УДК 517.911 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2
MSC 34A12

Памяти В. А. Плисса

О существовании решения граничной задачи Коши*

В. В. Басов, Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Ильин Ю. А.* О существовании решения граничной задачи Коши // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 277–288. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.210

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Предполагается, что его правая часть определена и непрерывна на множестве, состоящем из области двумерного евклидова пространства и некоторой части ее границы. Известно, что теорема Пеано для любой точки области гарантирует существование решения задачи Коши на отрезке Пеано. В статье методом ломаных Эйлера на некотором аналоге отрезка Пеано доказано существование решения задачи Коши, поставленной в граничной точке области во всех случаях, позволяющих применить указанный метод. Также приведены условия, гарантирующие отсутствие решения граничной задачи Коши.

Ключевые слова: граничная задача Коши, существование решения, отрезок Пеано.

1. Введение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x,y)$ — вещественная функция, определенная и непрерывная на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, в котором G — это область в топологии евклидова пространства $\mathbb{R}^2$, а множество $\widehat{G}$ принадлежит границе ∂G области G.

Выбор множества $\widetilde{G}$ в качестве области определения уравнения (1) обусловлен тем, что в конкретных дифференциальных уравнениях, записанных с помощью элементарных функций, область определения функции f не обязана являться открытым множеством и может содержать граничные точки. В этом случае решения могут как начинаться на границе, так и выходить на нее. В то же время классические теоремы (например, теорема Пеано) гарантируют существование решений, начинающихся лишь во внутренних точках.

Цель предлагаемой работы заключается в том, чтобы выписать все условия, при которых существует решение задачи Коши уравнения (1) для точки $(x_0, y_0) \in \widehat{G} \subset \partial G$, и условия, при которых такие решения отсутствуют.

Поставленная задача решается путем выделения случаев, в которых возможно построение аналогов треугольника и отрезка Пеано, и применением метода ломаных Эйлера. Этот метод имеет то преимущество, что он является *конструктивным*,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

а значит, для уравнений, удовлетворяющих приведенным в статье условиям, решения граничных задач Коши можно искать как графически с помощью компьютера, так и приближенно с помощью численных методов. В предлагаемой статье найдены все случаи, когда такое применение метода ломаных Эйлера возможно и приводит к успеху.

В то же время метод ломаных Эйлера является всего лишь одним из возможных методов доказательства существования решения и поэтому заведомо не дает общего с теоретической точки зрения результата. Условия, при которых он применим, накладывают все-таки достаточно специфические ограничения на границу области. Поэтому в дальнейшем мы планируем продолжить исследование вопроса о существовании решения граничной задачи Коши другим, более универсальным методом.

Следует отметить, что данная задача, несмотря на классическую постановку, в учебной литературе нигде не ставится и не рассматривается. Также авторам не удалось найти упоминание о ней и в доступной научной литературе. Таким образом, предлагаемая работа призвана заполнить существующий пробел.

Заметим, что похожая с этой точки зрения ситуация имеет место в статье [1], в которой приводятся новые результаты по, казалось бы, классической задаче о зависимости максимального интервала существования решения от начальных данных.

Приведем необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1. Функцию $y = \varphi(x)$, определенную на промежутке $\langle a, b\,\rangle$, будем называть *решением дифференциального уравнения* (1), если выполняются следующие условия: 1) функция $\varphi(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in \langle a, b\,\rangle$; 2) точка $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$ при всех $x \in \langle a, b\,\rangle$; 3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для всякого $x \in \langle a, b\,\rangle$.

Теперь понятие решения уравнения (1) можно уточнить в зависимости от того, как расположен его график в множестве $\widetilde{G}$.

Определение 2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), определенное на промежутке $\langle a, b\,\rangle$, будем называть: *a*) *внутренним решением,* если точка $(x, \varphi(x)) \in G$ для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$; *b*) *граничным решением,* если $(x, \varphi(x)) \in \widehat{G}$ для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$; *c*) *смешанным решением,* если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b\,\rangle$, что $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$, а $(x_2, \varphi(x_2)) \in \widehat{G}$.

Разумеется, если уравнение (1) рассматривать только в области G, то понятия решения и внутреннего решения будут совпадать.

Замечание 1. Функции $f(x, y)$, встречающиеся при решении конкретных уравнений (1), как правило, представляют собой композицию элементарных функций, непрерывных на своей области определения, которая чаще всего является не более чем счетным объединением связных множеств как раз вида $\widetilde{G}$. И это является одной из причин рассмотрения уравнений (1) не в области, а на множестве $\widetilde{G}$. Например, в уравнении $y' = \sqrt{y}$, областью определения которого является множество $\widetilde{G} = \{(x, y):\ x \in \mathbb{R}^1,\ y \geq 0\}$, согласно приведенным выше определениям функция $y(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^1$ является граничным решением.

Определение 3. Задачу Коши с начальными данными (н. д.) x_0, y_0 будем называть *внутренней задачей Коши,* если точка $(x_0, y_0) \in G$, и будем называть *граничной задачей Коши,* если точка $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$.

Определение 4. *Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши* уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0 *существует*, если точка $(x_0, y_0) \in$

$G\,(\widehat{G}, \widetilde{G})$ и найдутся промежуток $\langle a, b\,\rangle$, содержащий x_0, и определенное на нем внутреннее (граничное, смешанное) решение $y = \varphi(x)$ такие, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Таким образом, график внутреннего решения задачи Коши лежит в области G, граничного — в $\widehat{G}$, а смешанного — и в области G, и в множестве $\widehat{G}$.

Переходя к вопросу о существовании решения задачи Коши, приведем формулировку хорошо известной теоремы Пеано (см., напр., [2–6]), касающуюся в предложенной терминологии существования решения внутренней задачи Коши.

Теорема Пеано. *Пусть в уравнении* (1) *функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Здесь отрезок Пеано $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, а константа $h > 0$ определяется следующим образом: существуют константы $a, b > 0$ такие, что прямоугольник $R = \{(x, y) \,:\, |x - x_0| \le a,\, |y - y_0| \le b\} \subset G$. Если $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{R}$, то $h = a$. В противном случае положим $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)| > 0$, тогда $h = \min\{a, b/M\}$. Геометрически h — длина высоты треугольника T^+ с вершиной в точке (x_0, y_0), боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащем на прямой $x = x_0 + h$ (T^- строится аналогично).

