Итоговый отчет по гранту РФФИ мол\_а № 18-31-00169

«Исследование модификаций теории гравитации на основе альтернативного выбора независимых переменных»

Руководитель: Шейкин Антон Андреевич

**Реферат**

Рассматривались возможные модификации теории гравитации на основе альтернативного выбора независимых переменных. В рамках теории вложения Редже-Тейтельбойма (обобщения ОТО, содержащего дополнительные решения), а также ее модификации (теория разбиения) изучалась проблема определения энергии и импульса гравитационного поля. Получена связь между разными определениями тензора энергии-импульса для лагранжианов с высшими производными (например, лагранжианов указанных теорий). Получена новая форма теории вложения, эквивалентная ОТО с дополнительными полями, интерпретируемыми как сохраняющиеся токи некоторой материи, что облегчает анализ «лишних решений» и их интерпретацию с точки зрения поисков темной материи. Процедура, использованная при построении этой формы теории вложения, оказалась связанной с процедурой Полякова, используемой в теории струн, и процедурой, используемой в миметической гравитации.

Построены также новые явные глобальные вложения физически интересных метрик: черной дыры BTZ, черной дыры Шварцшильда-анти-де Ситтера в произвольном числе измерений, а также коллапсирующего пылевого шара.

Изучалась также теория гравитации с кручением. Для обобщенного действия Гильберта-Палатини с несимметричной связностью изучалась возможность расширения группы его калибровочной симметрии на неабелев случай. Полученная теория воспроизводит уравнения Эйнштейна-Максвелла-Дирака с вейлевским спинором, в которых роль электромагнитного потенциала играют определенные компоненты связности.

**Введение**

*Мотивация.* Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна с момента своего появления зарекомендовала себя как одна из самых математически элегантных физических теорий. Будучи основана на сравнительно малом числе простых геометрических постулатов, эта теория объясняет при помощи них крайне широкий круг явлений, в числе которых и недавно обнаруженное явление гравитационного излучения в двойных системах.

Однако эта простота и естественность заканчивается там, где начинается процедура квантования самого гравитационного поля, описываемого в терминах метрики пространства-времени. Такая процедура, как отмечают многие исследователи, сопряжена со значительными техническими и идеологическими сложностями [Carlip, 2001]. Поэтому проблема квантования гравитации, безусловно, являющаяся одной из самых важных открытых проблем теоретической физики, главным образом изучалась с двух позиций: либо гравитационное поле пытались описать в теоретико-полевом, а не геометрическом аспекте (как это, например, делал Р. Фейнман в своих "Лекциях по гравитации"), либо для геометрического описания гравитации подбирались другие переменные. Целью данного проекта является изучение различных аспектов геометрического описания гравитации в терминах альтернативных переменных. Теоретико-полевой трактовке, однако, также будет уделено внимание.

Пожалуй, самой известной альтернативой метрического подхода является т.н. реперный формализм, в котором основным объектом изучения становится не метрика, а ортогональный репер, в четырехмерном пространстве называемый также тетрадой. На классическом уровне такая замена переменных не влечет за собой изменения динамики, однако расширяет возможности теории: в частности, позволяет корректно описывать спинорные поля. На квантовом же уровне реперный формализм также позволяет достичь определенных успехов: развитие одного из вариантов этого формализма, а именно переменных Аштекара, привел к созданию петлевой квантовой теории гравитации. Мы исследуем возможности совмещения реперного подхода к гравитации с описанными ниже.

Как было отмечено достаточно давно [Л.Д.Фаддеев, В.Н.Попов, 1973], некоторого прогресса на пути решения проблемы квантования гравитации можно добиться, перейдя к формализму Гильберта-Палатини, т.е. считая связность и метрику независимыми переменными. Такая замена позволяет, в частности, построить теорию возмущений в терминах континуального интеграла. Кроме того, формализм Гильберта-Палатини открывает некоторые дополнительные возможности и на классическом уровне. Так, известно, что различные варианты этого формализма применялись в первой половине XX века для геометризации электромагнитного взаимодействия. В данном проекте также будут исследоваться аспекты подобного применения.

