задачи управления и оценивания состояний нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным и параметрам. Предполагается, что значения неопределенных начальных состояний, неизвестные возмущения в матрице линейных членов фазовых скоростей и величины допустимых управлений стеснены

соответствующими эллипсоидальными ограничениями. Задачи оценивания состояний управляемых систем с неизвестными, но ограниченными неопределенностями рассматривались ранее в работах. Исследования управляемых систем данного класса мотивированы многочисленными прикладными проблемами динамики в условиях неопределенности и нелинейности возникающими в различных областях, в том числе, в задачах робототехники, экономическом моделировании, в проблемах экологии и биологии и других областях. В данной работе решается задача управления системой с неопределенной динамикой, когда динамические уравнения содержат оба вида нелинейностей, а именно, квадратичные функции и неопределенные матрицы в фазовых скоростях.

2. Основной результат

Рассматривается нелинейная управляемая система

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + f(x)d + u(t), \quad x_0 \in X_0, \quad t \in [t_0, T],$$

где $x, d \in R^n$, $\|x\| \leq K$ ($K > 0$), $f(x) = x'Bx$, с симметричной положительно определенной $n \times n$ - матрицей B .

Управляющие функции $u(t)$ измеримы по Лебегу на $[t_0, T]$ и удовлетворяют ограничению $u(t) \in \mathcal{U}$ для п.в. $t \in [t_0, T]$, где $\mathcal{U} = E(\hat{a}, \hat{Q})$. Здесь и далее используем обозначение

$$E(a, Q) = \{x \in R^n : (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\}$$

для эллипсоида в пространстве R^n с центром $a \in R^n$ и положительно определенной $n \times n$ - матрицей Q .

Предположим, что матрица $A(t)$ в (1) имеет следующий вид

$$(2) \quad A(t) = A^0 + A^1(t),$$

где A^0 - заданная $n \times n$ -матрица, а $n \times n$ -матрица $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена, причем дана априорная оценка $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ ($t \in [t_0, T]$).

Далее рассмотрим специальный класс ограничений $\mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1$, где

$$(3) \quad \mathcal{A}^1 = \left\{ A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n} : a_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j, \text{ и } a_{ii} = a_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad a'Da \leq 1 \right\},$$

здесь $D \in R^{n \times n}$ - известная симметричная и положительно определенная матрица.

Предположим также, что $X_0 = E(a_0, Q_0)$, с симметричной и положительно определенной матрицей Q_0 и заданным центром $a_0 \in R^n$.

В данных информационных условиях возникает задача управления трубками траекторий следующего вида

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}(t; u(\cdot)) = \{x \in R^n : \exists x_0 \in X_0, \exists A(\cdot) \in \mathcal{A}, \\ x = x(t) = x(t; u(\cdot), A(\cdot), x_0)\}, t \in [t_0, T], u(\cdot) \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Отметим, что задачи точного построения траекторных трубок в нелинейном случае являются весьма сложными, поэтому в литературе развиты подходы, в основе которых лежат идеи и методы гарантированного оценивания множеств достижимости систем с неопределенностью [1, 2]. На основе теории эллипсоидального оценивания для многозначных движений систем рассматриваемого типа в работе исследуются проблемы гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной системы с неопределенностью. Предлагаются алгоритмы гарантированного приведения многозначного состояния системы в минимальную окрестность заданного целевого множества, результаты иллюстрируются рядом модельных примеров. Исследования продолжают тематику, обозначенную в работах [1, 2], и используют результаты [3–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-01-00544-а).

Список литературы

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes, Theory and Computation. Systems & Control: Foundations & Applications. V. 85. Basel: Birkhäuser, 2014.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
3. *Filippova T.F.* Estimating Reachable Sets of Control Systems with Uncertainty on Initial Data and with Nonlinearity of a Special Kind // 2016 13th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference)(STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7541183>
4. *Филиппова Т.Ф., Матвейчук О.Г.* Задачи управления многозначными движениями систем с неопределенностью и нелинейностью // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Междунар. конф., посвящ. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. С.339–342.
5. *Filippova T.F.* Description of Dynamics of Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets of Nonlinear Control Systems with Bilinear Uncertainty // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11189. Springer, Cham. P. 97–105.

Control of a Bilinear System in Conditions of Uncertainty

T. F. Filippova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia
ftf@imm.uran.ru

The control and estimation problems for a nonlinear control system with uncertainty in initial states and in the matrix of linear members of the state velocities of a dynamic system are considered. It is assumed that the values of the uncertain initial states and admissible controls are constrained by related ellipsoids. Based on the application of the results and methods of the theory of ellipsoidal estimation for set-valued motions of a system of this type, the problems of guaranteed control of a tube of trajectories of a nonlinear dynamic system with uncertainty are studied.

УДК 517.977

Стабилизация переключаемой линейной системы в условиях параметрической неопределенности

А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
fursov@cs.msu.ru, july2412@mail.ru

Предлагается алгоритм синтеза цифрового стабилизатора для переключаемой интервальной системы. Алгоритм стабилизации включает следующие шаги: построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором; переход к дискретной модели; построение одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства интервальных дискретных систем.

Ключевые слова: переключаемые системы, интервальная неопределенность, стабилизация

1. Введение

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система

$$(1) \quad \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in S_\tau,$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов на любом конечном промежутке; S_τ — множество переключающих сигналов σ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$; $[b_\sigma] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$, $[c_\sigma] : I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные матрицы, коэффициенты которых являются интервальными числами $a_{lj}^{(i)} \in [\bar{a}_{lj}^{(i)}; \underline{a}_{lj}^{(i)}]$, а $[c_i]$, $[b_i]$ ($i = 1, \dots, m$) — интервальные векторы с коэффициентами $c_j^{(i)} \in [\bar{c}_j^{(i)}; \underline{c}_j^{(i)}]$ и $b_l^{(i)} \in [\bar{b}_l^{(i)}; \underline{b}_l^{(i)}]$ соответственно.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим ($[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$) ($i = 1, \dots, m$) переключаемой системы (1), описываемый линейной интервальной системой

$$\dot{x} = [A_i]x + [b_i]u, \quad y = [c_i]x.$$

При этом интервальную неопределенность будем понимать следующим образом: фактически система (1) представляет собой бесконечное семейство ($[A_\sigma]$, $[b_\sigma]$, $[c_\sigma]$) переключаемых линейных систем (A_σ , b_σ , c_σ) для каждой из которых i -й режим активности (A_i , b_i , c_i) является линейной стационарной системой

$$\dot{x} = A_i x + b_i u, \quad y = c_i x$$

с фиксированными, но неизвестными коэффициентами, принадлежащими соответствующим промежуткам

$$a_{lj}^{(i)} \in [\bar{a}_{lj}^{(i)}; \underline{a}_{lj}^{(i)}], \quad c_j^{(i)} \in [\bar{c}_j^{(i)}; \underline{c}_j^{(i)}], \quad b_l^{(i)} \in [\bar{b}_l^{(i)}; \underline{b}_l^{(i)}].$$

Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных режимах (A_i , b_i , c_i) ($A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $c_i \in [c_i]$, $i = 1, \dots, m$), заданном алгоритме управления u , переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть вектор-функцию $x(t)$, являющуюся решением нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + b_{\sigma(t)} u, \quad x(0) = x_0.$$

Также будем предполагать, что переключающий сигнал в процессе функционирования системы (1) не доступен для наблюдения.

2. Основной результат

Будем говорить, что переключаемая линейная система (1) с фиксированным управлением $u = u_0$ робастно P -устойчива в нуле, если существует такая KL -функция $\gamma(r, s)$, что для любого начального условия $x(0) = x_0$, переключающего сигнала $\sigma \in P$ ($P \subseteq S$) и для любой переключаемой системы $(A_\sigma, b_\sigma, c_\sigma) \in ([A_\sigma], [b_\sigma], [c_\sigma])$ семейства (1) соответствующее решение уравнения

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u_0, \quad x(0) = x_0$$

удовлетворяет соотношению

$$\|x(t)\| \leq \gamma(\|x(0)\|, t), \quad t \geq 0.$$

Постановка задачи стабилизации. Для объекта (1) необходимо построить цифровой регулятор по выходу:

$$(2) \quad v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad T < \tau,$$

который обеспечивает S_τ -устойчивость в нуле замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы.

Предполагается, что имеет место синхронность моментов переключений системы (1) с моментами времени работы дискретного регулятора (2).

Основным результатом работы является разработанный алгоритм синтеза цифрового стабилизатора (при некоторых ограничениях), обеспечивающего робастную S_τ -устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы. Построение алгоритма потребовало:

1) разработки метода построения дискретной модели для системы (1) на основе точной дискретизации.

2) формулировки достаточного условия одновременной стабилизации интервального семейства непрерывно-дискретных систем на основе методов теории линейных матричных неравенств.

3) разработки метода оценки времени задержки τ^* , обеспечивающего робастную S_{τ^*} -устойчивость интервальной переключаемой системы (1) построенным стабилизирующим регулятором.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00294 а, 18-07-01283 а, 18-51-00004 Бел а).

Список литературы

1. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Исхаков Э.А.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы // Дифференц. уравнения, 2017. № 8. Т. 53. С. 1121–1127.
2. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine, 1999. № 5. Vol. 19. P. 59–70.
3. *Heemels W.P., De Schutter B., Lunze J., Lazar M.* Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems // Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci., 2010. Vol. 368. P. 4937–4960.

Stabilization of Switched Linear System under Parametric Uncertainty

A. S. Fursov, J. M. Mosolova

fursov@cs.msu.ru, july2412@mail.ru

An algorithm is proposed for the synthesis of a digital stabilizer for a switched interval system. The stabilization algorithm includes the following steps: constructing a continuous-time/discrete-time closed-loop system with a digital controller; passing to its discrete-time model; constructing for a finite family of interval discrete-time systems, a controller that stabilizes each of the systems.

Исследование нелинейных колебаний близких к автономным гамильтоновым системам в случаях кратных параметрических резонансов

О. В. Холостова

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия
kholostova o@mail.ru

Рассматривается движение близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Проводится исследование нелинейных колебаний системы в двух случаях кратных параметрических резонансов. В качестве приложения рассмотрены резонансные движения динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабээллиптической орбите.

Ключевые слова: параметрический резонанс, нулевые частоты, нелинейные колебания, устойчивость, спутник, цилиндрическая прецессия

1. Введение

Рассматривается движение 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Предполагается, что система зависит от параметров α и β , а также от малого параметра ε , и при $\varepsilon = 0$ система автономна. Предполагается также, что разложение гамильтониана в ряд по возмущениям содержит слагаемые только четных степеней по координатам и импульсам.