Замечание 2. В [7] предполагается, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $R^+ = \{(x, y) \,:\, x_0 \le x \le x_0 + a,\, |y - y_0| \le b\}$, что, на самом деле, только и требуется при любом варианте доказательства теоремы Пеано для $x \ge x_0$.

В работе рассматривается задача Коши, поставленная в произвольной граничной точке (x_0, y_0) множества $\widetilde{G}$. Но прежде, чем сделать предположения, касающиеся структуры границы в малой окрестности этой точки, для упрощения используемых в дальнейшем обозначений и формул будем считать, не уменьшая общности, что задача Коши всегда ставится в точке $(0, 0)$ и что функция f в ней равна нулю, т. е. будем рассматривать уравнение

$$y' = f_0(x, y), \tag{2}$$

в котором функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, G — область в $\mathbb{R}^2$, $\widehat{G} \in \partial G$, точка $\mathrm{O} = (0, 0) \in \widehat{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и поставлена задача Коши с начальными данными $0, 0$.

В самом деле, возьмем произвольное уравнение (1) и поставим задачу Коши в любой точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, тогда замена $x = t + x_0$, $y = v + y_0 + f(x_0, y_0)t$ сведет уравнение (1) к уравнению $\dot{v} = f_0(t, v)$, в котором функция $f_0(t, v) = f(t + x_0, v + y_0 + f(x_0, y_0)t) - f(x_0, y_0)$. Следовательно, при $x = x_0$, $y = y_0$ получаем $t = t_0 = 0$, $v = v_0 = 0$ и $f_0(0, 0) = 0$.

2. Граничные кривые и порождаемые ими множества.

Определение 5. Функцию, определенную на некотором отрезке $[0, a_u]$, будем называть *правой верхнеграничной функцией* и обозначать $y = b^+_{a_u}(x)$, если выполняются следующие пять условий: 1) $b^+_{a_u}(x) \in C^1([0, a_u])$; 2) $b^+_{a_u}(0) = 0$; 3) $b^{+\,\prime}_{a_u}(0) \ge 0$; 4) $b^+_{a_u}$ выпукла вниз на $[0, a_u]$, если $b^{+\,\prime}_{a_u}(0) = 0$; 5) график $b^+_{a_u}$ — *правая верхнеграничная кривая* $\gamma^+_{a_u} = \{x \in [0, a_u],\ y = b^+_{a_u}(x)\}$ — принадлежит множеству $\widehat{G}$.

Здесь символ $+$ подразумевает «правосторонний», b — «граничная функция», u — «верхний».

Отметим, что в условии 3) допускается случай, когда $b_{a_u}^{+}{}'(0) = +\infty$, а в условии 4) выпуклость понимается в нестрогом смысле, т. е. допускаются тождества $b_{a_u}^{+}(x) \equiv 0$ на $[0, a_u]$ или $b_{a_l}^{+}(x) \equiv 0$ на $[0, a_l]$.

Аналогично вводятся *правая нижнеграничная функция* $y = b_{a_l}^{+}(x)$ и *правая нижнеграничная кривая* $\gamma_{a_l}^{+}$ (l — «нижний»), только в условии 3) будем предполагать, что $b_{a_l}^{+}{}'(0) \le 0$, а в условии 4) — $b_{a_l}^{+}(x)$ выпукла вверх.

В результате $\gamma_{a_u}^{+}$ — гладкая кривая из $\widehat{G}$, параметризованная функцией $b_{a_u}^{+}(x)$. Она начинается в точке O и расположена в первой четверти, а кривая $\gamma_{a_l}^{+}$, начинаясь там же, расположена в четвертой четверти.

Непосредственно из определения вытекает, что для любой правой верхнеграничной функции $b_{a_u^*}^{+}(x)$ функция $b_{a_u}^{+}(x)$, являющаяся ее сужением на произвольный отрезок $[0, a_u]$ с $a_u < a_u^*$, остается правой верхнеграничной. Для $b_{a_l^*}^{+}(x)$ — все аналогично.

Положим $\tau_u = b_{a_u}^{+}{}'(0)/2$, $\tau_l = -b_{a_l}^{+}{}'(0)/2$, и, не уменьшая общности, будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{array}{l} b_{a_u}^{+}(a_u) \le a_u \ \text{ при } \ \tau_u = 0, \ \ \forall\, x \in [0, a_u]\colon \ b_{a_u}^{+}{}'(x) \ge \tau_u \ \text{ при } \ \tau_u > 0; \\ -b_{a_l}^{+}(a_u) \le a_l \ \text{ при } \ \tau_l = 0, \ \ \forall\, x \in [0, a_l]\colon \ b_{a_l}^{+}{}'(x) \le \tau_l \ \text{ при } \ \tau_l > 0. \end{array} \tag{3^+}$$

Для всякого $c > 0$ рассмотрим правую c-окрестность точки O:

$$N_c^{+} = \{(x, y)\colon\ x \in (0, c],\ |y| \le c\}.$$

Отметим сразу, что неравенство $b_{a_u}^{+}(a_u) \le a_u$ или $-b_{a_l}^{+}(a_l) \le a_l$ из (3^+) при всех $c \le a_u$ или $c \le a_l$ гарантирует пересечение кривой $\gamma_{a_u}^{+}$ или $\gamma_{a_l}^{+}$ с боковой, а не с верхней или нижней стороной прямоугольника N_c^{+}.

Введем три типа множеств, которые определяются правыми верхнеграничными и нижнеграничными кривыми.

1. Для любой правой верхнеграничной кривой $\gamma_{a_u^*}^{+}$, параметризуемой функцией $b_{a_u^*}^{+}(x)$, для которой выполняется условие (3_u^+), положим $c_u^* = \max\{a_u^*, b_{a_u^*}^{+}(a_u^*)\}$. Тогда

$$\forall\, c\ (0 < c \le c_u^*) \quad \exists\, a_u\ (0 < a_u \le a_u^*)\colon \quad \max\{a_u, b_{a_u}^{+}(a_u)\} = c,$$

где функция $b_{a_u}^{+}(x)$ — это сужение $b_{a_u^*}^{+}(x)$. Таким образом, точка $(a_u, b_{a_u}^{+}(a_u))$ — это правый конец верхнеграничной кривой $\gamma_{a_u}^{+}$. Он расположен на верхней стороне прямоугольника N_c^{+}, если $c = b_{a_u}^{+}(a_u) \ge a_u$, и на боковой, если $b_{a_u}^{+}(a_u) \le a_u = c$.