Существуют, однако, и менее известные, хотя и отнюдь не менее плодотворные варианты альтернативного геометрического описания псевдоримановых пространств путем перехода к новым независимым переменным. К ним относится предложенная Т. Редже и К. Тейтельбоймом теория гравитации, в которой искривленное пространство-время рассматривается как поверхность, изометрически вложенная в плоское объемлющее пространство-время большего числа измерений. Вместо метрики искривленного пространства в роли динамической переменной в этом случае выступает функция вложения данной поверхности. Плоский фон, естественно появляющийся при таком подходе, может облегчить квантование теории. Еще одной отличительной особенностью теории является то, что замена переменных, приводящая к ней от ОТО, содержит дифференцирование, за счет чего структура уравнений Эйлера-Лагранжа теории меняется, а вместе с ним и класс их решений. Стоит отметить, что идея замены переменных с дифференцированием, изменяющей динамику теории, получила в последнее время широкое распространение в связи с попытками описания темной материи [A.Chamseddine, V.Mukhanov, 2014] в рамках возникающей теории. В данном проекте изучались свойства "лишних" решений теории вложения (решений уравнений теории вложения, не являющихся решениями уравнений Эйнштейна) с целью описания на их основе эффектов, соответствующих наличию темной материи.

Подобная переформулировка теории в терминах изометрических вложений также открывает дорогу для теоретико-полевой интерпретации гравитационного взаимодействия, упомянутой выше. Одним из вариантов подобной интерпретации является рассмотрение заданного в объемлющем пространстве набора скалярных полей, постоянные значения которых задают систему четырехмерных поверхностей, каждая из которых может считаться пространством-временем. Сформулированный таким способом вариант описания гравитации был предложен в работе [С.А.Пастон, 2011] под названием "теория разбиения". Особенности такой теории изучались в рамках настоящего проекта. В частности, аспектом описания гравитирующих систем, исследование которого затруднено необходимостью использования координат, являются законы сохранения. Изучались общие свойства различных определений тензора энергии-импульса в теориях поля с высшими производными.

Сам метод изометрического вложения псевдоримановых пространств находит себе применение и в рамках обычной ОТО. Он позволяет, к примеру, изучать геометрические свойства решений уравнений Эйнштейна, если известно явное выражение для функции вложения. В проекте проведен поиск новых и классификация уже существующих явных вложений для физически интересных метрик.

*Актуальность.* Модифицированные теории гравитации, различные варианты которых будут изучаться в рамках данного проекта, привлекают к себе неослабевающее внимание теоретиков в последние несколько десятилетий, особенно с появлением новых наблюдательных данных. В их числе данные о температуре реликтового фонового вселенной, полученные с космических телескопов (WMAP и Planck) и антарктического телескопа BICEP2. На основании этих данных можно судить о количестве темной материи во вселенной и пытаться объяснить это количество при помощи модификаций ОТО Эйнштейна. Изучение структуры решений уравнений Редже-Тейтельбойма с целью описания темной материи, таким образом, имеет высокую актуальность.

Также среди недавних экспериментальных достижений стоит отметить открытие гравитационных волн, порождаемых слиянием черных дыр. Поиск явных вложений метрики, соответствующей гравитационной волне, поэтому приобретает особую актуальность, так как, имея явное симметричное вложение гравитационной волны в ОТО Эйнштейна, можно рассмотреть возможные отклонения от эйнштейновской динамики, порождаемые уравнениями Редже-Тейтельбойма для функции вложения с такой симметрией, и сравнить полученные решения с экспериментальными наблюдениями, определив, таким образом, экспериментальные ограничения на поведение "лишних" решений в этом случае.

