

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ГАЛАКТОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ ШАРОВЫХ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

© 2020 г. А. С. Цветков<sup>1\*</sup>, Ф. А. Амосов<sup>1\*\*</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 03.04.2020 г.

После доработки 06.06.2020 г.; принята к публикации 25.06.2020 г.

Аппарат сферических функций, как скалярных, так и векторных, уже давно применялся для анализа астрономических данных на сфере, например, в представлении систематических ошибок, в звездной кинематике. До сих пор сферические функции использовались исключительно в гелиоцентрических координатных системах: экваториальной или галактической. Для исследования кинематики всей Галактики (а не только околосолнечной окрестности) разумно перейти к галактоцентрической системе координат. Вторая версия каталога GAIA еще не позволяет проводить такой анализ для индивидуальных звезд из-за относительно невысокой точности параллаксов. Однако для шаровых звездных скоплений такое исследование представляется возможным, несмотря на их небольшое число. Хотя кинематика шаровых скоплений подробным образом изучалась во многих работах, мы хотим протестировать метод анализа галактоцентрических собственных движений и лучевых скоростей с помощью сферических функций на материале этого каталога.

*Ключевые слова:* GAIA, шаровые скопления, сферические функции, галактоцентрическая система, кинематика Галактики.

DOI: 10.31857/S0320010820080057

## ВВЕДЕНИЕ

Финальный каталог GAIA (Gaia Collaboration, 2016) с точными параллаксами всех объектов на галактических масштабах, который через несколько лет станет доступен астрономической обществу, позволит ставить задачи по исследованию кинематики всей Галактики, которые ранее были немислимы. К таким задачам можно отнести исследование кинематики разных областей Галактики, а не только околосолнечной окрестности, как это делалось до настоящего времени.

Использование сферических функций, как скалярных, так и векторных, для анализа кинематики звезд — хорошо зарекомендовавшая себя техника, которая применяется уже много лет. Использование сферических функций в астрометрии началось с работы (Броше, 1966). Применение аппарата векторных сферических функций для анализа собственных движений подробно описано в (Витязев, Цветков, 2013), а для лучевых скоростей —

в (Витязев и др., 2014). Применение этой техники в исследовании звезд околосолнечной окрестности практически всегда приносило дополнительную информацию по сравнению со стандартными моделями Оорта—Линдблада или Огородникова—Милна. Выявление внемоделных гармоник указывало на необычные кинематические явления.

В работах по звездной кинематике, как правило, используется гелиоцентрическая система координат (экваториальная или галактическая), в том числе и в кинематике шаровых звездных скоплений: (Коч, 2018), (Хельми и др., 2018). Этому есть разумное объяснение, связанное с наблюдательной селекцией, поскольку все звездные каталоги, за исключением самых последних PRMXL (Резер и др., 2010), UCAC4 (Захариас и др., 2013), XPM (Федоров и др., 2009, 2010), GAIA охватывают лишь ближайшие окрестности околосолнечного пространства.

На наш взгляд, использование сферических функций в гелиоцентрических координатных системах в некоторой степени исчерпало себя. Нам представляется перспективным переход к галактоцентрической системе координат. “Взгляд”

\* Электронный адрес: a.s.tsvetkov@inbox.ru

\*\* Электронный адрес: amosov.f@mail.ru

из центра Галактики, возможно, позволит увидеть незнакомые и неожиданные эффекты в собственных движениях и лучевых скоростях звезд. Возможно, что выявленные гармоники в них дадут стимул к построению новых моделей вращения Галактики и ее подсистем.

Следует сказать, что, к сожалению, версия каталога GAIA Data Release 2 (Gaia Collaboration, 2018) еще не позволяет исследовать кинематику звезд, находящихся на больших расстояниях (например, вблизи центра Галактики), прежде всего из-за низкой точности параллаксов. Но это будет возможно сделать после выхода следующего выпуска каталога.

В ожидании этого события мы предлагаем разработать и протестировать технику анализа галактоцентрических собственных движений и лучевых скоростей на материале небольшого каталога шаровых звездных скоплений, содержащего всего 150 записей (Васильев, 2019). Этот каталог почти полный и включает в себя шаровые скопления, находящиеся даже “по ту сторону” галактического центра. Каждая запись содержит экваториальные координаты центра скопления, а также его среднее собственное движение и лучевую скорость, полученные по целой группе звезд. Расстояние до скопления взято из (Харрис, 2010), а лучевая скорость — из (Баумгард и др., 2019). В результате статистических усреднений данных для индивидуальных звезд эти величины обладают хорошей степенью достоверности, что отражается крайне низкой приведенной среднеквадратичной ошибкой, которая намного ниже, чем у отдельных звезд на таких больших расстояниях.

