Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в цилиндре с третьим краевым условием

И. В. Качковский, Н. Д. Филонов *

Аннотация

Доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера $H = -\Delta + V$ в гладком цилиндре с третьим краевым условием $\partial_\nu u = \sigma u$ на границе в предположении, что коэффициенты V и σ периодичны по продольным переменным.
[1]

Введение

Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с краем ∂M,

$$\Xi = M \times \mathbb{R}^m, \quad k := \dim M, \quad d := \dim \Xi = k + m, \quad m \geqslant 1.$$

Нас интересует природа спектра оператора Шредингера $H = -\Delta + V$ в цилиндре Ξ. На границе $\partial\Xi = \partial M \times \mathbb{R}^m$ ставится третье краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Xi} = \sigma u|_{\partial\Xi}\,. \tag{0.1}$$

Функции V и σ предполагаются периодичными по "продольным" переменным. Мы покажем, что при некоторых условиях на V и σ спектр оператора H абсолютно непрерывен, см. ниже теорему 1.1.

Точки Ξ будем обозначать (x, y), $x \in M$, $y \in \mathbb{R}^m$. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^m$,

$$\Gamma = \left\{ l = \sum_{j=1}^{m} l_j b_j, \quad l_j \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{0.2}$$

где $\{b_j\}_{j=1}^m$ — некоторый базис в $\mathbb{R}^m$. Мы будем предполагать, что

$$V(x, y + l) = V(x, y), \quad x \in M,\ y \in \mathbb{R}^m,\ l \in \Gamma, \tag{0.3}$$

$$\sigma(x, y + l) = \sigma(x, y), \quad x \in \partial M,\ y \in \mathbb{R}^m,\ l \in \Gamma. \tag{0.4}$$

*Исследования первого автора поддержаны грантом NSF DMS-1846114. Исследования второго автора поддержаны грантом Российского Научного Фонда № 17-11-01069.

[1] Ключевые слова: оператор Шредингера в цилиндре, третье краевое условие, абсолютно непрерывный спектр, оценки спектральных проекторов.

Пусть

$$\Omega = \left\{ y = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j, \quad y_j \in [0,1) \right\} \tag{0.5}$$

— элементарная ячейка решетки периодов Γ. В силу периодичности функцию V достаточно задавать на множестве $M \times \Omega$, а функцию σ — на множестве $\partial M \times \Omega$.

Приведем основные известные результаты об абсолютной непрерывности оператора H. Условия на V и σ обычно формулируются в терминах принадлежности пространствам $L_p(M \times \Omega)$ и $L_p(\partial M \times \Omega)$. Рассматривают также и более широкие классы, например, пространства Лоренца $L^0_{p,\infty}$, но мы для простоты будем формулировать все результаты в терминах L_p. Случай $k = 0$, отвечающий оператору во всем пространстве (M и σ отсутствуют), хорошо изучен. В [14] доказана абсолютная непрерывность оператора H при "предельном" условии (см. также [3])

$$V \in L_p(\Omega), \qquad p > 1 \ \text{ при } \ d = 2, \quad p = d/2 \ \text{ при } \ d \geqslant 3.$$

В случае $k = 1$ (M — отрезок, Ξ — плоско-параллельный слой) в [12] была доказана абсолютная непрерывность H при условиях

$$V \in L_p(M \times \Omega), \qquad p > 1 \ \text{ при } \ d = 2, \quad p = 3/2 \ \text{ при } \ d = 3, \quad p = d - 2 \ \text{ при } \ d \geqslant 4,$$

$$\sigma \in L_q(\partial M \times \Omega), \qquad q > 1 \ \text{ при } \ d = 2, \quad q = 2 \ \text{ при } \ d = 3, \quad q = 2d - 2 \ \text{ при } \ d \geqslant 4.$$