Задача квантования гравитации, как уже отмечалось выше, остается неразрешенной и по сей день, и попытки построения непротиворечивой квантовой теории гравитации не теряют своей актуальности. Особое внимание ученых, работающих в этой области, в настоящее время сосредоточено на изучении квантовых свойств черных дыр, и систематическое изучение геометрических и термодинамических свойств метрик черных дыр с позиций теории вложения, таким образом, лежит в основном русле исследований.

*Современное состояние дел.* Переход к описанию гравитации в альтернативных переменных на основе использования формализма Гильберта-Палатини с несимметричной связностью рассматривался в различных вариантах многими авторами, начиная с 20-х годов прошлого века. Однако только в 1978 году было замечено [Обухов, Кречет, Пономарев, «Кручение, сегментарная кривизна и структура пространства-времени», 1978]), что на этом пути, без каких-либо дополнительных изменений теории (например, таких, как введение неметричности) можно получить естественное объединение теорий гравитации и электромагнетизма, однако для включения материи приходилось делать не слишком естественные предположения. Сходные математические модели исследовались в работах ряда авторов: [Borschenius, 1975]; [Ferraris, Francaviglia, 1982], см. также [Horie, arXiv:hep-th/9601066] и список литературы в этой работе. Несмотря на свою простоту и естественность, формализм Гильберта-Палатини с несимметричной связностью остается недостаточно глубоко исследован, в частности, в вопросах описания материи в таком подходе, в отношении возможности аналогичного подхода с использованием реперных переменных и в отношении возможности расширения на случай нестандартной калибровочной группы. Соответствующие исследования будут проведены в рамках данного проекта.

Подход к гравитации в виде теории вложения, т.е. теории поверхности в плоском объемлющем пространстве, был впервые предложен Т. Редже и К. Тейтельбоймом в 1975 году. Такой подход сходен с теорией струн, которые тоже описываются как поверхности (только двумерные) в плоском пространстве. В теории вложения гравитация описывается как динамика трехмерного пространства, рассматриваемая аналогично динамике точечной частицы, которой соответствует мировая линия, и динамике струны, которой соответствует двумерная поверхность в плоском пространстве-времени. В качестве действия берется стандартное выражение Эйнштейна-Гильберта, выраженное в терминах альтернативной переменной - функции вложения. Соответствующие этому действию уравнения Эйлера-Лагранжа (уравнения Редже-Тейтельбойма) оказываются несколько более общими по отношению к уравнениям Эйнштейна, кроме решений уравнений Эйнштейна они содержат так называемые "лишние" решения. В рамках данного проекта будет продолжено начатое в работах [1] и предшествующих ей исследование таких решений, будет изучаться возможность интерпретации "лишних" решений как наличие темной материи, сходно с появившейся недавно идеей "mimetic dark matter" [A.Chamseddine, V.Mukhanov, 2014].

В последующие годы различные варианты теории вложения использовались для описания гравитации М. Павшичем (1985), В. Тапиа (1989), М. Майа (1989), И. Бандосом (1997) и другими авторами. В частности, исследовались различные подходы к каноническому описанию теории, дополнительной сложностью для развития которых является наличие высших производных по времени в исходном действии теории. Многие вопросы теории вложения, в том числе и ее квантование, а также возможные следствия для космологии, обсуждались в серии работ А. Дэвидсона с соавторами (1996-2005). В работе С. А. Пастона [С. А. Пастон, arXiv:1111.1104] была предложена теория разбиения – вариант теории вложения, в котором она имеет вид теории поля в объемлющем пространстве. Различные аспекты этой теории изучались в рамках настоящего проекта.

