Математические заметки

Том 108 выпуск 2 август 2020

УДК 517.983.27

Банахова решетка со свойством аппроксимации, не обладающая свойством ограниченной аппроксимации

О. И. Рейнов

Впервые пример банахова пространства со свойством аппроксимации, но без свойства ограниченной аппроксимации был получен Фигелем и Джонсоном в 1973 г. Мы приводим первый пример банаховой решетки со свойством аппроксимации, не обладающей свойством ограниченной аппроксимации. Как следствие, получается существование интегрального оператора (в смысле А. Гротендика) в банаховой решетке, который не является строго интегральным.

Библиография: 10 названий

Ключевые слова: банахова решетка, базис, свойство аппроксимации, свойство ограниченной аппроксимации.

DOI: https://doi.org/???

1. Введение. Первый пример банахова пространства без свойства аппроксимации Гротендика был построен еще в 1972 г. шведским математиком Энфло [1] (это была довольно сложная конструкция, и на самом деле Энфло привел пример рефлексивного пространства без свойства метрической аппроксимации; по одной из теорем Гротендика [2] в рефлексивных пространствах свойства аппроксимации и метрической аппроксимации равносильны). Сразу же после построения такого рода пространства (которое специалисты по анализу ждали около сорока лет) пример Энфло стал "обрабатываться" многими его коллегами из самых разных стран мира. Пожалуй, простейшие изложения примера пространства без аппроксимативного свойства можно найти в работе [3] и в книге [4]. Менее, чем через год уже был приведен пример, отвечающий на один из старейших вопросов Гротендика, – пример пространства без свойства ограниченной аппроксимации, но обладающего свойством аппроксимации [5]. Но еще до примера Энфло было ясно, что математический мир приближается к построению такого рода пространств: Линденштраусс [6] в предположении, что существует пространство без аппроксимативного свойства показал, что из этого вытекает существование пространства со свойством аппроксимации, но сопряженное к которому этим свойством не обладает (на одной из центральных теорем Линденштраусса, кстати, и была основана конструкция, предложенная Фигелем и Джонсоном в [5]).

В 1975 г. Шанковский (на конференции в Англии) привел первый пример банаховой решетки без свойства аппроксимации, а затем модифицировал его так [7], что получил пример сепарабельного функционального рефлексивного пространства (тем самым, рефлексивной банаховой решетки) без свойства аппроксимации. Пользуясь случаем, отметим, что Энфло, по существу, построил свои контрпримеры среди подпространств пространств ℓ_p при $p \in (2, +\infty]$, а Шанковский позднее дополнил их примерами подобного рода пространств среди подпространств в ℓ_p при $p \in [1, 2)$ (его конструкции совершенно не зависимы от построений Энфло и годятся для всех параметров $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$). Следствием этого стал факт (мы не приводим точной формулировки), что если банахово пространство "совсем не гильбертово", то в нем сидит подпространство без свойства аппроксимации.

Насколько мне известно, открытым остался и остается такой вопрос: верно ли, что если сопряженное к некоторому банахову пространству пространство обладает свойством аппроксимации, то оно обладает и свойством ограниченной аппроксимации? На этот вопрос нет ответа уже более сорока лет.

В этой заметке мы отвечаем на другой вопрос, касающийся условий аппроксимации различного вида, а именно, мы показываем (и техника доказательства отличается от развитой Фигелем и Джонсоном, но идея та же), что существует даже банахова решетка, обладающая свойством аппроксимации, но не удовлетворяющая условию ограниченной аппроксимации. Как следствие, получается существование интегрального оператора (в смысле Гротендика) в банаховой решетке, который не является строго интегральным (впервые наличие подобного рода операторов в банаховых пространствах было получено в работе [5]; там было установлено даже существование не строго интегрального оператора с ядерным сопряженным).