Теперь для всякого c $(0 < c \le c_u^*)$ введем множество

$$U_c^{+} = \{(x, y)\colon\ x \in (0, a_u],\ -c \le y \le b_{a_u}^{+}(x);\ x \in (a_u, c],\ |y| \le c\}$$

— это прямоугольник N_c^{+}, из которого «вырезан» надграфик кривой $\gamma_{a_u}^{+}$.

2. Для любой правой нижнеграничной кривой $\gamma_{a_l^*}^{+}$, параметризуемой функцией $b_{a_l^*}^{+}(x)$, для которой выполняется условие (3_l^+), положим $c_l^* = \max\{a_l^*, -b_{a_l^*}^{+}(a_l^*)\}$. Тогда

$$\forall\, c\ (0 < c \le c_l^*) \quad \exists\, a_l\ (0 < a_l \le a_l^*)\colon \quad \max\{a_l, -b_{a_l}^{+}(a_l)\} = c,$$

где функция $b^+_{a_l}(x)$ — это сужение $b^+_{a_l^*}(x)$. Таким образом, точка $(a_l, b^+_{a_l}(a_l))$ — это правый конец кривой $\gamma^+_{a_l}$. Он расположен на нижней стороне прямоугольника N^+_c, если $c = -b^+_{a_l}(a_l) \geq a_l$, и на боковой, если $-b^+_{a_l}(a_l) \leq a_l = c$.

Теперь для всякого c $(0 < c \leq c_l^*)$ введем множество

$$O^+_c = \{(x,y)\colon\ x \in (0, a_l],\ b^+_{a_l}(x) \leq y \leq c;\ x \in (a_l, c],\ |y| \leq c\}$$

— это прямоугольник N^+_c, из которого «вырезан» подграфик кривой $\gamma^+_{a_l}$.

3. Для любых правой верхнеграничной кривой $\gamma^+_{a_u^*}$, правой нижнеграничной кривой $\gamma^+_{a_l^*}$ и всякого c $(0 < c \leq c_b^*)$, где $c_b^* = \min\{c_u^*, c_l^*\}$, а константы c_u^*, c_l^* определены выше, введем множество

$$B^+_c = U^+_c \cap O^+_c$$

— это N^+_c, из которого «вырезаны» надграфик кривой $\gamma^+_{a_u}$ и подграфик кривой $\gamma^+_{a_l}$.

Здесь U подразумевает «под», O — «над», B — «между».

Определение 6. Будем говорить, что для уравнения (2) реализуется:
случай $U^+]$, если $\exists\, c_u$ $(0 < c_u \leq c_u^*)$: $U^+_{c_u} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a_u} \backslash \mathrm{O}$;
случай $O^+]$, если $\exists\, c_l$ $(0 < c_l \leq c_l^*)$: $O^+_{c_l} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a_l} \backslash \mathrm{O}$;
случай $B^+]$, если $\exists\, c_b$ $(0 < c_b \leq c_b^*)$: $B^+_{c_b} \cap \widehat{G} = (\gamma^+_{a_u} \cup \gamma^+_{a_l}) \backslash \mathrm{O}$.

В дальнейшем в обозначениях множества X^+_c и случая $X^+]$ буква X будет подразумевать любую из букв U, O или B.

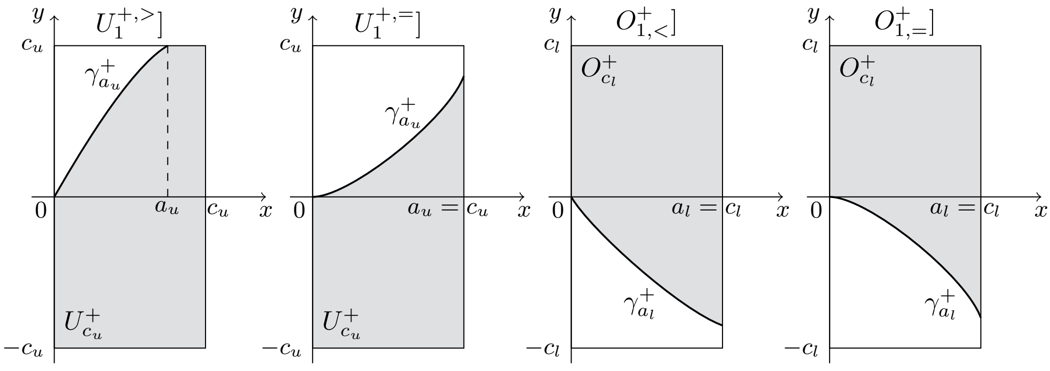
В случае $X^+]$ для множества $X^+_{c_*}$ либо $X^+_{c_*} \cap G \neq \emptyset$, что равносильно тому, что $X^+_{c_*}$ без входящих в него граничных кривых лежит в G, либо $X^+_{c_*} \cap G = \emptyset$.

Здесь символ $*$ — это соответствующая X буква u, l или b.

В связи с этим случай $X^+]$ в зависимости от расположения множества $X^+_{c_*}$ относительно области G распадается на два случая, которые будем обозначать $X^+_1]$ или $X^+_2]$. При этом дополнительный индекс $>$, $=$ или $<$ при его наличии в обозначении любого из шести возникших случаев будет уточнять знак производной соответствующей верхнеграничной или (и) нижнеграничной функции в нуле.