При исследовании теории вложения среди прочих возникает задача поиска явного вида вложений для физически интересных решений теории гравитации, например для решений Фридмана и метрик черных дыр. Эту проблему начали изучать еще задолго до появления теории вложения, рассматривая ее как математическую задачу, решение которой может помочь классифицировать римановы пространства и помочь исследовать их структуру. Для решений Фридмана явный вид вложений в плоское 5-мерное пространство был найден Робертсоном (1933), для метрики Шварцшильда вложения в плоское 6-мерное пространство были предложены Казнером (1921), Фронсдалом (1959) и др., однако до недавнего времени не существовало регулярного метода построения вложений. Такой метод был предложен в работе руководителя проекта [2] в 2012 году. Он был использован для нахождения всех вложений метрики Шварцшильда в 6-мерное пространство, два из которых оказались неизвестными ранее, а также для метрики Райсснера-Нордстрема заряженной черной дыры (в работе [5]), для которой ранее не было известно ни одного глобального (т.е. гладкого при всех значениях радиуса) вложения, и для метрики Шварцшильда-де-Ситтера [6]. Классификация вложений невращающихся черных дыр общего вида была проведена в [7].

Тем же методом исследовался вид явных вложений для метрики трехмерной черной дыры BTZ (Banados, Teitelboim, Zanelli), что может быть полезно при изучении соответствия между параметрами излучения Хокинга и излучения Унру в соответствии с идеями, предложенными в работе С. Дезера и О. Левина (1999).

*Ссылки.*

[1] S.A. Paston, A.A. Sheykin. From the Embedding Theory to General Relativity in a result of

inflation. International Journal of Modern Physics D. 2012. V. 21. N 5. P. 1250043 (19 pp),

arXiv:1106.5212, http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271812500435

[2] S.A. Paston, A.A. Sheykin. Embeddings for Schwarzschild metric: classification and new

results. Classical and Quantum Gravity. 2012. V. 29. P. 095022 (17 pp), arXiv:1202.1204,

http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/29/9/095022/meta

[3] С. А. Пастон, А.А. Шейкин. Вложения для решений уравнений Эйнштейна. Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 175. N 3, С. 430-442, arXiv:1306.4826,

http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11232-013-0067-4

[4] A. A. Sheykin, S. A. Paston. The approach to gravity as a theory of embedded surface.

Proceedings of II Russian-Spanish Congress Particle and Nuclear Physics at all Scales and

Cosmology, Saint Petersburg, October 1-4, 2013. AIP Conference Proceedings 1606, 400 (2014),

arXiv:1402.1121, http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4891157

[5] S. A. Paston, A. A. Sheykin. Global Embedding of the Reissner-Nordstrom Metric in the Flat

Ambient Space. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 10

(2014), 003 (10 pp), arXiv:1304.6550, http://www.emis.de/journals/SIGMA/2014/003/

[6] А. А. Шейкин, С. А. Пастон, “Классификация минимальных глобальных вложений для

невращающихся черных дыр”, ТМФ,185:1 (2015), 213–223, arXiv:1509.01529,

http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11232-015-0364-1

[7] A.A. Sheykin, D.A. Grad, S.A. Paston. Embeddings of the black holes in a flat space. Proceedings of Science, PoS(QFTHEP 2013)091, arXiV:1401.7820, https://pos.sissa.it/183/091/

**Основная часть отчета о НИР**

Целью проекта является изучение различных вариантов описания гравитации при помощи геометрических переменных.

В рамках поставленной цели будут решаться следующие задачи:

1. Изучение законов сохранения в теориях поля с высшими производными, в том числе теоретико-полевом варианте подхода Редже-Тейтельбойма (теория разбиения)

2. Поиск, классификация и анализ явных вложений физически интересных метрик с высокой симметрией, в том числе метрик черных дыр и гравитационных волн.

3. Анализ формализма Гильберта-Палатини с несимметричной связностью в реперном формализме с нестандартной калибровочной группой.

4. Анализ подхода Редже-Тейтельбойма в моделях с малым числом дополнительных измерений.