Распределение шаровых звездных скоплений легко позволяет перейти к галактоцентрической системе координат, так как шаровые скопления образуют систему, более или менее симметричную относительно центра Галактики. Надо сказать, что в работах (Байкова, Бобылев, 2019), (Буданова и др., 2019) уже использовались прямоугольные и цилиндрические координаты, привязанные к центру Галактики.

Следует сказать, что анализу кинематики шаровых звездных скоплений по данным GAIA DR2 посвящено достаточно много работ. Например, определение собственных движения и пространственных орбит в уже упоминавшейся работе Баумгарда и др. (2019) с использованием 6-мерного фазового пространства. В работе (Бинни, Вонг, 2017) проведены построение гравитационного потенциала Галактики и моделирование орбит скоплений. Работа (Массари и др., 2019) посвящена происхождению самой системы шаровых скоплений в целом. Большое число статей затрагивает изучение кинематических характеристик и исследования орбит индивидуальных звездных скоплений, например,

(Бобылев, Байкова, 2017). Но наша задача, скорее, преследует не собственно результаты, а оттачивание техники метода, проверку его надежности, в перспективе — в применении к большим данным последующих релизов каталога GAIA.

Следует отметить, что небольшого числа скоплений, по сравнению со звездными каталогами, явно недостаточно для надежных статистических исследований, особенно с использованием сферических функций. Поэтому мы не надеемся получить значимые и неожиданные результаты. Однако можно вспомнить, что первые исследования поля скоростей звезд около Солнечной окрестности с использованием сферических гармоник были сделаны на каталоге всего 512 звезд (Фрике, 1967).

## ПЕРЕХОД К ГАЛАКТОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Полная процедура перехода от гелиоцентрических (сферических или прямоугольных) координат в галактоцентрические реализована в модуле `astropy` — библиотеке на языке Python (<https://docs.astropy.org>). В документации приведены полный алгоритм, расчетные формулы и используемые константы.

Алгоритм пересчета заключается в вычислении декартовых гелиоцентрических координат и прямоугольных компонент скорости движения Солнечной системы с учетом галактического вращения и пекулярного движения Солнца, затем эти координаты пересчитываются на другой центр, а из скоростей объектов вычитается полная скорость движения Солнца. Далее вычисляются сферические галактоцентрические координаты, а также собственные движения и лучевая скорость в новой системе.

Применение этого алгоритма позволило получить каталог шаровых звездных скоплений, содержащих прямоугольные и сферические галактоцентрические координаты, а также прямоугольные компоненты галактоцентрических скоростей скоплений и их сферические компоненты: собственные движения и лучевые скорости относительно центра Галактики. Каталог приведен в приложении (<https://cloud.mail.ru/public/RFRr/3kkbCxd7y>).

Численные значения параметров этого перехода приведены ниже.

Для пересчета координат шаровых звездных скоплений в галактоцентрическую систему были приняты следующие значения координат центра Галактики:

$$\alpha_C = 266.4051^\circ, \quad \delta_C = -28.93617^\circ. \quad (1)$$

Расстояние до центра Галактики

$$R_C = 8.122 \text{ кпк}. \quad (2)$$

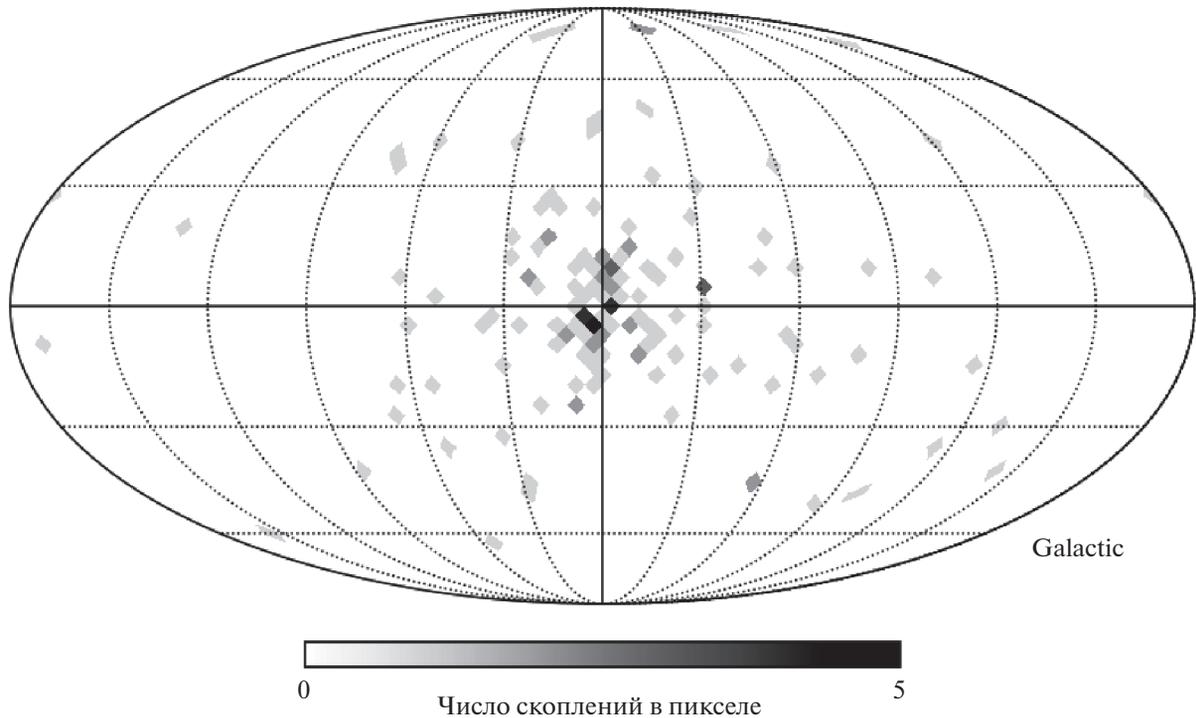


Рис. 1. Распределение шаровых звездных скоплений в гелиоцентрической галактической системе координат.

Эти параметры взяты из статьи научной группы GRAVITY collaboration (Абутер и др., 2018). Алгоритм также учитывает высоту Солнца над галактической плоскостью. Эта величина сейчас оценивается (Бенет, Бови, 2019) как

$$Z_{\odot} = 20.8 \text{ пк.} \quad (3)$$

Для вычисления галактоцентрической скорости необходимо учесть скорость Солнца относительно центра Галактики, которая складывается из пекулярной скорости и скорости вращения вокруг центра Галактики. Из комбинаций данных GRAVITY collaboration и (Рейд, Брунхалер, 2004), а также (Дриммель, Поджио, 2018) алгоритм использует следующие значения галактоцентрической скорости Солнца:

$$V_X = 12.9, \quad V_Y = 245.6, \quad V_Z = 7.78 \text{ км/с.} \quad (4)$$

Если из окрестности Солнца распределение шаровых звездных скоплений выглядит с концентрацией к галактическому центру (рис. 1), то распределение этих скоплений в галактоцентрической системе координат является значительно более равномерным (рис. 2). Следует отметить, что нулевое значение долготы на обоих рисунках расположено в центре, т.е. оси обеих систем параллельны друг другу. Таким образом, на рис. 2 направление на Солнце соответствует краям изображения (долгота  $180^\circ$ ).

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАЛАКТОЦЕНТРИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ И ЛУЧЕВЫХ СКОРОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Использование сферических функций, как скалярных, так и векторных для анализа кинематики звезд — хорошо известная техника, которая применяется уже давно. Сферические функции в астрометрии стали использоваться с 1966 г. (Броше, 1966). Применение аппарата векторных сферических функций для анализа собственных движений подробно описано в (Витязев, Цветков, 2013), а для лучевых скоростей — в (Витязев и др., 2014), поэтому мы не станем подробно приводить формулы для вычисления сферических функций, но для удобства ограничимся табл. 1, в которой приведена связь коэффициентов сферического разложения с параметрами линейной трехмерной кинематической модели. Традиционно мы раскладываем не сами собственные движения и лучевые скорости, а величины  $k\mu_l \cos b$ ,  $k\mu_b$  и  $V_r/r$  ( $k = 4.738$  — множитель перехода размерности от мсд/год в км/с/кпк) в галактоцентрической системе координат. В этом случае все коэффициенты разложения выражаются в одних и тех же единицах: км/с/кпк.

Движение объектов в линейной модели рассматривается как суперпозиция поступательного движения всей системы в целом, твердотельного