Пусть при $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_*$, $\beta = \beta_*$ обе частоты малых линейных колебаний системы в окрестности равновесия равны нулю, а ранг r матрицы коэффициентов линеаризованных уравнений возмущенного движения равен 3 или 2. Отметим, что ко второму из этих случаев приводит также кратный параметрический резонанс другого типа, когда частоты ω_1 и ω_2 малых линейных колебаний связаны соотношением $2\omega_1 = 2\omega_2 = n$ (где n — целое число), а соответствующая квадратичная часть не приводится к сумме квадратов [1].

В докладе исследуется задача о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы в указанных резонансных случаях в малой окрестности резонансной

точки, задаваемой соотношениями (ν_1 и μ_k — константы)

$$(1) \quad \alpha = \alpha_* + \varepsilon\nu_1, \quad \beta = \beta_* + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \dots$$

2. Исследование резонансных периодических движений

Проводится нормализация гамильтониана системы в слагаемых до четвертого порядка включительно относительно возмущений и до требуемого порядка по ε . Для систем первого приближения по ε , рассматриваемых в $\varepsilon^{1/2}$ -окрестности начала координат фазового пространства, приближенные (модельные) автономные гамильтонианы в случаях $r = 3$, $r = 2$ и описанном случае равных частот (при $n = 1$) имеют соответственно вид

$$(2) \quad H = \frac{1}{2} X_1^2 - x_1 x_2 + \varepsilon [c_1 X_1 X_2 + c_2 X_2^2 + \gamma_1 X_2^4 + (\gamma_2 X_1 + \gamma_3 x_2) X_2^3 + \gamma_4 X_1^2 X_2^2 + \gamma_5 X_2 X_1^3].$$

$$(3) \quad H = \frac{1}{2} (X_1^2 \pm X_2^2) + \varepsilon [c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_1 x_2 + c_4 (x_2 X_1 \mp X_2 x_1) + g_4(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)(x_2 X_1 \mp X_2 x_1) + \gamma_3 (x_2 X_1 \mp X_2 x_1)^2].$$

$$(4) \quad H = \frac{1}{2} (X_1^2 \pm X_2^2) + \varepsilon [(c_1 + \lambda_1) x_1^2 + (c_1 - \lambda_1) x_2^2] + \lambda_2 x_1 x_2 + c_4 (x_2 X_1 - X_2 x_1) + \gamma'_1 (x_1^2 + x_2^2)^2 + \gamma'_2 (x_1^2 + x_2^2) (x_1 X_2 - X_1 x_2) + \gamma'_3 (x_2 X_1 - X_2 x_1)^2].$$

В этих соотношениях x_j и X_j ($j = 1, 2$) — обобщенные координаты и импульсы; $c_k = a_k \nu_1 + b_k \mu_1$; $a_k, b_k, \lambda_k, \gamma_k, \gamma'_k$ — константы; $g_l(x_1, x_2)$ — форма степени l ($l = 2, 4$) по x_1 и x_2 с постоянными коэффициентами.

При условии $\gamma_1 c_2 < 0$ система с гамильтонианом (2) имеет, кроме тривиального, еще два положения равновесия, неустойчивых в области существования. Система с гамильтонианом (3), в зависимости от коэффициентов нормальной формы, может иметь от нуля до четырех пар положений равновесия. Смена числа положений равновесия происходит на граничных прямых плоскости (α, β) , задаваемых уравнениями $\beta - \beta_* = \kappa(\alpha - \alpha_*)$, где κ — некоторые константы. Система с гамильтонианом (4) может иметь от нуля до двух пар положений равновесия.

Для некоторых выделенных направлений (прямых в плоскости параметров α, β) выявленные положения равновесия сливаются с тривиальным; в окрестности этих прямых следует перейти в ε -окрестность

начала координат фазового пространства и рассмотреть систему второго приближения по ε . Соответствующие результаты получены для первой и третьей модельных систем.

Методом Пуанкаре построены резонансные периодические движения полных неавтономных систем, рождающиеся из найденных положений равновесия модельных систем и аналитических по дробным или целым степеням малого параметра. Характер устойчивости периодических движений (неустойчивость или устойчивость в линейном приближении) соответствует характеру устойчивости порождающих положений равновесия.

3. Резонансные периодические движения спутника

В качестве приложения исследованы резонансные движения динамически симметричного спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабоэллиптической орбите. Для значений параметров (инерционного параметра и безразмерной угловой скорости), соответствующих случаям $\omega_1 = \omega_2 = 0$ (при $r = 3$) и случаю $\omega_1 = \omega_2 = n/2$ (при $n = 1$ и 3), построены резонансные периодические движения оси симметрии спутника, дана их геометрическая интерпретация. Получены выводы об устойчивости этих движений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Список литературы

1. *Маржеев А.П.* О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикл. матем. и мех. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.

Investigation of Nonlinear Oscillations of Near-Autonomous Hamiltonian Systems in the Cases of Multiple Parametric Resonances

O. V. Kholostova

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
kholostova_o@mail.ru

In this paper the motion of a near-autonomous, time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the vicinity of trivial equilibrium is considered in two cases of multiple parametric resonances. The resonance motions of a dynamically symmetric satellite (solid) relative to the center

of mass in the vicinity of a cylindrical precession in an elliptical orbit with small eccentricity are considered as an application.

УДК 517.977

Необходимые и одновременно достаточные условия глобальной оптимальности разрывных динамических систем

М. М. Хрусталеv

ИПУ РАН, Москва, Россия
mmkhrustalev@mail.ru

Получены необходимые и одновременно достаточные условия в задаче оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

Ключевые слова: разрывная динамическая система, оптимальное управление, глобальная оптимальность

1. Введение

Плохие аналитические свойства динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями, делают их одним из наиболее сложных объектов математической теории управления. В данной работе задача оптимального управления разрывной динамической системой заменяется эквивалентной ей задачей с непрерывными правыми частями дифференциальных уравнений системы. Полученная задача оптимального управления всегда аномальна, поэтому для нее не эффективен принцип максимума Л. С. Понтрягина и не применимы классические условия оптимальности В. Ф. Кротова.

Необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности, полученные в [1, 2], охватывают как нормальный, так и аномальный случаи. Их применение к эквивалентной задаче позволило получить предлагаемый результат.

2. Основной результат

Большой класс задач оптимального управления разрывными динамическими системами охватывается следующей постановкой.

Пусть $B = [t_0, t_1] \times R^n$. Задано семейство замкнутых подмножеств $B^k \subset B$, $k = \overline{1, N}$, таких, что $\bigcup_{k=1}^N B^k = B$, замкнутое множество $B_1 \subset R^n$ и компактное множество $Q \subset R^m$. Задано семейство непрерывных функций $(t, x, u) \rightarrow f^k(t, x, u) : B \times Q \rightarrow R^n$, $k = \overline{1, N}$, локально удовлетворяющих условию Липшица по x равномерно по t, u , то есть таких, что для любого компакта $S \subset R^n$ функции $f^k(t, x, u)$ удовлетворяют условию Липшица по x с константой не зависящей от $t \in [t_0, t_1]$ и $u \in Q$. Для функций $f^k(t, x, u)$, $k = \overline{1, N}$, предполагается выполненным условие Филиппова:

$$x^T f^k(t, x, u) \leq C(1 + \|x\|^2), \quad C = \text{const.}$$

Введем обозначения: $I(t, x) = \{k \in \{1, 2, \dots, N\} : (t, x) \in B^k\}$, $M(t, x, u) = \text{conv}\{f^k(t, x, u) : k \in I(t, x)\}$.

Эволюция рассматриваемой системы описывается дифференциальным включением:

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} \in M(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Для системы (1) задано начальное условие:

$$(2) \quad x(t_0) = x_0$$

и терминальное ограничение:

$$(3) \quad x(t_1) \in B_1.$$

Функция $x(t)$ абсолютно непрерывна, управление $u(t) \in Q$ измеримая функция и включение (1) выполняется почти всюду на $[t_0, t_1]$.

Задача оптимального управления. Найти абсолютно непрерывную функцию $x(t)$ и измеримую функцию $u(t) \in Q$ удовлетворяющие почти всюду на интервале $[t_0, t_1]$ дифференциальному включению (1), граничным условиям (2), (3) и минимизирующие критерий $J(x(\cdot), u(\cdot)) = F(x(t_1))$, где $x \rightarrow F(x) : R^n \rightarrow R^1$ — полунепрерывная снизу функция.

Сформулируем задачу эквивалентную поставленной выше, но с непрерывными правыми частями дифференциальных уравнений.

Зададим семейство локально липшицевых функций $\gamma^k : B \rightarrow R^1$, $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющих условиям: $\gamma^k(t, x) = 0$, если $(t, x) \in B^k$ и $\gamma^k(t, x) > 0$, если $(t, x) \in B \setminus B^k$. Введем в рассмотрение функции $f(t, x, w) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f^k(t, x, u)$, $g(t, x, w) =$

$\sum_{k=1}^N \alpha_k \gamma^k(t, x)$, где w - вектор, состоящий из компонент вектора u и переменных во времени коэффициентов α_k , $k = \overline{1, N}$. Для вектора w должно быть выполнено ограничение

$$(4) \quad w \in Q_w \subset R^{N+m},$$

определяемое условиями: $u \in Q$; $\alpha_k \geq 0$, $k = \overline{1, N}$; $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$.

Определение. Процесс $(z(\cdot), w(\cdot))$, $z(t) = (x(t), y(t))$, где функция $z(t)$ абсолютно непрерывна, а $w(t)$ измерима, на интервале $[t_0, t_1]$, удовлетворяющий почти всюду на этом интервале системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), w(t)), \quad \frac{dy(t)}{dt} = g(t, x(t), w(t)),$$

граничным условиям (2), (3), ограничению (4) и ограничению $y(t_0) = y(t_1) = 0$, будем называть допустимым.

Эквивалентная задача оптимального управления. Найти допустимый процесс $(\bar{z}(\cdot), \bar{w}(\cdot)) \in D$ минимизирующий критерий $J(z(\cdot), w(\cdot)) = F(x(t_1))$.

Для этой задачи получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №20-08-00400).

Список литературы

1. Хрусталеv М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости // АиТ. 1988. №5. С. 62–70.
2. Хрусталеv М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем. II. Условия глобальной оптимальности // АиТ. 1988. №7. С. 70–80.

Necessary and Simultaneously Sufficient Global Optimality Conditions for Discontinuous Dynamic Systems

M. M. Khrustalev

V. A. Trapeznikov ICS RAS, Moscow, Russia
mmkhrustalev@mail.ru

Necessary and, at the same time, sufficient conditions are obtained in the optimal control problem for systems described by ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides.