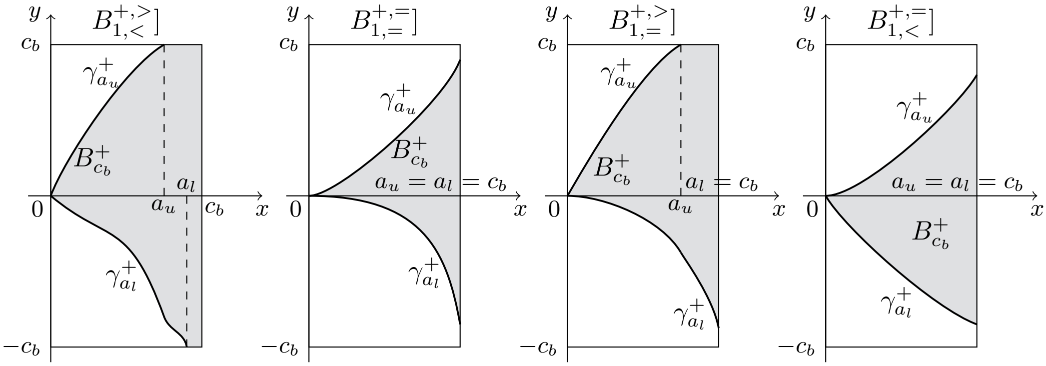
Дадим строгое описание возникающих случаев, сопроводив все разновидности случаев $X^+_1]$ поясняющими рисунками:

$U^+_1] : (U^+_{c_u} \backslash \gamma^+_{a_u}) \subset G,$ 2 подслучая: $U^{+,>}_1] :\ {b^+_{a_u}}'(0) > 0,\quad U^{+,=}_1] :\ {b^+_{a_u}}'(0) = 0;$
$U^+_2] : U^+_{c_u} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же;
$O^+_1] : (O^+_{c_l} \backslash \gamma^+_{a_l}) \subset G,$ 2 подслучая: $O^+_{1,<}] :\ {b^+_{a_l}}'(0) < 0,\quad O^+_{1,=}] :\ {b^+_{a_l}}'(0) = 0;$
$O^+_2] : O^+_{c_l} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же;



$B_1^+]$: $(B_{c_b}^+ \setminus (\gamma_{a_u}^+ \cup \gamma_{a_l}^+)) \subset G$, 4 подслучая: $B_{1,<}^{+,>}]$: ${b_{a_u}^+}'(0) > 0$, ${b_{a_l}^+}'(0) < 0$, $B_{1,=}^{+,=}]$: ${b_{a_u}^+}'(0) = 0$, ${b_{a_l}^+}'(0) = 0$, $B_{1,=}^{+,>}]$: ${b_{a_u}^+}'(0) > 0$, ${b_{a_l}^+}'(0) = 0$, $B_{1,<}^{+,=}]$: ${b_{a_u}^+}'(0) = 0$, ${b_{a_l}^+}'(0) < 0$;

$B_2^+]$: $B_{c_b}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же.



Замечание 3. В рассмотренных случаях правая c-окрестность N_c^+, конечно, может содержать более одной нижнеграничной и более одной верхнеграничной кривой. Однако наличие или отсутствие граничных кривых в прямоугольнике N_c^+ вне множества X_c^+ не влияет на существование решения граничной задачи Коши в случаях $X_1^+]$. В то же время в случае $U_2^{+,=}$ несомненный интерес представляют ситуации, когда в области G содержится как весь надграфик кривой $\gamma_{a_u}^+$, лежащий в $N_{c_u}^+$, так и множество, заключенное между $\gamma_{a_u}^+$ и еще одной правой верхнеграничной кривой, также касающейся оси абсцисс. К сожалению, в этих случаях используемый в работе метод не позволяет доказывать теорему о существовании граничного решения, а примеры, приведенные в разделе 5, показывают, что решение может как существовать, так и отсутствовать.

Замечание 4. При наличии в прямоугольнике N_c^+ единственной граничной кривой, лежащей на оси абсцисс, договоримся, что имеет место случай $U_1^{+,=}]$ с $b_{a_u}^+(x) \equiv 0$, а не случай $O_{2,=}^+]$ с $g_{a_l}^+(x) \equiv 0$. То же касается случаев $O_{1,=}^+]$ и $U_{2,=}^{+,=}]$.

3. Граничный треугольник и граничный отрезок Пеано. Построим теперь для точки $\mathrm{O} = (0,0) \in \widehat{G}$ во всех случаях $U_1^+]$, $O_1^+]$, $B_1^+]$ правый граничный треугольник T_b^+, во многом аналогичный треугольнику T^+ из определения отрезка Пеано, и по нему — правый граничный отрезок Пеано $P_{h^+}^+(O) = [0, h^+]$ $(h^+ > 0)$.

При построении будет использоваться непрерывность функции $f_0(x,y)$ в граничной точке O, где f_0 равна нулю, означающая, что

$$\forall\, \tau > 0 \ \exists\, \delta_\tau > 0\colon \forall\, (x,y) \in \overline{V}_{\delta_\tau} \cap \widetilde{G} \ \Rightarrow \ |f_0(x,y)| \le \tau; \ \overline{V}_{\delta_\tau} = \{(x,y)\colon |x| \le \delta_\tau,\ |y| \le \delta_\tau\}. \tag{4}$$

Отметим для начала, что в простейшем случае $N_1^+]$, при котором в правой полуплоскости в окрестности точки O отсутствуют граничные кривые, т. е. $\exists\, c > 0$: $N_c^+ \subset G$, стандартным образом (см. замечание 2) строятся правый треугольник и правый отрезок Пеано, на котором по теореме Пеано существует решение.

Перейдем к построениям в случаях $X_1^+]$, снабжая каждое поясняющим рисунком.

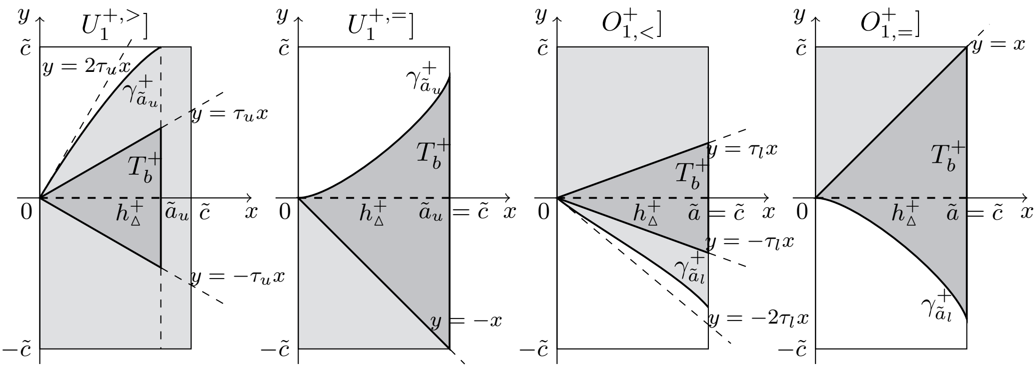
Случай $U_1^{+,>}]$. Пусть $\tilde{c} = \min\{c_u, \delta_{\tau_u}\}$, где τ_u введена в (3^+), а δ_{τ_u} определена в (4). Тогда множество $U_{\tilde{c}}^+ \backslash \gamma_{\tilde{a}_u}^+ \subset G$, $|f_0(x,y)| \le \tau$ при $(x,y) \in U_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{a}_u$.