2. Предварительные сведения. Для банаховых пространств X и Y через $L(X, Y)$ обозначается банахово пространство всех линейных непрерывных отображений (операторов) из X в Y, снабженное обычной операторной нормой; X^* – сопряженное к X пространство. Значение функционала x', $x' \in X^*$, на элементе x пространства X обозначается через $\langle x', x\rangle$ или через $\langle x, x'\rangle$.

Семейство $\{f_i\}_{i\in I}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *безусловным базисом* в F, если $\{f_i\}_{i\in I}$ тотально в F и существует постоянная λ со следующими свойствами.

Условие (UB). *Для любых конечных семейств скаляров $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ таких, что $|\beta_i| \leqslant |\alpha_i|$ для всех $i \in I$, выполняется неравенство*

$$\Big\|\sum \beta_i f_i\Big\| \leqslant \lambda \Big\|\sum \alpha_i f_i\Big\|.$$

Безусловная базисная константа базиса $\{f_i\}_{i\in I}$ определяется как наименьшая постоянная λ, удовлетворяющая условию (UB); она обозначается через $u(\{f_i\})$. *Безусловная базисная константа* пространства F определяется как *инфинимум* констант $u(\{f_i\})$ по всевозможным безусловным базисам $\{f_i\}_{i\in I}$ пространства F. Ее обычно обозначают через $ub(F)$.[1] Напомним, что пространство F с безусловным базисом λ-изометрично некоторой банаховой решетке, где $\lambda = ub(F)$.

Банахово пространство Z *имеет l.u.st* (локально безусловную структуру, см. [8]), если существует постоянная λ со следующим свойством: для каждого конечномерного подпространства $E \subset Z$, существуют пространство F с безусловным базисом и

[1]Это определение имеет смысл как в вещественном, так и в комплексном случае, так же как и в случае конечномерного пространства. Известно, что для любого конечномерного пространства F выполнено $ub(F) \leqslant (\dim F)^{1/2}$

факторизация

$$j\colon E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} Z \tag{2.1}$$ {eq2.

естественного вложения $j\colon E \to Z$ через F такие, что $j = BA$ и $\|A\|\|B\|\, ub(F) \leqslant \lambda$. Наименьшее λ с этим свойством называется *l.u.st–константой* (локально безусловной постоянной) пространства Z и обозначается через $lu(Z)$.

Известно, что *банахово пространство Z имеет l.u.st тогда и только тогда, когда его второе сопряженное Z^{**} изоморфно дополняемому подпространству некоторой банаховой решетки*[2] (см. [9]); таким образом, каждая рефлексивная банахова решетка имеет локально безусловную структуру.

Отметим, что в факторизации (2.1) всегда можно считать, что один из операторов A или B имеет единичную норму. С другой стороны, так как $1 \leqslant \|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$ и $ub(F) \geqslant 1$, то

$$\|B\|\|A\| \leqslant \frac{\lambda}{ub(F)} \leqslant \lambda \qquad \text{и} \qquad 1 \leqslant ub(F) \leqslant \|B\|\|A\|\, ub(F) \leqslant \lambda.$$

Таким образом, мы можем предполагать (что и сделаем ниже при доказательстве теоремы 1), что $\|B\| = 1$, $\|A\| \leqslant \lambda$ и $ub(F) \leqslant \lambda$ (хотя это и грубые оценки, но для наших целей они достаточны).

Еще некоторые определения связаны с понятием условий аппроксимации для банаховых пространств.

Пространство E *обладает свойством аппроксимации*, если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ и для любых конечных подмножеств $H \subset E^*$, $G \subset E$, лежащих в единичных шарах соответствующих пространств, существует такой конечномерный оператор $R \in E \otimes E^*$, что при всех $e \in G$ и $e' \in H$ выполняется неравенство $|\langle e', e\rangle - \langle Re', e\rangle| < \varepsilon$. Эквивалентная переформулировка в терминах аппроксимации тождественного оператора в некоторой топологии: *банахово пространство обладает свойством аппроксимации*, если тождественный оператор на нем аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными операторами (детали и другие переформулировки этого определения можно найти непосредственно в первоисточнике [2]). Равносильность приведенных двух определений свойства аппроксимации устанавливается сравнительно нетрудно; доказательство этой эквивалентности есть у Гротендика [2]. Нам в этой заметке удобнее будет использовать первое из двух сформулированных определений.