**О нахождении моментов переключений управлений
полисистемами в дискретном времени с использованием
цепных дробей**

С. М. Хрящев

ГУМРФ им. адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия
khryashchev.sm@yandex.ru

Рассматриваются динамические системы с кусочно постоянными управлениями. При условии, что динамическая система управляема в непрерывном времени, исследуется также вопрос о ее управляемости в дискретном времени. Моменты переключений управлений в дискретном времени строятся с использованием теории многомерных цепных дробей и методов решений диофантовых уравнений.

Ключевые слова: дискретные системы, переключение управлений, цепные дроби, диофантовы уравнения

1. Введение

При управлении динамическими полисистемами возникает задача определять моменты переключения управлений, в которые происходит смена элементов этой полисистемы. Кроме того, может накладываться дополнительное ограничение, чтобы моменты переключения управлений были целочисленными и обеспечивали заданную точность управления.

В данной работе предлагается метод, который для некоторого класса систем позволяет решать поставленную задачу. Этот метод основан на теории многомерных цепных дробей и теории диофантовых уравнений.

2. Основные понятия и математическая постановка задачи

Пусть $X = \{x\}$ — n -мерное пространство состояний. Для произвольного фиксированного натурального числа $l \in \mathbb{N}$, динамическая полисистема задается как набор семейств отображений вида $F_i^t : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, l$ с полугрупповым свойством.

Предположим, что $t_{j-1} \leq t_j$, $j = 1, \dots, l$, $l \geq n$ — моменты переключений управлений. Состояние полисистемы в последний момент

времени определяется следующим соотношением

$$(1) \quad (F_l^{\tau_l} \circ F_{l-1}^{\tau_{l-1}} \circ \dots \circ F_1^{\tau_1})(x_0) := F(\tau, x_0),$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \mathbb{R}_+^l$, $\tau_j = t_j - t_{j-1}$.

Полисистема является ϵ -управляемой из состояния x_0 в состояние x_* , если для $\epsilon > 0$ существует набор моментов переключений $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, такой что выполняется условие

$$(2) \quad |F^\tau(x_0) - x_*| \leq \epsilon.$$

Если для некоторого τ значение $\epsilon = 0$, то полисистема является точно управляемой, в противном случае ϵ -управляемой.

Нашей задачей будет выяснить, при каких условиях существует целочисленный набор $\tau = \tau(\epsilon) \in \mathbb{N}^l$ моментов переключения, обеспечивающий заданную цель управления, а также найти эти моменты.

3. Цепные дроби

Пусть имеется некоторая последовательность $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, где $a_k \in \mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $k = 0, 1, \dots, n, \dots$. Цепная дробь в классическом понимании задается выражением [2].

$$(3) \quad z = a_0 + 1/(a_1 + \dots + 1/(a_{n-1} + 1/(a_n + \dots))).$$

Классические цепные дроби допускают различные обобщения на многомерный случай. Пусть $z \in \mathbb{R}^m$ для некоторого $m \geq 1$, где \mathbb{R}^m трактуется как линейное пространство с евклидовой нормой $|z|$ элемента z . Дополнительно предполагается, для каждого ненулевого элемента $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_m)$ существует обратный элемент, который определяется по формуле $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$, где $\bar{z} = \text{col}(z_1, -z_2, \dots, -z_m)$ – сопряженный элемент для элемента z . Отметим, что для $m = 2^k$, где $k = 0, 1, 2, 3$, в пространстве \mathbb{R}^m определена операция умножения «*». Очевидно, $z * z^{-1} = 1$. Для других размерностей m будем считать, что это равенство выполнено по определению.

Многомерные цепные дроби, также как классические, определяют формулой (3). Для элемента z коэффициенты $a_n \in \mathbb{Z}^m$ определяются с использованием алгоритма Евклида [2]. Отрезок цепной дроби длины n является рациональным приближением элемента z .

4. Применение цепных дробей и теории сравнений

При нахождении диофантовых решений τ неравенства (2) часто приходится решать вспомогательную задачу аппроксимации некоторого набора вещественных чисел, связанного с этим уравнением, некоторым набором рациональных чисел с одинаковым знаменателем. Примеры таких задач рассмотрены, например, в [1]. Эти задачи можно решать с помощью цепных дробей и теории сравнений [2].

Рассмотрим соотношение (2) при $\epsilon = 0$, т.е. уравнение $F^\tau(x_0) = x_*$. Обозначим $\tau' = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\tau'' = (\tau_{n+1}, \dots, \tau_l)$. Таким образом, получаем уравнение $F(\tau', \tau''; x_0) = x_*$. Пусть $\text{rank} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) = n$. Тогда это уравнение разрешимо относительно τ' в виде $\tau' = \varphi(x_0, x_*, \tau'')$. Предположим, что последнее равенство линеаризуемо в виде

$$(4) \quad \tau' = \tau_0(x_0, x_*) + \tau_1(x_0, x_*)\tau'' + o\left(\frac{1}{|\tau''|}\right).$$

и рассмотрим линейную часть этого равенства при достаточно больших значениях $|\tau''|$. Пусть фиксированы некоторые значения x_0, x_* и пусть $l = n + 1$. Аппроксимируем вещественные векторы $\tau_0(x_0, x_*)$ и $\tau_1(x_0, x_*)$ соответственно векторами $\frac{p_0}{q}$ и $\frac{p_1}{q}$ с рациональными компонентами, где q натуральное число, используя цепные дроби вида (3) для некоторого n , обеспечивающего достаточную точность приближения.

Пусть параметр τ'' принимает натуральные значения s . Тогда для натурального s значение правой части равенства (4) принимает рациональное значение $r = \frac{p_0 + p_1 s}{q}$, которое аппроксимирует значение вещественного вектора τ' .

Предположим, что значение параметра s можно выбрать так, чтобы компоненты вектора r были натуральными числами. Для этого векторная величина $p_0 + p_1 s$ должна покомпонентно делиться на натуральное число q . Другими словами, натуральная величина s должна удовлетворять векторному уравнению для сравнений вида

$$(5) \quad p_0 + p_1 s \equiv 0 \pmod{q}.$$

Используя теорему Эйлера, можно убедиться (см. например [2]), что уравнение (5) может быть эквивалентно записано в форме

$$(6) \quad s - p_0 p_1^{\varphi(q)-1} \equiv 0 \pmod{q},$$

где $\varphi(q)$ — функция Эйлера, и может быть легко решено. В итоге получаем целочисленную аппроксимацию: $\tau = (\tau', \tau'') \approx (r', s') = t \in \mathbb{N}^l$, где s' — наименьший элемент из класса вычетов (6), $r' = \frac{p_0 + p_1 s'}{q}$.

Список литературы

1. *Khryashchev S.M.* Controllability and number-theoretic properties of dynamical polysystems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2013. V. 16. No 4. P. 388-396.
2. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

On Finding of Switching Instants for Control of Discrete-time Dynamical Polysystems by Using Continued Fractions

S. M. Khryashchev,

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
Saint-Petersburg, Russia
khryashchev.sm@yandex.ru

In this paper, dynamical polysystems with piecewise constant controls are considered. Provided that the dynamical system is controllable in continuous time, the question of its controllability in discrete time is also studied. Controls in discrete time are constructed by using of the theory of multidimensional continued fractions and methods for solving Diophantine equations.

Решение задачи синтеза многомерного анизотропийного субоптимального ПИД регулятора на основе выпуклой оптимизации

М. М. Чайковский^{1,2}

НПЦАП им. Н. А. Пилюгина, Москва, Россия¹;

ИПУ РАН, Москва, Россия²

mmtchaikovsky@hotmail.com

В докладе рассматривается задача синтеза многомерного ПИД регулятора для дискретной линейной стационарной системы, работающей под воздействием стохастических возмущений, неопределенность которых описывается в терминах средней анизотропии. Возможности замкнутой системы по подавлению возмущений количественно характеризуются анизотропийной нормой.

Ключевые слова: многомерный ПИД регулятор, подавление возмущений, средняя анизотропия, норма, выпуклая оптимизация.

Объект управления представлен в пространстве состояний дискретной линейной стационарной моделью $P(z)$ с n_x -мерным состоянием $X = (x_k)$, m_w -мерным входом возмущения $W = (w_k)$, m_u -мерным входом управления $U = (u_k)$, p_z -мерным регулируемым выходом $Z = (z_k)$ и p_y -мерным измеряемым выходом $Y = (y_k)$:

$$(1) \quad P(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & 0 \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad x_0 = 0,$$

где размерности всех матриц согласованы; $p_z \leq m_w$; $m_u < n_x + 2p_y$; пара матриц (A, B_u) является стабилизируемой. Предполагается, что $W = (w_k)_{-\infty < k < +\infty}$ — бесконечная стационарная эргодическая последовательность гауссовских m_w -мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии a , т.е. $W \in \mathcal{W}_a := \{W \in \ell_{\mathcal{P}}^m : \mathbf{A}(W) \leq a, a > 0\}$, где $\mathbf{A}(W)$ — средняя анизотропия последовательности W [1]; $\ell_{\mathcal{P}}^m = \{W : w_k \in \mathbb{L}_2^m \text{ и } \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty\}$ — пространство стационарных в узком смысле последовательностей интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\|W\|_{\mathcal{P}}$ — мощностная норма последовательности случайных векторов.

Задача управления заключается в стабилизации замкнутой системы и обеспечении некоторого желаемого качества подавления случайных возмущений с помощью пропорционально-интегрально-

дифференциального закона управления — дискретного многомерного ПИД регулятора с передаточной функцией

$$(2) \quad K(z) = K_p + K_i T \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{\alpha(z-1) + Tz},$$

где $K_p, K_i, K_d \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ — матрицы коэффициентов усиления пропорциональной, интегрирующей и дифференцирующей составляющих регулятора; $T = t_{k+1} - t_k$ — постоянный шаг дискретного времени; α — заданный малый параметр фильтра, заменяющего дифференцирующее звено. Реализация передаточной функции (2) в пространстве состояний имеет вид

$$(3) \quad K(z) : \begin{bmatrix} x_{k+1}^c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^c \\ y_k \end{bmatrix}, \quad x_0^c = 0,$$

где $x_k^c \in \mathbb{R}^{2p_y}$ и матрицы реализации равны

$$(4) \quad \begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 0 & I_{p_y} \\ -\frac{a_0}{a_2} I_{p_y} & -\frac{a_1}{a_2} I_{p_y} \end{bmatrix}, & B_c &= -\frac{1}{a_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_y} \end{bmatrix}, \\ C_c &= \begin{bmatrix} B_0 - \frac{a_0}{a_2} B_2 & B_1 - \frac{a_1}{a_2} B_2 \end{bmatrix}, & D_c &= \frac{1}{a_2} B_2, \\ a_2 &= \alpha + T, & a_1 &= -2\alpha - T, & a_0 &= \alpha, \\ B_2 &= K_p(\alpha + T) + K_i T(\alpha + T) + K_d, \\ B_1 &= -K_p(2\alpha + T) - K_i T\alpha - 2K_d, & B_0 &= K_p\alpha + K_d. \end{aligned}$$

Задача. Для системы P с моделью в пространстве состояний (1) и заданных $a > 0$, $\gamma > 0$ найти многомерный ПИД регулятор (3), (4), такой чтобы анизотропийная норма [1] замкнутой системы удовлетворяла неравенству $\|T_{zw}\|_a = \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \|Z\|_{\mathcal{P}} / \|W\|_{\mathcal{P}} < \gamma$.