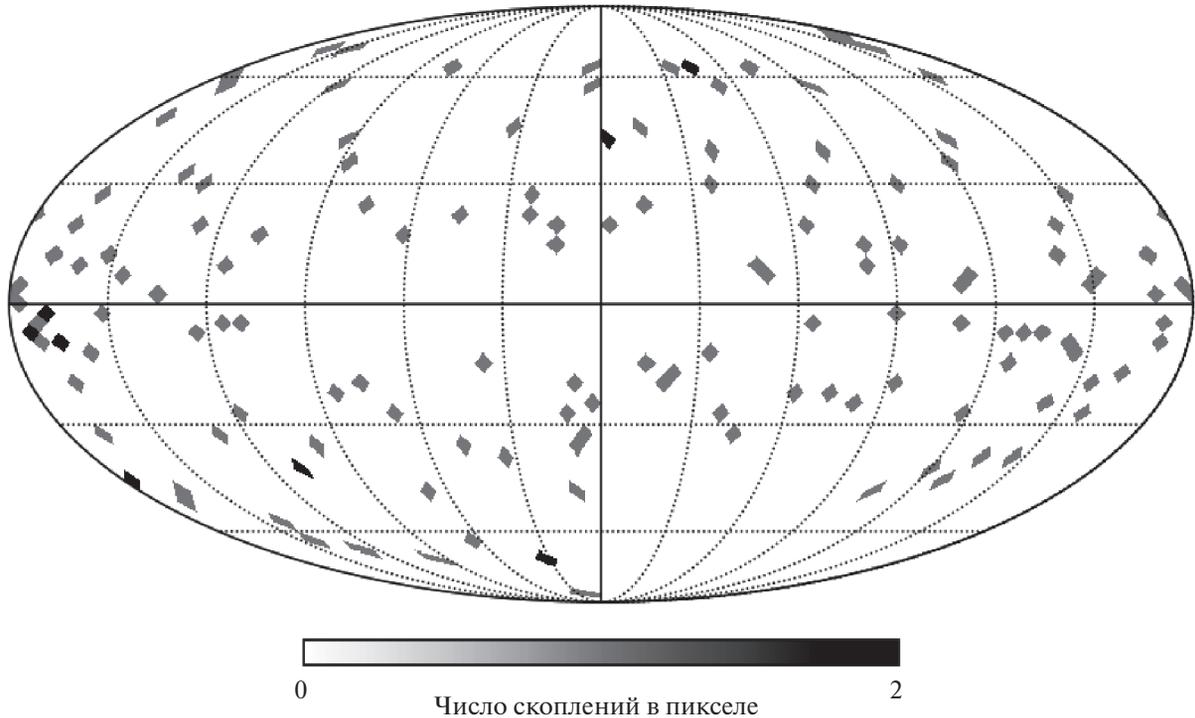


Рис. 2. Распределение шаровых звездных скоплений в галактоцентрической системе координат.

вращения и тензора деформации:

$$\mathbf{V}_* = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{M}^+ \times \mathbf{r}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{V}_*$  — скорость объекта,  $\mathbf{V}$  — поступательное движение системы,  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость твердотельного вращения всей системы в целом,  $\mathbf{M}^+$  — симметричный тензор деформации поля скоростей.

Эта модель имеет 12 параметров:

$U, V, W$  — компоненты вектора  $\mathbf{V}$  поступательного движения всей системы объектов относительно центра системы координат;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты вектора твердотельного вращения  $\boldsymbol{\Omega}$  всей системы в целом;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$  — параметры тензора деформации  $\mathbf{M}^+$ , описывающие сжатие-растяжение вдоль главных осей системы координат;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$  — параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в соответствующих плоскостях.

Результаты разложения галактоцентрических собственных движений  $k\mu \cos b$  и  $k\mu_b$  по векторным сферическим функциям и галактоцентрических лучевых скоростей  $V_r/r$  по скалярным сферическим функциям шаровых скоплений представлены в объединенной табл. 2. Они довольно неожиданные. Если при анализе собственных движений звезд окосолнечной окрестности наблюдается

богатый и интересный результат, то кинематика шаровых звездных скоплений как целой системы оказывается довольно бедной. Анализ табл. 2 показывает значительную случайную составляющую в собственных движениях, что отражается в больших среднеквадратичных ошибках, и низкой надежности значений коэффициентов. Очевидно, что это обстоятельство не является следствием наблюдательных ошибок, поскольку точности в случайном отношении, как собственных движений, так и лучевых скоростей, весьма высоки, а отражает стохастический характер движений шаровых скоплений. Формально в таблице нет ни одного коэффициента больше  $3\sigma$ . Самый большой коэффициент  $t_1$  превышает ошибку примерно в 2.5 раза. Сопоставляя табл. 2 и табл. 1, мы понимаем, что этот коэффициент отвечает за вращение всей системы шаровых звездных скоплений как единого целого вокруг оси  $Z$ . Угловая скорость вращения этой системы будет составлять

$$\omega_z = t_1 / (2.89 \cdot 4.738) = -2.88 \pm 1.2 \text{ мсд/год}, \quad (6)$$

что приводит к периоду вращения всей системы около  $450 \pm 180$  млн. лет. Направление вращения совпадает с общепринятым направлением вращения Галактики. К такому результату приходили и другие авторы (Цинн, 1985). Однако такое вращение может вызываться и дефектами при построении галактоцентрической системы координат из-за ошибок в оценке компоненты  $V_U$  в движении Солнца в формуле (4).

