УДК 519.21

О СРЕДНЕМ ПЕРИМЕТРЕ ВПИСАННОГО СЛУЧАЙНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Я. Ю. Никитин[1,2], Т. А. Полевая[3]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

[2]НИУ ВШЭ, Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

[3]Университет ИТМО, 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, д.49.

E-mail: y.nikitin@spbu.ru, tanusha2406@gmail.com

Пусть на единичной окружности независимо друг от друга поставлено n случайных точек с равномерным распределением. Образуем выпуклый случайный n-угольник с вершинами в указанных точках. Какова его средняя площадь и средний периметр? Вопрос о средней площади был решен в [1], здесь вычисляется значение среднего периметра. Попутно обсуждается вопрос о скорости сходимости этого выражения к пределу. Найдена также средняя длина суммы квадратов длин случайного вписанного треугольника. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: случайный многоугольник, периметр, выпуклость, равномерное распределение.

1 Введение

Рассмотрим единичную окружность, на которой независимо друг от друга и равномерно распределены $n \geq 3$ случайных точек $X_1, \ldots, X_n$. Построим по этим точкам вписанный выпуклый n-угольник. Интересный вопрос состоит в том, чему равны средние значения метрических характеристик этого многоугольника, например, площади и периметра, и насколько они отличаются от соответствующих метрических характеристик правильных вписанных многоугольников, на которых, как известно, достигаются максимальные значения площади и периметра [2]. Интерес к случайным многоугольникам оживился в последнее время в связи с развитием теории так называемых U-max статистик [3], [4], [5].

Рассматриваемую задачу для средней площади A_n случайных n-угольников решил К. Браун в [1]. Он получил две похожие формулы для четных и нечетных n. Для нечетных $n = 2m + 1$ им доказано, что

$$\mathbb{E}A_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}\pi^{2m}}(-1)^m \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{(2\pi)^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{1}$$

[2] Работа Я. Ю.Никитина выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ–ННИО 6.65.37.2017, а работа Т.А. Полевой - при поддержке Правительства РФ, грант 08-08.

В такой форме сумму в правой части можно трактовать как частичную сумму разложения в ряд величины $\sin 2\pi$.

При четных $n = 2m+2$ формула Брауна принимает вид

$$\mathbb{E}A_{2m+2} = \frac{(2m+2)!}{2^{2m+2}\pi^{2m+1}}(-1)^m \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}, \tag{2}$$

здесь сумма в правой части является частичной суммой разложения в ряд величины $1-\cos 2\pi$.

Ясно, что выписанные выше выражения для $\mathbb{E}A_n$ стремятся к π, площади единичного круга. Интересуясь вопросом о скорости этой сходимости, К. Браун доказал, что при $n \to \infty$ среднее значение $\mathbb{E}A_n$ стремится к π в 6 раз медленнее, чем площадь $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ правильного вписанного $n-$угольника стремится к тому же пределу.

В данной работе мы найдем формулы для среднего значения *периметра* P_n выпуклого n-угольника, вершинами которого являются n случайно выбранных точек на единичной окружности с равномерным распределением. Мы покажем, кроме того, что скорость сходимости среднего значения периметра к длине окружности 2π также в 6 раз медленнее, чем скорость сходимости периметра $2n\sin\frac{\pi}{n}$ правильного вписанного n-угольника к этому же пределу. Сверх того, будет вычислено среднее значение суммы *квадратов* длин сторон случайного вписанного треугольника.

2 Формулы для средней длины периметра

Основной результат настоящей работы имеет следующий вид.

Теорема 1. *В указанных выше предположениях для нечетных $n = 2m+1$ справедливо соотношение*

$$\mathbb{E}P_{n+1} = 2\frac{(n+1)!}{\pi^n}(-1)^m\left(1+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\right). \tag{3}$$

Для четных $n = 2m+2$ верна формула

$$\mathbb{E}P_{n+1} = 2\frac{(n+1)!}{\pi^n}(-1)^m\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!}\right). \tag{4}$$

Ясно, что выражения в скобках справа являются частичными суммами степенных рядов для $1+\cos\pi$ и $\sin\pi$.