Геометрически надо из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона, равными $\pm\tau$, до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \tilde{a}_u$. Высота h_Δ^+ полученного равнобедренного треугольника T_b^+ имеет длину $\tilde{a}_u$. При этом $T_b^+ \backslash O \subset U_{\tilde{c}}^+$ в силу выбора $\tilde{a}_u$, так как согласно (3_u^+) верно неравенство $b_{\tilde{a}_u}^+(x) \ge \tau_u x$ при $x \in [0, \tilde{a}_u]$.

Случай $U_1^{+,=}]$. Пусть $\tilde{c} = \min\{c_u, \delta_1\}$, где δ_1 из (4) с $\tau = 1$. Тогда $U_{\tilde{c}}^{+,\tilde{a}_u} \backslash \gamma_{\tilde{a}_u}^+ \subset G$, причем $\tilde{a}_u = \tilde{c}$, поскольку правый конец кривой $\gamma_{\tilde{a}_u}^+$ с учетом (3^+) заканчивается на боковой стороне прямоугольника $N_{\tilde{c}}^+$, $|f_0(x,y)| \le 1$ при $(x,y) \in U_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{c}$.

Геометрически надо из точки O провести отрезок в точку $(\tilde{c}, -\tilde{c})$. Тогда он вместе с кривой $\gamma_{\tilde{a}_u}^+$ и отрезком боковой стороны $N_{\tilde{c}}^+$ образует криволинейный треугольник T_b^+, высота которого h_Δ^+ имеет длину $\tilde{c}$. При этом $T_b^+ \backslash O \subset U_{\tilde{c}}^{+,\tilde{a}_u}$.

Случаи $O_{1,<}^+]$, $O_{1,=}^+]$ аналогичны случаям $U_1^{+,>}]$, $U_c^{+,=}]$, только на рисунке для случая $O_{1,<}^+]$ ради разнообразия кривая $\gamma_{\tilde{a}_l}^+$ пересекается не с нижней, а с боковой стороной прямоугольника $N_{\tilde{c}}^+$.



Случай $B_{1,<}^{+,>}]$. Пусть $\tilde{c} = \min\{c_b, \delta_{\tilde{\tau}}\}$, где $\tilde{\tau} = \min\{\tau_u, \tau_l\}$, константы τ_u и τ_l — из (3^+), а $\delta_{\tilde{\tau}}$ — из (4). Тогда $B_{\tilde{c}}^+ \backslash (\gamma_{\tilde{a}_u}^+ \cup \gamma_{\tilde{a}_l}^+) \subset G$, $|f_0(x,y)| \le \tilde{\tau}$ при $(x,y) \in B_{\tilde{c}}^+$ и $\underline{h^+ = \tilde{a}}$, где $\tilde{a} = \min\{\tilde{a}_u, \tilde{a}_l\}$.

Геометрически надо из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона $\pm\tilde{\tau}$ до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \tilde{a}$. Высота h_Δ^+ полученного равнобедренного треугольника T_b^+ имеет длину $\tilde{a}$. При этом $T_b^+ \backslash O \subset B_{\tilde{c}}^+$ в силу выбора $\tilde{a}$.

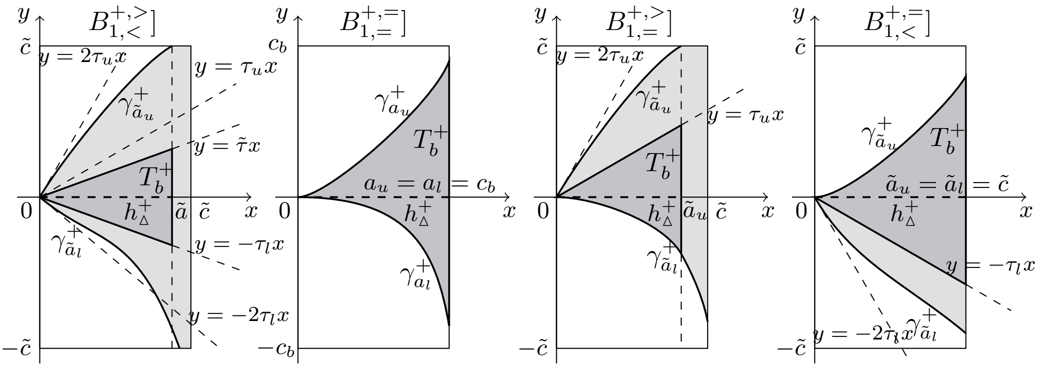
Случай $B_{1,=}^{+,=}]$. По определению $B_{c_b}^+$ и условию (3^+) правые концы кривых $\gamma_{a_u}^+, \gamma_{a_l}^+$ лежат на боковой стороне прямоугольника N_c^+, поэтому $a_u = a_l = c_b$, $B_{c_b}^+ \backslash (\gamma_{a_u}^+ \cup \gamma_{a_l}^+) \subset G$ и $h^+ = c_b$.

Геометрически само множество $B_{c_u}^+$ образует криволинейный треугольник T_b^+, высота h_Δ^+ которого имеет длину c_b.

Случай $B_{1,=}^{+,>}]$. Пусть $\tilde{c} = \min\{c_b, \delta_{\tau_u}\}$, где константа τ_u определена в (3^+), а δ_{τ_u} — в (4). Тогда $B_{\tilde{c}}^+ \backslash (\gamma_{\tilde{a}_u}^+ \cup \gamma_{\tilde{a}_l}^+) \subset G$, $|f_0(x,y)| \le \tau_u$ при $(x,y) \in B_{\tilde{c}}^+$ и $\underline{h^+ = \tilde{a}_u}$.