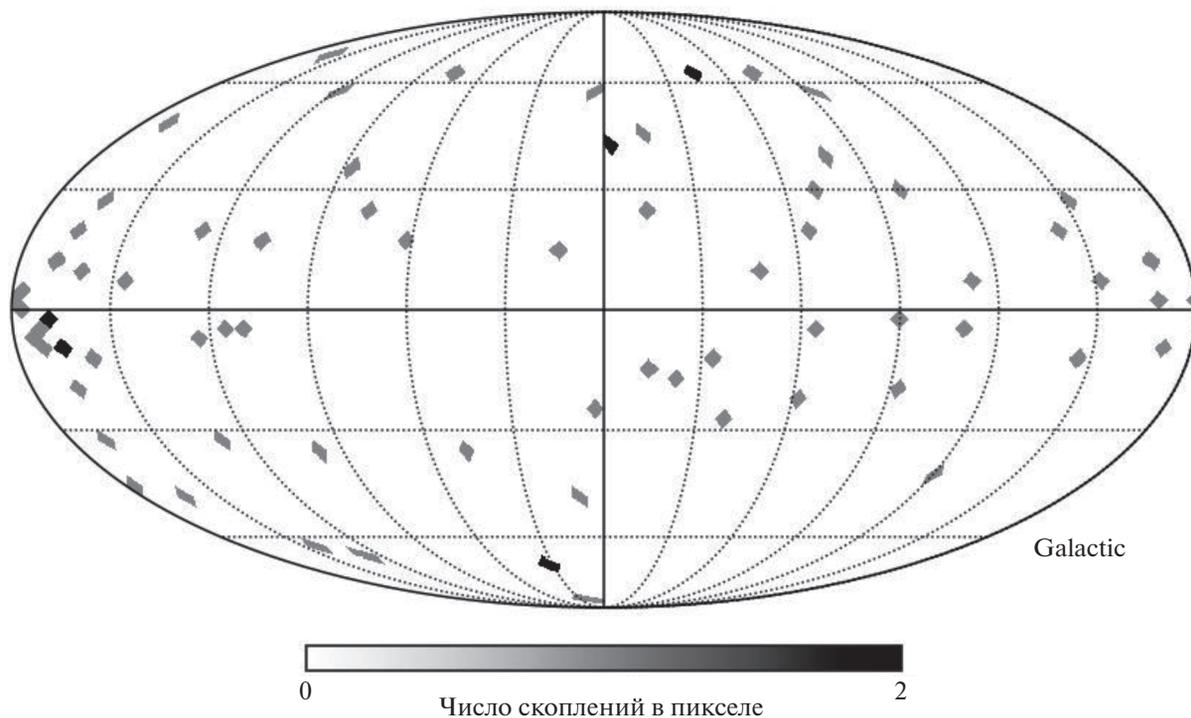
**Таблица 1.** Связь кинематических параметров линейной модели с коэффициентами векторного ( $t_i, s_i$ ) и скалярного ( $v_i$ ) сферического разложения собственных движений  $k\mu_l \cos b$  и  $k\mu_b$ , и лучевых скоростей  $V_r/r$

$i$	$t_i$	$s_i$	$v_i$
0	—	—	$1.18M_{11}^+ + 1.18M_{22}^+ + 1.18M_{33}^+$
1	$2.89\omega_3$	$2.89W/\langle r \rangle$	$2.05W/\langle r \rangle$
2	$2.89\omega_2$	$2.89V/\langle r \rangle$	$2.05V/\langle r \rangle$
3	$2.89\omega_1$	$2.89U/\langle r \rangle$	$2.05U/\langle r \rangle$
4		$-0.65M_{11}^+ - 0.65M_{22}^+ + 1.29M_{33}^+$	$-0.53M_{11}^+ - 0.53M_{22}^+ + 1.06M_{33}^+$
5		$2.24M_{23}^+$	$1.83M_{23}^+$
6		$2.24M_{13}^+$	$1.83M_{13}^+$
7		$2.24M_{12}^+$	$1.83M_{12}^+$
8		$1.12M_{11}^+ - 1.12M_{22}^+$	$0.92M_{11}^+ - 0.92M_{22}^+$