Теорема. Для заданных $a > 0$ и $\gamma > 0$, ПИД регулятор (3), (4) существует, если система неравенств

$$(5) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2,$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S}\bar{B}_w + LD_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0,$$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} -\bar{\Phi} & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ \bar{S}\bar{A} + L\bar{C}_y & \bar{S}\bar{B}_w + LD_{yw} & \bar{\Phi} - \bar{S} - \bar{S}^T & * \\ \bar{C}_z & \mathcal{D}_{zw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0,$$

$$(8) \quad \Psi \succ 0, \quad \bar{\Phi} \succ 0, \quad \eta > \gamma^2, \quad \eta(1 - e^{-2a/m_w}) \leq \gamma^2,$$

где \bar{A} , \bar{B}_w , \bar{C}_z , \bar{C}_y определяются выражениями

$$\bar{A} := T_u A T_u^{-1}, \quad \bar{B}_w := T_u B_w, \quad \bar{C}_z := C_z T_u^{-1}, \quad \bar{C}_y := C_y T_u^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & 0 \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_w & B_u \\ \hline B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} & 0 \\ C_z & 0 & D_{zw} & 0 \\ \hline 0 & I_{2p_y} & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 \end{array} \right]$$

и $T_u = [B_u \quad \mathcal{N}_{B_u}]^{-1}$, разрешима относительно скалярной переменной η , вещественных симметричных $(m_w \times m_w)$ -матрицы Ψ , $((n_x + 2p_y) \times (n_x + 2p_y))$ -матрицы $\bar{\Phi}$ и двух структурированных матричных переменных

$$(9) \quad \bar{S} := \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если система неравенств (5)–(8) разрешима и неизвестные переменные найдены, то искомая матрица

$$(10) \quad K = [C_c \quad D_c] = \bar{S}_1^{-1} L_1.$$

Список литературы

1. Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // Int. J. of Contr. 2001. V. 74. P. 28–42.

Synthesis of MIMO Anisotropic Suboptimal PID Controller By Convex Optimization Approach

M. M. Tchaikovsky^{1,2}

Academician N. A. Pilyugin Scientific-Production Center of Automation and Instrument-Making, Moscow, Russia¹

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia²
mmtchaikovsky@hotmail.com

This paper considers the problem of synthesis of the MIMO PID controller for a linear discrete time-invariant system under influence of

the stochastic disturbances with statistical uncertainty described in terms of the mean anisotropy. The closed-loop system abilities to attenuate the disturbances are quantitatively characterized by the anisotropic norm.

УДК 681.514; 681.511.42; 681.516.52; 681.516.72; 681.516.32; 681.5.08

Применение двухкаскадного робастного оптимального оценивания для фильтрации помех в измерительных каналах ВТГ с управляемой прецессией

М. М. Чайковский^{1,2}, В. М. Никифоров¹

НПЦАП им. Н. А. Пилюгина, Москва, Россия¹;

ИПУ РАН, Москва, Россия²

mmtchaikovsky@hotmail.com, v.m.nikiforov@gmail.com

В докладе рассматривается метод цифровой фильтрации помех в измерительных каналах волнового твердотельного гироскопа с управляемой прецессией стоячей волны упругих колебаний на основе двухкаскадного робастного оптимального оценивания.

Ключевые слова: полусферический резонатор, волновой твердотельный гироскоп, оптимальное оценивание, фильтрация, демодуляция.

При практической реализации законов управления упругими колебаниями резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) чрезвычайно важно обеспечить высокоэффективную фильтрацию случайных помех в сигналах, поступающих в измерительные каналы прибора. Уравнения электромеханической модели основной (второй) формы колебаний резонатора ВТГ с четырьмя парами управляющих электродов (УЭ) схемы «пуш-пулл» имеют вид [1]

$$(1) \quad \ddot{w}_1 + 4\eta\Omega\dot{w}_2 + 2\eta\dot{\Omega}w_2 + 2\xi_1\dot{w}_1 + \omega^2w_1 = \\ = \frac{8\varepsilon_0S}{m(d-w_1)^2}Vu_1 + \frac{8\varepsilon_0Sdw_1}{m(d^2-w_1^2)^2}(V-u_1)^2,$$

$$(2) \quad \ddot{w}_2 - 4\eta\Omega\dot{w}_1 - 2\eta\dot{\Omega}w_1 + 2\xi_2\dot{w}_2 + \omega^2w_2 = \\ = \frac{8\varepsilon_0S}{m(d-w_2)^2}Vu_2 + \frac{8\varepsilon_0Sdw_2}{m(d^2-w_2^2)^2}(V-u_2)^2,$$

где w_1, w_2 — радиальные перемещения материальных точек резонатора, расположенных на двух осях, проходящих через центр симметрии резонатора и отстоящих друг от друга на 45° ; m — приведенная масса основной формы колебаний; η — коэффициент Брайана; $\Omega, \dot{\Omega}$ — угловая скорость и угловое ускорение поворота резонатора вокруг оси его симметрии; ξ_1, ξ_2 — декременты затухания, характеризующие диссипацию энергии механических колебаний резонатора и определяющие его разносторонность; ω — частота собственных колебаний резонатора основной формы; d — расстояние между УЭ и внутренней поверхностью резонатора в состоянии покоя; ε_0 — диэлектрическая постоянная; S — площадь поверхности УЭ; V — опорное напряжение; u_1, u_2 — переменные напряжения, реализующие законы управления.

Зависимость радиальных перемещений w_1, w_2 от времени выражается гармоническими законами

$$(3) \quad w_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad w_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

в которых величины A_1, B_1, A_2, B_2 (и, строго говоря, ω) являются переменными, изменяющимися медленно относительно частоты колебаний.

Законы формирования напряжений u_1, u_2 , обеспечивающие поддержание заданного значения полной амплитуды колебаний, подавление их квадратурной составляющей и удержания стоячей волны в некоторой малой окрестности фиксированного значения при повороте резонатора, определяются выражениями

$$(4) \quad u_1 = \Delta W \dot{w}_1 + K_Q Q w_2 + P \dot{w}_2, \quad u_2 = \Delta W \dot{w}_2 - K_Q Q w_1 - P \dot{w}_1,$$

$$P = 2\sqrt{K_P(W^2 - Q)} \sin 2\theta + K_P \int_0^t \sqrt{W^2 - Q} \sin 2\theta d\tau,$$

где $\Delta W = K_W(W_0 - W)$, $W = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2}$ — полная амплитуда колебаний, W_0 — заданное значение амплитуды; $Q = A_1 B_2 - A_2 B_1$ — квадратура колебаний; $\theta = \arctg(\sqrt{A_2^2 + B_2^2}/\sqrt{A_1^2 + B_1^2})$ — угол прецессии стоячей волны на фазовой плоскости (w_1, w_2) ; K_W, K_Q, K_P — положительные коэффициенты усиления. Для эффективной практической реализации законов управления (4) необходимо с высокой точностью определять параметры A_1, B_1, A_2, B_2 .

Электрические сигналы на выходах измерительных электродов ВТГ, пропорциональные \dot{w}_1, \dot{w}_2 , после усиления и дискретизации для

каждого из каналов имеют вид

$$(5) \quad \dot{w}(t_k) = -A\omega \sin \omega t_k + B\omega \cos \omega t_k + v(t_k) + U(t_k),$$

где v — шум измерений; U — наведенные помехи от известных сигналов управления.

При работе ВТГ в режиме управляемой прецессии в результате действия законов управления (4) в уравнениях (1), (2) слагаемые в левых частях, зависящие от угловой скорости и углового ускорения поворота резонатора (перекрестные связи), становятся пренебрежимо малы, а сами дифференциальные уравнения распадаются на две независимых линейных стационарных подсистемы второго порядка, представляющие собой консервативные звенья

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix},$$

где $x_1 = w$, $x_2 = \dot{w}$; $y = \dot{w} + v$ — измеряемый выход; $v_1 = U$, $v_2 = v$ — возмущения и шумы измерений.

Для фильтрации помех измерений в первом каскаде цифровой обработки сигналов используется робастный анизотропный γ -оптимальный фильтр, оценивающий выход $z_k = \dot{w}_k$ дискретизованной системы (6) по измерениям y_k , который строится в форме наблюдателя Люенбергера в соответствии с результатами, полученными в [2]. Во втором каскаде обработки осуществляется демодуляция параметров колебаний A_1, B_1, A_2, B_2 по полученной оценке измеряемого сигнала посредством рекуррентного циклического алгоритма на основе гауссовской фильтрации.

Список литературы

1. *Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А.», 2017.
2. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. No 6. Т. 444. С. 612–615.

Application of Two-stage Robust Optimal Estimation for Filtering Measurement Channels of HRG With Controlled Precession

M. M. Tchaikovsky^{1,2}, *V. M. Nikiforov*¹

Academician N. A. Pilyugin Scientific-Production Center of Automation and Instrument-Making, Moscow, Russia¹

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia²

mmtchaikovsky@hotmail.com, v.m.nikiforov@gmail.com

The paper considers a method for digital filtering of measurement channels of the hemispherical resonator gyroscope with controlled precession of the standing wave of vibrations based on the two-stage robust optimal estimation.

УДК 62-551.4+681.5.03

Одновременное обеспечение запаса устойчивости при параметрической неопределенности и на входе/выходе объекта

В. Н. Честнов, Д. В. Шатов

ИПУ РАН, Москва, Россия
vnchest@yandex.ru, dvshatov@gmail.com

Рассматривается задача робастной стабилизации линейных многомерных систем при нестационарной параметрической неопределенности с дополнительным требованием обеспечения запасов устойчивости на физическом входе/выходе объекта управления. Решение задачи опирается на специальным образом сконструированную проблему H_∞ оптимизации. Численное решение такой задачи использует технику линейных матричных неравенств, реализованную в известном MATLAB-пакете Robust Control Toolbox. Приводятся примеры, иллюстрирующие предложенную технику.