Геометрически надо из точки O провести луч с тангенсом угла наклона, равным τ_u, до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \tilde{a}_u$. Третьей стороной криволинейного треугольника T_b^+ является кривая $\gamma_{\tilde{a}_l}^+$ с $\tilde{a}_l = \tilde{a}_u$. Высота h_Δ^+ треугольника имеет длину $\tilde{a}_u$. При этом $T_b^+ \backslash O \subset B_{\tilde{c}}^+$ в силу выбора $\tilde{a}_u$.

Случай $B_{1,<}^{+,=}]$ аналогичен случаю $B_{1,=}^{+,>}]$.



4. Теоремы о наличии или отсутствии решений граничной задачи Коши. В случаях $U_1^{+,=}]$, $O_{1,=}^+]$, $B_{1,=}^{+,=}]$, $B_{1,=}^{+,>}]$, $B_{1,<}^{+,=}]$ во всех точках правых граничных кривых $\gamma_{a_u}^+$ и $\gamma_{a_l}^+$ введем ограничения на правую часть уравнения (2):

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in(0,a_u]:\quad f_0(x,b_{a_u}^+(x))\le {b_{a_u}^+}'(x),\ \text{ если } {b_{a_u}^+}'(0)=0;\\ &\forall\, x\in(0,a_l]:\quad f_0(x,b_{a_l}^+(x))\ge {b_{a_l}^+}'(x),\ \text{ если } {b_{a_l}^+}'(0)=0, \end{aligned} \qquad (5^+)$$

означающие, что в любой точке кривых $\gamma_{a_u}^+$ и $\gamma_{a_l}^+$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (2) направлен внутрь области G или по ее границе.

Теорема 1 (о существовании решения граничной задачи Коши). *Пусть в уравнении* (2) *функция* $f_0(x,y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\widetilde G$, *тогда в каждом из случаев* $U_1^{+,>}]$, $O_{1,<}^+]$, $B_{1,<}^{+,>}]$ *и в каждом из случаев* $U_1^{+,=}]$, $O_{1,=}^+]$, $B_{1,=}^{+,=}]$, $B_{1,=}^{+,>}]$, $B_{1,<}^{+,=}]$ *при условиях* (5^+) *на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными* $0,0$.

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $B_{1,=}^{+,>}]$.

Согласно описанию этого случая, данному в разделе 2, правая верхнеграничная функция $b_{a_u}^+(x)$, параметризующая кривую $\gamma_{a_u}^+$ с $a_u\le c$, такова, что ${b_{a_u}^+}'(0)=2\tau_u>0$, и согласно (3_u^+) ${b_{a_u}^+}'(x)\ge\tau_u$ для любого $x\in(0,a_u]$. А у правой нижнеграничной кривой $\gamma_{a_l}^+$ константа $a_l=c$ в силу (3_l^+). Кроме того, множество $B_c^+\backslash(\gamma_{a_u}^+\cup\gamma_{a_l}^+)\subset G$.

Далее, по τ_u согласно (4) найдем такую константу δ_{τ_u}, что $|f_0(x,y)|\le\tau_u$ в любой точке δ_{τ_u}-окрестности начала координат, принадлежащей $\widetilde G$.

Положим $\tilde c=\min\{c_b,\delta_{\tau_u}\}$ и введем в рассмотрение множество $B_{\tilde c}^+$, описанное в разделе 2. На нем для функции $|f_0|$ справедлива та же оценка и $\tilde a_l=\tilde c\ge\tilde a_u$ в силу условия (3_l^+).

Следуя рассуждениям, проведенным для случая $B_{1,=}^{+,>}]$ в разделе 3, построим криволинейный треугольник T_b^+, лежащий в $B_{\tilde c}^+$. Длина h^+ его высоты равна $\tilde a_u$.

Поскольку отрезок оси абсцисс $[0,h^+]$ лежит в $\widetilde G$ и является отрезком поля направлений в точке $\mathrm{O}\in\widehat G$, из точки O вправо можно начать строить ломаную Эйлера с произвольным рангом дробления. Ломаная Эйлера не может покинуть T_b^+ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y=\tau_u x$, так как в любой ее точке $|f_0(x,y)|\le\tau$. Аналогично при попадании ломаной Эйлера при $x=x_*>0$ на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой $\gamma_{a_l}^+$, по условию (5_l^+) $f_0(x_*,b_{a_l}^+(x_*))\ge {b_{a_l}^+}'(x_*)$, а значит, при $x>x_*$ следующий отрезок ломаной будет либо лежать на $\gamma^+_{a_l}$, либо внутри треугольника в силу выпуклости вверх $\gamma^+_{a_l}$. Поэтому ломаная Эйлера с произвольно выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$.

Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы Пеано.

Такие же рассуждения можно провести для остальных семи случаев. $\square$

Рассмотрим теперь случаи $U_2^{+,>}]$, $O^+_{2,<}]$, $B^{+,>}_{2,<}]$ и случай $N_2^+]$: $\exists\, c > 0$: $G \cap N^+_c = \emptyset$, характеризуемые тем, что в них отсутствуют граничные кривые, которые в начале координат имеют горизонтальную касательную.

Теорема 2 (об отсутствии решения граничной задачи Коши в правой полуплоскости). *В каждом из случаев* $U_2^{+,>}]$, $O^+_{2,<}]$, $B^{+,>}_{2,<}]$, $N_2^+]$ *граничная задача Коши уравнения* (2) *с начальными данными* $0, 0$ *не имеет решения в правой полуплоскости.*

Доказательство. В каждом из приведенных в условии теоремы случаев построим правый граничный треугольник T^+_b, как это сделано в разделе 3, при этом $T^+_b \cup G = \emptyset$.

Предположим, что на некотором отрезке $[0, d]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (2) с н. д. $0, 0$, т. е. $\varphi(0) = 0$.