Пусть фиксировано некоторое число $C \geqslant 1$. Говорят, что банахово пространство X *обладает свойством C-ограниченной аппроксимации* (в другой терминологии, свойством C-метрической аппроксимации), если тождественный оператор пространства X лежит в замыкании в топологии компактной сходимости шара радиуса C нормированного пространства всех линейных непрерывных операторов в X: для любого числа $\varepsilon > 0$ и для всякого компакта $K \subset X$ существует такой конечномерный оператор $R \in X^* \otimes X$, что

$$\|R\| \leqslant C \qquad \text{и} \qquad \sup_{x \in K} \|x - Rx\| < \varepsilon.$$

Пространство X *обладает свойством ограниченной аппроксимации*, если оно обладает свойством C-ограниченной аппроксимации для некоторого числа $C \geqslant 1$.

[2] *Банаховой решеткой* называется векторная решетка E, снабженная полной монотонной нормой: из того, что $|x| \leqslant |y|$ в E, следует выполнение неравенства $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Нам понадобятся также некоторые сведения из теории тензорных произведений. Обозначим через $X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$ проективное тензорное произведение банаховых пространств X и Y, т.е. пополнение алгебраического тензорного произведения $X^* \otimes Y$ (рассматриваемого также как линейное пространство всех конечномерных операторов из X в Y) по проективной норме

$$\|w\| := \inf\biggl\{\biggl(\sum_{k=1}^{N}\|x'_k\|\|y_k\|\biggr) : w = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes y_k\biggr\}$$

где инфимум берется по всевозможным конечным представлениям тензорного элемента $w \in X^* \otimes Y$ в виде

$$w = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes y_k$$

(см., например, [2]). Естественное отображение $X^* \otimes Y \to L(X,Y)$ продолжается по непрерывности до отображения $j\colon X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y \to L(X,Y)$. Образ пространства $X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$ при последнем отображении обозначается через $N(X,Y)$ и состоит из *ядерных* операторов. Норма на пространстве $N(X,Y)$ определяется естественным образом как норма факторпространства проективного тензорного произведения $X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} Y$. Отметим, что пространство X обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда каноническое отображение $X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} X \to N(X,X)$ взаимно однозначно (в этом случае мы можем писать $N(X,X) = X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} X$).

С понятием ядерного оператора тесно связано понятие интегрального оператора [2]. Говорят, что оператор $T\colon X \to Y$ является *интегральным*, если существуют такие компакт K, вероятностная мера Радона μ на K и операторы $A\colon X \to C(K)$ и $B\colon L_1(K,\mu) \to Y^{**}$, что $\pi_Y T = BiA$, где $\pi_Y\colon Y \to Y^{**}$ и $i\colon C(K) \to L_1(K,\mu)$ – естественные вложения. Если в этой факторизации оператор B может быть выбран так, что его значения лежат в Y (мы отождествляем Y и $\pi_Y(Y)$), то оператор T называется *строго интегральным*. Ясно, что каждый ядерный оператор является строго интегральным и всякий строго интегральный оператор является интегральным. Обратные импликации не верны (нетривиальный второй случай рассмотрен в работе [5]; см. также конец настоящей статьи).

Обозначим пространство всех интегральных операторов из X в Y через $I(X,Y)$. С нормой $i(T) := \inf\|A\|\,\|B\|$, где инфимум берется по всем указанным выше факторизациям оператора $\pi_Y T$, пространство $I(X,Y)$ является банаховым. Пространство $SI(X,Y)$ всех строго интегральных операторов из X в Y также является банаховым с соответствующей нормой. Отметим, что пространство X обладает свойством ограниченной аппроксимации тогда и только тогда, когда естественное отображение $X^* \mathbin{\widehat{\otimes}} X \to I(X,X)$ является изоморфным вложением (см. [2], [10]).