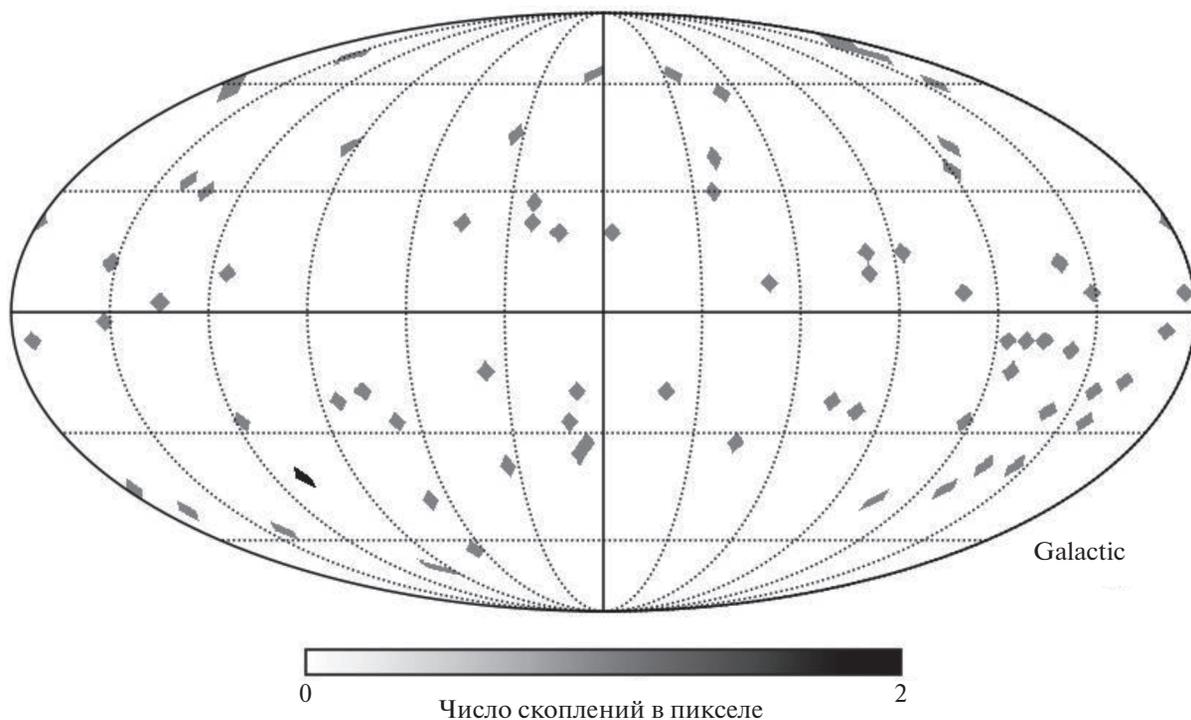
**Примечание.**  $\langle r \rangle$  — Среднее расстояние рассматриваемых объектов.

**Таблица 2.** Коэффициенты разложения и среднеквадратичные ошибки галактоцентрических собственных движений  $k\mu_l \cos b$  и  $k\mu_b$ , и лучевых скоростей  $V_r/r$  шаровых скоплений по векторным и скалярным сферическим функциям (км/с/кпк)

$N$	$t_i$	$\sigma$	$s_i$	$\sigma$	$v_i$	$\sigma$
0					-0.4	15.7
1	-39.4	16.5	1.6	16.5	-24.2	16.6
2	-12.2	16.7	17.6	16.7	29.2	16.1
3	12.0	18.0	28.5	18.0	-10.7	13.8
4	24.9	17.0	6.2	17.0	11.8	16.6
5	31.3	17.3	-7.7	17.3	15.8	16.5
6	20.3	17.7	4.3	17.7	15.5	14.2
7	-16.9	16.0	6.2	16.0	-6.9	15.4
8	1.9	16.8	-28.3	16.8	9.1	14.4
9	-6.8	18.1	-16.4	18.1	5.9	15.4
10	-21.3	16.9	26.7	16.9	6.3	18.1
11	13.3	16.6	27.2	16.6	-13.4	14.9
12	-22.3	16.7	11.4	16.7	3.4	15.5
13	-19.6	17.1	3.8	17.1	-2.3	14.2
14	-17.1	15.6	6.1	15.6	-2.2	14.4
15	-11.4	16.0	7.6	16.0	7.5	13.9



**Рис. 3.** Распределение по небесной сфере близких к центру галактики (0–5 кпк) шаровых звездных скоплений в галактоцентрической системе координат.



**Рис. 4.** Распределение по небесной сфере далеких от центра галактики (5–124 кпк) шаровых звездных скоплений в галактоцентрической системе координат.

**Таблица 3.** Коэффициенты разложения и среднеквадратичные ошибки галактоцентрических собственных движений  $k_{\mu} \cos b$  и  $k_{\mu b}$ , и лучевых скоростей  $V_r/r$  шаровых скоплений по векторным и скалярным сферическим функциям для близких ( $r < 5.1$  кпк) к центру Галактики объектов (км/с/кпк)