Доказательство. Ввиду вращательной инвариантности мы можем поместить начало отсчета O в любую из независимых случайных точек, например, в точку X_{n+1}. Рассмотрим выпуклый многоугольник с вершинами в точках $O, X_1, ..., X_n$. Обозначим угол между касательной в точке O и прямой, проходящей через O и X_i, через $\theta_i, 1 \le i \le n$. Тогда периметр нашего $(n+1)$-угольника дается формулой

$$P_{n+1} = 2\{\sum_{k=1}^{n-1}\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)+\sin\theta_1+\sin\theta_n\}.$$

Известно, что равномерное распределение k точек на окружности соответствует равномерному распределению k вписанных углов, принимающих значения на отрезке $[0,\pi]$.

Таким образом, углы θ_i принимают значения от 0 до π и удовлетворяют неравенству $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$. Их совместное распределение - это распределение порядковых статистик для n независимых и равномерно распределенных точек на отрезке $[0, \pi]$.

Итак, мы можем вычислить математическое ожидание периметра многоугольника с $n+1$ вершинами $O, X_1, \ldots, X_n$ по формуле

$$\mathbb{E}P_{n+1} = 2\frac{n!}{\pi^n}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\theta_n}\ldots\int\limits_0^{\theta_2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)+\sin\theta_1+\sin\theta_n\right)d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}d\theta_n. \tag{5}$$

Можно опираться на аналог этой формулы не с вписанными, а с центральными углами, опирающимися на стороны многоугольника, но в этом случае надо считаться с тем, что центральный угол может оказаться больше π, что приведет к дополнительным трудностям. С вписанными углами этого не происходит.

Преобразуем формулу (5). Начнем с более сложного интеграла

$$S(k) = \int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\theta_{k+1}}\ldots\int\limits_0^{\theta_2}\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)d\theta_1\ldots d\theta_k\ldots d\theta_n,\ 1 \leq k \leq n. \tag{6}$$

Вычислим предварительно по индукции вспомогательную величину

$$I_r(y) = \int\limits_0^{y}\frac{1}{r!}x^r\sin(y-x)dx,\ 0 \leq r \leq n.$$

База индукции состоит в том, что $I_0(y) = 1-\cos(y), I_1(y) = y-\sin(y)$. Интегрируя по частям, получаем рекуррентное соотношение

$$I_r(y) = \frac{1}{r!}y^r - I_{r-2}(y) \quad \text{при} \quad r \geq 2,\ 0 \leq y \leq \pi.$$

С его помощью получаем следующие формулы при любом натуральном m:

$$I_{2m}(y) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{1}{(2m-2j)!}y^{2m-2j} + (-1)^{m+1}\cos y; \tag{7}$$

$$I_{2m+1}(y) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{1}{(2m+1-2j)!}y^{2m+1-2j} + (-1)^{m+1}\sin y. \tag{8}$$

Другой, более утомительный путь получения этих формул - использование соотношения (2.633) из [6].

Вернемся к (6) и выполним интегрирование до переменной θ_k. Тогда получим:

$$S(k) = \int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\theta_{k+2}}I_{k-1}(\theta_{k+1})d\theta_{k+1}\ldots d\theta_n,\ k \geq 1. \tag{9}$$

Введем вспомогательную величину

$$T\left(r\right)=\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\theta_r}...\int\limits_{0}^{\theta_2}\sin\theta_1 d\theta_1...d\theta_{r-1}d\theta_r \text{ при } \quad r\geq 1,$$

полагая $T\left(0\right)=0$. Прямое вычисление дает $T\left(1\right)=2$. При $r\geq 2$ сделаем замену переменных $\theta_r=\pi-s_r$, позволяющую перевести интегрирование синуса в конец. Получаем

$$\begin{aligned}T\left(r\right) &= \int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\theta_r}...\int\limits_{0}^{\theta_2}\sin\theta_1 d\theta_1...d\theta_{r-1}d\theta_r=\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{s_r}^{\pi}...\int\limits_{s_2}^{\pi}\sin s_1 ds_1...ds_{r-1}ds_r\\ &=\int\limits_{0}^{\pi}\sin s_1 ds_1\int\limits_{0}^{s_1}...\int\limits_{0}^{s_{r-1}}ds_r...ds_2=\int_0^{\pi}\frac{s^{r-1}}{(r-1)!}\sin s\ ds=I_{r-1}(\pi).\end{aligned}$$