Эти условия были ослаблены в [5] до почти предельных

$$V \in L_p(M \times \Omega), \qquad p > 1 \ \text{ при } \ d = 2, \quad p = d/2 \ \text{ при } \ d \geqslant 3, \tag{0.6}$$

$$\sigma \in L_q(\partial M \times \Omega), \qquad q > d - 1. \tag{0.7}$$

Перейдем к случаю $k \geqslant 2$. Для оператора с краевым условием Неймана (то есть $\sigma \equiv 0$) абсолютная непрерывность была установлена в [9] при $V \in L_\infty(M \times \Omega)$. В работе авторов [8] это условие было ослаблено до

$$V \in L_p(M \times \Omega), \qquad p > d/2 \ \text{ при } \ d = 2, 3, 4, \quad p > d - 2 \ \text{ при } \ d \geqslant 5. \tag{0.8}$$

В предположении, что коэффициент σ не зависит от продольных переменных,

$$\sigma(x, y) = \sigma(x),$$

авторы установили [7] абсолютную непрерывность при

$$\sigma \in L_q(\partial M), \qquad q > 1 \ \text{ при } \ k = 2, \quad q = k - 1 \ \text{ при } \ k \geqslant 3.$$

Случай нетривиальной периодической зависимости коэффициента σ от y долго не поддавался изучению. Первый автор установил абсолютную непрерывность оператора в двух частных случаях:

- $M = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$ — прямоугольный параллелепипед, V удовлетворяет (0.6), σ удовлетворяет (0.7);
- $M = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < R\}$ — k-мерный шар, V удовлетворяет (0.8), $d \geqslant 3$ и $\sigma \in L_{4d-8}(\partial M \times \Omega)$,

см. [5] и [6] соответственно.

В настоящей работе мы докажем абсолютную непрерывность оператора H с коэффициентом σ общего вида, $\sigma = \sigma(x, y)$, в случае, когда M — произвольное гладкое компактное многообразие с краем. Как и во всех перечисленных работах мы проводим доказательство по схеме Томаса [13]. Для получения оценок резольвенты оператора $H(\xi)$ (см. ниже теорему 1.2) мы применяем результаты [11] и [2] об оценках спектральных проекторов оператора Лапласа. Идея применения таких оценок взята из работы [14]. Именно оценки [2] позволили обработать третье краевое условие с нетривиальным σ.

Замечание 0.1. Для оператора Шредингера с краевым условием Дирихле $\sigma|_{\partial\Xi} = 0$ ситуация только проще. Его спектр абсолютно непрерывен при условии (0.8) для цилиндра общего вида [8], и при условии (0.6) для прямоугольного цилиндра [5].

Авторы выражают благодарность Р. Штеренбергу за ценные замечания.

1 Формулировка результата

Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с краем, $\dim M = k$, $\Xi = M \times \mathbb{R}^m$. Поскольку случай $k = 1$ уже изучен, всюду в дальнейшем предполагаем

$$d = k + m \geqslant 3.$$

Пусть Γ — решетка (0.2) в пространстве $\mathbb{R}^m$, Ω — ячейка (0.5). Пусть $V(x, y)$ и $\sigma(x, y)$ — вещественные функции, удовлетворяющие (0.3) и (0.4). Предположим, что

$$V \in L_{d/2}(M \times \Omega), \qquad \sigma \in L_{d-1}(\partial M \times \Omega). \tag{1.1}$$

В пространстве $L_2(\Xi)$ рассмотрим квадратичную форму

$$h[u, u] = \int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u(x, y)|^2 + V(x, y)|u(x, y)|^2\right) dx\, dy$$
$$+ \int\limits_{\partial\Xi} \sigma(x, y)|u(x, y)|^2 dS(x, y), \qquad \operatorname{Dom} h = H^1(\Xi).$$

Здесь dS — поверхностная мера на $\partial\Xi$, $H^1 \equiv W_2^1$ — пространство Соболева. Хорошо известно, что при условиях (1.1) квадратичная форма h замкнута и полуограничена снизу. Ей отвечает самосопряженный в $L_2(\Xi)$ полуограниченный оператор H, который мы будем называть оператором Шредингера в цилиндре Ξ с третьим краевым условием (0.1).

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть M, Ξ, Γ, Ω, V, σ и H определены как выше. Предположим, что выполнены условия* (0.8) *и*

$$\sigma \in L_q(\partial M \times \Omega), \qquad q > 5/2 \quad \text{при} \quad d = 3, \quad q > 2d - 4 \quad \text{при} \quad d \geqslant 4. \tag{1.2}$$

Тогда спектр оператора H абсолютно непрерывен.