Методика: Для поиска явных вложений физически интересных решений уравнений Эйнштейна будет использоваться впервые предложенный в работе руководителя проекта [2] общий метод построения явных вложений для римановых пространств, обладающих достаточно высокой симметрией.

Уравнения Редже-Тейтельбойма, являющиеся аналогом уравнений Эйнштейна в теории вложения, ощутимо более сложны и хуже поддаются анализу в общем случае. Их изучение сильно упрощается при наличии достаточно высокой симметрии. Явные вложения, построенные с помощью вышеупомянутого метода, могут быть использованы для анализа динамики теории вложения.

*Результаты.* Изучалась проблема энергии и импульса в теориях гравитации, в том числе содержащих замену переменных с дифференцированием. Получена связь между разными определениями тензора энергии-импульса для широкого класса лагранжианов, в т.ч. с высшими производными. Подобная связь ранее изучалась в литературе только для теорий с производными не выше вторых. К указанному классу относятся в том числе и лагранжианы теорий гравитации, содержащих замены переменных с дифференцированием (теория вложения Редже-Тейтельбойма, теория разбиения, миметическая гравитация).

Построены также новые явные глобальные вложения физически интересных метрик: черной дыры BTZ, d-мерной черной дыры Шварцшильда-анти-де Ситтера в (d+3)-мерное пространство, а также коллапсирующего пылевого шара.

Изучалась также теория гравитации с кручением. Известно, что при обобщении формализма Гильберта-Палатини на случай несимметричной связности в действии полученной теории возникает дополнительная калибровочная симметрия. В настоящем проекте изучалась возможность расширения группы калибровочной симметрии аналога подобного действия в тетрадном формализме на неабелев случай. Полученная теория воспроизводит уравнения Эйнштейна-Максвелла-Дирака с вейлевским спинором. Стоит отметить, что полученный способ расширения калибровочной группы не приводит к нелинейным уравнениям для спинорного поля, в отличие от способов, описанных в литературе.

Получена новая формулировка теории вложения, при которой действие теории воспроизводит действие ОТО с дополнительными полями. При определенных приближениях эти токи могут быть интерпретированы как сохраняющиеся токи, соответствующие некоторой материи, что позволяет упростить анализ и интерпретацию решений уравнений Редже-Тейтельбойма с точки зрения поиска темной материи. В литературе подобная трансформация ранее проделывалась только для миметической гравитации, которую, как было показано, можно трактовать как вырожденный случай рассматриваемой теории. Обнаружена связь этой трансформации с процедурой Полякова, используемой в теории струн.

**Заключение**

 Явные вложения коллапсирующей черной дыры и черной дыры с отрицательной космологической постоянной, полученные в ходе исследований, являются новыми. До настоящего времени глобального вложения сферически симметричного коллапсирующего объекта, равно как и метрики Шварцшильда-анти-де Ситтера, в известной нам литературе описано не было.

Формулировка теории вложения в терминах ОТО с дополнительной материей тесно связана с аналогичными формулировками миметической гравитации и может рассматриваться как ее естественное обобщение. Несмотря на то, что метод записи миметической гравитации как ОТО с дополнительными полями был известен, связь между ним и методом Полякова в теории струн в литературе не обсуждалась.

В известной нам литературе описана только связь между разными определениями тензора энергии-импульса для лагранжианов с производными не выше вторых. Снятие ограничения на число производных является новым обобщением известных ранее результатов.

Способ расширения калибровочной группы, использованный для построения геометрического аналога действия Эйнштейна-Максвелла-Дирака, не приводит к нелинейным уравнениям для спинорного поля, в отличие от способов, описанных в литературе.

По результатам проекта было опубликовано 6 статей, все из которых включены в наукометрическую базу Scopus, 3 – в наукометрическую базу WoS. Участниками проекта было сделано 9 докладов на международных конференциях.

Вышеизложенное позволяет сделать вывод, что задачи, поставленные в проекте, были решены достаточно полно.