3. Основной результат.

Теорема 1. *Существует сепарабельная банахова решетка, обладающая свойством аппроксимации, но не обладающая свойством ограниченной аппроксимации.*

Доказательство. Пусть E – рефлексивная сепарабельная банахова решетка без свойства аппроксимации (см. [7]). Выберем в E возрастающую цепочку $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств, для которых объединение $\bigcup_n E_n$ плотно в E. Для каждого натурального n найдем конечномерное пространство F_n с K-безусловным базисом (константа K зависит *только от решетки* E) и два оператора $V_n\colon E_n \to F_n$ и $U_n\colon F_n \to E$, для которых суперпозиция U_nV_n представляет собой тождественное вложение подпространства E_n в банахову решетку E и выполняются неравенства $\|U_n\| \leqslant 1$, $\|V_n\| \leqslant K$. Рассмотрим сумму по типу ℓ_1 пространств F_n:

$$Y := \Big(\sum_n F_n\Big)_{\ell_1};$$

это пространство с K-безусловным базисом и, следовательно, банахова решетка. Далее, определим непрерывный оператор T из Y в E следующим образом: если $\{f_n\}_n \in Y = (\sum_n F_n)_{\ell_1}$, где для каждого n выполнено $f_n \in F_n$, то

$$T\{f_n\} := \sum_n U_n(f_n).$$

Важно отметить, что по выбору операторов U_n выполнена оценка $\|T\| \leqslant 1$.

Положим $X_0 := \bigcup_n E_n$ и рассмотрим нелинейные отображения $\widetilde{V}_n\colon X_0 \to Y$, $n = 1, 2, \dots,$

$$\widetilde{V}_n(e) := \begin{cases} (\underbrace{0, 0, \dots, 0, V_n e}_{n}, 0, \dots), & e \in E_n, \\ (0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots), & e \notin E_n \end{cases} \tag{3.1}$$

{eq3.

для $e \in X_0$.

Если выполнено $y' \in Y^*$, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X_0$ при помощи суперпозиции $y' \circ \widetilde{V}_n\colon X_0 \to Y \to \widehat{\mathbb{R}}$ мы можем определить элемент $(S_n(y'))(x) \in \widehat{\mathbb{R}}^{X_0}$, полагая $(S_n(y'))(x) := y'(\widetilde{V}_n(x))$. У нас возникают отображения $S_n\colon Y^* \to \widehat{\mathbb{R}}^{X_0}$, совокупность которых мы можем рассматривать как последовательность $\{S_n\}_n$ точек компакта $(\widehat{\mathbb{R}}^{X_0})^{Y^*}$. Пусть $\{S_{n_\alpha}\}_\alpha$ – сходящаяся в этом компакте подсеть и S – ее предел. Рассматривая S как отображение из Y^* в пространство $X_0^* = E^*$, мы получаем для любых $y' \in Y^*$ и $x \in X_0$:

$$\langle Sy', x\rangle = \lim_\alpha (S_{n_\alpha}(y'))(x) = \lim_\alpha \langle y', \widetilde{V}_{n_\alpha}(x)\rangle,$$

откуда

$$|\langle Sy', x\rangle| \leqslant K\|y'\|\|x\| \qquad \text{для всех} \quad x \in X_0, \quad y' \in Y^*.$$

Понятно, что отображение $\langle S\cdot, \cdot\rangle$ билинейно на $Y^* \times X_0$, и мы можем продолжить его с плотного множества на все пространство $Y^* \times E$ без увеличения нормы, которая не больше чем K.