Ключевые слова: линейные многомерные системы, параметрическая неопределенность, запасы устойчивости, H_∞ оптимизация

1. Введение

Проблеме робастной стабилизации многомерных систем с середины 80-ых годов 20 века уделяется пристальное внимание исследователей. В настоящей работе рассматриваются отклонения физических параметров объекта управления от расчетных, а регулятор строится по измеряемому выходу объекта. Это выгодно отличает предлагаемый подход от известных. Кроме того порядок получаемого регулятора не превышает порядка физического объекта. Предлагаемый подход опирается на введенную ранее так называемую (W, Λ, K) -форму уравнений замкнутой системы, которая получается из рассмотрения уравнений объекта в физических переменных [1, 2]. Вместе с тем в работе [2] показано, что если рассматривать задачу робастной стабилизации лишь по отношению к отклонениям параметров объекта от расчетных, то возможна парадоксальная ситуация, когда возможные отклонения параметров весьма широки, а запасы устойчивости по фазе и модулю (радиус запасов устойчивости) на физическом входе/выходе объекта весьма малы. Последнее с инженерной точки зрения неприемлемо на практике. Поэтому возникает задача одновременного обеспечения заданных границ на нестационарные отклонения физических параметров объекта от расчетных и заданных запасов устойчивости на физическом входе (выходе) объекта. Решение такой задачи опирается на специальным образом сконструированную проблему H_∞ оптимизации.

2. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим уравнения (W, Λ, K) -формы [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}\tilde{u} + W_{12}u, & \tilde{u} &= \Lambda\tilde{y}, \\ y &= W_{21}\tilde{u} + W_{22}u, & u &= Ky, \end{aligned}$$

где $u(t) \in R^m$ и $y(t) \in R^{m_2}$ – физические вход и выход объекта; $\tilde{u}, \tilde{y} \in R^n$ – фиктивные вход и выход объекта; $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ – диагональная матрица физических параметров объекта, подверженных отклонениям от расчетных; $W_{ij}(p)$, $i, j = 1, 2$ – известные передаточные матрицы, не содержащие параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; $K(p)$ – искомая правильная передаточная матрица регулятора. Элементы передаточных матриц – дробно-рациональные функции оператора дифференцирования $p = d/dt$. В [2] показано, что уравнения системы в физических переменных всегда могут быть приведены к эквивалентному виду (1).

Вычислим передаточную матрицу разомкнутой системы (1) по фиктивному входу \tilde{u} и физическому выходу y :

$$(2) \quad W^{\tilde{u}}(p) = -\Lambda[W_{11} + W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}],$$

$$(3) \quad W^y(p) = -[W_{21}\Lambda(I - W_{11}\Lambda)^{-1}W_{12} + W_{22}]K = -W_oK,$$

где $W_o(p)$ – передаточная матрица объекта.

Задача. Найти регулятор $u = K(p)y$, такой чтобы одновременно выполнялись частотные матричные неравенства

$$(4) \quad [I + W^{\tilde{u}}(-j\omega)]^T [I + W^{\tilde{u}}(j\omega)] > r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

$$(5) \quad [I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] > r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

где $0 < r \leq 1$ – радиус запасов устойчивости.

Используя результаты [3] легко показать, что выполнение условия (4) приводит к следующим нестационарным границам робастной устойчивости:

$$(6) \quad \lambda_i^0 / (1 + r) \leq \lambda_i(t) \leq \lambda_i^0 / (1 - r), \quad i = \overline{1, n},$$

где λ_i^0 – номинальное (расчетное) значение параметра λ_i . Выполнение же неравенства (5) приводит к следующим гарантированным многомерным запасам устойчивости по фазе и коэффициенту усиления на физическом выходе объекта [1]

$$(7) \quad |\psi_i| < \arccos(1 - r^2/2), \quad 1/(1 + r) < l_i < 1/(1 - r), \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Целые условия (4), (5) поставленной задачи можно представить в виде стандартной задачи H_∞ оптимизации

$$\|T\|_\infty \leq \gamma,$$

где $T(p)$ передаточная матрица связывающая вектор фиктивных внешних возмущений w с вектором фиктивных регулируемых переменных z , которые дополнительно вводятся в уравнения (1). Вектор $w^T = [w_1^T \ w_2^T]$, где вектор w_1 приложен аддитивно с \tilde{u} при этом $z_1 = u + w_1$, а вектор w_2 приложен аддитивно с y , при этом $z_2 = y + w_2$, а $z^T = [z_1^T \ z_2^T]$. Решение последней задачи дает регулятор и значение γ , которое определяет радиус запасов устойчивости $r = \gamma^{-1}$ и границы (6), (7).

Аналогично решается задача, когда запасы устойчивости обеспечиваются на входе объекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 18-08-01067).

Список литературы

1. *Честнов В.Н.* Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // *АиТ.* 1999. № 3. С. 229–238
2. *Честнов В.Н.* H_∞ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 112–127.
3. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Modified circle criterion of absolute stability and robustness estimation // 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference)(STAB). IEEE Xplore. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408351>

Simultaneous Providing of Stability Margin on Parametric Uncertainty and at Plant Input/Output

V. N. Chestnov, D. V. Shatov

ICS RAS, Moscow, Russia
vnchest@yandex.ru, dvshatov@gmail.com

We consider a problem of robust stabilization of a linear multivariable system with non-stationary parametric uncertainty and additional requirement of stability margins providing at a physical control plant input/output. The problem solution is based on a H_∞ optimization problem formed in the special way. Numerical solution of such a problem uses linear matrix inequalities technique developed in well-known MATLAB-package Robust Control Toolbox. We present examples that demonstrate the proposed design technique.

Первые интегралы систем нечетного порядка с диссипацией

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, РФ
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе показана интегрируемость классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость

Дать общее определение системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Это и приводит к потере известных первых интегралов, являющимися гладкими функциями [1].

Исследуются системы нечетного порядка (ср. с [2, 3]). Мы проиллюстрируем подход на примере систем третьего порядка. Пусть v , α , z — переменные в гладкой системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v , z с коэффициентами, зависящими от α . Выбирая в качестве независимой переменной q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$), а также переменную Z ($z = Zv$), система переписывается как

$$(1) \quad v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha' &= g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' &= d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned}$$

при этом уравнение (1) отделяется. Особняком стоит случай

$$(3) \quad d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0.$$

Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл

$$(4) \quad \Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Если выполнены следующие условия $a(\alpha) = h^2(\alpha)c(\alpha)/i^2(\alpha)$, $b(\alpha) = h(\alpha)c(\alpha)/i(\alpha)$, $g(\alpha) = h^2(\alpha)/i(\alpha)$, где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const}$, где $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ — некоторые гладкие функции.

Внутреннее силовое поле (зависящее от функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся частным случаем системы (1), (2):

$$(5) \quad v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$$(6) \quad \alpha' = -Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z),$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как системе при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла: $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}$, $\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}$.

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида $\Phi(Z; \alpha) = (1 - 2b_0Z\delta(\alpha))/Z^2 = C = \text{const}$, не имеющий существенно особых точек. Тогда подсистема (6) не имеет асимптотических предельных множеств.

Добавляя в систему (5), (6) внешнее поле $F(\alpha)$ при $b_0 > 0$:

$$(7) \quad v' = v\Psi(\alpha, Z),$$

$$(8) \quad \alpha' = -Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z),$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$). Консервативность «подтвердилась» бы наличием двух гладких интегралов. Действительно, при некотором условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}$, $dF_1(\alpha)/d\alpha = 2F(\alpha)$, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла: $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - b_0Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \delta(\alpha)/Z) = C_0 = \text{const}$, $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее поле. Получим систему

$$(9) \quad \begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \\ \tilde{f}(\alpha) &= (\mu - \delta^2(\alpha)) / \tilde{\delta}(\alpha), \mu = \text{const}, \end{aligned}$$

$$(10) \quad \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z).$$

Мы ввели поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система не будет консервативной. Консервативность будет при условии: $b_0 = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ примет вид (9), (10). Только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.*

Список литературы

1. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. № 5. Т. 482. С. 527–533.
2. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. № 5. Т. 485. С. 583–587.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. № 4. Т. 487. С. 381–386.

First Integrals of Odd-order Systems with Dissipation

M. V. Shamolin

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russian Federation
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

In this activity, we show the integrability for some classes of odd-order (third-, fifth-, seventh-, and ninth-) dynamic systems homogeneous in part of variables, in which a system on the tangent bundle of smooth manifolds is separated. Herewith, the force field is separated on both internal (conservative) and external one, which possesses the dissipation of alternating signs, and generalize the fields considered earlier.

**Энергетический подход к разработке средств
информационной поддержки экипажей воздушных судов на
режиме взлета**

*А. М. Шевченко, Б. В. Павлов,
Г. Н. Начинкина, М. В. Городнова*

ИПУ РАН, Россия, г. Москва
anshev2@ipu.ru, pavlov@ipu.ru, nach_gala@ipu.ru, mv.gorodnova@gmail.com

Предлагается энергетический метод прогнозирования движения воздушного судна. Найдены алгоритмы прогнозирования необходимой длины разбега воздушного судна до точки принятия решения на взлет и последующего пролета над высотным препятствием с минимальной скоростью устойчивого полета. Статистическое моделирование взлета пассажирского самолета в различных вариантах загрузки и центровки показало эффективность опережающего оповещения экипажа о возможности взлета.

Ключевые слова: управление полетом, прогнозирование, энергетический подход.

1. Введение

Устойчивой тенденцией последних лет в организации пассажирских и транспортных перевозок стало уплотнение трафика и расширение допустимых погодных условий эксплуатации воздушных судов. В этой связи вопросы безопасности эксплуатации авиационной техники становятся все более острыми. Из анализа отечественных и зарубежных исследований статистик авиационных происшествий за последнее десятилетие следует, что на наземные этапы взлета и посадки, как и во все предыдущие годы, приходится более половины всех аварий. Поскольку управление полетом на этих этапах осуществляется под контролем или при непосредственном участии пилота, то становится очевидной высокая роль «человеческого фактора» в вопросах безопасности авиационных перевозок. Вероятность неправильных или ошибочных действий пилота возрастает при нештатных ситуациях и при неполной информированности. В нашей работе предлагается методика оценивания текущего и прогнозирования будущего состояния воздушного судна и

оповещения пилота о характерных событиях на траектории взлета. Методологической основой разработок является энергетический подход к управлению полетом летательных аппаратов [1, 2].