Нам будет удобна интерпретация ячейки Ω как множества точек m-мерного тора $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\Gamma$. Введем дополнительный параметр $\xi \in \mathbb{C}^m$ и рассмотрим квадратичные формы

$$h(\xi)[v,v] = \int\limits_{M\times\Omega} (|\nabla_x v|^2 + \langle(\nabla_y + i\xi)v, (\nabla_y + i\bar{\xi})v\rangle + V(x,y)|v|^2)\,dx\,dy,$$

$$+ \int\limits_{\partial M\times\Omega} \sigma(x,y)|v|^2 dS(x,y), \qquad \operatorname{Dom} h(\xi) = H^1(M\times\mathbb{T}^m).$$

Эти формы секториальны, см. [4]. Им отвечает аналитическое самосопряженное семейство операторов $H(\xi)$. Вложение $H^1(M\times\mathbb{T}^m) \subset L_2(M\times\Omega)$ компактно, поэтому спектры операторов $H(\xi)$ дискретны. Согласно критерию Томаса (см. [13, 10, 1]) достаточно показать, что у $H(\xi)$ нет постоянных (по ξ) собственных значений. Таким образом, утверждение теоремы 1.1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть b_1 — первый вектор базиса решетки Γ. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \perp b_1$, существует такое число $\tau_0 > 0$, что при $\tau > \tau_0$ оператор*

$$H(\tau) := H((\pi + i\tau)b_1 + \xi) - \lambda I$$

обратим и

$$\|H(\tau)^{-1}\| \leqslant C\tau^{-1}.$$

Поскольку условия на коэффициенты оператора H инвариантны относительно растяжений, в дальнейшем можно считать, что $|b_1| = 1$.

2 Вспомогательные оценки

Следующая лемма доказана в [5].

Лемма 2.1. *Пусть $0 < \delta < 1/2$, $b \geqslant 1$, и пусть $|m_\mu| \leqslant b$ для любого $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu + m_\mu)^2 - \tau^2| + \tau} \leqslant C\tau^{-\delta}$$

при $\tau > 1$.

Пусть

$$H_0(\tau) = H(\tau)|_{V=0,\,\sigma=0}\,.$$

Иначе говоря, $H_0(\tau)$ — оператор в $L_2(M\times\Omega)$, отвечающий квадратичной форме

$$h_0(\xi)[v,v] = \int\limits_{M\times\Omega} (|\nabla_x v|^2 + \langle(\nabla_y + i((\pi + i\tau)b_1 + \xi))v, (\nabla_y + i((\pi - i\tau)b_1 + \xi))v\rangle)\,dx\,dy,$$

$$\operatorname{Dom} h_0(\xi) = H^1(M\times\mathbb{T}^m).$$

Обозначим через $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в M с краевыми условиями Неймана. Тогда собственные значения и собственные функции оператора $H_0(\tau)$ имеют вид

$$h_{j,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi|^2 + \lambda_j - \tau^2 + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle,$$

$$\varphi_{j,n}(x,y)=\varphi_j(x)e^{i\langle n,y\rangle}, \qquad j\in\mathbb{N}, \quad n\in\widetilde{\Gamma}, \tag{2.1}$$
где $\widetilde{\Gamma}\subset\mathbb{R}^m$ — двойственная решетка к Γ,
$$\tilde{\Gamma}=\left\{n=\sum_{j=1}^m n_j\tilde{b}_j,\ n_j\in\mathbb{Z}\right\}, \quad \langle b_k,\tilde{b}_j\rangle=2\pi\delta_{kj}.$$
Поскольку $\langle n,b_1\rangle\in 2\pi\mathbb{Z}$,
$$|h_{j,n}(\tau)|\geqslant|\operatorname{Im}h_{j,n}(\tau)|=2\tau|\langle n,b_1\rangle+\pi|\geqslant 2\pi\tau, \qquad \tau>0. \tag{2.2}$$
Нам также понадобится оператор $|H_0(\tau)|^{-1/2}$. В базисе (2.1) он действует как умножение на $|h_{j,n}(\tau)|^{-1/2}$.