Учитывая, что $\varphi'(0) = f_0(0, \varphi(0)) = 0$, найдется такое число a $(0 < a \le d)$, что $|\varphi'(x)| < \tau$ для любого $x \in (0, a]$ или $|\varphi(x)| < \tau x$. Но по определению решения точки $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$, следовательно, $|\varphi(x)| \ge \tau x$ при $x \in (0, a]$ — противоречие. $\square$

Замечание 5. Аналоги теорем 1 и 2 можно сформулировать и доказать для левой полуплоскости, только сначала надо на промежутках вида $[-d, 0\rangle$ аналогично правосторонним ввести левосторонние объекты $b^-_{a_l}$, $\gamma^-_{a_l}$, U^-_c, $U^-_1]$ и т. д., сформулировать условия (3^-) и (5^-), для точки $\mathrm{O} \in \widehat{G}$ во всех случаях $X^-_1]$ построить треугольник T^-_b и левый отрезок Пеано $P^-_{h^-}(O) = [-h^-, 0]$ $(h^- > 0)$. В частности, условие (5^-_l) для левой нижнеграничной функции $b^-_{a_l}(x)$ с ${b^-_{a_l}}'(0) = 0$ будет означать, что $f_0(x, b^-_{a_l}(x)) \le {b^+_{a_l}}'(x)$ для всякого $x \in [-a_l, 0)$.

Следствие. *Граничная задачи Коши уравнения* (2) *с начальными данными* $0, 0$ *не имеет решения, если в левой полуплоскости имеет место один из случаев* $N_2^-]$, $U_2^{-,>}]$, $O^-_{2,<}]$, $B^{-,>}_{2,<}]$, *а в правой — один из случаев* $N_2^+]$, $U_2^{+,>}]$, $O^+_{2,<}]$, $B^{+,>}_{2,<}]$.

5. Контрпримеры. Покажем сначала, что, если в теореме 1 условия $(5^{\pm})$ не выполняются, то решение граничной задачи Коши может как существовать, так и отсутствовать.

Пример 1. Рассмотрим следующее уравнение вида (2):

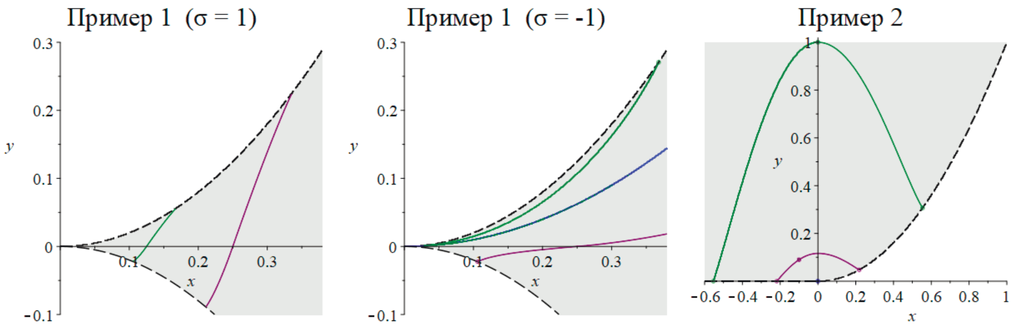
$$y' = 4\sigma\sqrt{2x^2 - |y|} + 6x \quad (\sigma = \pm 1), \tag{6}$$

область определения функции $f_0(x, y)$ которого $\widetilde{G} = \{(x, y):\ x \ge 0,\ |y| \le 2x^2\}$, а $\widehat{G} = \{x \ge 0,\ |y| = 2x^2\}$. Здесь для любого $c > 0$ граничная задача Коши с н. д. $0, 0$ относится к случаю $B^{+,=}_{1,=}]$ с $b^+_{a_l}(x) = -2x^2$, $b^+_{a_u}(x) = 2x^2$. При этом условие (5^+_u) не выполняется, так как $f_0(x_*, b^+_{a_u}(x_*)) = 6x_* > {b^+_{a_u}}'(x_*) = 4x_*$ для любого $x_* > 0$.

Общий интеграл уравнения (6) имеет вид

$$\begin{array}{ll} x(1 + \sigma\sqrt{2 - y/x^2})e^{1/(1+\sigma\sqrt{2-y/x^2})} = C^>_\sigma & \text{при}\ \ y \ge 0, \\ x^{\zeta_1/\zeta_2+1}(\zeta_1 + \sqrt{2 + y/x^2})^{\zeta_1/\zeta_2}(\zeta_2 - \sqrt{2 + y/x^2}) = C^<_\sigma & \text{при}\ \ y \le 0, \end{array}$$

где $\zeta_{1,2} = \sqrt{6} \mp \sigma$, причем $C^<_\sigma > 0$, так как в противном случае $y \ge 5 + 2\sigma\sqrt{6} > 0$.



Очевидно, что при $\sigma = 1$ граничная задача Коши уравнения (6) с н. д. $0, 0$ не имеет решения, а при $\sigma = -1$ континуум решений с конечным максимальным интервалом существования и одно — с бесконечным ($y = x^2$).

Замечание 7. Приведенные на этих и последующих рисунках интегральные кривые построены при помощи пакета программ Maple после интегрирования в явном виде соответствующих уравнений.

Пример 2. Рассмотрим следующее уравнение вида (2):

$$y' = \{-4x(\sqrt{y}+1) \ \ (x \le 0), \ -2x(2\sqrt{y-x^2}+1) \ \ (x \ge 0)\}, \tag{7}$$

область определения функции $f_0(x, y)$ которого $\widetilde{G} = \{(x, y): \ y \ge 0$ при $x \le 0, \ y \ge x^2$ при $x \ge 0\}$, а $\widehat{G} = \{y = 0 \ (x \le 0), \ y = x^2 \ (x \ge 0)\}$. Здесь при $x \le 0$ для любого $c > 0$ реализуется случай $O^-_{1,=}]$, в котором $b^-_{a_l}(x) \equiv 0$ (см. замечание 5) и область G заполняет всю вторую четверть, но условие (5^-_l) (см. замечание 4) не выполняется, так как $f_0(x_*, b^-_{a_l}(x_*)) = -4x_* > 0$. А при $x \ge 0$ имеет место случай $U^{+,=}_2]$ с $b^+_{a_u}(x) = x^2$, не рассматриваемый в теоремах.

Общий интеграл уравнения (7) имеет вид

$$(\sqrt{y}+1)e^{-\sqrt{y}-x^2} = C \ \ (x \le 0), \quad (\sqrt{y-x^2}+1)e^{-\sqrt{y-x^2}-x^2} = C \ \ (x \ge 0).$$

Очевидно, что граничная задача Коши уравнения (7) с н. д. $0, 0$ не имеет решения.

