Итоговый отчет по гранту No (17-51-04004 Бел\_мол\_а)

«Групповые кольца и графы групп»

Руководитель: Волков Юрий Владимирович

Реферат: Был решен ряд фундаментальных проблем современной алгебры, связанных с конечными разрешимыми группами, групповыми алгебрами и неассоциативными алгебрами. А именно, дан ответ на вопрос, для каких простых конечных групп их групповые кольца над заданным полем являются полуцепными, была доказана справедливость гипотезы Томпсона для всех исключительных групп лиева типа, описаны алгебры второго уровня, описаны все 2-мерные алгебры, были описаны центральные расширения 2-мерных алгебр, были описаны все неассоциативные алгебры второго уровня.

Введение: Важным арифметическим параметром конечной группы G является множество N(G) размеров классов сопряженных элементов. В 80-х гг. прошлого столетия Дж. Томпсоном была сформулирована следующая гипотеза (см. Коуровская тетрадь, вопрос 12.38).

Гипотеза Томпсона. Если L - конечная неабелева простая группа, G - конечная группа с тривиальным центром и N(G)=N(L), то G изоморфна L.

Графом простых чисел группы G называется граф множеством вершин которого является множество простых делителей порядка группы G и вершины p и q соединены ребром если в группе G найдется элемент порядка pq. Вилсон и Кондратьев получили классификацию всех конечных простых групп с несвязным графом простых чисел. К настоящему моменту справедливость гипотезы Томпсона установлена для многих конечных неабелевых простых групп. Так, например, Г. Чен (1996г.) установил справедливость гипотезы Томпсона для всех конечных простых групп, граф простых чисел которых имеет более двух компонент связности. Позже Г.Чен (1999г.) показал справедливость гипотезы для исключительных групп лиева типа G(2,q) и G’(2,2).

С использованием приведенных результатов нами была доказана справедливость гипотезы для всех исключительных групп лиева типа.

Пусть F - поле, G - конечная группа. Полученные результаты посвящены нахождению всех таких пар (F,G), что групповое кольцо FG полуцепное, т.е. Такое, что каждый неразложимый проективный правый FG-модуль имеет единственный композиционный ряд. Несмотря на множество важных результатов, полученных в этом направлении, полное описание таких пар до сих пор не найдено. Заметим во-первых, что если характеристика p поля F не делит порядок группы G, то по теореме Машке FG есть полупростое артиново кольцо, и следовательно полуцепное. Таким образом, можно считать, что p делит порядок группы G. В рамках проекта была завершена классификация конечных простых групп, чьи групповые кольца над полем являются полупростыми.

Центральные расширения алгебр являются одним из ключевых методов для классификации нильпотентных алгебр малых размерностей в данном многообразии. Так, каждая нильпотентная алгебра является центральным расширением некоторой нильпотентной алгебры меньшей размерности, а с другой стороны все центральные расширения нильпотентных алгебр также являются нильпотентными алгебрами из того же многоообразия алгебр. С другой стороны, центральные расширения некоторых известных алгебр дают новые примеры полезных алгебр. Так, алгебра Вирасора является центральным расширением алгебры Витта; а алгебра Гейзенберга является центральным расширением коммутативной алгебры Ли. В то же время, модернизированный метод центральных расширений активно применяется в работах Фиаловски и Пенкава для классификации непростых алгебр малых размерностей в произвольном многообразии. В рамках проекта, была дана классификация всех алгебр с "большим аннулятором". В частности, мы имеем существенный вклад в классификацию неассоциативных алгебр малых размерностей в любом многообразии.

Проблема изучения алгебр малых уровней была инициирована в работах В. Горбацевича, где он классифицировал алгебры первого уровня и антикоммутативные алгебры 2 и 3 уровней. Основная идея лежит в том, что эти алгебры имеют максимально близкую к тривиальной таблицу умножений. Иными словами алгебра является алгеброй первого уровня, если в алгебраическом многообразии всех алгебр ее орбита содержит только тривиальную алгебру (и саму исходную алгебру). В дальнейшем, классификация Горбацевича была дополнена алгебрами из работы Омирова и Худойбердыева. Также, Худойбердыев классифицировал лиевы, йордановы и ассоциативные алгебры 2 уровня. Участниками проекта И. Кайгородовым и Ю. Волковым было получено полное описание всех неассоциативных алгебр второго уровня (без ограничения на рассматриваемое многообразие алгебр).

Основная часть отчета о НИР

2017 г.:

(1) была доказана справедливость гипотезы Томпсона для всех исключительных групп лиева типа. В частности, были обобщены результаты Г. Чена, который показал справедливость гипотезы для исключительных групп лиева типа G(2,q) и G’(2,2).

(2) дан ответ на вопрос, для каких простых конечных групп их групповые кольца над заданным полем являются полуцепными.

2018 г.:

(1) были описаны все неассоциативные 2-мерные алгебры и их вырождения, а также описана геометрическая структура многообразия всех 2-мерных алгебр.

(2) были описаны центральные расширения 2-мерных алгебр, таким образом получена классификация всех n-мерных неассоциативных алгебр с аннулятором размерности n-2. В частности, ,был получен существенный вклад в классификацию неассоциативных алгебр малых размерностей в любом многообразии.

(3) были описаны все неассоциативные алгебры второго уровня. Таким образом, были обобщены работы Горбацевича, где он классифицировал алгебры первого уровня и антикоммутативные алгебры 2 и 3 уровней и Худойбердыева, который классифицировал лиевы, йордановы и ассоциативные алгебры 2 уровня.

Заключение

В результате работ по проекту все поставленные задачи были выполнены, а также были получены новые интересные результаты в близких областях к тематике проекта. Полученные результаты представлены и опубликованы в ведущих мировых математических журналах