Главную роль в дальнейшем играют спектральные проекторы оператора Лапласа на многообразии $M\times\mathbb{T}^m$ с краевыми условиями Неймана. Введем обозначение
$$E_\mu=E_{(-\Delta)}[(\mu-1)^2,\mu^2)$$
— спектральный проектор на подпространство, отвечающее отрезку $[(\mu-1)^2,\mu^2)$. Отметим, что операторы E_μ и $H_0(\tau)$ коммутируют.

Лемма 2.2. *Пусть* $0<\delta<1/2$, $\tau>1$. *Выполняется оценка*
$$\sum_{\mu=1}^\infty \mu^{1-2\delta}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|^2\leqslant C\tau^{-\delta}.$$
Доказательство. Положим $b=|\pi b_1+\xi|$. В силу (2.2)
$$\sum_{\mu=1}^{[b]+1} \mu^{1-2\delta}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|^2\leqslant C\tau^{-1}.$$
Оценим сумму по $\mu>[b]+1$. Собственные значения оператора Лапласа на $M\times\mathbb{T}^m$ имеют вид
$$\lambda_j+n^2, \qquad j\in\mathbb{N}, \quad n\in\widetilde{\Gamma}.$$
Область значений проектора E_μ отвечает таким парам $(j;n)$, что
$$(\mu-1)^2\leqslant\lambda_j+n^2<\mu^2.$$
Отсюда
$$|n+\pi b_1+\xi|^2+\lambda_j\in[(\mu-b-1)^2,(\mu+b)^2).$$
Следовательно, при $\mu\geqslant[b]+2$
$$\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|^2=\max_{\lambda_j+n^2\in[(\mu-1)^2,\mu^2)}|h_{j,n}(\tau)|^{-1}$$
$$\leqslant\max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+\lambda_j\in[(\mu-b-1)^2,(\mu+b)^2)}\frac{\sqrt{2}}{\left||n+\pi b_1+\xi|^2+\lambda_j-\tau^2\right|+\tau}.$$
Следовательно,
$$\sum_{\mu=[b]+2}^\infty \mu^{1-2\delta}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|^2$$
$$\leqslant\sum_{\mu=[b]+2}^\infty\max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+\lambda_j\in[(\mu-b-1)^2,(\mu+b)^2)}\frac{\sqrt{2}\ \mu^{1-2\delta}}{\left||n+\pi b_1+\xi|^2+\lambda_j-\tau^2\right|+\tau}\leqslant C\tau^{-\delta}$$
по лемме 2.1. ∎

3 Доказательство теоремы 1.2

Ключевым моментом доказательства являются оценки спектральных проекторов оператора Лапласа.

В [11] доказана

Теорема 3.1. *Пусть N — гладкое компактное риманово многообразие с краем,* $\dim N \geqslant 3$. *Пусть $\mu \geqslant 1$, $E_\mu = E_{(-\Delta)}[(\mu-1)^2, \mu^2)$ — спектральный проектор оператора Лапласа на N с условием Неймана на подпространство, отвечающее отрезку $[(\mu-1)^2, \mu^2)$. При условиях*

$$5 \leqslant r \leqslant \infty \quad \text{при } d = 3, \qquad 4 \leqslant r \leqslant \infty \quad \text{при } d \geqslant 4,$$

выполняется оценка

$$\|E_\mu f\|_{L_r(N)} \leqslant C\mu^{d/2-d/r-1/2}\|f\|_{L_2(N)}, \qquad \forall f \in L_2(N).$$

При условиях

$$2 \leqslant r \leqslant 4 \quad \text{при } d \geqslant 4$$

выполняется оценка

$$\|E_\mu f\|_{L_r(N)} \leqslant C\mu^{d/2-d/r+2/r-1}\|f\|_{L_2(N)}, \qquad \forall f \in L_2(N).$$

Замечание 3.2. В работе [11] при $d \geqslant 4$ оценка спектрального проектора доказана только при $r \geqslant 4$. Оценка при $2 \leqslant r \leqslant 4$ получается интерполяцией оценки $\|E_\mu f\|_{L_4} \leqslant C\mu^{d/4-1/2}\|f\|_{L_2}$ при $r = 4$ и тривиальной оценки $\|E_\mu f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_2}$ при $r = 2$.

Замечание 3.3. Такие же оценки верны для спектральных проекторов оператора Лапласа с краевым условием Дирихле.