$N$	$t_i$	$\sigma$	$s_i$	$\sigma$	$v_i$	$\sigma$
0					15.0	34.9
1	-66.5	36.0	12.8	36.0	-49.5	35.0
2	7.2	36.2	34.8	36.2	59.5	36.1
3	20.7	37.3	24.3	37.3	-28.0	32.2
4	79.1	36.9	8.8	36.9	20.0	33.2
5	64.9	35.1	-22.3	35.1	12.4	38.4
6	60.2	36.2	21.1	36.2	32.5	29.9
7	-34.2	33.1	33.6	33.1	4.6	36.0
8	13.6	37.0	-51.3	37.0	8.1	28.7
9	-30.8	37.0	-25.0	37.0	15.5	31.4
10	-36.0	35.2	51.7	35.2	8.2	39.3
11	20.6	33.2	66.0	33.2	-42.9	31.0
12	-49.7	34.7	20.2	34.7	-24.2	38.8
13	-51.2	36.7	-10.1	36.7	9.7	29.3
14	-17.2	32.3	-20.4	32.3	-12.8	31.7
15	-31.9	34.2	-3.8	34.2	0.4	29.2

За неимением лучшего, можно обратить внимание на гармоники  $t_5$ ,  $s_3$ ,  $s_8$ , однако они уже немного меньше  $2\sigma$ , поэтому их значения также не надежны. Известный физический смысл имеет только гармоника  $s_3$ , которая отвечает за движение всей системы в целом в направлении оси  $X$ . Остальные гармоники не имеют связи с линейной кинематической моделью.

Для лучевых скоростей картина аналогичная. Очень высокие среднеквадратичные ошибки, и ни одного значимого даже на уровне  $2\sigma$  коэффициента.

Такая малая информативность, а также физические соображения привели нас стандартной идее разделить объекты, в данном случае по расстоянию от центра Галактики на “близкие” и “далекие”, несмотря на их предельно малое число. Каталог был разделен на две равные группы по 75 объектов. В первой группе — скопления с расстоянием менее 5.1 кпк от центра Галактики (точные данные от 480 до 5164 пк, медиана распределения — 2603 пк, среднее значение — 2800), во второй группе — более 5.1 кпк (соответственно от

5164 до 144 770 пк, медиана — 14 383 пк, среднее значение — 21 703 пк). Распределение по небесной сфере в галактоцентрической системы координат обеих групп представлено на рис. 3 и 4.

Результаты для “близкой” группы представлены в табл. 3. Мы видим, что близкие к центру Галактики скопления имеют значительные стохастические движения, ошибки определения коэффициентов весьма велики (отчасти это связано и меньшим числом объектов). Даже коэффициент  $t_1$  меньше  $2\sigma$ .

Совершенно иная картина наблюдается для собственных движений далеких скоплений (табл. 4). Абсолютно четко выделяется коэффициент  $t_1$  на уровне значимости уже  $3\sigma$ . Значения остальных коэффициентов  $t_i$  и  $s_i$  указывают на отсутствие других систематических движений. Следует обратить внимание и на низкие ошибки этих коэффициентов, что говорит об уменьшении случайных составляющих, отражающихся на собственных движениях. Для этой группы скоплений их вращение имеет период  $1170 \pm 50$  млн. лет.

**Таблица 4.** Коэффициенты разложения и среднеквадратичные ошибки галактоцентрических собственных движений  $k_{\mu} \cos b$  и  $k_{\mu b}$ , и лучевых скоростей  $V_r/r$  шаровых скоплений по векторным и скалярным сферическим функциям для далеких ( $r > 5.1$  кпк) от центра Галактики объектов (км/с/кпк)

$N$	$t_i$	$\sigma$	$s_i$	$\sigma$	$v_i$	$\sigma$
0					1.8	5.8
1	-15.2	4.8	6.3	4.8	-6.3	5.9
2	-3.3	4.9	4.2	4.9	-0.2	5.7
3	0.4	5.4	3.7	5.4	8.2	4.8
4	-0.2	4.8	1.3	4.8	2.3	6.5
5	-1.4	5.1	-0.4	5.1	10.9	5.7
6	-1.2	5.4	-3.4	5.4	0.4	5.0
7	-5.0	4.8	-3.2	4.8	-11.1	5.1
8	4.3	4.7	1.6	4.7	3.3	5.5
9	2.4	5.3	1.1	5.3	5.5	6.1
10	3.4	5.2	-3.3	5.2	-5.2	6.2
11	-5.6	5.1	0.6	5.1	7.7	5.4
12	6.5	5.0	0.7	5.0	7.7	4.9
13	-4.3	4.9	-7.1	4.9	-3.6	5.3
14	-7.8	4.6	-1.3	4.6	-5.8	5.3
15	3.1	4.7	5.7	4.7	7.6	5.0