2. Метод прогнозирования безопасного пролета над препятствием

В момент пролета над препятствием самолет должен иметь скорость не ниже минимальной скорости устойчивого горизонтального полета V_2 , известной для каждого типа самолетов. Таким образом, полная энергия движения в момент преодоления препятствия E_{ob} должна содержать необходимый минимум кинетической составляющей и запас потенциальной составляющей, которые и определяют достижимую высоту H_{ob} пролета над препятствием:

$$(1) \quad E_{ob} = mV_2^2/2 + mgH_{ob}.$$

Величина полной накопленной энергии складывается из текущих кинетической и потенциальной составляющих и работы всех внешних сил F_i на траектории маневра. Траектория подлета к препятствию включает наземный и воздушный участки, общей длиной S . Тогда спрогнозированная накопленная энергия на пути:

$$(2) \quad E(t) = mV^2(t)/2 + mgh(t) + S \sum F_i(t).$$

Выражая сумму всех внешних сил через измеряемую перегрузку $\sum F_i(t) = ma(t) = mgn_x(t)$ и приравнявая выражения для необходимой (1) и прогнозной (2) энергий, можно найти прогнозную дальность до точки принятия решения (ТПР), необходимую для накопления недостающей полной энергии:

$$D_{TPR}(t) = (g(H_{ob} - h(t)) + 0.5(V_2^2 - V^2(t)) / gn_x(t) - L_{ob}.$$

Здесь L_{ob} - расстояние препятствия от конца взлетно-посадочной полосы (ВПП). Заметим, что это выражение инвариантно относительно массы. В точке траектории, где прогнозируемая длина этого участка обнуляется, прогнозная величина энергии будет достаточной для пролета над препятствием с требуемой скоростью. Координата этой точки вычисляется просто:

$$X_{TPR}(t) = X(t) + D_{TPR}(t).$$

В отличие от методики взлета, предписываемой руководствами по летной эксплуатации, метод прогнозирования полной энергии указывает

на возможность взлета не в момент достижения скорости принятия решения, а намного раньше и в координатах дальности, привязанных к взлетной полосе. Для повышения ситуационной осведомленности весьма полезным считается знание запаса, или резерва, дальности до обреза взлетной полосы в точке принятия решения. Величина резерва также прогнозируется в процессе разбега:

$$L_{res}(t) = L_{VPP} - X(t) - D_{TPR}(t).$$

Метод прогнозирования на основе энергетического подхода позволил получить прогнозную оценку еще одной характерной точки на траектории разбега. В нештатных ситуациях пилот должен оценивать не только возможность продолжения взлета, но и положение самолета на полосе, в котором можно начинать подъем передней стойки. Длина дистанции от текущего положения самолета до достижения скорости подъема вычисляется по формуле:

$$D_{V_r}(t) = 0.5 (V_r^2 - V^2(t)) / gn_x(t).$$

Объективная оценка этой дальности, в отличие от интуитивной, улучшает ситуационную осведомленность пилота и снижает предпосылки для ошибочных действий. Отличительной особенностью энергетического метода прогнозирования является то, что в текущем прогнозе учитывается полная энергия, приобретаемая самолетом на воздушном сегменте за пределами наземного участка. Динамический расчет текущей энергии и сопоставление её с требуемой терминальной позволяет информировать пилота о возможности достижения конечного состояния взлета с опережением относительно момента принятия решения, предписываемого руководствами по летной эксплуатации. Это позволит повысить ситуационную осведомленность пилота и снизить предпосылки к ошибочным действиям в критических ситуациях.

Полученные результаты имеют достаточно универсальный характер, они подтверждены большим объемом статистических испытаний.

Список литературы

1. *A.P. Kurdjukov, G.N. Nachinkina and A.M. Shevchenko.* Energy approach to flight control. // AIAA Conf. Navigation, Guidance & Control. AIAA Paper 98-4211, 543–553. (1998). <https://doi.org/10.2514/6.1998.4211>.
2. *A.M. Shevchenko.* Energy-based Approach for Flight Control Systems Design // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. No. 3. P. 372–384.

Energy Approach to the Development of Means of Information Support for Aircraft Crews on Takeoff Mode

A. M. Shevchenko, B. V. Pavlov, G. N. Nachinkina, M. V. Gorodnova

ICS RAS, Russia, Moscow

anshev2@ipu.ru, pavlov@ipu.ru, nach_gala@ipu.ru, mv.gorodnova@gmail.com

An energy method for predicting the movement of an aircraft along a runway has been developed. Algorithms are found for predicting the necessary takeoff length of the aircraft to the point of decision making for takeoff and flight over a high-altitude obstacle. Statistical modeling showed the effectiveness of advanced warning the crew about the possibility of takeoff.

УДК 517.929

Одна аппроксимация в задаче оптимальной стабилизации периодической системы с запаздыванием

Р. И. Шевченко

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
oma170@hotmail.com

Рассматривается задача оптимальной стабилизации для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Исходная задача аппроксимируется задачей оптимальной стабилизации для периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Для аппроксимационных задач построены эквивалентные дискретные задачи оптимальной стабилизации. Изучаются вопросы точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Эффективность предложенного алгоритма решения задачи оптимальной стабилизации для периодической системы с запаздыванием подтверждена компьютерным моделированием.

Ключевые слова: периодические дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальная стабилизация, конечномерные аппроксимации

1. Аппроксимационные задачи оптимальной стабилизации

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t - \tau) + B(t)u, t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty),$$

где $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_1(\cdot), A_2(\cdot), B(\cdot)$ — матричнозначные ω -периодические функции, интегрируемые по Лебегу на $[0, \omega]$; τ — постоянное запаздывание.

Ставится задача — найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$(2) \quad J = \int_0^\infty [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt,$$

где $R(t), Q(t), t \in \mathbb{R}$, — значения непрерывных ω -периодических матричнозначных функций, которые являются положительно определенными матрицами.

В качестве аппроксимационных систем для (1) выбираются системы периодических дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$(3) \quad \frac{dy_0(t)}{dt} = A_1(t)y_0(t) + A_2(t)y_N(t) + B(t)u,$$

$$(4) \quad \frac{dy_i(t)}{dt} = \frac{N}{\tau} \left(y_{i-1} \left(\left[\frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) - y_i \left(\left[\frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $[a]$ — целая часть числа a , $y_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N, N \geq 1$. Для аппроксимационных систем используются следующие критерии качества переходных процессов

$$(5) \quad J_N = \int_0^\infty [y_0^T(t)Q(t)y_0(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt, \quad N \geq 1.$$

Система (4) может рассматриваться, как модификация систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые традиционно используются в аппроксимационной теории оптимальной стабилизации для систем с последствием [1, 2].

При решении поставленной задачи ограничимся случаем, когда τ рационально соизмеримо с периодом ω , т. е. $\tau = \omega/m$, где $m \in \mathbb{N}$.

Предполагается также специальная зависимость допустимых управлений от времени на периоде для аппроксимационной системы (3), (4)

$$(6) \quad u_N(Y_N(\cdot), t) = u_i(Y_N(\cdot)), \quad t \in \left[(i-1) \frac{\omega}{M}, i \frac{\omega}{M} \right), \quad i = \overline{1, M},$$

где $u_i(\cdot) : C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right], \mathbb{R}^{n \times (N+1)}\right) \rightarrow \mathbb{R}^r$ — непрерывные отображения, $Y_N(\cdot) \in C\left(\left[-\frac{\tau}{N}, 0\right], \mathbb{R}^{n \times (N+1)}\right)$ определяет функциональное состояние системы (3), (4). Допустимые управления (6) периодически продолжаются по t на всю числовую ось. Полагается также, что в системе (4) выбираются $N = Mp$, $p \in \mathbb{N}$.

2. Дискретная задача оптимальной стабилизации

Выбор управлений, формируемых согласно правилу (6), позволяет заменить аппроксимационную задачу оптимальной стабилизации (3), (4), (5) эквивалентной дискретной задачей оптимальной стабилизации для системы разностных уравнений

$$(7) \quad \hat{y}_{j+1} = \hat{A}_j^0 \hat{y}_j + \hat{A}_j^{N-1} \hat{y}_{j-N+1} + \hat{A}_j^N \hat{y}_{j-N} + \hat{B}_j \hat{u}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0 = 0 \cup \mathbb{N}.$$

Дискретный критерий качества переходных процессов имеет вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{J}_N = \sum_{j=0}^{+\infty} & \left[\hat{y}_j^T \hat{Q}_j^0 \hat{y}_j + \hat{y}_j^T \hat{Q}_j^{N-1} \hat{y}_{j-N+1} + \hat{y}_j^T \hat{Q}_j^N \hat{y}_{j-N} \right. \\ & + \hat{y}_{j-N+1}^T \hat{Q}_j^{N-1 0} \hat{y}_j + \hat{y}_{j-N+1}^T \hat{Q}_j^{N-1 N-1} \hat{y}_{j-N+1} \\ & + \hat{y}_{j-N+1}^T \hat{Q}_j^{N-1 N} \hat{y}_{j-N} + \hat{y}_{j-N}^T \hat{Q}_j^0 \hat{y}_j + \hat{y}_{j-N}^T \hat{Q}_j^N \hat{y}_{j-N+1} \\ & + \hat{y}_{j-N}^T \hat{Q}_j^N \hat{y}_{j-N} + 2\hat{y}_j^T \hat{N}_j^0 \hat{u}_j + 2\hat{y}_{j-N+1}^T \hat{N}_j^N \hat{u}_j \\ & \left. + 2\hat{y}_{j-N}^T \hat{N}_j^N \hat{u}_j + \hat{u}_j^T \hat{R}_j \hat{u}_j \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{A}_j^p, \hat{B}_j, \hat{Q}_j^q, \hat{N}_j^p, \hat{R}_j$, $p, q = 0, N-1, N$, — mN -периодические матрицы. Начальные условия $\hat{y}_i, i = \overline{-N, 0}$, предполагаются заданными.

Дискретная mN -периодическая задача оптимальной стабилизации (7), (8) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации порядка $(N+1)n$ вида

$$(9) \quad \hat{Y}_{j+1} = \hat{A}_j \hat{Y}_j + \hat{B}_j \hat{u}_j, \quad \hat{J}_N = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\hat{Y}_i^T \hat{Q}_i \hat{Y}_i + 2\hat{Y}_i^T \hat{N}_i \hat{u}_i + \hat{u}_i^T \hat{R}_i \hat{u}_i \right].$$

Процедура решения задачи оптимальной стабилизации (9) описана в статье [3]. Если оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи (9) существует, то по нему можно построить оптимальное стабилизирующее управление вида (6) для аппроксимационной системы (3), (4). Используя связь системы с запаздыванием (1) и аппроксимационных систем (3), (4), строится приближение оптимального стабилизирующего управления для системы с запаздыванием.