Поэтому, используя формулы (7) и (8), получаем, что при любом натуральном m

$$T\left(2m+1\right)=I_{2m}(\pi)=\left(-1\right)^m+\sum_{j=0}^{m}\left(-1\right)^j\frac{1}{(2m-2j)!}\pi^{2m-2j}, \tag{10}$$

$$T\left(2m+2\right)=I_{2m+1}(\pi)=\sum_{j=0}^{m}\left(-1\right)^j\frac{1}{(2m+1-2j)!}\pi^{2m+1-2j}. \tag{11}$$

Еще проще вычисляется интеграл

$$\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\theta_n}...\int\limits_{0}^{\theta_2}\sin\theta_n d\theta_1...d\theta_{n-1}d\theta_n=I_{n-1}(\pi)=T(n).$$

Последний интеграл, который нам понадобится при $r\geq 1$, это

$$\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\theta_r}...\int\limits_{0}^{\theta_2}\cos\theta_1 d\theta_1...d\theta_{r-1}d\theta_r=T\left(r-1\right).$$

Теперь мы можем вычислить $S(k)$ при любом $1\leq k\leq n$. Подставляя в формулу (9) выражения для $I_{k-1}(\theta_{k+1})$ из (7) и (8) и интегрируя их почленно с учетом найденных выше формул для $T(r)$, получаем

$$S_k=\sum_{j=0}^{m}\left(-1\right)^j\frac{1}{(n-1-2j)!}\pi^{n-1-2j}+\left(-1\right)^{m+1}T\left(n-k-1\right) \text{ при } k=2m+1,$$

$$S_k=\sum_{j=0}^{m}\left(-1\right)^j\frac{1}{(n-1-2j)!}\pi^{n-1-2j}+\left(-1\right)^{m+1}T\left(n-k\right) \text{ при } k=2m+2.$$

Теперь найдем $\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$. Рассмотрим четный и нечетный случаи. Пусть $n=2p+2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\sum_{j=0}^{p}\left(-1\right)^j\frac{1}{(n-2j-2)!}\pi^{n-2j-1}+\sum_{j=0}^{p-1}2\left(-1\right)^{j+1}T\left(n-2j-2\right)+\left(-1\right)^{p+1}T\left(0\right).$$

Преобразуем вторую сумму:

$$\sum_{j=0}^{p-1} 2\,(-1)^{j+1}\,T\,(n-2j-2) = \sum_{k=1}^{p} 2\,(-1)^{p-k+1}\,T\,(2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} 2\,(-1)^{p-k}\,T\,(2k+2) = 2\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{p-k+j}\,\frac{1}{(2k+1-2j)!}\pi^{2k+1-2j} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r+1)!}\pi^{2r+1} = 2\sum_{r=0}^{p-1}(p-r)\,(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r+1)!}\pi^{2r+1}.$$

Получается, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\,\frac{1}{(n-2j-2)!}\pi^{n-2j-1} + 2\sum_{r=0}^{p-1}(p-r)\,(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r+1)!}\pi^{2r+1}.$$

Пусть теперь $n = 2p+1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\,\frac{1}{(n-2j-2)!}\pi^{n-2j-1} + \sum_{j=0}^{p-1} 2\,(-1)^{j+1}\,T\,(n-2j-2)\,.$$

Преобразуем снова вторую сумму:

$$\sum_{j=0}^{p-1} 2\,(-1)^{j+1}\,T\,(n-2j-2) = \sum_{k=1}^{p} 2\,(-1)^{p-k+1}\,T\,(2k-1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} 2\,(-1)^{p-k}\,T\,(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\left((-1)^k + \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\,\frac{1}{(2k-2j)!}\pi^{2k-2j}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{p-1}\left((-1)^p + \sum_{r=0}^{k}(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r)!}\pi^{2r}\right) = 2p\,(-1)^p + 2\sum_{r=0}^{p-1}(p-r)\,(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r)!}\pi^{2r}.$$