В [2] доказана

Теорема 3.4. *Пусть N — гладкое компактное риманово многообразие с краем,* $\dim N \geqslant 3$. *Пусть $\mu \geqslant 1$, $E_\mu = E_{(-\Delta)}[(\mu-1)^2, \mu^2)$ — спектральный проектор оператора Лапласа на N с условием Неймана на подпространство, отвечающее отрезку $[(\mu-1)^2, \mu^2)$. При условиях*

$$3 \leqslant s \leqslant \infty, \quad d = 3,$$

выполняется оценка

$$\|E_\mu f\|_{L_s(\partial N)} \leqslant C\mu^{1-5/(3s)}\|f\|_{L_2(N)}, \qquad \forall f \in L_2(N).$$

При условиях

$$2 \leqslant s \leqslant \frac{2d}{d-1}, \quad d \geqslant 4,$$

выполняется оценка

$$\|E_\mu f\|_{L_s(\partial N)} \leqslant C\mu^{(d-1)/3-(2d-4)/(3s)}\|f\|_{L_2(N)}, \qquad \forall f \in L_2(N).$$

Теперь мы можем получить нужные оценки для оператора $|H_0(\tau)|^{-1/2}$.

Лемма 3.5. *Пусть*

$$1 \leqslant r < 6 \quad \textit{при } d = 3, \qquad 1 \leqslant r < \frac{2d-4}{d-3} \quad \textit{при } d \geqslant 4.$$

Тогда существует $\delta > 0$, *такое что*

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|^2_{L_r(M\times\Omega)} \leqslant C\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)} \quad \forall\ u \in L_2(M\times\Omega).$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 при $N = M \times \mathbb{T}^m$ вытекает, что при таких условиях на r

$$\|E_\mu f\|_{L_r(M\times\Omega)} \leqslant C\mu^{1/2-\delta}\|f\|_{L_2(M\times\Omega)}$$

при некотором $\delta > 0$. Далее,

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|_{L_r(M\times\Omega)} \leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|_{L_r(M\times\Omega)}$$

$$\leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|_{L_2(M\times\Omega)} \leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\big\|\cdot\|E_\mu u\|_{L_2(M\times\Omega)},$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|H_0(\tau)|^{-1/2}$ коммутирует с $-\Delta$. Применяя неравенство Коши и лемму 2.2, получим

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|^2_{L_r(M\times\Omega)} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1-2\delta}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\big\|^2 \leqslant C\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3.6. *Пусть*

$$1 \leqslant s < \frac{10}{3} \quad \textit{при } d = 3, \qquad 1 \leqslant s < \frac{4d-8}{2d-5} \quad \textit{при } d \geqslant 4.$$

Тогда существует $\delta > 0$, *такое что*

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|^2_{L_s(\partial M\times\Omega)} \leqslant C\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)} \quad \forall\ u \in L_2(M\times\Omega).$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.5. Из теоремы 3.4 при $N = M\times\mathbb{T}^m$ вытекает, что при таких условиях на s

$$\|E_\mu f\|_{L_s(\partial M\times\Omega)} \leqslant C\mu^{1/2-\delta}\|f\|_{L_2(M\times\Omega)}$$

при некотором $\delta > 0$. Следовательно, в силу леммы 2.2

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|^2_{L_s(\partial M\times\Omega)} \leqslant C\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}u\big\|_{L_2(M\times\Omega)}\right)^2$$

$$\leqslant C\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1-2\delta}\big\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\big\|^2 \leqslant C\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(M\times\Omega)}. \qquad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 1.2. Требования на потенциал V инвариантны относительно прибавления к нему константы. Это позволяет, не умаляя общности, считать $\lambda = 0$. Удобно доказывать утверждение в следующем виде: для любого $u \in \mathrm{Dom}(H(\tau))$, $\|u\|_{L_2(M\times\Omega)} = 1$, существует такое $v \in \mathrm{Dom}(H(\tau))$, $\|v\|_{L_2(M\times\Omega)} = 1$, что

$$|(H(\tau)u, v)| \geqslant C\tau, \quad \tau > \tau_0.$$

Пусть $H_0(\tau) = \Phi_0(\tau)|H_0(\tau)|$ — полярное разложение оператора $H_0(\tau)$. В базисе (2.1) оператор $\Phi_0(\tau)$ является оператором умножения на $h_{j,n}(\tau)|h_{j,n}(\tau)|^{-1}$. Положим

$$v = \Phi_0(\tau)u.$$

Тогда

$$(H_0(\tau)u, v) = (|H_0(\tau)|u, u) \geqslant 2\pi\tau$$

в силу (2.2), и

$$(H_0(\tau)u, v) = \||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(M\times\Omega)} = \||H_0(\tau)|^{1/2}v\|^2_{L_2(M\times\Omega)}.$$