Список литературы

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. и механ. 1964. № 4. Т. 28. С. 716–724.
2. *Gibson J.S.* Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM Journal on Control and Optimization. 1983. V. 21. № 1. P. 95–139.
3. *Шевченко Р.И., Долгий Ю.Ф.* Дискретная процедура оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений // Вест. Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2018. № 124. С. 891–906.

One Approximation in the Optimal Stabilization Problem for the System of Periodic Delayed Differential Equations

R. I. Shevchenko

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia
oma170@hotmail.com

The problem of optimal stabilization for a periodic delay differential system is considered. Initial problem is replaced by the optimal stabilization problems for periodic systems of differential equations with piecewise-constant arguments. For the approximating problems we obtain equivalent discrete periodic stabilization problems. We study accuracy of the control approximation. Numerical simulation is used to test the proposed algorithm.

Алгоритм последовательного определения постояннозначных интервалов управляющей функции

А. Б. Шубин, Е. Г. Александров

ИПУ РАН, Москва, Россия
ashoo@ipu.ru, ashoo@ipu.ru

В докладе описывается метод расчета функции управления объектом, обеспечивающий переход объекта из известных начальных значений фазовых координат в заданные конечные. Предполагается, что известно дифференциальное уравнение (ДУ) объекта и возможно его моделирование на ПК. ДУ может быть нелинейным, неустойчивым, с переменными коэффициентами. Возможна система ДУ с перекрестными связями. Приводятся примеры расчета управления траекториями морских судов, включая швартовку и космических кораблей при стыковке с орбитальными станциями, включая стыковку на встречных курсах.

Ключевые слова: программное управление, терминальное управление динамическими объектами, кусочно-постоянное управление.

1. Введение

Появились объекты управления, описываемые сложными нелинейными ДУ с переменными коэффициентами. Иногда задача управления осложняется тем, что заданное значение фазовых координат (ФК) неустойчиво или зависит от времени. Для этих случаев предлагается применение управляющей функции (УФ), зависящей только от времени, рассчитываемой итеративным алгоритмом, моделирующем ДУ и простой алгоритм расчета УФ по конечным значениям ФК. Количество итераций и времени при расчете невелико.

2. Описание алгоритма, результаты моделирования

На рис.1 а,б приведены вид УФ непрерывного и экономного управления с нулевыми интервалами $p > n$, значения которых определяются из дополнительных требований к управлению.

В основу алгоритма расчета ненулевых интервалов УФ для ДУ n -го порядка приняты положения (аксиомы):

- УФ имеет вид интервально-постоянно значной функции с n интервалами постоянной значности;
- знак управления на интервале равен знаку определителя интервала ОК, а длительность абсолютному значению ОК;

- настройка каждого интервала связана с одним заданным значением фазовых координат;
- итеративный процесс вычисления ОК происходит последовательно, начиная со старшей производной при условии, что последующие интервалы настроены.

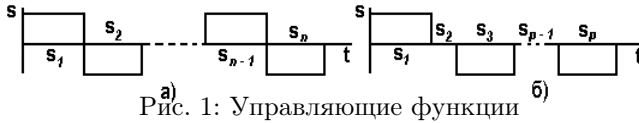


Рис. 1: Управляющие функции

В простейшем случае имеем ДУ $x^{(n)} + G(x^{(n-1)}, \dots, x) = cu(t)$, описывающее поведение объекта, где $u(t) = \pm 1$ - управление, x - выходная координата объекта, $x^{(i)}$ - ее производные, c - константа, обеспечивающая управляемость координат объекта. Обозначим $x = x_1, x^{(1)} = x_2, \dots, x^{(n-1)} = x_n$. Пусть \bar{X} - совокупность координат объекта. Решается задача поиска управления $u_*(t), 0 \leq t \leq T$, которое переводит ФК из состояния \bar{X}_0 при $t = 0$ в заданное состояние \bar{X}_* в момент T .

Управление $u_*(t)$ находится итеративной процедурой в виде знакопеременной функции, имеющей n интервалов постоянства знака. Такая функция однозначно определяется набором ОК \bar{S} с компонентами $\{s_1, \dots, s_k, \dots, s_n\}$. При этом на k -том интервале управления продолжительность интервала $\tau_k = |s_k|$, а значение управления $u(t) = \text{sign}(s_k)$. Таким образом $u(t)$ определено на отрезке $0 \leq t \leq T$, где $T = \sum_{i=1}^n |s_i|$. Коррекции ОК имеет вид:

$$s_n^{(m+1)} = s_n^{(m)} + \frac{1}{|F_{n,n}|} D_n^m S^m, \quad m = \overline{0, M}$$

$$s_k^{(m+1)} = s_k^{(m)} + \frac{\alpha_k}{|F_{k,k}|} D_k^m S^m, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad m = \overline{0, M},$$

где $F_{i,j}$ - матрица чувствительности конечных значений координат, D_i - ошибка координат в конце управления, α_k - коэффициент, обеспечивающий последовательность подстройки. Исследование управления кораблём производится на модели:

$$\delta = \begin{cases} b_1 u & \text{при } |\delta| < b_2, \\ 0 & \text{при } |\delta| = b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\omega} = -b_3 \omega + b_4 \delta v^2, \\ \dot{\varphi} = \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi (1 - b_5 |\delta|), \\ \dot{y} = v \sin \varphi (1 - b_5 |\delta|), \end{cases}$$

Задача управления состоит в том, чтобы из точки T_1 при курсе φ^0 провести корабль в точку T_2 с конечным курсом φ^* . Эта задача при решении задач управления космическими объектами удобно использовать для моделирования траекторий космического корабля (КК) и траекторий изобореза траектория после нескольких итераций подстройки управления (ОС) в прямоугольной системе координат.

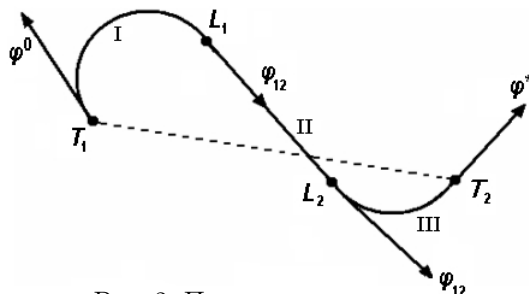


Рис. 2: Поэтапное управление

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= -b_1 x_1 / r_k^3 + k_1 u_1 & \dot{\nu}_2 &= -b_1 y_1 / r_0^3 \\
 \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{\nu}_1 &= \dot{\nu}_2 \\
 \dot{y}_2 &= -b_1 y_1 / r_k^3 + k_2 u_2 & \dot{\omega}_2 &= -b_1 \omega_1 / r_0^3 \\
 \dot{y}_1 &= y_2 & \dot{\omega}_1 &= \dot{\omega}_2
 \end{aligned}$$

Результаты расчета УФ при управлении маневра стыковки КК с ОС приведены на рис.3. Параметры УФ вычислены с учетом минимизации сложного критерия, состоящего из стоимости количества топлива на маневр плюс стоимость времени маневра.

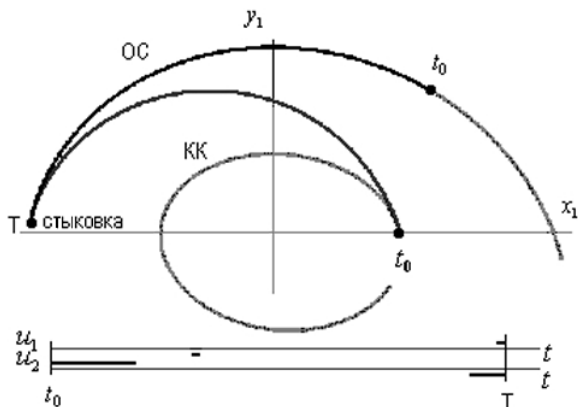


Рис. 3: Управление космическим кораблем

Algorithm for Sequential Determination of Constant-sign Intervals of the Control Function

A. B. Shoobin, E. G. Alexandrov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moskva, Russia
ashoo@ipu.ru, ashoo@ipu.ru

For a wide class of dynamic objects are available algorithms for computing time control function (CF) to provide the desired values of phase coordinates (PC) at the end of the calculated trajectories. CF values at selected time intervals, specifically correspond to the values at the end of PC. Examples of control over ships and spacecraft are given.

УДК 517.9

К задаче о раскачке маятника при интегральных ограничениях на управления

Л. П. Югай

Алмалыкский филиал НИТУ «МИСиС», Алмалык, Узбекистан
yugailp@mail.ru

Рассматривается дифференциальная игра убегания(уклонения), описываемая системой нелинейных по состоянию дифференциальных уравнений с линейными управлениями. Решена задача уклонения траекторий от заданного дискретного терминального множества при интегральных ограничениях на управления. Результаты применены к решению задачи о раскачке маятника при интегральных ограничениях на управления.

Ключевые слова: уклонение траектории, маятник, задача о раскачке, интегральные ограничения

1. Введение

Рассматривается задача убегания в постановке Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко[1] для нелинейных по состоянию дифференциальных игр с дискретным терминальным множеством и интегральных ограничениях на управления игроков, выбираемых в виде измеримых функций. Сформулированы достаточные условия убегания, при которых за-

дача убегания разрешима из любой начальной позиции, не принадлежащей терминальному множеству.

2. Постановка задачи уклонения траекторий

Пусть дифференциальная игра описывается системой уравнений

$$(1) \quad \dot{z} = g(z) - u + v,$$

где z, u, v и $g(z) \in R^n$, \dot{z} — производная по времени, $g(z)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$(2) \quad |g(z_2) - g(z_1)| \leq \gamma |z_2 - z_1|, \gamma > 0, z_1, z_2 \in R^n.$$

В R^n задано также непустое терминальное множество

$$(3) \quad M = \bigcup_{i=1}^{\infty} m_i,$$

состоящее из не более, чем счетного множества точек R^n .

Параметры u и v в (1) выбираются сторонами (игроками) в виде измеримых функций $u = u(t) \in R^n, v = v(t) \in R^n, t \geq 0$, удовлетворяющих интегральным ограничениям:

$$(4) \quad \int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt \leq \rho^2, \int_0^{\infty} |v(t)|^2 dt \leq \sigma^2,$$

где $\rho \geq 0, \sigma \geq 0$. При этом считаем, что координаты векторов $v \in R^n$ независимы друг от друга.