Оказывается, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\,\frac{1}{(n-2j-2)!}\pi^{n-2j-1} + 2p\,(-1)^p + 2\sum_{r=0}^{p-1}(p-r)\,(-1)^{p-r}\,\frac{1}{(2r)!}\pi^{2r}.$$

Возвращаясь к формуле (5) для периметра и собирая воедино все ее составные части, получаем после некоторых преобразований окончательно формулы (3) и (4). Формулы для среднего значения периметра получены. $\square$

Браун также дал численные значения указанных выше средних значений площади (1) и (2) при $n \le 32$. Приведем и мы несколько первых значений среднего периметра.

$\mathbb{E}P_3 = 2\frac{3!}{\pi^2}(\frac{\pi}{1!}) = \frac{12}{\pi} \approx 3.820,$

$\mathbb{E}P_4 = 2\frac{4!}{\pi^3}(-2 + \frac{\pi^2}{2!}) \approx 4.543,$

$\mathbb{E}P_5 = 2\frac{5!}{\pi^4}(-\frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^3}{3!}) \approx 4.992,$

$\mathbb{E}P_6 = 2\frac{6!}{\pi^5}(2 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!}) \approx 5.289,$

$\mathbb{E}P_7 = 2\frac{7!}{\pi^6}(\frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!}) \approx 5.494,$

$\mathbb{E}P_8 = 2\frac{8!}{\pi^7}(-2 + \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^6}{6!}) \approx 5.644$ и т.д.

3 Сходимость среднего периметра к пределу

Предельное поведение разности математического ожидания периметра вписанного многоугольника и длины окружности похоже на предельное поведение разности математического ожидания площади вписанного многоугольника и площади окружности. Длина дуги единичной окружности, задаваемой центральным углом θ, составляет θ, в то время как длина соответствующей хорды составляет $2\sin\frac{\theta}{2}$, так что их разность равна $\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}$. Учитывая разложение синуса в ряд, можно представить эту разность в виде

$$\theta - 2\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta^3}{24} - \frac{\theta^5}{1920} + ...,$$

что асимптотически эквивалентно $\theta^3/24$, когда $n \to \infty$, а наибольший угол стремится к 0.

Отсюда следует, что разность указанных длин пропорциональна кубу центрального угла, опирающегося на данную дугу, причем это верно как для правильного, так и для случайного многоугольника. Таким образом, разность периметров окружности и вписанного случайного n-угольника приближается суммой кубов углов между соседними вершинами с числовым коэффициентом, равным 1/24. Поскольку в дальнейшем исследуется отношение разности периметров, этот коэффициент, возникающий как в числителе, так и в знаменателе дроби, можно не учитывать.

Изменим теперь нормировку и рассмотрим углы как выборочные промежутки (спейсинги) на отрезке $[0, 1]$. Сумма кубов углов, соответствующая правильному n-угольнику с периметром Q_n, составляет $n\left(\frac{1}{n}\right)^3 = n^{-2}$. Иными словами, $2\pi - Q_n \sim n^{-2}$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, среднее значение суммы кубов элементов случайного разбиения единичного отрезка на n частей найдено Брауном в [1]. Там доказано, что это значение равно $\frac{6}{(n+1)(n+2)}$. Следовательно, $2\pi - \mathbb{E}P_n \sim 6n^{-2}$, при $n \to \infty$.

Отсюда вытекает окончательно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi - \mathbb{E}P_n}{2\pi - Q_n} = 6. \tag{12}$$

Предельное соотношение (12) полностью соответствует аналогичному соотношению для случайных площадей, установленному в [1].

4 Среднее значение суммы квадратов сторон случайного вписанного треугольника

.