В коэффициенты разложения по лучевым скоростям на уровень значимости по критерию  $2\sigma$  входит коэффициент  $v_7$ , отвечающий за деформацию поля скоростей в плоскости  $XU$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, мы можем сказать, что метод сферических функций, хоть и не нашел большого числа значимых гармоник, как это обычно бывает при анализе различных групп звезд, но тем не менее устойчиво показал наличие соосного с Галактикой вращения всей системы скоплений и отсутствие вращений относительно других осей. Особенно четко это наблюдается для далеких скоплений. Можно сказать, что, к нашему удивлению, практически не выявлено иных систематических движений, лишь под вопросом остается деформация в плоскости  $XU$ . Это может говорить о слабой причинной связанности всей системы скоплений. Наличие вращения всей системы в целом может быть вызвано и неинерциальностью галактоцентрической системы координат вследствие ошибок

в учете вращения Солнца вокруг центра Галактики. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Возвращаясь к постановке задачи, мы хотим подчеркнуть, что в данной работе описан метод, который будет использоваться для анализа больших данных. Этому и будет посвящена следующая статья.

Авторы выражают благодарности анонимным рецензентам за крайне полезные критические замечания, которые позволили переработать изначальный вариант статьи.

В этой работе использовались данные миссии Gaia Европейского космического агентства (ESA) (Gaia Collaboration et al., 2016), обработанные Консорциумом обработки и анализа данных Gaia (Gaia Collaboration et al., 2018). Финансирование для DPAC было предоставлено национальными учреждениями, в частности учреждениями, участвующими в Многостороннем соглашении по GAIA.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абутер и др. (R. Abuter, A. Amorim, N. Anugu, M. Baubock, M. Benisty, and J.P. Berger), *Astron. Astrophys.* **615**, id.L15 (2018).
2. Байкова, Бобылев (A. Bajkova and V. Bobylev), *MNRAS* 3474 (2019).
3. Баумгард и др. (Baumgardt et al.), *Cat. J. MNRAS* **482**, 5138 (2019).
4. Бенет, Бови (M. Bennett and Jo Vovy), *MNRAS* **482**, 1417 (2019).
5. Бобылев В.В., Байкова А.Т., *Астрон. журн.* **84**, 557 (2017).
6. Броше (P. Brosche), *Veroff. Astr. Rechen-Inst., Heidelberg №17* (1966).
7. Буданова и др. (N. Budanova, A. Bajkova, V. Bobylev, and V. Korchagin), *Astron. Rep.* **63**, 998 (2019).
8. Васильев (E. Vasiliev), *MNRAS* **484**, 2832 (2019).
9. Витязев, Цветков (V.V. Vityazev and A.S. Tsvetkov), *Astron. Nachr.* **334**, 760 (2013).
10. Витязев В.В., Цветков А.С., Трофимов Д.А., Письма в *Астрон. журн.* **40**, 783 (2014) [V.V. Vityazev, A.S. Tsvetkov, and D.A. Trofimov, *Astron. Lett.* **40**, 713 (2014)].
11. Дриммель, Поджио (R. Drimmel and E. Poggio), *Res. Not. Am. Astron. Soc.* 2, article id. 210 (2018).
12. Захариас и др. (N. Zacharias, C.T. Finch, T.M. Girard, A. Henden, J.L. Bartlett, D.G. Monet, and M.I. Zacharias), *Astron. J.* **145**, 44 (2013).
13. Коч и др. (A. Koch, M. Hanke, and N. Kacharov), *Astron. Astrophys.* **616**, A74 (2018).
14. Массари и др. (D. Massari, H.H. Koppelman, and A. Helmi), *Astron. Astrophys.* **630**, id.L4 (2019).
15. Рейд, Брунхалер (M.J. Reid and A. Brunthaler), *Astrophys. J.* **616**, 872 (2004).
16. Рёзер и др. (S. Roeser, M. Demleitner, and E. Schilbach), *Astron. J.* **139**, 2440 (2010).
17. Федоров и др. (P.N. Fedorov, A.A. Myznikov, and V.S. Akhmetov), *MNRAS* **393**, 133 (2009).
18. Федоров и др. (P.N. Fedorov, V.S. Akhmetov, V.V. Bobylev, and A.T. Bajkova), *MNRAS* **406**, 1734 (2010).
19. Фрике (W. Fricke), *Astron. J.* **72**, 1368 (1967).
20. Харрис (W. Harris), arXiv:1012.3224 [astro-ph.GA] (2010).
21. Хельми и др. (A. Helmi, F. van Leeuwen, P.J. McMillan, D. Massari, T. Antoja, A.C. Robin, L. Lindegren, U. Bastian, et al.), *Astron. Astrophys.* **616**, 12G (2018).
22. Цинн (R. Zinn), *Astrophys. J.* **293**, 424 (1985).
23. <https://docs.astropy.org/en/stable/coordinates/galactocentric.html>
24. Gaia Collaboration et al. (2016): Description of the Gaia mission.
25. Gaia Collaboration et al. (2018): Summary of the contents and survey properties.