Игрок, выбирающий $v = v(s)$, стремится уклонить при любом допустимом поведении $u(s)$ соответствующую траекторию $z(t)$ уравнения (1) ($z(0) \notin M$), от терминального множества при всех $t \geq 0$. Такую задачу будем называть задачей уклонения (или дифференциальной игрой убегания) в постановке Л.С. Понтрягина – Е.Ф.Мищенко [1] с интегральными ограничениями на управления. Цель преследователя — привести в некоторый конечный момент времени траекторию (1) на M . В процессе игры уклоняющемуся игроку в каждый момент времени $t \geq 0$ известны значения $u(s)$ и $z(s)$ при $s \leq t$, но не известны в будущие моменты времени $s > t$.

3. Основной результат

Пусть для параметров $v \in R^n$ несущим пространством, без ограничения общности, является R^q , тогда $v = (v_q, 0)^T \in R^n$, T — знак транспонирования, а v_q есть вектор с первыми q координатами вектора v , $q = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим, далее: B_q и S_q соответственно единичные шар и сфера в R^q с центром в начале R^n , \langle, \rangle — скалярное произведение.

Предположение 1. Существует константа $\epsilon > 0$ такая, что $|m_r - m_k| \geq \epsilon$, для всех $r \neq k$ (r и k — натуральные числа).

Предположение 2. $\sigma > \rho$.

Предположение 3. $\dim B_q = q \geq 1$.

Теорема 1. Пусть в дифференциальной игре убегания (1) с терминальным множеством (3) и интегральными ограничениями (4) выполняются Предположения 1 - 3. Тогда из любой начальной позиции $z_0 = z(0) \notin M$ возможно уклонение траектории $z(t)$ уравнения (1) от дискретного терминального множества M при всех $t \geq 0$.

4. Пример

(Задача о раскачке маятника [2]). Пусть движение конфликтно управляемого математического маятника описывается уравнением

$$(5) \quad \ddot{x} + a \sin x = -\tilde{u} + \tilde{v},$$

где x, u, v и a — действительные числа, $a > 0$, \ddot{x} — вторая производная по времени от состояния $x(t)$. Задача о раскачке маятника заключается в нахождении такого допустимого управления $\tilde{v}(t) \in R^n$, удовлетворяющего интегральным ограничениям (4), которое обеспечивает при любом управлении $\tilde{u}(t) \in R^n$ с ограничением (4), непопадание соответствующего выбранным управлениям движения $x(t), x(0)^2 + x(t)^2 > 0$, в положения равновесия маятника с нулевой скоростью при всех $t \geq 0$. Эта задача сводится к рассмотрению дифференциальной игры убегания типа (1) с дискретным терминальным множеством вида (3) и ограничениями (4). Проверка предположений 1-3, показывает, что они выполняются при $\epsilon = 2\pi, q = 1$ и $\sigma > \rho$, поэтому при указанных условиях разрешима задача о раскачке маятника (5) при интегральных ограничениях (4) на управления. Задача о раскачке маятника при геометрических ограничениях на управления рассмотрена в [2-4].

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача убегания одного управляемого объекта от другого. ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.

2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 388 с.
3. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1977. Т. 143. С. 105–128.
4. *Югай Л.П.* Уклонение от дискретного терминального множества при геометрических ограничениях на управления // Межд. научн. - техн. журнал «Проблемы управления и информатики» (Киев). 1998. № 1. С. 4–11.

To the Problem of Pendulum's Swinging by Integral Restrictions on Controls

L. P. Yugay

Almalyk Branch of NUST "MISiS(Russia), Almalyk, Uzbekistan
yugailp@mail.ru

The differential game of evasion (avoiding) described by nonlinear system on state and linear controls is considered. The problem of avoiding of trajectories from given discrete terminal set in the classes of integral restricted control functions is solved. The obtained result is applied to the solving of pendulum's swinging problem by integral restrictions on controls.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Garziera R.	263	Бутырин С. А.	392 396
Hwang S. S.	125	Вершинин Ю. А.	270
Lin Ch-H.	151	Виноградова М. С.	421
Авданина Л. В.	4	Гавриков А. А.	107
Айсагалиев С. А.	8 11	Галяев А. А.	111
Айсагалиева С. С.	8	Гарсиа Гарсиа А.	219
Александров А. Ю.	13 16	Глазков Т. В.	115
Александров Е. Г.	473	Глумов В. М.	118
Алесова И. М.	19	Глущенко А. И.	121
Алферов Г. В.	22	Голуб А. П.	125
Ананьев Б. И.	26	Голубев А. Е.	128 131
Ананьевский И. М.	29	Голубев Ю. Ф.	134 138
Анашкин О. В.	32	Городнова М. В.	466
Андреев А. С.	35 39	Гулюкина С. И.	141
Андреев К. А.	285	Гусев А. А.	285
Андрусевич П. А.	42	Гусев М. И.	145
Антипов А. С.	46	Даниленко О. В.	325
Антоновская О. Г.	49	Долгий Ю. Ф.	148
Арутюнов А. В.	53	Доррер Г. А.	260
Афанасьев В. Н.	55	Досаев М. З.	151 270
Аязбаева А. М.	11	Дружинина О. В.	304 375
Бабаджанянц Л. К.	19	Иванова С. Л.	273
Балабанов А. В.	59 62	Ильина А. Н.	158
Баландин Д. В.	65 69	Ефимова П. А.	22
Барабанов И. Н.	72	Жорин С. М.	406
Барсегян В. Р.	77 80	Жуковская З. Т.	53 155
Батов А. В.	399 402	Жуковский С. Е.	53 155
Белов А. А.	83 427	Ие О. Н.	413
Белов И. Р.	86	Каленова В. И.	280
Бирюков Р. С.	65 90	Каменецкий В. А.	161
Бойченко В. А.	83	Канатников А. Н.	165
Болотник Н. Н.	93	Касимов А. М.	59 62
Бортакровский А. С.	96	Каюмов О. Р.	168
Бубнова Е. С.	100	Климина Л. А.	151 270
Буркин И. М.	103	Князьков Д. Ю.	171
Бут Д. К.	240	Коган М. М.	65 69

Койфман К. Г.	240	Мосолова Ю. М.	439
Кокунько Ю. Г.	175	Начинкина Г. Н.	466
Корнеев В. А.	179 182	Никифоров В. М.	285 456
Королев В. С.	22 186	Окунев Ю. М.	289
Корянов В. В.	134	Охитина А. С.	292
Костин Г. В.	107 189	Павлов Б. В.	466
Костоусова Е. К.	193	Павлова Н. Г.	155
Костючек М. И.	197	Пак Э. Е.	379
Кочетков С. А.	200	Перегудова О. А.	35 39
Красинский А. Я.	203 206	Перепелкин В. В.	297
Краснов Д. В.	209	Пестерев А. В.	267 301
Краснова С. А.	46 175	Петренко А. Г.	240
Крищенко А. П.	213	Петров А. А.	304
Кружков В. И.	276	Петров В. А.	121
Кугушев Е. И.	216	Петров Н. Н.	308
Кузенков О. А.	219	Пивнева С. В.	175
Кузнецова О. И.	103	Платонов А. В.	311
Кулешов А. С.	223	Погорелов В. В.	402
Кумакшев С. А.	227	Поляков В. Ю.	315 372
Кустов А. Ю.	230 233	Поляхова Е. Н.	186
Кучкаров И. И.	237	Попков А. С.	318
Ласточкин К. А.	121	Попова Т. В.	216
Левин В. А.	90	Потоцкая И. Ю.	19 186
Локшин Б. Я.	151	Привалова О. Г.	289
Лысенко П. В.	111	Проскурников А. В.	379 382
Лычев С. А.	240 243	Пупышева Ю. Ю.	19
Лычева Т. Н.	243	Рапопорт Л. Б.	322
Макаренко А. В.	197 247	Расина И. В.	325
Маликов А. И.	250	Рассадин Ю. М.	328
Маркеев А. П.	253	Решмин С. А.	115 331
Масаев С. Н.	257 260	Родников А. В.	335
Масина О. Н.	304	Роднищев Н. Е.	338 342
Мастерова А. А.	263	Ролдугин Д. С.	292
Матросов И. В.	267 301	Румянцев Д. С.	297 345
Махмудов П. К.	270	Рутковский В. Ю.	118
Мелкумова Е. В.	134 138	Рыбаков К. А.	349
Митришкин Ю. В.	273 276	Рябов П. Е.	352
Морозов В. М.	280	Рябова Е. А.	219
Морозов М. В.	282	Сазонов С. В.	216
Морозов Ю. В.	267 301	Сайфутдинов Ю. Н.	356

Сальников А. М.	399	402	Фетисов Д. А.	433
Сальникова Т. В.		4	Фигурина Т. Ю.	93 171
Самохин А. С.		4	Филиппова Т. Ф.	436
Самсонов В. А.	270	289	Фролова Н. А.	55
Самсонюк О. Н.	360	363	Фурсов А. С.	439
Самыловская А. К.		369	Холостова О. В.	443
Самыловский И. А.	366	369	Хрусталеv М. М.	446
Саурин В. В.	315	372	Хрящев С. М.	449
Севрюгин И. В.		8	Царьков К. А.	345
Седова Н. О.		375	Цыганов В. В.	260
Селюцкий Ю. Д.	125	263	Чайковский М. М.	453 456
Сесекин А. Н.		148	Честнов В. Н.	459
Симонян Т. А.		80	Шалимова Е. С.	151
Смирнова В. Б.	379	382	Шамолин М. В.	463
Соколов В. Ф.		386	Шатов Д. В.	459
Солодуша С. В.		389	Шевченко А. М.	466
Соловьёва Н. А.		308	Шевченко Р. И.	469
Сомов Е. И.	392	396	Шиманчук Д. В.	22
Сомов С. Е.	342	392	Шубин А. Б.	473
Сомова Т. Е.	342	396	Шульпин С. М.	90
Сорокин С. П.		363	Югай Л. П.	476
Степанова И. Э.	399	402	Юдин С. В.	182
Степенко Н. А.		186	Юлдашев А. А.	206
Стребуляев С. Н.		406	Юрченков А. В.	230 233
Талагаев Ю. В.		409	Юсупова О. В.	32
Тверская Е. С.		213	Яковлев А. Б.	417
Тимин В. Н.		230		
Тимофеева Г. А.		413		
Титов Р. В.		379		
Тихонов А. А.	16	417		
Ткачев С. С.		292		
Ткачева О. С.	165	421		
Тормагов Т. А.		322		
Тхай В. Н.	72	424		
Унанян Н. Н.		427		
Утина Н. В.		382		
Уткин А. В.		421		
Уткин В. А.		141		
Уткина Н. В.	128	131		
Федюков А. А.		430		