На плотном же множестве X_0 мы имеем: для всех $e \in X_0$ и $e' \in E^* = X_0^*$

$$\langle ST^*e', e\rangle = \lim_\alpha (S_{n_\alpha}(T^*e'))(e) = \lim_\alpha \langle T^*e', \widetilde{V}_{n_\alpha}(e)\rangle = \lim_\alpha \langle e', T(\widetilde{V}_{n_\alpha}(e))\rangle = \langle e', e\rangle.$$

Таким образом, мы имеем следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} U_nV_n\colon & E_n \arrow[r, hook] & X_0 \arrow[r, "\widetilde{V}_n"] & Y \arrow[r, "T"] & E \\ & & E^* & Y^* \arrow[l, "S"'] & E^* \arrow[l, "T^*"'] & :\mathrm{id}_{E^*} \end{tikzcd}$$

где пространства Y, E и их сопряженные являются банаховыми решетками и оператор T действует "на".

Всюду ниже пусть $L := T^*(E^*)$. Это $*$-слабо замкнутое подпространство в Y^*.

Так как пространство E не обладает свойством аппроксимации, то выполнено следующее

Условие $(*)$. *Для всякого положительного $C > 0$ существует такое число $\varepsilon > 0$ и такие конечные подмножества $H \subset E^*$, $G \subset E$, лежащие в единичных шарах соответствующих пространств, что как только для некоторого конечномерного оператора $R \in E \otimes E^*$ при всех $e \in G$ и $e' \in H$ выполняется неравенство*

$$|\langle e', e\rangle - \langle Re', e\rangle| < \varepsilon,$$

так сразу обязательно $\|R\| \geqslant C$.

Зафиксируем произвольную постоянную $C > 1$ и выберем число $\varepsilon > 0$ и подмножества H и G в соответствии с условием $(*)$. Для произвольного $e \in G$ пусть y_e будет такой элемент из Y, что $T(y_e) = e$ и $\|y_e\| \leqslant 2$ (из определения оператора T ясно, что он переводит шар радиуса 2 пространства Y во множество, содержащее единичный шар пространства E). В частности, для $e \in G$ и $e' \in E^*$

$$\langle y_e, T^*e'\rangle = \langle T(y_e), e'\rangle = \langle e, e'\rangle = \langle e, ST^*e'\rangle, \qquad \text{или} \qquad y_e|_L = S^*e|_L.$$

Теперь, по нашим фиксированным числам C и ε мы выберем два таких числа A и $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\sqrt{A} \geqslant C > 1 \qquad \text{и} \qquad (2+K)A^{-1/2} + \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Определим, наконец, дуальную норму на Y^*, эквивалентную исходной:

$$|||y'|||_0 := \max\{\|y'\|, A\,\mathrm{dist}(y', L)\}.$$

Эта норма, в свою очередь, порождает эквивалентную исходной норму на пространстве Y, единичный шар которой пусть, к примеру, будет B. Теперь заключительный шаг в этих длительных рассуждениях: в качестве еще одного единичного шара (функционал Минковского которого мы обозначим через $|||\cdot|||$) мы возьмем замкнутую выпуклую солидную оболочку[3] $\mathrm{sol}(B)$ множества B.

Все три имеющиеся нормы на пространстве Y эквивалентны друг другу и, более того, пространство $(Y, |||\cdot|||)$ есть банахова решетка (решеточная структура просто наследуется из первоначального $(Y, \|\cdot\|)$). Очевидно, что если $y \in Y$, то $\|y\| \geqslant |||y|||_0 \geqslant |||y|||$, *причем все три нормы на Y^*, сопряженные к этим нормам, совпадают на подпространстве $L \subset Y^*$.* Наша ближайшая цель – показать, что банахова решетка $\widetilde{Y}_C := (Y, |||\cdot|||)$ не обладает свойством $\widetilde{C}$-ограниченной аппроксимации, если только $\widetilde{C} < C/K$ (напомним, что C – произвольная (но фиксированная выше), а K – абсолютная постоянные).