Указанным выше путем можно решать и похожие задачи. Известно, что среди всех выпуклых многоугольников, вписанных в данную окружность, максимальная сумма квадратов длин сторон у треугольника [9, задача 57556]. Дело в том, что благодаря теореме косинусов стороны многоугольника, например, BC и CD, заключающие тупой угол, можно „спрямить", заменив их стороной BD, причем $|BD|^2 > |BC|^2 + |CD|^2$, и продолжать этот процесс, пока мы не придем к треугольнику. Среди всех треугольников указанный максимум достигается на правильном треугольнике, [7, задача 2.44] и [8, задача 18], и равен 9.

Но каково среднее значение μ^2 суммы квадратов сторон случайного вписанного треугольника? Рассуждая как в начале этой работы, мы приходим к формуле

$$\mu^2 = \frac{8}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\theta_2} \{\sin^2(\theta_2 - \theta_1) + \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2\}\ d\theta_1 d\theta_2 = 6.$$

Интегрирования выполняются легко ввиду простых формул

$$\int_0^{\pi} \int_0^{y} \sin^2(y-x)\ dxdy = \int_0^{\pi} \int_0^{y} \sin^2 x\ dxdy = \int_0^{\pi} \int_0^{y} \sin^2 y\ dxdy = \frac{1}{4}\pi^2.$$

В результате среднее значение суммы квадратов длин сторон случайного треугольника составляет $2/3$ от ее максимального значения. Для периметра, как мы видели, это отношение равно $4/\pi\sqrt{3} \approx 0.735$.

5 Заключение

В данной работе было найдено точное выражение для среднего значения периметра выпуклого многоугольника, вершины которого равномерно распределены по окружности. Это представление ценно в силу простоты вычисления. В дополнение к этому было вычислено среднее значение суммы квадратов сторон случайных вписанных треугольников с равномерным распределением вершин. Было также установлено, что математическое ожидание разности периметров окружности и случайного многоугольника асимптотически в 6 раз больше разности периметров окружности и правильного многоугольника, что полностью соответствует известному ранее соотношению для площадей.

Список литературы

[1] *Brown K.* Expected Area of Random Polygon In a Circle // see http://www.mathpages.com/home/kmath516.htm.

[2] *Yaglom I. M., Boltyanskii V. G.* Convex figures. Holt, Rinehart and Winston: 1961.

[3] *Lao W., Mayer M.* U-max-statistics // Journ. Multiv. Anal. 2008. Vol. 99. P. 2039-—2052.

[4] *Mayer M.* Random Diameters and Other U-max-Statistics// Ph.D. Thesis, Bern University, 2008.

[5] *Koroleva E.V., Nikitin Ya. Yu.*. U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons // Journ. Multiv. Anal. 2014. Vol. 127. N 5. P.98–111.

[6] *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of integrals, series and products. Academic Press: 1980.

[7] *Alekseev V. M., Galeev E. M., Tikhomirov V. M.* Collection of problems on optimization. Theory. Examples. Problems.(In Russian) Moscow: Nauka, 1984.

[8] *Ioffe A., Tikhomirov V.* Extremal Problems. Amsterdam: North Holland, 1979.

[9] *Prasolov V.* Problems in planimetry. (In Russian) Moscow: MTsNMO, 2001.

Сведения об авторах:

Никитин Яков Юрьевич — доктор физико-математических наук; y.nikitin@spbu.ru

Полевая Татьяна Андреевна — аспирант; tanusha2406@mail.ru

ON THE AVERAGE PERIMETER OF THE INSCRIBED RANDOM POLYGON

Ya. Yu. Nikitin, T. A. Polevaya

Suppose we put on the unit circumference n independent uniformly distributed random points and build a convex random polygon with the vertices in these points. What are the average area and the average perimeter of this polygon? The average area was calculated by K. Braun some years ago. We calculate the average perimeter and obtain quite similar formulae. In the same time we discuss the rate of convergence of this value to the limit. We evaluate also the average value of the sum of squares for the sides of the inscribed triangle. Refs. 9.

Key words: random polygon, perimeter, convexity, uniform distribution.