Далее,

$$|(Vu, v)| \leqslant \|V\|_{L_p(M\times\Omega)}\|u\|_{L_r(M\times\Omega)}\|v\|_{L_r(M\times\Omega)},$$

где $r = \frac{2p}{p-1}$ удовлетворяет условиям леммы 3.5 в силу (0.8). Следовательно,

$$\begin{aligned}|(Vu, v)| &\leqslant C\tau^{-\delta}\|V\|_{L_p(M\times\Omega)}\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|_{L_2(M\times\Omega)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v\|_{L_2(M\times\Omega)} \\ &= C\tau^{-\delta}\|V\|_{L_p(M\times\Omega)}(H_0(\tau)u, v).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left|\int_{\partial M\times\Omega} \sigma\, u\,\overline{v}\, dS\right| \leqslant \|\sigma\|_{L_q(\partial M\times\Omega)}\|u\|_{L_s(\partial M\times\Omega)}\|v\|_{L_s(\partial M\times\Omega)},$$

где $s = \frac{2q}{q-1}$ удовлетворяет условиям леммы 3.6 в силу (1.2). Следовательно,

$$\left|\int_{\partial M\times\Omega} \sigma\, u\,\overline{v}\, dS\right| \leqslant C\tau^{-\delta}\|\sigma\|_{L_q(\partial M\times\Omega)}(H_0(\tau)u, v).$$

Объединяя оценки, получим

$$|(H(\tau)u, v)| \geqslant (H_0(\tau)u, v)(1 - C(V, \sigma)\tau^{-\delta}) \geqslant \frac{1}{2}(H_0(\tau)u, v) \geqslant \pi\tau$$

при достаточно больших τ. ∎

Department of Mathematics, Michigan State University, Wells Hall, 619 Red Cedar Road, East Lansing, MI, 48824, United States of America

С.-Петербургское отделение Математического института им. Стеклова РАН, Фонтанка 27, С.-Петербург, 191023, Россия;

С.-Петербургский Государственный Университет, Университетская наб. 7/9, С.-Петербург, 199034, Россия

Список литературы

[1] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и анализ, **11** (1999), вып. 2, 1–40.

[2] M. D. Blair, *L^q bounds on restrictions of spectral clusters to submanifolds for low regularity metrics*, Analysis and PDE, vol. 6, No 6 (2013), 1263–1288.

[3] L. I. Danilov, *On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 275204.

[4] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М, Мир, 1972.

[5] И. Качковский, *Отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом в прямоугольном цилиндре*, Функц. анализ и его прил., 47 (2013), вып. 2, 27–37.

[6] И. В. Качковский, *Отсутствие собственных значений в спектре некоторых операторов Шредингера с периодическими коэффициентами*, кандидатская диссертация, ПОМИ РАН, 2013.

[7] И. В. Качковский, Н. Д. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в многомерном цилиндре*, Алгебра и анализ, **21** (2009), вып. 1, 133–152.

[8] И. В. Качковский, Н. Д. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в слое и в гладком цилиндре*, Зап. науч. сем. ПОМИ 385 (2010), 69–82.

[9] P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations*, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[10] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4, М, Мир, 1982.

[11] H. F. Smith, C. D. Sogge, *On the L_p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary*, Acta Mathematica **198** (2007) no. 1, 107–153.

[12] T. A. Suslina, *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrödinger operator in a layer*, Russian J. Math. Phys. **8** (2001), no. 4, 463–486.

[13] L. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal*, Commun. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.

[14] Z. Shen, *On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators*, Intern. Math. Res. Notes (2001), no. 1, 1–31.