Перейдем теперь непосредственно к случаям $X^{\pm}_2]$, когда при малых $c > 0$ промежуток оси абсцисс $(0, c]$ или (и) $[-c, 0)$ не принадлежит области G.

Покажем, что в случаях, не вошедших в теорему 2, а значит, имеющих хотя бы одну граничную функцию с нулевой производной в нуле, решение граничной задачи Коши может как существовать, так и отсутствовать.

Пример 3. Рассмотрим следующие три уравнения вида (2):

$$y' = 4x\sqrt{y-2x^2}, \quad y' = 6\sqrt{y-2x^2}, \quad y' = 2\sqrt{y-2x^2}+4x, \tag{8}$$

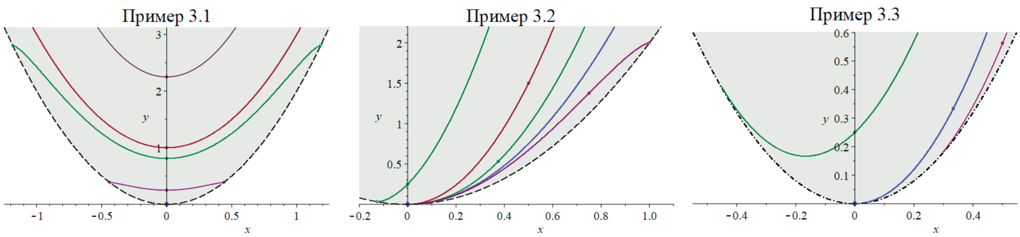
область определения которых $\widetilde{G} = \{(x, y): \ x \in \mathbb{R}^1, \ y \ge 2x^2\}$, а $\widehat{G} = \{x \in \mathbb{R}^1, \ y = 2x^2\}$.

Граничная задача Коши с н. д. $0, 0$ в уравнениях (8) для любого $c > 0$ относится к случаям с $b^+_{a_u}(x) = b^-_{a_u}(x) = 2x^2$, причем в правой полуплоскости выполняется условие (5^+_u), т. е. в любой точке правой верхнеграничной кривой $y = 2x^2$ правый полуотрезок поля направлений расположен вне области G. В левой полуплоскости выполняется условие (5_u^-) и ситуация аналогична.

Общие интегралы уравнений (8_1), (8_2) и общее решение уравнения (8_3) имеют вид

$$(\sqrt{y-2x^2}-1)e^{\sqrt{y-2x^2}-x^2}=C;$$
$$(\sqrt{y-2x^2}-2x)^2(\sqrt{y-2x^2}-x)^{-1}=C, \quad y=3x^2 \ (x\geq 0);$$
$$y=3(x-C/3)^2+2C^2/3 \ \ (x\geq C), \quad y=2x^2 \ \ (x\in\mathbb{R}^1)\text{ — граничное решение.}$$

Очевидно, что в уравнении (8_1) решение поставленной задачи Коши отсутствует как в левой, так и в правой полуплоскостях, уравнение (8_2) имеет в правой полуплоскости континуум смешанных решений поставленной задачи Коши как с конечными, так и с бесконечными максимальными интервалами существования, а уравнение (8_3) имеет одно граничное решение и континуум смешанных решений, ответвляющихся от него в правой полуплоскости.



6. Заключение. Из работы видно, что метод ломаных Эйлера нельзя применить в случаях $U_2^{\pm,=}]$, $O_2^{\pm,=}]$, $B_2^{\pm,=}]$, а также в обобщениях этих случаев, когда область G лежит между двумя верхнеграничными или двумя нижнеграничными кривыми, одна из которых касается оси абсцисс в точке O, поскольку для метода ломаных существенным является и требование определенной выпуклости граничных кривых.

Кроме того, представляют интерес причины существования или отсутствия решения граничной задачи Коши при невыполнении условий $(5^\pm)$ на границе в случаях $X_1^\pm]$. Для этого, вероятно, следует выделить определенные свойства функции $f_0(x,y)$ в самой области G в малой окрестности точки O.

Решению поставленных вопросов будут посвящены дальнейшие исследования авторов.

Литература

1. *Бибиков Ю. Н., Плисс В. А.* Зависимость максимального интервала существования решения дифференциального уравнения от начальных данных // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59). Вып. 4. С. 511–516.

2. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1958.

3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1959.

4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.

5. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

6. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.

7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила в редакцию 11 ноября 2019 г.;
после доработки 9 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 12 декабря 2019 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru
Ильин Юрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; iljin_y_a@mail.ru

On the existence of a solution of the boundary initial-value problem*

V. V. Basov, Yu. A. Iljin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Iljin Yu. A. On the existence of a solution of the boundary initial-value problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 2, pp. 277–288. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.210 (In Russian)

An initial-value problem for an ordinary differential equation of the first order, is considered. It is supposed that the right-hand side of the equation is a continuous function defined on a set consisting of an open set and a part of its bound. Sufficient conditions of the existence and of non-existence of a solution through initial point belonging to the boundary part of the set of definition, are presented.

Keywords: initial-value boundary problem, existence of a solution, Peano segment.

References

1. Bibikov Yu. N., Pliss V. A., "On the Dependence of Initial Values of the Maximal Interval of Existence of a Solution of a Differential Equation", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **47**(4), 141–144 (2014).

2. Coddington E. A., Levinson N., *Theory of ordinary differential equations* (McGrow-Hill Book Company, inc., New York, Toronto, London, 1955).

3. Stepanov V. V., *Course of differential equations* (GITTL Publ., Moscow, 1959). (In Russian)

4. Pontryagin L. S., *Ordinary differential equations* (Nauka Publ., Moscow, 1965). (In Russian)

5. Petrovsky I. G. *Lectures on the theory of ordinary differential equations* (Nauka Publ., Moscow, 1970). (In Russian)

6. Bibikov Yu. N., *Course of ordinary differential equations* (Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1991). (In Russian)

7. Hartman Ph., *Ordinary differential equations* (John Willey and Sons, New York, London, Sydney, 1964).

Received: November 11, 2019
Revised: December 9, 2019
Accepted: December 12, 2019

Authors' information:

Vladimir V. Basov — vlvlbasov@rambler.ru
Yuriy A. Iljin — iljin_y_a@mail.ru

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant N 19-01-00388).