Итак, пусть $\Phi \in Y^* \otimes Y$ и $|||\Phi y_e - y_e||| < \varepsilon_1$ для всех $e \in G$. Мы хотим показать, что $|||\Phi||| \geqslant C/K$ (имеется в виду норма оператора Φ в пространстве $\widetilde{Y}_C$).

[3] *Со́лидная оболочка* множества $M \subset Y$ определяется так: $\mathrm{sol}(M) := \{y \in Y : \exists\, y_1 \in Y\ |y| \leqslant |y_1|\}$. Замкнутая выпуклая солидная оболочка множества M есть $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{sol}(M)$.

Возьмем произвольные $e' \in H$ и $e \in G$, и пусть $l \in L$ таково, что $\|l - \Phi^* T^* e'\| = \operatorname{dist}(\Phi^* T^* e', L)$. Вспоминая, что $|||T^* e'||| = \|T^* e'\| \leqslant \|T\| \|e'\| \leqslant 1$, $\|y_e\| \leqslant 2$ и $\|S\| \leqslant K$, мы последовательно получаем

$$
\begin{aligned}
|||\Phi^*||| &\geqslant \frac{|||\Phi^* T^* e'|||}{|||T^* e'|||} \geqslant \frac{A \operatorname{dist}(\Phi^* T^* e', L)}{\|T^* e'\|} \geqslant A \|l - \Phi^* T^* e'\| \\
&\geqslant \frac{A}{2+K} |\langle \Phi^* T^* e' - l, y_e - S^* e \rangle| = \frac{A}{2+K} |\langle \Phi^* T^* e', y_e - S^* e \rangle| \\
&= \frac{A}{2+K} |\langle T^* e', \Phi y_e \rangle - \langle \Phi^* T^* e', S^* e \rangle| \\
&\geqslant \frac{A}{2+K} (|\langle T^* e', y_e \rangle - \langle S \Phi^* T^* e', e \rangle| - |\langle T^* e', \Phi y_e - y_e \rangle|).
\end{aligned}
$$

Далее, так как $\langle T^* e', y_e \rangle = \langle T^* e', S^* e \rangle = \langle S T^* e', e \rangle = \langle e', e \rangle$ и

$$
|\langle T^* e', \Phi y_e - y_e \rangle| \leqslant |||T^* e'||| \, |||\Phi y_e - y_e||| \leqslant 1 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1,
$$

то мы можем продолжить цепочку наших неравенств следующим образом:

$$
|||\Phi^*||| \geqslant \frac{A}{2+K} |\langle e, e' \rangle - \langle S \Phi^* T^* e', e \rangle| - \frac{A}{2+K} \varepsilon_1.
$$

Обозначая через R конечномерный оператор $S \Phi^* T^* \in E \otimes E^*$, окончательно мы получаем

$$
|\langle e' - R e', e \rangle| \leqslant \frac{2+K}{A} |||\Phi^*||| + \varepsilon_1.
$$

Поскольку для любого $f' \in E^*$

$$
\begin{aligned}
\|R f'\| = \|S \Phi^* T^* f'\| &\leqslant K \|\Phi^* T^* f'\| \leqslant K |||\Phi^* (T^* f')||| \\
&\leqslant K |||\Phi^*||| \, |||T^* f'||| = K \|T^* f'\| \, |||\Phi^*||| \leqslant K |||\Phi^*||| \, \|f'\|,
\end{aligned}
$$

то $\|R\| \leqslant K |||\Phi^*|||$.

Теперь, если $|||\Phi^*||| < C$, то из условия $\sqrt{A} \geqslant C$ вытекает, что

$$
|\langle e' - R e', e \rangle| < \frac{2+K}{A} C + \varepsilon_1 \leqslant (2+K) A^{-1/2} + \varepsilon_1 < \varepsilon
$$

(вспомним выбор чисел A и ε_1). Поэтому, принимая во внимание условие $(*)$, мы приходим к неравенству $\|R\| \geqslant C$, что дает нам $|||\Phi^*||| \geqslant C/K$.

Оставшийся тривиальный случай, когда $|||\Phi^*||| \geqslant C$ (и, значит, $\geqslant C/K$) завершает доказательство того факта, что банахова решетка $\widetilde{Y}_C = (Y, |||\cdot|||)$, обладая свойством ограниченной аппроксимации (даже базисом), не обладает свойством $\widetilde{C}$-ограниченной аппроксимации ни при каком $\widetilde{C}$, меньшем, чем C/K.

Для окончания доказательства нашей теоремы теперь достаточно для каждого числа $C = n = 2, 3, \dots$, построить описанным выше способом соответствующую банахову решетку $\widetilde{Y}_n$ и положить $X := \{\sum_n \widetilde{Y}_n\}_{\ell_1}$. Эта банахова решетка (со своей естественной решеточной структурой) обладает свойством аппроксимации (таково каждое слагаемое в указанной сумме по типу ℓ_1), но, как нетрудно понять, не обладает свойством ограниченной аппроксимации.

4. Существование интегрального не строго интегрального оператора в банаховой решетке.

Теорема 2. *Существует интегральный оператор в сепарабельной банаховой решетке, не являющийся строго интегральным.*

Доказательство. Рассмотрим банахову решетку X, $X = \{\sum_n \widetilde{Y}_n\}_{\ell_1}$, из доказательства основной теоремы. Так как она обладает свойством аппроксимации, то $N(X, X) = X^* \widehat{\otimes} X$. Пространство Y из доказательства теоремы 1 есть ℓ_1-сумма конечномерных пространств и, следовательно, обладает свойством Радона–Никодима (см., [10]), так же как и все изоморфные ему пространства $\widetilde{Y}_n$. Напомним одну из эквивалентных формулировок свойства Радона–Никодима: банахово пространство обладает свойством Радона–Никодима в том и только том случае, когда каждый строго интегральный оператор со значениями в этом пространстве является ядерным (см., например, [10; с. 178]). Таким образом, пространство X как ℓ_1-сумма пространств со свойством Радона–Никодима также обладает этим свойством. Но X не обладает свойством ограниченной аппроксимации. Поэтому естественное отображение из $SI(X, X) = N(X, X) = X^* \widehat{\otimes} X$ в $I(X, X)$ не является изоморфным вложением, откуда и вытекает утверждение теоремы.

В связи с примером Фигеля–Джонсона [5] не ядерного оператора с ядерным сопряженным, возникает естественный вопрос: *Существует ли оператор в банаховой решетке, не являющийся ядерным, но сопряженный к которому – ядерный?*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] P. Enflo, “A counterexample to the approximation problem in Banach spaces”, *Acta Math.*, **130** (1973), 309–317.

[2] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1955.

[3] A. M. Davie, “The approximation problem for Banach spaces”, *Bull. London Math. Soc.*, **5** (1973), 261–266.

[4] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.

[5] T. Figiel, W. B. Johnson, “The approximation property does not imply the bounded approximation property”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41** (1973), 197–200.

[6] J. Lindenstrauss, “On James’ paper “Separable conjugate spaces””, *Israel J. Math.*, **9** (1971), 279–284.

[7] A. Szankowski, “A Banach lattice without the approximation property”, *Israel J. Math.*, **24** (1976), 329–337.

[8] Y. Gordon, D. R. Lewis, “Absolutely summing operators and local unconditional structures”, *Acta Math.*, **133** (1974), 27–48.

[9] T. Figiel, W. B. Johnson, L. Tzafriri, “On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces”, *J. Approximation Theory*, **13** (1975), 395–412.

[10] J. Diestel, J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.

О. И. Рейнов
Санкт–Петербургский государственный
университет, г. Санкт–Петербург
E-mail: orein51@mail.ru

Поступило
16.01.2020
Принято к публикации
18.03.2020